

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



DUALITA V KÓNICKOM PROGRAMOVANÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DUALITA V KÓNICKOM PROGRAMOVANÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jakub Hrdina
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Dualita v kónickom programovaní
Duality in conic programming

Anotácia: Kónické programovanie možno chápať ako oblasť konvexnej optimalizácie v širšom zmysle, v ktorej sa vlastnosti úlohy skúmajú cez štruktúru konvexného kužeľa, pomocou ktorého je definovaná. Duálne vlastnosti kónických úloh úzko súvisia so špeciálnymi vlastnosťami príslušného konvexného kužeľa (teda s tým, či je kužeľ polyedrický, uzavretý, špicatý, či má neprázdne vnútro, atď.) Cieľom práce je skúmanie duálnych vlastností v širšom kontexte, ako aj analýza duálnych vlastností špecifických podtried kónického programovania, ako napr. semidefinitné, či kopozitívne programovanie.

Vedúci: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
Dátum zadania: 07.01.2019

Dátum schválenia: 08.01.2019

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Podakovanie Touto cestou sa chcem podakovať svojej vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Márii Trnovskej, PhD. za ochotu, pomoc, poskytnutú literatúru, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu.

Abstrakt

HRDINA, Jakub: Dualita v kónickom programovaní [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD., Bratislava, 2020, 94 s.

Táto diplomová práca sa zaoberá teóriou duality v kónickom programovaní. Cieľom práce je skúmanie duálnych vlastností úloh kónického programovania, špeciálne silnú dualitu. Práca sa ďalej sústreďí na skúmanie charakterizácií relatívneho vnútra konvexných kužeľov, na vlastnosti Minkowského súčtu vektorového podpriestoru a kužela a na vety o alternatívach. Práca sa tiež venuje skúmaniu teórie duality v klasických úlohách konvexného programovania v kontexte ich kónických formulácií. Práca dáva do súvislosti známou Slaterovu podmienku s postačujúcou podmienkou na silnú dualitu v kónických úlohách. Práca prináša podrobný a ucelený prehľad potrebnej teórie, ktorú demonštruje na príkladoch. Práca zovšeobecňuje a rozširuje niektoré do súčasnosti známe výsledky.

Kľúčové slová: Kónické programovanie, Kužeľ, Relatívne vnútro kužela, Teória duality, Slaterova podmienka

Abstract

HRDINA, Jakub: Duality in conic programming [Master's Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD., Bratislava, 2020, 94 p.

The master's thesis focuses on duality theory in conic programming. The thesis aims to analyze dual attributes of conic problems, in particular strong duality. The thesis also studies characterizations of relative interior of convex cones, properties of Minkowski sum of vector subspace with a cone, and theorems of the alternative. Furthermore, the thesis analyzes duality theory in standard convex optimization problems in the context of their conic formulations. It connects the well-known Slater's condition with the sufficient condition for strong duality in conic problems. The thesis also provides a compact and detailed overview of the corresponding theory, which is demonstrated with examples. It also generalizes some well-known results.

Key words: Conic programming, Cone, Relative interior of a cone, Duality theory, Slater's condition

Obsah

Úvod	8
1 Úvod do geometrie kužeľov	10
1.1 Kužele a ich základné vlastnosti	10
1.2 Duálny kužeľ	14
1.2.1 Príklady duálnych kužeľov	21
2 Relatívneho vnútro konvexného kužela	26
3 Uzavretosť lineárneho obrazu konvexného uzavretého kužela	34
4 Vety o alternatívach	44
4.1 Primárne vety o alternatívach	45
4.1.1 Primárna veta o alternatívach	45
4.1.2 Primárna veta o alternatívach pre plný kužeľ	49
4.2 Duálne vety o alternatívach	49
4.2.1 Duálna veta o alternatívach	50
4.2.2 Duálna veta o alternatívach pre špicatý kužeľ	52
5 Dualita v kónickom programovaní	53
5.1 Primárna a duálna úloha kónického programovania	53
5.2 Slabá dualita	55
5.3 Vnútorne body a množiny optimálnych hodnôt	56
5.4 Silná dualita	61
6 Silná dualita v úlohe konvexného programovania	67
6.1 Úloha konvexného programovania	67
6.2 Transformácia na úlohu kónického programovania	68
6.3 Slaterova podmienka	69
6.4 Analýza duálnych úloh	72
Záver	77

Príloha A	81
Príloha B	88
Zoznam použitej literatúry	91

Úvod

Matematické programovanie je matematická disciplína, ktorá sa zaoberá stanovením extrémnej hodnoty funkcie na zadanej množine s konečným počtom ohraničení v konečnorozmerných priestoroch. Úlohy, ktoré spadajú do oblasti matematického programovania, sa prirodzene vyskytujú v rôznych oblastiach matematiky, v ekonómii, vo fyzike, v informatike, ale aj v bežnom živote.

Špeciálnu triedu úloh matematického programovania tvoria úlohy kónického programovania. Úloha kónického programovania je optimalizačná úloha s lineárnou účelovou funkciou a množinou prípustných riešení, ktorá je prienikom afinneho priestoru a konvexného kužela. Okrem konvexnosti sa však od daného kužela môžu vyžadovať aj iné dodatočné vlastnosti, napríklad polyedrickosť, uzavretosť a podobne.

V posledných dvadsiatich piatich rokoch sa kónické programovanie stalo veľmi populárne, pretože mnohé pôvodne nekonvexné úlohy sa podarilo ekvivalentne naformulovať konvexným spôsobom práve pomocou kónického programovania. Kónické programovanie teda zahŕňa pomerne veľa oblastí matematického programovania: lineárne programovanie (LP), programovanie nad kuželom druhého rádu (z angl. *second-order cone programming* (SOCP)), semidefinitné programovanie (SDP), kopozitívne programovanie (COP) a iné. Úlohy z týchto oblastí optimalizácie majú veľké množstvo aplikácií (viac napríklad v [13], [17], [18], [29] a [8]) v rôznych oblastiach matematiky, napríklad kombinatorická optimalizácia, optimálne riadenie, optimálny dizajn, spektrálna analýza a teória grafov. Navyše, každé epigrafové ohraničenie, t. j. ohraničenie typu $f(x) \leq t$, možno podľa [27] reprezentovať pomocou konvexného kužela. Úlohy kónického programovania sa teda dajú vnímať ako nadtrieda klasických úloh konvexného programovania.

Jedným z integrálnych pojmov v matematickom programovaní je pojem duality. Je preto prirodzené, že skúmanie tejto oblasti neostalo bez záujmu. Teória duality pre lineárne programovanie, ktorá je dnes všeobecne známa, bola skúmaná napríklad v [10]. Teória duality pre semidefinitné programovanie bola skúmaná napríklad v [25] a [28]. Niektoré výsledky z teórie duality pre kónické programovanie nad vlastnými kuželmi možno nájsť v [23], [17], [18] a [27]; pre kónické programovanie nad špicatými, respektíve plnými kuželmi v [26]; pre kónické programovanie nad všeobecnými konvexnými kuželmi v [19].

Cieľom tejto práce je skúmanie duálnych vlastností kónických úloh a analýza duálnych

vlastností špecifických podtried kónického programovania. V rámci skúmania duálnych vlastností sa najviac sústredíme na vlastnosť silnej duality. Hlavný cieľ práce v tejto oblasti spočíva v odvodení postačujúcich podmienok na platnosť silnej duality v kónických úlohách. Jadro tejto práce je založené na článku [26], ktorý sa v práci snažíme rozšíriť a zovšeobecniť. Sekundárnym cieľom práce je analýza duálnych vlastností v klasickej úlohe konvexného programovania na základe získaných výsledkov o silnej dualite pre úlohy kónického programovania.

Našu prácu sme rozdelili do šiestich kapitol. V prvej kapitole uvedieme základné pojmy, s ktorými budeme v práci pracovať. V druhej kapitole sa budeme sústrediť na charakterizáciu relatívneho vnútra konvexného kužela. V tretej kapitole sa budeme zaoberať uzavretosťou lineárneho obrazu konvexného kužela. Odvodíme postačujúce podmienky na uzavretosť lineárneho obrazu konvexného kužela. V štvrtej kapitole uvedieme štyri vety o alternatívach. V piatej kapitole uvedieme úlohu kónického programovania a odvodíme príslušnú duálnu úlohu Lagrangeovou metódou. V ďalšej časti sa budeme venovať slabej dualite, vnútorným bodom a množinám optimálnych hodnôt. V poslednej časti tejto kapitoly uvedieme a dokážeme vety o silnej dualite a ich dôsledky. V šiestej kapitole sa sústredíme na silnú dualitu v úlohe konvexného programovania. Výsledky z piatej kapitoly dáme do kontextu so známou Slaterovou podmienkou. Ďalej sa zaoberáme analýzou klasickej duálnej úlohy a kónickej duálnej úlohy.

1 Úvod do geometrie kužeľov

V tejto kapitole uvádzame základné definície objektov, s ktorými budeme v práci pracovať. Terminológiu, definície a niektoré tvrdenia preberáme predovšetkým z [7], [1], [2], [27] a [26]. Pokiaľ nie je uvedené inak, dôkazy tvrdení sú autorské.

V práci budeme pracovať v lineárnom normovanom priestore $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ s (euklidovskou) l_2 normou, t. j. $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\|x\| = \sqrt{x^T x}$, pokiaľ nie je uvedené inak. V lineárnom normovanom priestore $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ sa štandardne definujú pojmy vnútorný bod množiny, vnútro množiny, relatívne vnútorný bod množiny a relatívne vnútro množiny týmto spôsobom.

Definícia 1.1. *Nech $\emptyset \neq M \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $\mathcal{V}$ je vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^n$. Bod $x \in M$ sa nazýva*

- a) vnútorný bod množiny M , keď $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{B}_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\} \subset M$. Množina všetkých vnútorných bodov množiny M sa nazýva vnútro množiny M a označuje sa $\text{int}(M)$.*
- b) relatívne vnútorný bod množiny M vzhľadom na vektorový podpriestor $\mathcal{V}$, keď $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{B}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{V} = \{y \in \mathcal{V} \mid \|x - y\| < \varepsilon\} \subset M$. Množina všetkých relatívne vnútorných bodov množiny M vzhľadom na vektorový podpriestor $\mathcal{V}$ sa nazýva relatívne vnútro množiny M vzhľadom na vektorový podpriestor $\mathcal{V}$ a označuje sa $\text{relint}(M)$.*

1.1 Kužele a ich základné vlastnosti

Definícia 1.2. *Podmnožina K konečnorozmerného vektorového priestoru $\mathbb{R}^n$ sa nazýva*

- a) kužeľ, ak $\forall x \in K, \forall \alpha \geq 0 : \alpha x \in K$.*
- b) konvexný kužeľ, ak množina K je kužeľ a zároveň konvexná množina.*
- c) špicatý kužeľ (angl. pointed cone), ak množina K je kužeľ a zároveň platí: $(x \in K) \wedge (-x \in K) \Rightarrow x = \vec{0}$.*
- d) plný kužeľ (angl. solid cone), ak množina K je kužeľ a zároveň vnútro množiny K je neprázdne.*
- e) vlastný kužeľ (angl. proper cone), ak množina K je uzavretý konvexný špicatý plný kužeľ.*

Pozorovanie. Nech K je konvexný kužeľ a nech $x, y \in K$. Z definície kužela dostávame $\forall \alpha, \beta \geq 0 : \alpha x \in K, \beta y \in K$. Z definície konvexnej množiny zasa máme $\forall \theta \in$

$[0, 1] \quad \forall \alpha, \beta \geq 0 \quad \forall x, y \in K : \theta \alpha x + (1 - \theta) \beta y \in K$. Ak označíme $\hat{\alpha} = \theta \alpha$ a $\hat{\beta} = (1 - \theta) \beta$, dostaneme $\hat{\alpha} x + \hat{\beta} y \in K$. Špeciálne $\forall x, y \in K : x + y \in K$. To znamená, že konvexný kužeľ je uzavretý vzhľadom na operáciu vektorového súčtu.

Definícia 1.3. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužeľ.*

a) *Najmenší vektorový podpriestor vektorového priestoru $\mathbb{R}^n$, ktorý obsahuje kužeľ K , budeme označovať $\text{lin}(K)$.*

b) *Najväčší vektorový podpriestor vektorového priestoru $\mathbb{R}^n$, ktorý je obsiahnutý v kuželi K , budeme označovať $\text{sub}(K)$.*

Poznámka. Je možné dokázať [30, str. 85], že vektorový priestor $\text{lin}(K)$ v Definícii 1.3

a) možno ekvivalentne definovať ako množinu všetkých konečných lineárnych kombinácií vektorov z množiny K , t. j.

$$\text{lin}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in K, a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tvrdenie 1.4. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužeľ.*

a) *Ak K je plný kužeľ, potom $\text{lin}(K) = \mathbb{R}^n$.*

b) *Ak K je špicatý kužeľ, potom $\text{sub}(K) = \{\vec{0}\}$.*

Dôkaz. a) Podľa definície plného kužela máme $\text{int}(K) \neq \emptyset$. Zoberme $x \in \text{int}(K)$, teda: $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{B}_\varepsilon(x) \subset K$. Lenže $\dim(\mathcal{B}_\varepsilon(x)) = n$. A napokon z definície $\text{lin}(K)$ máme: $\mathbb{R}^n \supseteq \text{lin}(K) \supseteq K \supset \mathcal{B}_\varepsilon(x)$, a teda $n = \dim(\mathbb{R}^n) \geq \dim(\text{lin}(K)) \geq \dim(\mathcal{B}_\varepsilon(x)) = n$, z čoho $\dim(\text{lin}(K)) = n$. To ale znamená, že $\text{lin}(K) = \mathbb{R}^n$.

b) Predpokladajme, že $\text{sub}(K) \neq \{\vec{0}\}$, teda existuje aspoň jeden vektor $\vec{0} \neq x \in \text{sub}(K)$. Pretože $\text{sub}(K)$ je vektorový podpriestor, nutne $-x \in \text{sub}(K)$. Lenže z definície $\text{sub}(K)$ platí: $\text{sub}(K) \subseteq K$, a teda $x, -x \in K$. A z vlastnosti špicatosti K máme $x = \vec{0}$. To je spor. □

Poznámka. V ďalšom texte pod zápisom $\text{relint}(K)$ budeme rozumieť relatívne vnútro kužela K vzhľadom na najmenší vektorový priestor, v ktorom sa tento kužeľ nachádza, t. j. $\text{lin}(K)$.

Pre konvexné množiny, respektíve špeciálne pre konvexné kužele, budeme používať inú definíciu vnútorného bodu, resp. relatívne vnútorného bodu, podľa [27, str. 12]. Dôkaz ekvivalencie týchto dvoch definícií je možné nájsť v Prílohe A: Veta A.0.8 a Veta A.0.9

Definícia 1.5. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexný kužel. Bod $x \in K$ sa nazýva*

a) vnútorný bod kužela K , ak $\forall v \in \mathbb{R}^n \exists \varepsilon > 0 : x + \varepsilon v \in K$. Množina všetkých vnútorných bodov sa označuje $\text{int}(K)$.

b) relatívne vnútorný bod kužela K , ak $\forall v \in \text{lin}(K) \exists \varepsilon > 0 : x + \varepsilon v \in K$. Množina všetkých relatívne vnútorných bodov sa označuje $\text{relint}(K)$.

Tvrdenie 1.6. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexný kužel. Potom množina $\text{relint}(K) \cup \{\vec{0}\}$ je konvexný kužel, t. j. platí*

a) $\forall x \in \text{relint}(K), \forall \alpha > 0 : \alpha x \in \text{relint}(K)$,

b) $\forall x, y \in \text{relint}(K), \forall \alpha, \beta > 0 : \alpha x + \beta y \in \text{relint}(K)$.

Dôkaz. a) Nech $x \in \text{relint}(K)$, t. j. $\forall v \in \text{lin}(K) \exists \varepsilon > 0 : x + \varepsilon v \in K$, respektíve $\frac{1}{\alpha}(\alpha x + \varepsilon \alpha v) \in K, \forall \alpha > 0$. Pretože K je kužel, máme $\alpha x + \varepsilon \alpha v \in K$. Položením $\varepsilon_\alpha := \alpha \varepsilon > 0$ dostávame $\forall v \in \text{lin}(K) \exists \varepsilon_\alpha > 0 : \alpha x + \varepsilon_\alpha v \in K$, a teda $\alpha x \in \text{relint}(K)$.

b) Z a) máme $\alpha x \in \text{relint}(K)$ a $\beta x \in \text{relint}(K)$, teda $\forall v \in \text{lin}(K) \exists \varepsilon > 0 : \alpha x + \varepsilon v \in K$ a $\forall v \in \text{lin}(K) \exists \delta > 0 : \beta y + \delta v \in K$. Pretože K je kužel, dostávame $(\alpha x + \beta y) + (\varepsilon + \delta)v \in K, \forall v \in \text{lin}(K)$. Analogickým postupom ako v a) dostaneme $\alpha x + \beta y \in K$. $\square$

Tvrdenie 1.7. *Zachovávajúce operácie:*

a) Ak $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sú konvexné kužele, potom aj ich karteziánsky súčin $K_1 \times K_2$ je konvexný kužel.

b) Ak $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sú konvexné kužele, potom aj ich Minkowského súčet

$$K_1 + K_2 := \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\}$$

je konvexný kužel.

c) Ak K je konvexný kužel a $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineárne zobrazenie, potom $A(K)$ je konvexný kužel.

d) Ak $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sú konvexné kužele, potom aj $K_1 \cap K_2$ je konvexný kužel.

Dôkaz. Výrok a) plynie priamo z definície konvexného kužela. Rovnako c) plynie z definície konvexného kužela a vlastností lineárneho zobrazenia.

b) (vlastnosť kužela) Nech $x \in K_1 + K_2$, t. j. existuje $x_1 \in K_1$ a $x_2 \in K_2$, že $x = x_1 + x_2$.

Pre ľubovoľné $\alpha \geq 0$ máme $\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2$. Pretože $\alpha x_1 \in K_1$ a $\alpha x_2 \in K_2$, máme $\alpha x \in K_1 + K_2$. $K_1 + K_2$ je teda kužeľ.

(konvexnosť) Nech $x, y \in K_1 + K_2$, teda $x = x_1 + x_2$ a $y = y_1 + y_2$, kde $x_1, y_1 \in K_1$ a $x_2, y_2 \in K_2$. Potom pre ľubovoľné $\alpha, \beta \geq 0$ máme $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2)$. Pretože K_1 a K_2 sú konvexné, platí $(\alpha x_1 + \beta y_1) \in K_1$ a $(\alpha x_2 + \beta y_2) \in K_2$, a teda $\alpha x + \beta y \in K$.

d) Z konvexnej analýzy vieme, že prienik dvoch konvexných množín je konvexná množina, teda $K_1 \cap K_2$ je konvexná. Ukážeme, že $K_1 \cap K_2$ je kužeľ: zoberme ľubovoľné $x \in K_1 \cap K_2$, teda $x \in K_1$ a $x \in K_2$. To znamená, že $\forall \alpha \geq 0$ platí $\alpha x \in K_1$ a $\alpha x \in K_2$, a teda $\alpha x \in K_1 \cap K_2$, $\forall \alpha \geq 0$. $\square$

Poznámka. Existuje veľa príkladov konvexných kužeľov. Triviálne príklady konvexných kužeľov sú vektorové priestory (napr. $\mathbb{R}^n$), nezáporný ortant $\mathbb{R}_+^n$, polopriestory

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \geq 0\},$$

kónický obal množín a iné. Medzi ďalšie príklady patria tieto kužele:

- normový kužeľ: $K_p = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid \|x\|_p \leq t\}$, kde $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ pre $x \in \mathbb{R}^n$;
- maticové kužele: kužeľ symetrických kladne semidefinitných $n \times n$ matíc ($\mathcal{S}_+^n$), kopolitívnych $n \times n$ matíc ($\mathcal{C}_+^n$), kompletne pozitívnych $n \times n$ matíc $(\mathcal{C}_+^n)^*$, kužeľ nezáporných $n \times n$ matíc $\mathcal{P}_+^n$:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_+^n &= \{X \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \forall y \in \mathbb{R}^n : y^T X y \geq 0, X = X^T\}, \\ \mathcal{C}_+^n &= \{X \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \forall y \in \mathbb{R}_+^n : y^T X y \geq 0, X = X^T\}, \\ (\mathcal{C}_+^n)^* &= \{X \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid X = B B^T, B_{ij} \geq 0, \forall i, j\}, \\ \mathcal{P}_+^n &= \{X \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid X_{ij} \geq 0, \forall i, j, X = X^T\};\end{aligned}$$

- monotónny kužeľ: $K_{m+} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0\}$;
- kužeľ nezáporných polynómov stupňa najviac $2k$:

$$K_{pol} = \{x \in \mathbb{R}^{2k+1} \mid x_0 + x_1 t + \dots + x_{2k} t^{2k} \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}\};$$

- kužel vytvorený z konvexnej funkcie $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanej na konvexnej množine $D(f)$:

$$K_f = \left\{ (x^T, t, s)^T \in \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \mid \frac{x}{s} \in D(f), f\left(\frac{x}{s}\right) \leq \frac{t}{s} \right\} \cup \{\vec{0}\}. \quad (1)$$

1.2 Duálny kužel

Aby sme mohli skúmať teóriu duality v kónických úlohách, je nutné definovať ďalší dôležitý pojem – *duálny kužel*. V tejto podkapitole uvádzame jeho definíciu a jeho základné vlastnosti. Na záver tejto podkapitoly uvádzame niektoré príklady duálnych kuželov.

Definícia 1.8. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužel. Duálny kužel K^* ku kuželu K sa nazýva množina*

$$K^* := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in K : y^T x \geq 0 \right\}.$$

Poznámka. Takto definovaný duálny kužel sa v literatúre niekedy nazýva vnútorný duálny kužel (angl. *internal dual cone*) a jeho definíciu je možné rozšíriť na ľubovoľný Hilbertov priestor (pozri [22]).

Duálne kužele majú veľa zaujímavých a dôležitých vlastností, ktoré uvádzame v nasledujúcom tvrdení. Tieto vlastnosti sú všeobecne známe.

Tvrdenie 1.9. *a) Nech K je kužel. Potom K^* je konvexný a uzavretý kužel.*

b) Nech K je kužel a zároveň vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^n$. Potom $K^ = K^\perp$.*

c) Nech $K_1 \subseteq K_2$ sú kužele, potom $K_2^ \subseteq K_1^*$.*

d) Nech K je kužel a $cl(K)$ je jeho uzáver. Potom $K^ = (cl(K))^*$.*

e) Nech K je plný kužel, potom K^ je špicatý kužel.*

f) Nech $K_i, i = 1, \dots, s$ sú kužele. Potom $(K_1 \times K_2 \times \dots \times K_s)^ = K_1^* \times K_2^* \times \dots \times K_s^*$.*

Dôkaz. a) (konvexný kužel) Nech $y_1, y_2 \in K^*$, teda $\forall x \in K : x^T y_1 \geq 0, x^T y_2 \geq 0$, a teda $\forall \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ dostávame $\forall x \in K : x^T (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \geq 0$, z čoho vyplýva $\forall \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 : \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in K^*$. Množina K^* je teda konvexný kužel.

(uzavretosť) Nech $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset K^*$ je ľubovoľná konvergentná postupnosť, t. j. $y_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Z Definície 1.8 máme $\forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N} : x^T y_n \geq 0$. Zoberme ľubovoľný ale pevný vektor $\bar{x} \in K$. Funkcia $f_{\bar{x}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná predpisom $f_{\bar{x}}(y) := \bar{x}^T y$ je

zrejme spojitá na $\mathbb{R}^n$, a teda $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\bar{x}}(y_n) = f_{\bar{x}}(y_\infty) = \bar{x}^T y_\infty \geq 0$. Pretože $\bar{x}$ bolo ľubovoľné, dostávame $\forall x \in K : x^T y_\infty \geq 0$, a teda $y_\infty \in K^*$.

b) Pretože K je vektorový podpriestor, platí $-x, x \in K$. Lenže podľa Definície 1.8 platí $y \in K^* \Leftrightarrow \forall x \in K : y^T x \geq 0$, a teda v našom prípade $x^T y \geq 0$ a zároveň $-x^T y \geq 0$, z čoho plynie $x^T y = 0$. To znamená, že platí

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n, \forall x \in K : x^T y = 0\} = K^\perp.$$

c) Zoberme ľubovoľný vektor $\bar{y} \in K_2^*$. To ale znamená, že $\forall x \in K_2 : x^T \bar{y} \geq 0$. Pretože $K_1 \subseteq K_2$, máme $\forall x \in K_1 : x^T \bar{y} \geq 0$, a teda $\bar{y} \in K_1^*$.

d) Zrejme platí $K \subseteq \text{cl}(K)$. Potom podľa c) platí $(\text{cl}(K))^* \subseteq K^*$. Uvažujme teraz vektor $\bar{y} \in K^*$, ale $\bar{y} \notin (\text{cl}(K))^*$, teda existuje $\bar{x} \in \text{cl}(K)$, pre ktorý $\bar{y}^T \bar{x} < 0$. Zoberme ľubovoľnú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq K \subseteq \text{cl}(K)$ s vlastnosťou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$. Z definície duálneho kužela pre členy tejto postupnosti platí $\forall n \in \mathbb{N} : \bar{y}^T x_n \geq 0$. V limite $n \rightarrow \infty$ potom platí $\bar{y}^T \bar{x} \geq 0$. To je spor.

e) Predpokladajme, že K je plný kužeľ, respektíve $\text{lin}(K) = \mathbb{R}^n$, ale K^* nie je špicatý kužeľ, t. j. existuje vektor $\vec{0} \neq \bar{y} \in K^*$ taký, že $-\bar{y} \in K^*$. Z definície duálneho kužela máme $\pm \bar{y} \in K^* \Leftrightarrow \forall x \in K : x^T \bar{y} \geq 0, -x^T \bar{y} \geq 0$, a teda $\forall x \in K : x^T \bar{y} = 0$. To ale znamená, že vektor $\bar{y}$ je kolmý aj na množinu všetkých konečných lineárnych kombinácií množiny K , t. j. $\text{lin}(K)$. Preto $\bar{y} \in (\text{lin}(K))^\perp = \{\vec{0}\}$, to je však spor.

f) Zrejme $K_1 \times K_2 \times \dots \times K_s = \{(x_1^T, x_2^T, \dots, x_s^T)^T \mid x_1 \in K_1, \dots, x_s \in K_s\}$. Z definície duálneho kužela máme

$$(K_1 \times K_2 \times \dots \times K_s)^* = \{(y_1^T, y_2^T, \dots, y_s^T)^T \mid \forall x_1 \in K_1, \dots, x_s \in K_s : y_1^T x_1 + \dots + y_s^T x_s \geq 0\}.$$

Zoberme $(y_1^T, y_2^T, \dots, y_s^T)^T \in (K_1 \times K_2 \times \dots \times K_s)^*$, potom špeciálne pre $x_1 = x_2 = \dots = x_{s-1} = \vec{0}$ máme $\forall x_s \in K : y_s^T x_s \geq 0$, a teda $y_s \in K_s^*$. Analogicky sa ukáže, že $y_i \in K_i^*, i = 1, 2, \dots, s$. To znamená, že $(K_1 \times K_2 \times \dots \times K_s)^* \subseteq (K_1^* \times K_2^* \times \dots \times K_s^*)$. Opačná inklúzia triviálne plynie priamo z definície duálneho kužela. $\square$

V nasledujúcej časti sa budeme venovať charakterizácii duálneho kužela k duálnemu kuželu, t. j. množine $(K^*)^*$. Podľa Definície 1.8 platí

$$K^{**} := (K^*)^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in K^* : x^T y \geq 0\}.$$

Dokážeme, že ak K je konvexný a uzavretý kužel, potom $K = K^{**}$. Toto tvrdenie sa zvykne nazývať *bipolárna veta*, napríklad v [19, str. 8]. Pri dôkaze bipolárnej vety použijeme túto lemu.

Lema 1.10. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavretý konvexný kužel a $\bar{x} \notin K$. Potom existuje vektor $\bar{y} \in K^*$ s vlastnosťou $\bar{y}^T \bar{x} < 0$.*

Dôkaz. Zrejme $\bar{x} \neq \vec{0}$ a teda môžeme položiť $\bar{x}_N := \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$. Pretože $\bar{x} \notin K$, zrejme platí $\bar{x}_N \notin K$. Uvažujme minimalizačnú úlohu

$$\min \left\{ \|x - \bar{x}_N\|^2 \mid x \in K, \|x\| = 1 \right\}.$$

Množina $K \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ je prienikom dvoch konvexných uzavretých množín, teda je konvexná a uzavretá. Navyše je aj ohraničená, a teda je kompaktná. Účelová funkcia je spojitá na tejto množine, a teda podľa Weierstrassovej vety existuje vektor $\hat{x} \in K$, $\|\hat{x}\| = 1$, pre ktorý platí $\forall x \in K, \|x\| = 1 : \|x - \bar{x}_N\|^2 \geq \|\hat{x} - \bar{x}_N\|^2$. Vektor $\hat{x}$ je vektor z kužela K s jednotkovou normou, ktorý minimalizuje euklidovskú vzdialenosť, resp. druhú mocninu euklidovskej vzdialenosti, medzi vektorom $\bar{x}_N$ a kuželom K .

Zoberme ľubovoľný ale pevný vektor $x \in K$, $\|x\| = 1$ a vytvorme úsečku $[\hat{x}, x] = \{\hat{x} + t(x - \hat{x}) \mid t \in [0, 1]\}$. Pretože K je konvexná množina, platí $[\hat{x}, x] \subseteq K$. Pretože vektor $\hat{x}$ minimalizuje vzdialenosť medzi kuželom K a vektorom $\bar{x}_N$, platí

$$\forall t \in [0, 1] : \|\hat{x} + t(x - \hat{x}) - \bar{x}_N\|^2 - \|\hat{x} - \bar{x}_N\|^2 \geq 0,$$

teda $\forall t \in [0, 1] : t \cdot \left(2(x - \hat{x})^T (\hat{x} - \bar{x}_N) + t \|x - \hat{x}\|^2 \right) \geq 0$, resp. pre $\forall t \in (0, 1] : 2(x - \hat{x})^T (\hat{x} - \bar{x}_N) + t \|x - \hat{x}\|^2 \geq 0$. Špeciálne pre $t \rightarrow 0_+$ máme $(x - \hat{x})^T (\hat{x} - \bar{x}_N) \geq 0$, teda $x^T (\hat{x} - \bar{x}_N) \geq \hat{x}^T (\hat{x} - \bar{x}_N) = 1 - \hat{x}^T \bar{x}_N \geq 0$, pričom posledná nerovnosť vyplýva zo známej Cauchy-Schwarzovej nerovnosti (pozri [30, str. 319]). Pretože x bolo ľubovoľné, dostávame

$$\forall x \in K, \|x\| = 1 : x^T (\hat{x} - \bar{x}_N) \geq 0.$$

Tento výsledok však možno rozšíriť na vektor $x \in K$ s ľubovoľnou normou prechodom $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ pre $x \neq \vec{0}$. Pre $x = \vec{0}$ platí táto nerovnosť triviálne. Celkovo teda dostávame $\forall x \in K : x^T(\hat{x} - \bar{x}_N) \geq 0$, čo podľa Definície 1.8 znamená $(\hat{x} - \bar{x}_N) \in K^*$.

Navyše platí $\bar{x}^T(\hat{x} - \bar{x}_N) = \|\bar{x}\|(\hat{x}^T \bar{x}_N - 1) < 0$. Ostrá nerovnosť vyplýva z nasledovného faktu: pre uhol θ vektorov $\hat{x}$, $\bar{x}_N$ platí vzťah $\cos \theta = \hat{x}^T \bar{x}_N$. Na intervale $[0, 2\pi)$ má však rovnica $\cos \theta = 1$ jediné riešenie, a to $\theta = 0$. To by však znamenalo $\hat{x} = \bar{x}_N$. To je však spor, pretože $\hat{x} \in K$, ale $\bar{x}_N \notin K$.

Môžeme teda položiť $\bar{y} := \hat{x} - \bar{x}_N$. □

Veta 1.11 (Bipolárna veta). *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexný kužeľ, potom platí $\text{cl}(K) = K^{**}$.*

Dôkaz. Inklúzia $K^{**} \subseteq \text{cl}(K)$:

Dokážeme implikáciu: $\bar{x} \notin \text{cl}(K) \Rightarrow \bar{x} \notin K^{**}$. Nech $\bar{x} \notin \text{cl}(K)$. Podľa Lemy 1.10 existuje $\bar{y} \in \text{cl}(K)^* = K^*$ také, že $\bar{y}^T \bar{x} < 0$. To ale znamená, že $\bar{x} \notin K^{**}$.

Inklúzia $\text{cl}(K) \subseteq K^{**}$:

Predpokladajme sporom, že existuje $\bar{x} \notin K^{**}$ a $\bar{x} \in \text{cl}(K)$. To znamená, že existuje $\bar{y} \in K^*$ také, že $\bar{x}^T \bar{y} < 0$. Z toho vyplýva, že $\bar{x} \notin K$. Ďalej, existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq K$, pričom $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$. Pretože $\bar{y} \in K^*$ a $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in K$, platí $\bar{y}^T x_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$. To však znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y}^T x_n = \bar{y}^T \bar{x} \geq 0$. To je spor. □

Z bipolárnej vety možno odvodiť ďalšie vlastnosti, ktoré uvádzame vo forme dôsledku.

Dôsledok 1.12. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexný kužeľ.*

- a) *Ak K je uzavretý, potom $K = K^{**}$.*
- b) *Ak $\text{cl}(K)$ je špicatý, potom K^* je plný.*
- c) *Ak K je vlastný kužeľ, potom K^* je vlastný kužeľ.*
- d) *Ak K_1 a K_2 sú uzavreté konvexné kužele a platí $K_1 \subset K_2$. Potom platí $K_2^* \subset K_1^*$.*

Dôkaz. Výroky a), b), c) sa dokážu jednoduchým aplikovaním bipolárnej vety.

d) Z Tvrdenia 1.9 c) vyplýva $K_2^* \subseteq K_1^*$. Ukážeme, že $K_2^* \neq K_1^*$. Pretože $K_1 \subset K_2$, existuje $\bar{x} \in K_2 = K_2^{**}$ také, že $\bar{x} \notin K_1 = K_1^{**}$. To ale znamená, že $\exists \bar{y} \in K_1^*$, pre

ktoré platí $\bar{y}^T \bar{x} < 0$, ale $\forall y \in K_2^{**} : y^T \bar{x} \geq 0$. To znamená, že $\bar{y} \notin K_2^*$, z čoho vyplýva $K_2^* \neq K_1^*$. $\square$

Pomocou pojmu duálneho kužela môžeme charakterizovať vektorový podpriestor $\text{sub}(K)$ definovaný v Definícii 1.3.

Lema 1.13. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužel a K^* je jeho duálny kužel. Potom platí:*

$$a) \quad \text{sub}(K^*) = \{y \in K^* \mid \forall x \in K : x^T y = 0\};$$

$$b) \quad \text{sub}(K^*) = \text{lin}(K)^\perp.$$

Dôkaz. a) Inklúzia $\text{sub}(K^*) \subseteq \{y \in K^* \mid \forall x \in K : x^T y = 0\}$:

Zoberme ľubovoľný vektor $\bar{y} \in \text{sub}(K^*)$. Pretože $\text{sub}(K^*)$ je vektorový priestor, nutne platí $-\bar{y} \in \text{sub}(K^*)$. Z Definície 1.3 vyplýva $\text{sub}(K^*) \subseteq K^*$, to ale znamená $\forall x \in K : \bar{y}^T x \geq 0, -\bar{y}^T x \geq 0$, teda $\forall x \in K : \bar{y}^T x = 0$.

Inklúzia $\text{sub}(K^*) \supseteq \{y \in K^* \mid \forall x \in K : x^T y = 0\}$:

Označme $M := \{y \in K^* \mid \forall x \in K : x^T y = 0\}$. Zrejme platí $M \subseteq K^*$. Dá sa ďalej nahliadnuť, že množina M je uzavretá na kónické kombinácie. Navyše, ak $y \in M$, potom aj pre vektor $-y$ platí $\forall x \in K : -x^T y = 0$. Vďaka uzavretosti K^* však nutne $-y \in K^*$, resp. $-y \in M$. Množina M je teda uzavretá na lineárne kombinácie, a teda ide o vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^n$. Ukážeme, že M je najväčší vektorový podpriestor, ktorý je obsiahnutý v kuželi K^* . Nech $N \subseteq K^*$ je najväčší vektorový podpriestor obsiahnutý v kuželi K^* a platí $M \subset N$. To znamená, že existuje vektor $z \in N$ taký, že $z \notin M$. Zrejme aj $-z \in N$ a vzhľadom na Definíciu 1.8 platí $\forall x \in K : z^T x \geq 0, -z^T x \geq 0$, a teda $\forall x \in K : z^T x = 0$. To ale znamená, že $z \in M$, a to je spor.

b) Inklúzia $\text{sub}(K^*) \subseteq \text{lin}(K)^\perp$:

Predpokladajme, že $\tilde{y} \in \text{sub}(K^*)$, ale $\tilde{y} \notin \text{lin}(K)^\perp$. To znamená, že existuje vektor $z \in \text{lin}(K)$, pre ktorý platí $\tilde{y}^T z \neq 0$. Pretože $z \in \text{lin}(K)$, dá sa zapísať ako nejaká lineárna kombinácia vektorov z K , presnejšie

$$\exists k \in \mathbb{N} \exists x_1, \dots, x_k \in K, \exists a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} : z = \sum_{i=1}^k a_i x_i.$$

Potom však $\tilde{y}^T z = \sum_{i=1}^k a_i \tilde{y}^T x_i = \sum_{i=1}^k a_i \cdot 0 = 0$, pretože $\tilde{y} \in \text{sub}(K^*)$. To je však spor.

Inklúzia $\text{sub}(K^*) \supseteq \text{lin}(K)^\perp$:

Pre každé $x \in K$ zrejme platí $x \in \text{lin}(K)$. Zoberme $\tilde{y} \in \text{lin}(K)^\perp$, potom platí $\forall x \in K : \tilde{y}^T x = 0$, a teda $\tilde{y} \in \text{sub}(K^*)$. $\square$

Poznámka. Lema 1.13 nevyžaduje predpoklad o uzavretosti K . Ak predpokladáme uzavretosť K , respektíve namiesto kužela K budeme uvažovať kužel $\text{cl}(K)$, potom je možné analogicky (a s využitím bipolárnej vety 1.11) dokázať takéto charakterizácie:

$$\text{sub}(\text{cl}(K)) = \{x \in \text{cl}(K) \mid \forall y \in K^* : x^T y = 0\} = \text{lin}(K^*)^\perp \quad (2)$$

a

$$\text{sub}(K) \subseteq \{x \in K \mid \forall y \in K^* : x^T y = 0\},$$

pre $K \neq \text{cl}(K)$.

Na tomto príklade je možné overiť platnosť uvedených vzťahov.

Príklad 1.14. Uvažujme kužel $K = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x - y > 0\} \cup \{c(1, 1)^T \mid c \geq 0\}$. Tento kužel je konvexný, ale nie je uzavretý. A ďalej $K^* = \{c(1, -1)^T \mid c \geq 0\}$. Zrejme:

- $\text{sub}(K) = \{\vec{0}\}$,
- $\{x \in K \mid \forall y \in K^* : x^T y = 0\} = \{c(1, 1)^T \mid c \geq 0\}$,
- $\text{sub}(\text{cl}(K)) = \{c(1, 1)^T \mid c \in \mathbb{R}\} (= \{x \in \text{cl}(K) \mid \forall y \in K^* : x^T y = 0\} = \text{lin}(K^*)^\perp)$,
- $\text{lin}(K) = \mathbb{R}^2$,
- $\text{sub}(K^*) = \{\vec{0}\} (= \text{lin}(K)^\perp)$.

Teraz uvedieme dôležité tvrdenie vo forme lemy.

Lema 1.15. *Nech $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sú kužele. Potom platí $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$.*

Dôkaz. Podľa Definície 1.8 máme $(K_1 + K_2)^* = \{y \in \mathbb{R}^n, \forall X \in (K_1 + K_2) : X^T y \geq 0\}$. Nech $\bar{y} \in (K_1 + K_2)^*$, potom platí $\forall X \in (K_1 + K_2) : X^T \bar{y} \geq 0$. Pretože $X \in (K_1 + K_2)$, dá sa zapísať v tvare $X = x_1 + x_2$, $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$. Dostaneme teda:

$$\forall x_1 \in K_1, \forall x_2 \in K_2 : x_1^T \bar{y} + x_2^T \bar{y} \geq 0.$$

Predpokladajme, že pre nejaké $x_2 \in K_2$ platí $x_2^T \bar{y} < 0$. Zvoľme

$$\delta > -\frac{x_1^T \bar{y}}{x_2^T \bar{y}} \geq 0, \quad \text{ak } x_1^T \bar{y} \geq 0$$

a $\delta = 0$, ak $x_1^T \bar{y} < 0$. Zrejme $\delta \geq 0$, a teda zo základnej vlastnosti kužela $x := \delta x_2 \in K_2$. A teda $x_1^T \bar{y} + x^T \bar{y} = (x_1 + x)^T \bar{y} < 0$, ale $x_1 + x \in (K_1 + K_2)$, a teda $\bar{y} \notin (K_1 + K_2)^*$, to je ale spor. Nutne teda platí $\forall x_2 \in K_2 : x_2^T \bar{y} \geq 0$, a teda $\bar{y} \in K_2^*$. Analogicky sa ukáže $\bar{y} \in K_1^*$, a teda $\bar{y} \in K_1^* \cap K_2^*$.

Naopak, nech $\tilde{y} \in K_1^* \cap K_2^*$. Potom $\forall x_1 \in K_1, \forall x_2 \in K_2 : x_1^T \tilde{y} \geq 0, x_2^T \tilde{y} \geq 0$, a teda $(x_1 + x_2)^T \tilde{y} \geq 0$. To znamená $\tilde{y} \in (K_1 + K_2)^*$.

Celkovo dostávame $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$. Iný dôkaz možno nájsť napríklad v [19]. $\square$

Poznámka. Minkowského súčet dvoch množín nemusí byť uzavretá množina a to aj v prípade, keď obe množiny sú uzavreté. Pri dualizovaní vzťahu $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$ preto dostaneme

$$(K_1^* \cap K_2^*)^* = (K_1 + K_2)^{**} = \text{cl}(K_1 + K_2).$$

Z Lemy 1.15 platí

$$(K_1^* + K_2^*)^* = K_1^{**} \cap K_2^{**} = \text{cl}(K_1) \cap \text{cl}(K_2),$$

respektíve

$$\text{cl}(K_1^* + K_2^*) = (\text{cl}(K_1) \cap \text{cl}(K_2))^*.$$

Tento jav uvádzame na nasledovnom príklade.

Príklad 1.16. Uvažujme kužele

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 - xz \leq 0, x, z \geq 0\}, \\ K_2 &= \{c \cdot (1, 1, 1)^T \mid c \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Ukážeme, že vektor $(2, 1, 0)^T \notin K_1 + K_2$. Ak by tento vektor bol elementom množiny $K_1 + K_2$, dal by sa zapísať v tvare $(x, y, z)^T + (c, c, c)^T$ pre nejaký vektor $(x, y, z)^T \in K_1$ a nejaké $c \in \mathbb{R}$. To znamená, že $2 = c + x$, $1 = c + y$ a $0 = c + z$, pričom platí $x, z \geq 0$ a $y^2 - xz \leq 0$. Teda $(1-c)^2 - (2-c)(-c) \leq 0$, $c \leq 0$. Máme však $(1-c)^2 - (2-c)(-c) = 1 > 0$,

teda neexistuje $c \in \mathbb{R}$ také, že $(2, 1, 0)^T \in K_1 + K_2$.

Zostrojme postupnosť $\{(x_n, y_n, z_n)^T\}_{n=1}^{\infty} \subseteq K_1 + K_2$, ktorá bude konvergentná, ale jej limita nebude elementom množiny $K_1 + K_2$. Položme

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -n \\ -n \\ -n \end{pmatrix}}_{\in K_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2+n \\ 1+n \\ \frac{(1+n)^2}{(2+n)} \end{pmatrix}}_{\in K_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{(1+n)^2}{(2+n)} - n \end{pmatrix}}_{\in K_1 + K_2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Zrejme $(x_n, y_n, z_n)^T \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (2, 1, 0)^T \notin (K_1 + K_2)$. Minkowského súčet $K_1 + K_2$ nie je uzavretá množina, hoci množiny K_1 a K_2 sú uzavreté.

Pre úplnosť uvedeného príkladu uvádzame aj tieto vzťahy:

- $K_1 + K_2 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 2y - z < 0\} \cup \{c(1, 1, 1) \mid c \in \mathbb{R}\};$
- $K_1^* = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{y^2}{4} - xz \leq 0, \quad x, z \geq 0\};$
- $K_2^* = \{c(1, -1, 0)^T + d(1, 0, -1)^T \mid c, d \in \mathbb{R}\};$
- $(K_1 + K_2)^* = \{c(1, -2, 1)^T \mid c \geq 0\}.$

1.2.1 Príklady duálnych kužeľov

V tejto časti práce uvádzame niektoré príklady duálnych kužeľov. Špecifickú triedu kužeľov tvoria takzvané samoduálne kužele, teda kužele, pre ktoré platí vzťah $K = K^*$. Medzi samoduálne kužele patria tieto kužele

- nezáporný ortant $\mathbb{R}_+^n$;
- kužeľ kladne semidefinitných matíc $\mathcal{S}_+^n$;
- Lorentzov kužeľ (second-order cone, normový kužeľ s parametrom $p = 2$)

$$K_2 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid \|x\|_2 \leq t\}.$$

Dá sa ukázať (pozri [27, str. 36]), že duálny kužeľ ku kuželu kopozitívnych matíc $\mathcal{C}_+^n$ je kužeľ kompletne pozitívnych matíc $(\mathcal{C}_+^n)^*$. Všetky tieto kužele sa často vyskytujú v rozličných kónických optimalizačných úlohách.

V literatúre, napríklad v [16], sa uvádzajú aj iné príklady kužeľov a ich príslušných duálnych kužeľov, ktoré sa používajú v kónickom programovaní. Ide o tieto kužele:

- exponenciálny kužeľ (pozri [16, str. 38]) a príslušný duálny kužeľ (pozri [16, str. 89])

$$K_{\text{exp}} = \text{cl} \left[\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq e^{\frac{x_3}{x_2}}, x_2 > 0 \right\} \right],$$

$$K_{\text{exp}}^* = \text{cl} \left[\left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 \geq -y_3 e^{\frac{y_2}{y_3}-1}, y_1 > 0, y_3 < 0 \right\} \right];$$

- mocninový kužeľ (angl. power cone) (pozri [16, str. 30]) a príslušný duálny kužeľ (pozri [16, str. 89])

$$\mathcal{P}_n^{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_i} \geq \sqrt{x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2}, x_1, \dots, x_m \geq 0 \right\},$$

$$(\mathcal{P}_n^{\alpha_1, \dots, \alpha_m})^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \left(\frac{y_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{y_m}{\alpha_m}, y_{m+1}, \dots, y_n \right)^T \in \mathcal{P}_n^{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \right\},$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m > 0, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$.

V tomto príklade odvodíme duálny kužeľ ku kužeľu (1). S kužeľmi tohto typu sa stretneme v šiestej kapitole pri kónických formuláciách štandardných úloh konvexného programovania.

Príklad 1.17. Uvažujme kužeľ (1) vytvorený z konvexnej funkcie $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanej na konvexnej množine $D(f)$:

$$K_f = \left\{ (x^T, t, s)^T \in \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \mid \frac{x}{s} \in D(f), f\left(\frac{x}{s}\right) \leq \frac{t}{s} \right\} \cup \{\vec{0}\}.$$

Nájdeme duálny kužeľ K_f^* .

Podľa Definície 1.8 platí

$$K_f^* = \left\{ (u^T, v, w)^T \in \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \forall (x^T, t, s)^T \in K_f : u^T x + vt + ws \geq 0 \right\}.$$

Pretože $s > 0$, s výnimkou vektora $(0^T, 0, 0)^T$, pre ktorý je podmienka v duálnom kuželi K_f^* triviálne splnená, podmienku $\forall (x^T, t, s)^T \in K_f : u^T x + vt + ws \geq 0$ možno ekvivalentne naformulovať takto:

$$\forall (x^T, t, s)^T \in K_f : u^T \frac{x}{s} + v \frac{t}{s} + w \geq 0.$$

Zvoľme ľubovoľný ale pevný vektor $(u^T, v, w)^T \in K_f^*$:

1.) uvažujme najprv prípad $v > 0$. Potom zrejme platí

$$\forall (x^T, t, s)^T \in K_f : v f\left(\frac{x}{s}\right) \leq v \frac{t}{s}.$$

To však znamená, že platí aj táto nerovnosť:

$$\forall (x^T, t, s)^T \in K_f : u^T \frac{x}{s} + v \frac{t}{s} + w \geq u^T \frac{x}{s} + v f\left(\frac{x}{s}\right) + w. \quad (4)$$

Podmienka nezápornosti skalárneho súčinu v duálnom kuželi K_f^* musí byť splnená pre všetky vektory $(x^T, t, s)^T \in K_f$, teda špeciálne aj pre vektory

$$s > 0, \frac{x}{s} \in D(f) : \left(x^T, s f\left(\frac{x}{s}\right), s\right)^T \in K_f.$$

Zo vzťahu (4) vyplýva, že ak zabezpečíme platnosť

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n-2} \forall s > 0, \frac{x}{s} \in D(f) : u^T \frac{x}{s} + v f\left(\frac{x}{s}\right) + w \geq 0,$$

potom bude splnená aj podmienka nezápornosti skalárneho súčinu v duálnom kuželi a vice versa.

Definujme výraz

$$V(x, s) := u^T \frac{x}{s} + v f\left(\frac{x}{s}\right) + w.$$

Tento výraz musí byť nezáporný pre všetky také vektory $x \in \mathbb{R}^{n-2}$ a čísla $s > 0$, že $\frac{x}{s} \in D(f)$. To znamená, že aj jeho najmenšia možná hodnota musí byť nezáporná, t. j.

$$\inf_{s>0, \frac{x}{s} \in D(f)} V(x, s) \geq 0.$$

Všimnime si, že výraz $V(x, s)$ je homogénny stupňa 0, t. j.

$$\forall k > 0 \forall x \in \mathbb{R}^{n-2} \forall s > 0 : \frac{x}{s} \in D(f) \text{ platí } V(kx, ks) = V(x, s).$$

Pre $k = \frac{1}{s} > 0$ dostaneme

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n-2} \forall s > 0 : \frac{x}{s} \in D(f) \text{ platí } V(x, s) = V\left(\frac{x}{s}, 1\right).$$

To znamená, že $\inf_{s>0, \frac{x}{s} \in D(f)} V(x, s) = \inf_{\frac{x}{s} \in D(f)} V\left(\frac{x}{s}, 1\right)$, teda

$$\inf_{s>0, \frac{x}{s} \in D(f)} V(x, s) = \inf_{\alpha \in D(f)} \{u^T \alpha + v f(\alpha) + w\} = w + \inf_{\alpha \in D(f)} \{u^T \alpha + v f(\alpha)\} \geq 0.$$

Ďalej platí

$$\begin{aligned} w + \inf_{\alpha \in D(f)} \{u^T \alpha + v f(\alpha)\} &= w + v \inf_{\alpha \in D(f)} \left\{ \frac{u^T}{v} \alpha + f(\alpha) \right\} \\ &= w - v \sup_{\alpha \in D(f)} \left\{ -\frac{u^T}{v} \alpha - f(\alpha) \right\}. \end{aligned}$$

Teraz uvedieme pojem konjugovaná funkcia podľa [11, str. 219]:

Definícia 1.18. *Nech $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcia $f^* : D(f^*) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná predpisom*

$$f^*(y) = \sup_{x \in D(f)} \{y^T x - f(x)\}$$

sa nazýva konjugovanou funkciou k funkcii f . Jej definičný obor $D(f^)$ je množina*

$$D(f^*) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \sup_{x \in D(f)} \{y^T x - f(x)\} < \infty \right\}.$$

To znamená, že

$$w - v \sup_{\alpha \in D(f)} \left\{ -\frac{u^T}{v} \alpha - f(\alpha) \right\} = w - v f^* \left(-\frac{u}{v} \right).$$

Pre $v > 0$ dostaneme podmienky

$$-\frac{u}{v} \in D(f^*), \quad w \geq v f^* \left(-\frac{u}{v} \right).$$

2.) Uvažujme prípad $v < 0$. Všimnime si, že premenná t je neohraničená zhora. Uvažujme teda vektor $(\bar{x}^T, \bar{t}, \bar{s})^T \in K_f$. Potom $\forall t \geq \bar{t}$ platí $(\bar{x}^T, t, \bar{s})^T \in K_f$. Pre $t \rightarrow +\infty$ však máme

$$u^T \bar{x} + vt + w \bar{s} \rightarrow -\infty,$$

a teda $(u^T, v, w)^T \notin K_f^*$. Ak teda platí $(u^T, v, w)^T \in K_f^*$, potom nutne $v \geq 0$.

Prípad $v = 0$ netreba špeciálne analyzovať, pretože kužel K_f^* je podľa Tvrdenia 1.9 a) uzavretý. Môžeme teda položiť

$$K_f^* = \text{cl} \left[\left\{ (u^T, v, w)^T \in \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R} \mid -\frac{u}{v} \in D(f^*), \quad w \geq v f^* \left(-\frac{u}{v} \right) \right\} \right]. \quad (5)$$

Poznámka. Medzi kuželmi (1) a (5) platí vzťah

$$K_f^* = \text{cl}(K_{f^*}),$$

pričom kladnej premennej s v kuželi (1) zodpovedá zhora neohraničená premenná w v duálnom kuželi (5). Naopak, zhora neohraničenej premennej t v kuželi (1) zodpovedá kladná premenná v v duálnom kuželi (5).

Pozorovanie. Exponenciálny kužel je špeciálnym prípadom kužela K_f , respektíve jeho uzáveru. Uvažujme funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Zrejme

$$K_f = \left\{ (x, t, s)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \mid se^{\frac{x}{s}} \leq t \right\} \cup \{\vec{0}\},$$

teda $\text{cl}(K_f) = K_{\text{exp}}$. Podľa Tvrdenia 1.9 d) platí $K_{\text{exp}}^* = K_f^*$.

Dá sa ľahko odvodiť, že konjugovaná funkcia f^* k funkcii $f(x) = e^x$ má tvar

$$f^*(y) = y \ln y - y, \quad D(f^*) = \mathbb{R}_{++},$$

teda $f^*\left(-\frac{u}{v}\right) = -\frac{u}{v} \ln\left(-\frac{u}{v}\right) + \frac{u}{v}$, pričom $u < 0$. Duálny kužel K_f^* má teda tvar

$$\begin{aligned} K_{\text{exp}}^* = K_f^* &= \text{cl} \left[\left\{ (u, v, w)^T \mid v > 0, u < 0, w \geq -u \ln\left(-\frac{u}{v}\right) + \frac{u}{v} \right\} \right] \\ &= \text{cl} \left[\left\{ (u, v, w)^T \mid v > 0, u < 0, v \geq -ue^{\frac{w}{u}-1} \right\} \right]. \end{aligned}$$

2 Relatívneho vnútro konvexného kužela

V tejto kapitole sa sústredíme na charakterizáciu relatívneho vnútra konvexného kužela, respektíve príslušného duálneho kužela. Charakterizácie, ktoré uvádzame v tejto kapitole, sú zovšeobecnením charakterizácií v [26] a v [19]. V našich tvrdeniach uvádzame pre prehľadnosť charakterizácie pre relatívne vnútro konvexného kužela, respektíve uzáveru tohto kužela, aj pre relatívne vnútro príslušného duálneho kužela napriek tomu, že táto charakterizácia sa dá odvodiť z bipolárnej vety (Vety 1.11). Charakterizáciu uvedieme pre kužele, ktoré spĺňajú tento predpoklad.

Predpoklad 2.1. *Kužel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexný kužel a kužel $cl(K)$ netvorí vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^n$, teda $cl(K) \neq lin(K)$.*

Poznámka. Ak kužel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ spĺňa Predpoklad 2.1, potom z bipolárnej vety (Veta 1.11) vyplýva, že ani kužel K^* netvorí vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^n$, teda $K^* \neq lin(K^*)$.

Tvrdenie 2.2. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexný kužel, K^* je jeho duálny kužel a Predpoklad 2.1 je splnený. Potom platia tieto charakterizácie*

- a) $relint(K^*) \subseteq K^* \setminus sub(K^*),$
- b) $relint(K) \subseteq K \setminus sub(cl(K)).$

Dôkaz. a) Ukážeme implikáciu: $y \in relint(K^*) \Rightarrow y \notin sub(K^*)$. Predpokladajme sporom, že existuje $\bar{y} \in relint(K^*)$ a $\bar{y} \in sub(K^*)$. Pretože $\bar{y} \in relint(K^*)$, podľa Definície 1.5 máme

$$\forall v \in lin(K^*) \exists \varepsilon \equiv \varepsilon(v) > 0 : \bar{y} + \varepsilon v \in K^*.$$

Zoberme ľubovoľné ale fixné $\bar{x} \in cl(K)$. Z Definície 1.8 máme:

$$\forall v \in lin(K^*) \exists \varepsilon > 0 : \bar{x}^T(\bar{y} + \varepsilon v) \geq 0.$$

Pretože $\bar{y} \in sub(K^*) = lin(K)^\perp$, máme $\bar{x}^T \bar{y} = 0$, a teda

$$\forall v \in lin(K^*) \exists \varepsilon > 0 : \varepsilon \bar{x}^T v \geq 0,$$

respektíve $\bar{x}^T v \geq 0, \forall v \in lin(K^*)$, pretože $\varepsilon > 0$. Pretože aj vektor $-v \in lin(K^*)$, naraz platia nerovnosti: $\bar{x}^T v \geq 0, \bar{x}^T(-v) \geq 0$, teda $\bar{x}^T v = 0, \forall v \in lin(K^*)$. Nutne teda

platí $\bar{x} \in \text{lin}(K^*)^\perp = \text{sub}(\text{cl}(K))$ podľa vzťahu (2). Pretože $\bar{x}$ bolo ľubovoľné, dostávame $\forall x \in \text{cl}(K) : x \in \text{sub}(\text{cl}(K))$, teda $\text{cl}(K) \subseteq \text{sub}(\text{cl}(K))$. Z Definície 1.3 vyplýva inklúzia $\text{sub}(\text{cl}(K)) \subseteq \text{cl}(K)$, a teda $\text{sub}(\text{cl}(K)) = \text{cl}(K)$. To je však spor s predpokladom, že kužel $\text{cl}(K)$ netvorí vektorový podpriestor.

b) Dôkaz prebieha podobne ako v a). Predpokladajme, že existuje $\bar{x} \in \text{relint}(K) \cap \text{sub}(\text{cl}(K))$. Podľa Definície 1.5 b) platí

$$\forall v \in \text{lin}(K) \exists \varepsilon > 0 : \bar{x} + \varepsilon v \in K.$$

Zoberme ľubovoľné ale fixné $\bar{y} \in K^*$. Potom z Definície 1.8 máme

$$\forall v \in \text{lin}(K) \exists \varepsilon > 0 : \bar{y}^T(\bar{x} + \varepsilon v) \geq 0.$$

Pretože $\bar{y} \in \text{lin}(K^*) = \text{sub}(\text{cl}(K))^\perp$, máme $\bar{y}^T \bar{x} = 0$, t. j.

$$\forall v \in \text{lin}(K) \exists \varepsilon > 0 : \bar{y}^T(\bar{x} + \varepsilon v) = \varepsilon \bar{y}^T v \geq 0.$$

Pretože $\varepsilon > 0$, dostaneme $\forall v \in \text{lin}(K) : \bar{y}^T v \geq 0$. Špeciálne pre voľbu $\pm v \in \text{lin}(K)$ dostaneme $\bar{y}^T v = 0$, z čoho vyplýva, že $\bar{y} \in \text{lin}(K)^\perp = \text{sub}(K^*)$. Pretože $\bar{y}$ bolo ľubovoľné, dostaneme $K^* = \text{sub}(K^*)$. To je spor s predpokladom, že K^* netvorí vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^n$. $\square$

Tvrdenie 2.3. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexný kužel, K^* je jeho duálny kužel a Predpoklad 2.1 je splnený. Potom platia tieto charakterizácie*

$$\begin{aligned} a) \quad \text{relint}(K^*) &= \left\{ y \in K^* \mid \forall x \in \text{cl}(K) \setminus \text{sub}(\text{cl}(K)) : x^T y > 0 \right\}, \\ b) \quad \text{relint}(\text{cl}(K)) &= \left\{ x \in \text{cl}(K) \mid \forall y \in K^* \setminus \text{sub}(K^*) : x^T y > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Dôkaz. a) Inklúzia $\text{relint}(K^*) \subseteq \left\{ y \in K^* \mid \forall x \in \text{cl}(K) \setminus \text{sub}(\text{cl}(K)) : x^T y > 0 \right\}$:

Nech $\bar{y} \in \text{relint}(K^*) \subseteq K^*$. Podľa Definície 1.5 platí $\forall v \in \text{lin}(K^*) = \text{sub}(\text{cl}(K))^\perp$ existuje $\varepsilon > 0$ také, že $\bar{y} + \varepsilon v \in K^*$. Teda podľa Definície 1.8 a Tvrdenia 1.9 d) máme

$$\forall x \in \text{cl}(K) : x^T \bar{y} + \varepsilon x^T v \geq 0. \quad (6)$$

Predpokladajme, že pre nejaké $\bar{x} \in \text{cl}(K) \setminus \text{sub}(\text{cl}(K))$ platí $\bar{x}^T \bar{y} = 0$, teda z (6) máme $\forall v \in \text{lin}(K^*) : \varepsilon \bar{x}^T v \geq 0$. Pretože $\varepsilon > 0$, máme $\forall v \in \text{lin}(K^*) : \bar{x}^T v \geq 0$. Pre ľubovoľnú dvojicu vektorov $\pm v \in \text{lin}(K^*)$ však máme $\bar{x}^T v \geq 0$, $-\bar{x}^T v \geq 0$. Nutne teda

$\forall v \in \text{lin}(K^*) : \bar{x}^T v = 0$, to však znamená, že $\bar{x} \in \text{lin}(K^*)^\perp = \text{sub}(\text{cl}(K))$. To je spor.

Inklúzia $\text{relint}(K^*) \supseteq \{y \in K^* \mid \forall x \in \text{cl}(K) \setminus \text{sub}(\text{cl}(K)) : x^T y > 0\}$:

Nech $\bar{y} \in K^*$ je vektor s vlastnosťou $\forall x \in \text{cl}(K) \setminus \text{sub}(\text{cl}(K)) : x^T \bar{y} > 0$. Zoberme ľubovoľný ale pevný vektor $\bar{v} \in \text{lin}(K^*)$. Ukážeme, že k vektoru $\bar{v}$ existuje číslo $\varepsilon(\bar{v}) > 0$ také, že $\bar{y} + \varepsilon(\bar{v})\bar{v} \in K^*$. Podľa Definície 1.8 stačí ukázať

$$\exists \varepsilon(\bar{v}) > 0 \quad \forall x \in \text{cl}(K) : x^T(\bar{y} + \varepsilon(\bar{v})\bar{v}) \geq 0.$$

Podľa Tvrdenia B.0.14 pre vektor $x \in \text{cl}(K)$ existuje rozklad $x = x_1 + x_2$, kde $x_1 \in \text{lin}(K^*) \cap \text{cl}(K)$ a $x_2 \in (\text{lin}(K^*)^\perp \cap \text{cl}(K)) = \text{sub}(\text{cl}(K))$. Potom $x^T(\bar{y} + \varepsilon(\bar{v})\bar{v}) = x_1^T(\bar{y} + \varepsilon(\bar{v})) + x_2^T(\bar{y} + \varepsilon(\bar{v})) = x_1^T(\bar{y} + \varepsilon(\bar{v}))$. Uvažujme teda minimalizačné úlohy

$$\begin{aligned} \delta(\bar{y}) &:= \min \left\{ \bar{y}^T x \mid x \in \text{lin}(K^*) \cap \text{cl}(K), \|x\| = 1 \right\}, \\ \delta(\bar{v}) &:= \min \left\{ \bar{v}^T x \mid x \in \text{lin}(K^*) \cap \text{cl}(K), \|x\| = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Poznamenajme, že hodnoty $\delta(\bar{y})$ a $\delta(\bar{v})$ existujú, pretože v oboch prípadoch sa minimalizuje spojitá účelová funkcia na uzavretej a ohraničenej (a teda kompaktnej) množine, respektíve optimálne riešenia týchto úloh existujú a nadobúdajú sa. Navyše, $\delta(\bar{y}) > 0$, pretože optimálne riešenie $\hat{x} \in \text{cl}(K) \setminus \text{sub}(\text{cl}(K))$ a vektor $\bar{y}$ majú vlastnosť: $\forall x \in \text{cl}(K) \setminus \text{sub}(\text{cl}(K)) : x^T \bar{y} > 0$, teda špeciálne platí $\hat{x}^T \bar{y} > 0$. Položme teda

$$\varepsilon(\bar{v}) := \begin{cases} -\frac{\delta(\bar{y})}{\delta(\bar{v})}, & \delta(\bar{v}) < 0, \\ 1, & \delta(\bar{v}) \geq 0 \end{cases}.$$

Zrejme $\varepsilon(\bar{v}) > 0$. Pre $x \in \text{cl}(K)$, $x \neq \vec{0}$ potom platí

$$\begin{aligned} x^T(\bar{y} + \varepsilon(\bar{v})\bar{v}) &= \|x\| \left(\bar{y}^T \frac{x}{\|x\|} + \varepsilon(\bar{v}) \frac{\bar{v}^T x}{\|x\|} \right), \\ &\geq \|x\| (\delta(\bar{y}) + \varepsilon(\bar{v})\delta(\bar{v})), \\ &\geq \begin{cases} \|x\| (\delta(\bar{y}) - \frac{\delta(\bar{y})}{\delta(\bar{v})}\delta(\bar{v})) \geq 0, & \delta(\bar{v}) < 0, \\ \|x\| (\delta(\bar{y}) + \delta(\bar{v})) \geq 0, & \delta(\bar{v}) \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

b) Použije sa časť a) pre kužele $K^* \rightarrow K^{**} = \text{cl}(K)$ a $\text{cl}(K) \rightarrow \text{cl}(K)^* = K^*$. □

Poznámka. a) Opačná inklúzia v Tvrdení 2.2 v časti a), respektíve b), nemusí platiť: nech $K^* = \mathbb{R}_+^n$; potom $\text{sub}(K^*) = \{\vec{0}\}$, ale $\text{relint}(K^*) = \mathbb{R}_{++}^n \not\subseteq \mathbb{R}_+^n \setminus \{\vec{0}\}$.

b) $\text{relint}(K^*) \neq \{y \in K^* \mid \forall x \in K \setminus \text{sub}(K) : x^T y > 0\}$, teda kužele K a $\text{cl}(K)$ nemožno v Tvrdení 2.3 a) v prípade $K \neq \text{cl}(K)$ zameniť. Uvažujme kužele

$$\begin{aligned} K &= \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x - y > 0\} \cup \{c(1, 1)^T \mid c \geq 0\}, \\ K^* &= \{c(1, -1)^T \mid c \geq 0\}, \\ \text{cl}(K) &= \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \geq 0\}. \end{aligned}$$

Tabuľka 1: Tabuľka základných množín pre kužeľ $K = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x - y > 0\} \cup \{c(1, 1)^T \mid c \geq 0\}$

	K	K^*	$\text{cl}(K)$
lin	$\mathbb{R}^2$	$\{c(1, -1)^T \mid c \in \mathbb{R}\}$	$\mathbb{R}^2$
sub	$\{\vec{0}\}$	$\{\vec{0}\}$	$\{c(1, 1)^T \mid c \in \mathbb{R}\}$
relint	$\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x - y > 0\}$	$\{c(1, -1)^T \mid c > 0\}$	$\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x - y > 0\}$

Zrejme $(1, 1)^T \in K \setminus \text{sub}(K)$, a teda $\{y \in K^* \mid \forall x \in K \setminus \text{sub}(K) : x^T y > 0\} = \emptyset$.

c) V Tvrdení 2.3 v časti a) neplatí vzťah

$$\text{relint}(K^*) = \{y \in K^* \mid \forall x \in K \setminus \text{sub}(\text{cl}(K)) : x^T y > 0\}.$$

Uvažujme kužeľ $K = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 > 0, -3x_1 + 2x_2 \leq 0\}$. Potom $K^* = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -2x_1 - x_2 \leq 0, -2x_1 - 3x_2 \leq 0\}$. Zrejme vektor $(-1, 2)^T \notin \text{relint}(K^*)$. Dá sa však ľahko nahliadnuť, že $\forall (x_1, x_2)^T \in K \setminus \text{sub}(\text{cl}(K))$ platí $(-1, 2)(x_1, x_2)^T > 0$. Vektory, ktoré sú kolmé na vektor $(-1, 2)^T$, sa nenachádzajú v kuželi K , ale v jeho uzávere $\text{cl}(K)$.

d) Pri dôkaze Tvrdenia 2.3 a) sme použili Tvrdenie B.0.14 pre $\mathcal{V} = \text{sub}(\text{cl}(K)) \subseteq \text{cl}(K)$.

e) Tvrdenie 2.2 b) je zovšeobecnením Lemy 1. v [26, str. 5]. Časť a) Tvrdenia 2.3 je zovšeobecnením Tvrdenia 1. c) v [26, str. 5]. Podobné tvrdenie ako Tvrdenie 2.3 b) možno nájsť dokázané iným spôsobom napríklad v [19, str. 8].

Tabuľku 1, ktorú možno vidieť v poznámke v časti b), vieme zovšeobecniť. Na to budeme potrebovať lemu, ktorú v literatúre možno nájsť v rôznych podobách napríklad v [12, str. 163], [5, str. 28] alebo v [21, str. 46].

Lema 2.4. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexný kužel. Potom platia tieto výroky:*

- a) $\text{lin}(K) = \text{lin}(\text{cl}(K))$,
- b) $\text{relint}(K) = \text{relint}(\text{cl}(K))$.

Dôkaz. a) Inklúzia $\subseteq$ je zrejmá. Nech $z \in \text{lin}(\text{cl}(K))$, teda

$$\exists k \in \mathbb{N} \exists x_1, \dots, x_k \in \text{cl}(K) \exists a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} : z = \sum_{i=1}^k a_i x_i,$$

bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $x_1 \notin K$ a $x_2, \dots, x_k \in K$. Potom existuje postupnosť $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subseteq K$ s vlastnosťou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_1$. Položme $z_n = a_1 u_n + \sum_{i=2}^k a_i x_i$, $n \in \mathbb{N}$. Zrejme $\forall n \in \mathbb{N} : z_n \in \text{lin}(K)$. Pretože vektorové priestory v $\mathbb{R}^n$ sú uzavreté (sú prienikom konečne veľa nadrovín, ktoré sú uzavreté), nutne $z \in \text{lin}(K)$.

b) Inklúzia $\subseteq$ je opäť zrejmá, dokážeme len inklúziu $\supseteq$. Najprv ukážeme pomocné tvrdenie: nech $x \in \text{relint}(K)$ a $y \in \text{cl}(K)$, potom $\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in (0, 1]\} \subseteq \text{relint}(K)$. Pre $\lambda = 1$ toto tvrdenie platí, a preto budeme ďalej uvažovať $\lambda \in (0, 1)$.

Pretože $x \in \text{relint}(K)$, existuje podľa Definície 1.1 b) $\varepsilon > 0$ také, že $\mathcal{B}_\varepsilon(x) \cap \text{lin}(K) \subset K$. Pretože $y \in \text{cl}(K)$, existuje postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subseteq K$, pričom $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Z definície limity vieme, že

$$\forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : \|y - y_n\| < \delta. \quad (7)$$

Zvoľme ľubovoľné ale fixné $\bar{\lambda} \in (0, 1)$ a vo vzťahu (7) zvoľme $\delta = \frac{\bar{\lambda}}{2(1-\bar{\lambda})}\varepsilon > 0$. Pre takto zvolenú hodnotu δ existuje n_0 , že $\forall n > n_0 : \|y - y_n\| < \frac{\bar{\lambda}}{2(1-\bar{\lambda})}\varepsilon$. Označme $\bar{x} = \bar{\lambda}x + (1-\bar{\lambda})y$. Okolo bodu $\bar{x}$ vytvoríme guľu s polomerom $\frac{\bar{\lambda}}{2}\varepsilon$, t. j. $\mathcal{B}_{\frac{\bar{\lambda}}{2}\varepsilon}(\bar{x}) \cap \text{lin}(K)$. Ukážeme, že táto guľa je obsiahnutá v K . Stačí teda ukázať, že ľubovoľný vektor $\bar{u} \in \mathcal{B}_{\frac{\bar{\lambda}}{2}\varepsilon}(\bar{x}) \cap \text{lin}(K)$ patrí množine K . Pre ľubovoľné ale fixné $N > n_0$ položme $u = \frac{1}{\bar{\lambda}}\bar{u} - \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}y_N$. Počítajme normu

$\|u - x\|$:

$$\begin{aligned}
\|u - x\| &= \left\| \frac{1}{\bar{\lambda}} \bar{u} - \frac{1 - \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} y_N - \frac{1}{\bar{\lambda}} \bar{x} + \frac{1 - \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} y \right\|, \\
&= \left\| \frac{1}{\bar{\lambda}} (\bar{u} - \bar{x}) + \frac{1 - \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} (y - y_N) \right\|, \\
&\leq \frac{1}{\bar{\lambda}} \|\bar{u} - \bar{x}\| + \frac{1 - \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} \|y - y_N\|, \\
&< \frac{1}{\bar{\lambda}} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{2} \varepsilon + \frac{1 - \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} \frac{\bar{\lambda}}{2(1 - \bar{\lambda})} \varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

To však znamená, že $u \in \mathcal{B}_\varepsilon(x) \cap \text{lin}(K)$, a teda $u \in K$. Pretože K je konvexná množina a $u \in K$ a $y_N \in K$, platí, že úsečka

$$\{tu + (1 - t)y_N \mid t \in (0, 1)\} \subset K,$$

a teda špeciálne pre $t = \bar{\lambda}$ dostaneme $\bar{u} \in K$. Tento záver možno analogicky dosiahnuť pre všetky body z gule $\mathcal{B}_{\frac{\bar{\lambda}}{2}\varepsilon}(\bar{x}) \cap \text{lin}(K)$, a teda $\mathcal{B}_{\frac{\bar{\lambda}}{2}\varepsilon}(\bar{x}) \cap \text{lin}(K) \subset K$, a teda $\bar{x} \in \text{relint}(K)$. Tento záver možno opäť analogicky dosiahnuť pre všetky body z úsečky $\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in (0, 1)\}$, a teda každý bod z tejto úsečky sa nachádza v relatívnom vnútri kužela K . Celkovo máme

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in (0, 1]\} \subseteq \text{relint}(K). \quad (8)$$

Vezmime ľubovoľný vektor $y \in \text{relint}(\text{cl}(K))$, potom podľa Definície 1.1 b) existuje $\varepsilon > 0$, že guľa $\mathcal{B}_\varepsilon(y) \cap \text{lin}(K) \subset \text{cl}(K)$. Zvoľme ľubovoľný vektor $\bar{y} \in \text{relint}(K)$. Vektor $y + \frac{\varepsilon}{2\|y - \bar{y}\|}(y - \bar{y}) \in \text{cl}(K)$, pretože

$$\left\| y + \frac{\varepsilon}{2\|y - \bar{y}\|}(y - \bar{y}) - y \right\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Navyše platí

$$y \in \left\{ \lambda \bar{y} + (1 - \lambda) \left(y + \frac{\varepsilon}{2\|y - \bar{y}\|}(y - \bar{y}) \right) \mid \lambda \in (0, 1] \right\},$$

pretože pre $1 > \lambda = \frac{\varepsilon}{2\|y - \bar{y}\| + \varepsilon} > 0$ máme:

$$\frac{\varepsilon}{2\|y - \bar{y}\| + \varepsilon} \bar{y} + \frac{2\|y - \bar{y}\|}{2\|y - \bar{y}\| + \varepsilon} \cdot \left(y + \frac{\varepsilon}{2\|y - \bar{y}\|}(y - \bar{y}) \right) = y.$$

Zo vzťahu (8) vyplýva $\left\{ \lambda \bar{y} + (1 - \lambda) \left(y + \frac{\varepsilon}{2\|y - \bar{y}\|}(y - \bar{y}) \right) \mid \lambda \in (0, 1] \right\} \subseteq \text{relint}(K)$, a teda $y \in \text{relint}(K)$. Pretože y bolo ľubovoľné, platí $\text{relint}(\text{cl}(K)) \subseteq \text{relint}(K)$. $\square$

Poznámka. Z Lemy 2.4 a z Lemy 1.13 dostávame Tabuľku základných množín pre všeobecný konvexný kužeľ K . Všimnime si ortogonalitu medzi vektorovými priestormi $\text{lin}(K^*)$ a $\text{sub}(\text{cl}(K))$ a medzi vektorovými priestormi $\text{lin}(K)$ a $\text{sub}(K^*)$.

Tabuľka 2: Tabuľka základných množín pre všeobecný konvexný kužeľ K

	K	K^*	$\text{cl}(K)$
lin	$\text{lin}(K)$	$\text{lin}(K^*) = \text{sub}(\text{cl}(K))^{\perp}$	$\text{lin}(K) = \text{sub}(K^*)^{\perp}$
sub	$\text{sub}(K)$	$\text{sub}(K^*) = \text{lin}(K)^{\perp}$	$\text{sub}(\text{cl}(K)) = \text{lin}(K^*)^{\perp}$
relint	$\text{relint}(K)$	$\text{relint}(K^*)$	$\text{relint}(K)$

Pomocou Lemy 2.4 môžeme charakterizovať relatívne vnútro kužela K . Túto charakterizáciu uvádzame vo forme dôsledku.

Dôsledok 2.5. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexný kužeľ, K^* je jeho duálny kužeľ a Predpoklad 2.1 je splnený. Potom platí táto charakterizácia*

$$\text{relint}(K) = \{x \in K \mid \forall y \in K^* \setminus \text{sub}(K^*) : x^T y > 0\}.$$

V kapitole 3 budú užitočné tieto dve tvrdenia. Nie je nám známe, že by sa tieto tvrdenia vyskytovali v literatúre.

Tvrdenie 2.6. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexný kužeľ, potom platí táto inklúzia*

$$[-K \setminus \text{sub}(\text{cl}(K))] \subseteq \text{lin}(K) \setminus K.$$

Dôkaz. Nech $x \in [-K \setminus \text{sub}(\text{cl}(K))]$. Pretože $-K \subseteq \text{lin}(K)$, nutne $x \in \text{lin}(K)$. Pretože $x \notin \text{sub}(\text{cl}(K)) = \text{sub}(-\text{cl}(K))$ a zrejme $\text{sub}(K) \subseteq \text{sub}(\text{cl}(K))$, platí $x \notin \text{sub}(K)$. Zároveň však $x \in -K$, nutne teda platí $x \notin K$. $\square$

Poznámka. Ak budeme v Tvrdení 2.6 uvažovať aj platnosť Predpokladu 2.1, dostaneme podľa Tvrdenia 2.2 b) platnosť inklúzie

$$-\text{relint}(K) \subseteq [-K \setminus \text{sub}(\text{cl}(K))] \subseteq \text{lin}(K) \setminus K. \quad (9)$$

Tvrdenie 2.7. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexný kužeľ, ktorý spĺňa Predpoklad 2.1. Potom platia tieto rovnosti množín*

- a) $\text{relint}(K) = K + \text{relint}(K)$,
- b) $\text{relint}(K) = \text{cl}(K) + \text{relint}(K)$.

Dôkaz. a) Inklúzia $\text{relint}(K) \subseteq K + \text{relint}(K)$:

Využije sa Tvrdenie B.0.11 a), pretože $\vec{0} \in K$.

Inklúzia $\text{relint}(K) \supseteq K + \text{relint}(K)$:

Zoberme $x \in K + \text{relint}(K)$. To znamená, že existuje rozklad $x = x_c + x_r$, kde $x_c \in K$ a $x_r \in \text{relint}(K)$. Pretože K je konvexný kužeľ, nutne platí $x \in K$. Pri Predpoklade 2.1 platí $K^* \setminus \text{sub}(K^*) \neq \emptyset$: vezmime teda ľubovoľné $y \in K^* \setminus \text{sub}(K^*)$. Potom dostaneme $y^T x = y^T x_c + y^T x_r$. Z Definície 1.8 vieme, že $y^T x_c \geq 0$ a z Dôsledku 2.5 zasa vieme, že $y^T x_r > 0$. Celkovo teda $y^T x > 0$, a teda $x \in \text{relint}(K)$.

b) Táto rovnosť vychádza z a) a z Lemy 2.4 b). □

Na záver tejto kapitoly uvádzame pre úplnosť ešte niektoré vlastnosti relatívneho vnútra konvexných kužeľov, ktorých dôkaz možno nájsť napríklad v [21], [19] alebo [12].

Tvrdenie 2.8. a) *Nech $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sú konvexné kužele. Potom $\text{relint}(K_1 + K_2) = \text{relint}(K_1) + \text{relint}(K_2)$.*

b) *Nech $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sú konvexné kužele. Potom $\text{relint}(K_1 \times K_2) = \text{relint}(K_1) \times \text{relint}(K_2)$.*

3 Uzavretosť lineárneho obrazu konvexného uzavretého kužela

Pri dôkaze duality v lineárnom programovaní sa využíva Farkasova lema s ostrými nerovnosťami (pozri [14], [9] a iné). Ide o to, že každý polyedrický kužel (teda aj $\mathbb{R}_+^n$) je generovaný konečne veľa vektormi. Nie je ťažké ukázať, že obraz takýchto konvexných kuželov v lineárnej transformácii je opäť uzavretý kužel. Táto vlastnosť však neplatí pre kužele, ktoré nie sú polyedrické.

Poznámka. Pod lineárnym obrazom kužela K v lineárnom zobrazení daným maticou A , t. j. $A : K \mapsto A(K)$, rozumieme množinu

$$A(K) = \{Ax \mid x \in K\}.$$

Príklad 3.1. V úvode tejto kapitoly sme uviedli, že lineárny obraz uzavretého konvexného nepolyedrického kužela nemusí byť uzavretý. Uvažujme nepolyedrický kužel daný vzťahom (3), t. j. $K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 - xz \leq 0, x \geq 0, z \geq 0\}$ a maticu $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Z Príkladu 1.16 platí:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+n \\ 1+n \\ \frac{(1+n)^2}{2+n} \end{pmatrix} \in K.$$

Potom

$$\forall n \in \mathbb{N} : A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+n \\ 1+n \\ \frac{(1+n)^2}{2+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \frac{1}{2+n} \end{pmatrix} \in A(K).$$

Zrejme $\lim_{n \rightarrow \infty} (1, 2 - 1/(2+n))^T = (1, 2)^T$. Ukážeme, že $(1, 2)^T \notin A(K)$. Vieme, že $A : (x, y, z)^T \mapsto (x - y, x - z)^T$. Vyžadujeme, aby platilo $x - y = 1$ a $x - z = 2$. To znamená, že $x = y + 1$ a $z = y - 1$. Ale $y^2 - xz = y^2 - (y+1)(y-1) = 1 > 0$. Neexistuje teda taký vektor $(x, y, z)^T \in K$, ktorý sa zobrazí do vektora $(1, 2)^T$, teda $(1, 2)^T \notin A(K)$. Zrejme však platí $(1, 2)^T \in \text{cl}(A(K))$.

Uzavretosť lineárneho obrazu konvexného kužela je jednou z kľúčových vlastností pri skúmaní teórie duality v kónických úlohách. Táto vlastnosť bola skúmaná napríklad v [21, str. 73]. Náš text čerpá poznatky predovšetkým z [20] a [26]: napríklad Lemu 3.2 možno nájsť v [20, str. 7] a [26, str. 7]; my však upúšťame od požiadavky uzavretosti kužela K a prinášame aj alternatívny dôkaz, ktorý je prevažne založený na elementárnych operáciách s množinami.

Lema 3.2. *Nech $L \subseteq \mathbb{R}^n$ je vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^n$ a $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužel spĺňajúci Predpoklad 2.1. Potom sú nasledujúce výroky ekvivalentné:*

$$(i) \quad L + K = L + \text{lin}(K),$$

$$(ii) \quad L \cap \text{relint}(K) \neq \emptyset,$$

$$(iii) \quad L^\perp \cap [K^* \setminus \text{sub}(K^*)] = \emptyset.$$

Dôkaz. $(i) \Rightarrow (ii)$

Nech $L + K = L + \text{lin}(K)$. Predpoklad 2.1 je splnený, a teda $\text{lin}(K) \setminus K \neq \emptyset$. Pretože Minkowského súčet je distributívny vzhľadom na zjednotenie množín (pozri Tvrdenie B.0.12), dostaneme

$$L + \text{lin}(K) = L + (K \cup [\text{lin}(K) \setminus K]) = (L + K) \cup (L + [\text{lin}(K) \setminus K]),$$

teda podľa predpokladu (i) máme

$$L + K = (L + K) \cup (L + [\text{lin}(K) \setminus K]),$$

a nutne musí platiť

$$(L + [\text{lin}(K) \setminus K]) \subseteq (L + K). \quad (10)$$

Podľa Tvrdenia 2.6 a vzťahu (9) máme

$$-\text{relint}(K) \subseteq [-K \setminus \text{sub}(\text{cl}(K))] \subseteq \text{lin}(K) \setminus K.$$

Použitím Tvrdenia B.0.13 a Tvrdenia B.0.11 a), pretože $\vec{0} \in L$, a vzťahu (10) platí

$$-\text{relint}(K) \subseteq (L + [\text{lin}(K) \setminus K]) \subseteq (L + K).$$

Zoberme teda špeciálny vektor $\bar{k} \in -\text{relint}(K)$. To však znamená, že existuje rozklad

$$\exists k \in K, \exists l \in L : \bar{k} = k + l.$$

To znamená, že $-l = -\bar{k} + k = (-\bar{k}) + k$. Podľa Tvrdenia 2.7 a) platí $(-\bar{k}) + k \in \text{relint}(K)$, pretože $k \in K$ a $(-\bar{k}) \in \text{relint}(K)$. Na druhej strane však $(-\bar{k}) + k = -l \in L$, teda celkovo

$$\left[(-\bar{k}) + k\right] \in L \cap \text{relint}(K) \Rightarrow L \cap \text{relint}(K) \neq \emptyset.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Sporom: predpokladajme $L \cap \text{relint}(K) \neq \emptyset$ a $L^\perp \cap [K^* \setminus \text{sub}(K^*)] \neq \emptyset$. Pretože $\vec{0} \in K^*$ a $\vec{0} \in \text{sub}(K^*)$, platí $\vec{0} \notin K^* \setminus \text{sub}(K^*)$. To znamená, že existuje vektor $\vec{0} \neq z \in L^\perp \cap [K^* \setminus \text{sub}(K^*)] \subseteq K^*$. Zoberme $x \in L \cap \text{relint}(K)$, potom podľa Dôsledku 2.5 máme $x^T z > 0$, lebo $x \in \text{relint}(K)$ a $z \in K^* \setminus \text{sub}(K^*)$. Na druhej strane $x^T z = 0$, lebo $x \in L$ a $z \in L^\perp$. To je spor.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Sporom: predpokladajme, že $L^\perp \cap [K^* \setminus \text{sub}(K^*)] = \emptyset$, ale $L + K \neq L + \text{lin}(K)$. Budeme uvažovať dve situácie:

1. $L + K \subset L + \text{lin}(K)$ a zároveň $L + \text{cl}(K) \subset L + \text{lin}(K)$,
2. $L + K \subset L + \text{lin}(K)$, ale $L + \text{cl}(K) = L + \text{lin}(K)$.

1. Pretože $L + K \subseteq L + \text{cl}(K) \subset L + \text{lin}(K)$, potom podľa Tvrdenia 1.9 c) a d), Dôsledku 1.12 d), Tvrdenia 1.13 b) a Lemy 1.15 platí:

$$\begin{aligned} (L + K)^* &\supseteq (L + \text{cl}(K))^* \supset (L + \text{lin}(K))^*, \\ (L^\perp \cap K^*) &\supset L^\perp \cap \text{sub}(K^*). \end{aligned}$$

To však znamená, že

$$(L^\perp \cap K^*) \setminus (L^\perp \cap \text{sub}(K^*)) = L^\perp \cap (K^* \setminus \text{sub}(K^*)) \neq \emptyset.$$

To je však spor.

2. Zrejme $L + \text{cl}(K)$ je vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^n$. To však znamená, že platí

$$\text{relint}(L + \text{cl}(K)) = L + \text{cl}(K). \quad (11)$$

Na druhej strane podľa Tvrdenia 2.8 a) a Lemy 2.4 b) platí

$$\begin{aligned}\operatorname{relint}(L + K) &= \operatorname{relint}(L) + \operatorname{relint}(K) = L + \operatorname{relint}(K), \\ \operatorname{relint}(L + \operatorname{cl}(K)) &= \operatorname{relint}(L) + \operatorname{relint}(\operatorname{cl}(K)) = L + \operatorname{relint}(K).\end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že platí

$$\operatorname{relint}(L + K) = \operatorname{relint}(L + \operatorname{cl}(K)). \quad (12)$$

Spojením vzťahu (11) a vzťahu (12) dostaneme $\operatorname{relint}(L + K) = L + \operatorname{cl}(K)$. Naraz teda platia inklúzie

$$\begin{aligned}L + K &\supseteq \operatorname{relint}(L + K) = L + \operatorname{cl}(K), \\ L + K &\subseteq L + \operatorname{cl}(K).\end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že platí $L + K = L + \operatorname{cl}(K) = L + \operatorname{lin}(K)$, čo je spor s predpokladom v situácii 2.: $L + K \subset L + \operatorname{lin}(K)$. To znamená, že situácia 2. nemôže nastať. $\square$

Dôsledok 3.3. *Nech $L \subseteq \mathbb{R}^n$ je vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^n$ a $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužeľ spĺňajúci Predpoklad 2.1. Nech platí ľubovoľná podmienka z Lemy 3.2. Potom je Minkowského súčet $L + K$ uzavretá množina.*

Dôkaz. Ak platí ľubovoľná podmienka z Lemy 3.2, potom určite platí aj podmienka (i), t. j. $L + K = L + \operatorname{lin}(K)$. Všimnime si, že $L + \operatorname{lin}(K)$ je súčet dvoch vektorových podpriestorov v $\mathbb{R}^n$. Tento súčet je opäť vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^n$ a podľa Vety 1.21 v [22, str. 16] ide o uzavretú množinu. $\square$

Pre plný kužeľ, t. j. $\operatorname{lin}(K) = \mathbb{R}^n$, sa tvrdenia v Leme 3.2 zjednodušia:

Dôsledok 3.4. *Nech $L \subseteq \mathbb{R}^n$ je vektorový priestor a $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je plný kužeľ spĺňajúci Predpoklad 2.1. Potom sú nasledujúce výroky ekvivalentné:*

- (i) $L + K = \mathbb{R}^n$,
- (ii) $L \cap \operatorname{int}(K) \neq \emptyset$,
- (iii) $L^\perp \cap K^* = \{\vec{0}\}$.

Tabuľka 3: Tabuľka ekvivalentných výrokov

	$a)$	$b)$
(i)	$\mathcal{S}(A^T) + K^* = \mathcal{S}(A^T) + \text{lin}(K^*)$	$\mathcal{N}(A) + K = \mathcal{N}(A) + \text{lin}(K)$
(ii)	$\mathcal{S}(A^T) \cap \text{relint}(K^*) \neq \emptyset$	$\mathcal{N}(A) \cap \text{relint}(K) \neq \emptyset$
(iii)	$\mathcal{N}(A) \cap [\text{cl}(K) \setminus \text{sub}(\text{cl}(K))] = \emptyset$	$\mathcal{S}(A^T) \cap [K^* \setminus \text{sub}(K^*)] = \emptyset$

Tabuľka 4: Tabuľka ekvivalentných výrokov pre špicatý kužeľ $\text{cl}(K)$

	$c)$
(i)	$\mathcal{S}(A^T) + K^* = \mathbb{R}^n$
(ii)	$\mathcal{S}(A^T) \cap \text{int}(K^*) \neq \emptyset$
(iii)	$\mathcal{N}(A) \cap \text{cl}(K) = \{\vec{0}\}$

Tabuľka 5: Tabuľka ekvivalentných výrokov pre plný kužeľ K

	$d)$
(i)	$\mathcal{N}(A) + K = \mathbb{R}^n$
(ii)	$\mathcal{N}(A) \cap \text{int}(K) \neq \emptyset$
(iii)	$\mathcal{S}(A^T) \cap K^* = \{\vec{0}\}$

V nasledujúcom texte budeme uvažovať maticu $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, ktorá reprezentuje lineárne zobrazenie $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Nulový priestor matice A budeme označovať $\mathcal{N}(A)$ a riadkový priestor $\mathcal{S}(A^T)$. Pre špeciálne výbery vektorového priestoru L a kužela K v Leme 3.2 dostaneme nasledujúci dôsledok.

Dôsledok 3.5. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužeľ spĺňajúci Predpoklad 2.1. Potom je sada výrokov v Tabuľke 3 a) navzájom ekvivalentná a sada výrokov v Tabuľke 3 b) je navzájom ekvivalentná.*

c) Špeciálne, ak kužeľ $\text{cl}(K)$ je špicatý, a teda K^ je plný, potom sú výroky v Tabuľke 4 ekvivalentné.*

d) Špeciálne, ak kužeľ K je plný, a teda K^ je špicatý, potom sú výroky v Tabuľke 5 ekvivalentné.*

Teraz uvedieme a dokážeme vetu, ktorá dáva do súvislosti podmienky z Tabuľky 3 a)

a uzavretosť kužela $A(\text{cl}(K))$. Obdobná veta pre uzavreté kužele a dôsledky tejto vety sa nachádzajú v [26]. Pri dôkaze spomínanej vety bude užitočná táto lema, ktorá sa tiež nachádza v [26].

Lema 3.6. *Nech $K \subset \mathbb{R}^n$ je kužel splňajúci Predpoklad 2.1. Nech $L \subseteq \text{sub}(K)$ je vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^n$. Potom $K = (L^\perp \cap K) + L$.*

Dôkaz. Použije sa Tvrdenie B.0.14 pre $\mathcal{V} = L \subseteq \text{sub}(K) \subseteq K$. □

Veta 3.7. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužel splňajúci Predpoklad 2.1. Ak je splnená ľubovoľná z podmienok v Tabuľke 3 a), potom je kužel $A(\text{cl}(K))$ uzavretý.*

Dôkaz. Podľa podmienky (ii) v Tabuľke 3 a) platí $\mathcal{S}(A^T) \cap \text{relint}(K^*) \neq \emptyset$, t. j.

$$\{A^T z \mid z \in \mathbb{R}^m\} \cap \text{relint}(K^*) \neq \emptyset,$$

a teda $\exists z_0 \in \mathbb{R}^m : A^T z_0 \in \text{relint}(K^*)$.

Zoberme ľubovoľnú konvergentnú postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset A(\text{cl}(K))$, kde $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \bar{y}$. Ukážeme, že $\bar{y} \in A(\text{cl}(K))$.

Položme $L = \mathcal{N}(A) \cap \text{sub}(\text{cl}(K))$. Podľa Lemy 3.6 máme $\text{cl}(K) = (L^\perp \cap \text{cl}(K)) + L$. Pretože $L \subseteq \mathcal{N}(A)$, máme $A(\text{cl}(K)) = A(L^\perp \cap \text{cl}(K))$.

Pretože $\forall k \in \mathbb{N} : y_k \in A(\text{cl}(K))$, existuje ku každému y_k vektor $x_k \in (L^\perp \cap \text{cl}(K))$, teda $\forall k \in \mathbb{N} \exists x_k \in (L^\perp \cap \text{cl}(K)) : Ax_k = y_k$.

Ukážeme, že postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq L^\perp \cap \text{cl}(K)$ je ohraničená. Predpokladajme sporom, že postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ nie je ohraničená, t. j. $\|x_k\| \rightarrow +\infty$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $\forall k \in \mathbb{N} : x_k \neq \vec{0}$ a vytvorme postupnosť $\{X_k\}_{k=1}^\infty$, pričom $\forall k \in \mathbb{N} : X_k := \frac{x_k}{\|x_k\|}$. Zrejme $\{X_k\}_{k=1}^\infty \subseteq L^\perp \cap \text{cl}(K)$ a platí $\forall k \in \mathbb{N} : \|X_k\| = 1$, teda postupnosť $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ je ohraničená. Podľa Bolzano-Weierstrassovej vety vieme z každej ohraničenej postupnosti vybrať konvergentnú podpostupnosť. Môžeme teda bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že postupnosť $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ je konvergentná, t. j. $X_k \rightarrow X$ pre $k \rightarrow +\infty$.

Kužel $L^\perp \cap \text{cl}(K)$ je prienikom dvoch uzavretých množín, a teda je uzavretý. To znamená, že $X \in L^\perp \cap \text{cl}(K)$. Pretože $\|X\| = 1$ a $X \in L^\perp$, nutne platí $X \notin L$, inak by $X = \vec{0}$, čo by bol spor.

Pretože $L = \mathcal{N}(A) \cap \text{sub}(\text{cl}(K))$ je vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^n$, platí $L^\perp = [\mathcal{N}(A)]^\perp + [\text{sub}(\text{cl}(K))]^\perp = \mathcal{S}(A^T) + \text{lin}(K^*)$. Pretože $X \in L^\perp$, existuje rozklad $X = A^T u + v$, kde $u \in \mathbb{R}^m$ a $v \in \text{lin}(K^*)$. Predpokladajme, že $X \in \text{sub}(\text{cl}(K))$, potom platí

$$1 = X^T X = X^T (A^T u + v) = X^T A^T u = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^T A^T u}{\|x_k\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k^T u}{\|x_k\|} = \frac{\bar{y}^T u}{\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|} = 0,$$

čo je spor. Teda nutne $X \notin \text{sub}(\text{cl}(K))$.

Pretože $X \notin \text{sub}(\text{cl}(K))$, $X \in \text{cl}(K)$ a $A^T z_0 \in \text{relint}(K^*)$, dostávame podľa Tvrdenia 2.3 a):

$$0 < X^T A^T z_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^T A^T z_0}{\|x_k\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k^T z_0}{\|x_k\|} = \frac{\bar{y}^T z_0}{\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|} = 0.$$

To je spor, a teda postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ musí byť ohraňovaná.

Pretože postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ je ohraňovaná, musí nutne obsahovať aspoň jeden hromadný bod $\bar{x}$. Opäť môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ je konvergentná, t. j. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x} \in \text{cl}(K)$, pretože kužel $\text{cl}(K)$ je uzavretý. Ďalej platí $Ax_k = y_k$, a pretože postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ bola konvergentná, dostaneme

$$\bar{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{k \rightarrow \infty} Ax_k = A\bar{x} \in A(\text{cl}(K)).$$

□

Tvrdenie 3.8. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužel spĺňajúci Predpoklad 2.1. Ak platí ľubovoľná podmienka v Tabuľke 3 b), potom kužel $A(K) \subseteq \mathcal{S}(A)$ vektorový podpriestor.*

Dôkaz. Uvažujme podmienku (i) v Tabuľke 3 b), teda $\mathcal{N}(A) + K = \mathcal{N}(A) + \text{lin}(K)$. Teda

$$A(K) = A(\mathcal{N}(A) + K) = A(\mathcal{N}(A) + \text{lin}(K)) = A(\text{lin}(K)) \subseteq \mathcal{S}(A).$$

□

Pre plné a špicaté kužele je možné zhrnúť Vetu 3.7 a Tvrdenie 3.8 do tohto dôsledku.

Dôsledok 3.9. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužel spĺňajúci Predpoklad 2.1.*

Ak $\text{cl}(K)$ je špicatý kužel, t. j. K^ je plný kužel, a platí ľubovoľná podmienka v Tabuľke 4 c), potom je kužel $A(\text{cl}(K))$ uzavretý.*

Ak K je plný kužel, t. j. K^ je špicatý kužel, a platí ľubovoľná podmienka v Tabuľke 5 d), potom je kužel $A(K)$ vektorový podpriestor.*

V Príklade 1.16 sme ukázali, že Minkowského súčet dvoch uzavretých množín nemusí byť vo všeobecnosti uzavretá množina. V topológii je známa postačujúca podmienka na uzavretosť Minkowského súčtu dvoch množín (pozri [3]): ak jedna z množín je kompaktná a druhá je uzavretá, potom Minkowského súčet týchto dvoch množín je uzavretá množina. Kompaktnosť (sekvenčná kompaktnosť) množiny je v tomto prípade dôležitý predpoklad, pretože zaručuje existenciu konvergentnej podpostupnosti.

Pre nekompaktné množiny so špeciálnou štruktúrou, napríklad vektorový podpriestor alebo konvexný (uzavretý) kužel, je možné odvodiť iné postačujúce podmienky na uzavretosť Minkowského súčtu dvoch množín, ktoré uvádzame v Tvrdení 3.10. Toto tvrdenie možno nájsť bez dôkazu v [20, str. 15] a v [26, str. 9].

Tvrdenie 3.10. *Nech $L \subseteq \mathbb{R}^n$ je vektorový podpriestor a nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužel spĺňajúci Predpoklad 2.1. Ak platí ľubovoľná z podmienok v Leme 3.2, potom je Minkowského suma $L^\perp + K^*$ uzavretá množina.*

Dôkaz. Definujme $\mathcal{K} := L^\perp \times K^*$ a uvažujme maticu $\mathcal{A} = (I_{n \times n} \mid I_{n \times n})_{n \times 2n}$. Potom $\mathcal{A}(\mathcal{K}) = L^\perp + K^*$. Zrejme $\mathcal{S}(\mathcal{A}^T) = \{(x^T \mid x^T)^T \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. Počítajme relatívne vnútro kužela $\mathcal{K}^*$ vzhľadom na vektorový priestor $L \times \text{lin}(K)$. Podľa Tvrdenia 2.8 b) platí $\text{relint}(\mathcal{K}^*) = \text{relint}((L^\perp \times K^*)^*) = \text{relint}(L \times K) = \text{relint}(L) \times \text{relint}(K) = L \times \text{relint}(K)$. Počítajme $\mathcal{S}(\mathcal{A}^T) \cap (L \times \text{relint}(K))$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathcal{A}^T) \cap (L \times \text{relint}(K)) &= \{(x^T \mid x^T)^T \mid x \in \mathbb{R}^n\} \cap \{(l^T \mid k^T)^T \mid l \in L, k \in \text{relint}(K)\} \\ &= \{(x^T \mid x^T)^T \mid x \in L \cap \text{relint}(K)\}. \end{aligned}$$

To ale znamená, že $\mathcal{S}(\mathcal{A}^T) \cap (L \times \text{relint}(K)) \neq \emptyset \Leftrightarrow L \cap \text{relint}(K) \neq \emptyset$. Teda podmienka (ii) v Dôsledku 3.5 v Tabuľke 3 a) je splnená práve vtedy, keď je splnená podmienka

(ii) v Leme 3.2, respektíve ľubovoľná iná podmienka v tejto leme. Splnenie podmienok v Leme 3.2 však v tvrdení predpokladáme, a teda sú splnené aj podmienky v Dôsledku 3.5 v Tabuľke 3 a) pre kužel $\mathcal{K}$ a maticu $\mathcal{A}$. Navyše, je ľahké nahliadnuť, že kužel $\mathcal{K}$ spĺňa aj Predpoklad 2.1 a je uzavretý.

Uzavretosť súčtu $L^\perp + K^*$ vyplýva z Vety 3.7, ktorá sa použije na kužel $\mathcal{K}$ a maticu $\mathcal{A}$. □

Dôsledok 3.11. a) *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužel, ktorý spĺňa Predpoklad 2.1. Ak platí ľubovoľná podmienka v Tabuľke 3 a), potom kužel $\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)$ je uzavretá množina. Navyše, kužel $\mathcal{S}(A^T) + K^*$ je uzavretá množina.*

b) *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužel, ktorý spĺňa Predpoklad 2.1. Ak platí ľubovoľná podmienka v Tabuľke 3 b), potom kužel $\mathcal{S}(A^T) + K^*$ je uzavretá množina. Navyše, kužel $\mathcal{N}(A) + K$ je uzavretá množina.*

Dôkaz. a) V Tvrdení 3.10 položíme $L = \mathcal{S}(A^T)$ a použijeme ho na kužel K^* , dostaneme $\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)$ je uzavretá množina. Navyše, $\mathcal{S}(A^T) + K^*$ je uzavretá množina, pretože $\mathcal{S}(A^T) + K^* = \mathcal{S}(A^T) + \text{lin}(K^*)$, a teda ide o vektorový podpriestor.

b) V Tvrdení 3.10 položíme $L = \mathcal{N}(A)$ a použijeme ho na kužel K , dostaneme $\mathcal{S}(A^T) + K^*$ je uzavretá množina. Navyše, $\mathcal{N}(A) + K$ je uzavretá množina, pretože $\mathcal{N}(A) + K = \mathcal{N}(A) + \text{lin}(K)$, a teda ide o vektorový podpriestor. □

Pre špicaté a plné kužele je možné z Tvrdenia 3.10 odvodiť tento dôsledok.

Dôsledok 3.12. a) *Nech $\text{cl}(K) \subset \mathbb{R}^n$ je špicatý kužel, t. j. K^* je plný kužel, ktorý spĺňa Predpoklad 2.1. Ak platí ľubovoľná podmienka v Tabuľke 4 c), potom Minkowského suma $\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)$ uzavretá množina a $\mathcal{S}(A^T) + K^* = \mathbb{R}^n$ je tiež uzavretá množina.*

b) *Nech $K \subset \mathbb{R}^n$ je plný kužel, t. j. K^* je špicatý kužel, ktorý spĺňa Predpoklad 2.1. Ak platí ľubovoľná podmienka v Tabuľke 5 d), potom Minkowského suma $\mathcal{S}(A^T) + K^*$ uzavretá množina a $\mathcal{N}(A) + K = \mathbb{R}^n$ je tiež uzavretá množina.*

Na záver kapitoly uvedieme tvrdenie, ktoré dáva do súvislosti uzavretosť Minkowského súčtu množín s uzavretosťou obrazu lineárnej transformácie. Pre surjektívne lineárne zobrazenie možno nájsť dôkaz v [4]. Pre všeobecné lineárne zobrazenie možno nájsť dôkaz v [6].

Tvrdenie 3.13. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužeľ, ktorý spĺňa Predpoklad 2.1. Potom platí*

a) $\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)$ je uzavretý kužeľ $\iff A(\text{cl}(K))$ je uzavretý kužeľ,

b) $\mathcal{N}(A) + K$ je uzavretý kužeľ $\iff A(K)$ je uzavretý kužeľ.

Poznámka. Uzavretosť kužela $\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)$ neimplikuje uzavretosť kužela $\mathcal{N}(A) + K$. Uvažujme kužeľ $K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z \geq 0\} \cup \{(0, 0, 0)^T\}$ a vektorový priestor $\mathcal{N}(A) = \{t \cdot (0, 0, 1)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$. Dá sa ukázať, že platí

$$\mathcal{N}(A) + K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, 0)^T\},$$

$$\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K) = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \in \mathbb{R}\}.$$

4 Vety o alternatívach

V tejto kapitole uvedieme štyri vety o alternatívach, ktoré popisujú vlastnosti lineárnych sústav nad kuželmi. Vety o alternatívach sa rozdeľujú do dvoch skupín v závislosti na tom, či sa vzťahujú k primárnej úlohe kónického programovania alebo k duálnej úlohe kónického programovania. Do tohto textu tieto vety preberáme z článku [26, str. 10] a formulujeme ich bez predpokladu uzavretosti kužela. Pri dôkazoch nevyužívame vetu o separovacej nadrovine, ale základné poznatky o kuželloch z kapitoly 1 a poznatky z lineárnej algebry. Podobné vety boli dokázané v [7], [19] a [28].

V nasledujúcom texte budeme uvažovať kužel $K \subseteq \mathbb{R}^n$, ktorý spĺňa Predpoklad 2.1, maticu A typu $m \times n$, kde $m \leq n$ a vektory $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Z lineárnej algebry vieme, že systém $Ax = b$ má riešenie práve vtedy, keď $b \in \mathcal{S}(A)$, teda ak vektor b možno zapísať ako lineárnu kombináciu stĺpcov matice A . V prípade $b \neq \vec{0}$ možno každé riešenie systému $Ax = b$ reprezentovať ako súčet partikulárneho riešenia $\vec{0} \neq x_P \in \mathcal{S}(A^T)$ a riešenia homogénneho systému $x_H \in \mathcal{N}(A)$, t. j. $Ax_H = \vec{0}$. Ďalej je známe, že partikulárne riešenie je jednoznačné: ak by existovali dve rôzne partikulárne riešenia, potom ich rozdiel by riešil homogénny systém, teda by bol elementom $\mathcal{N}(A)$, ale zároveň by musel byť elementom $\mathcal{S}(A^T)$. Vzhľadom na to, že $\mathcal{N}(A) = [\mathcal{S}(A^T)]^\perp$, je zrejmé, že rozdiel dvoch partikulárnych riešení by musel byť nulový vektor. Riešenie sústavy $Ax = b$ možno teda symbolicky zapísať v tvare $x_P + \mathcal{N}(A) = \{x_P + x_H \mid x_H \in \mathcal{N}(A)\}$.

K partikulárnemu riešeniu x_P systému $Ax = b \neq \vec{0}$ vytvorme kužel $\text{cone}[x_P] := \{t \cdot x_P \mid t \geq 0\}$. Duálny kužel k tomuto kuželu má tvar $\text{cone}[x_P]^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^T x_P \geq 0\}$, ide teda o polopriestor, v ktorom sa nachádza x_P , ale nie lineárny obal $\text{span}[x_P] = \{t \cdot x_P \mid t \in \mathbb{R}\}$. Všimnime si, že kužel $\text{cone}[x_P]$ je konvexný, uzavretý a nie je to lineárny podpriestor, a teda spĺňa Predpoklad 2.1. Z definície tohto kužela je zrejmé, že ide o špicatý kužel. Duálny kužel $\text{cone}[x_P]^*$ je teda plný, pričom je možné ukázať, že platí

$$\text{int}(\text{cone}[x_P]^*) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^T x_P > 0\}.$$

Pre kužel $\text{cone}[x_P]$ platí takéto tvrdenie.

Tvrdenie 4.1. *Nech $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\vec{0} \neq b \in \mathcal{S}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ a nech $x_P \in \mathcal{S}(A^T)$ je partikulárne riešenie systému $Ax = b$. Potom Minkowského súčet $\mathcal{N}(A) + \text{cone}[x_P]$ je uzavretá množina a $\mathcal{S}(A^T) \cap \text{int}(\text{cone}[x_P]^*) \neq \emptyset$.*

Dôkaz. Pretože $x_P \in \mathcal{S}(A^T)$, platí $\text{cone}[x_P] \subseteq \mathcal{S}(A^T)$. To však znamená, že platí

$$\mathcal{N}(A) \cap \text{cone}[x_P] = \{\vec{0}\}.$$

Podľa Dôsledku 3.12 a) je teda kužeľ $\mathcal{N}(A) + \text{cone}[x_P]$ uzavretý. Podľa Dôsledku 3.5 (ii) v Tabuľke 4 c) platí $\mathcal{S}(A^T) \cap \text{int}(\text{cone}[x_P]^*) \neq \emptyset$. $\square$

Teraz už môžeme pristúpiť k vysloveniu a dokázaniu primárnych viet o alternatívach.

4.1 Primárne vety o alternatívach

4.1.1 Primárna veta o alternatívach

Veta 4.2. *Platí najviac jeden z nasledujúcich výrokov.*

1. $\exists x \in \text{cl}(K) : Ax = b$.
2. $\exists z \in \mathbb{R}^m : A^T z \in K^* \wedge z^T b < 0$.

Navyše, ak je kužeľ $\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)$ je uzavretý, potom platí práve jeden z výrokov 1. a 2.

Dôkaz. Dôkaz rozdelíme na 3 časti.

A) Dôkaz vykonáme najprv pre $b \neq \vec{0}$ a s predpokladom, že existuje nejaké riešenie systému $Ax = b$, t. j. $b \in \mathcal{S}(A)$.

1.) Ukážeme, že výroky 1. a 2. nemôžu naraz platiť. Predpokladajme sporom, že platí:

$$\{\exists x \in \text{cl}(K) : Ax = b\} \wedge \{\exists z \in \mathbb{R}^m : A^T z \in K^* \wedge z^T b < 0\}$$

Podľa výroku 1. existuje $\bar{x} \in \text{cl}(K) : A\bar{x} = b$ a podľa predpokladu o riešiteľnosti systému existuje partikulárne riešenie $x_P \in \mathcal{S}(A^T)$. Potom $A(\bar{x} - x_P) = \vec{0}$. Podľa výroku 2. existuje $\bar{z} \in \mathbb{R}^m : A^T \bar{z} \in K^*, \bar{z}^T b < 0$. Lenže zároveň platí

$$\bar{z}^T A\bar{x} = \bar{z}^T Ax_P = \bar{z}^T b \geq 0.$$

Posledná nerovnosť vychádza z Definície 1.8, pretože $A^T \bar{z} \in K^*$ a $\bar{x} \in \text{cl}(K)$. To je ale spor.

2.) Ukážeme, že pri predpoklade o uzavretosti $\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)$ výroky 1. a 2. nemôžu naraz neplatíť. Predpokladajme sporom, že platí:

$$\{\nexists x \in \text{cl}(K) : Ax = b\} \wedge \{\nexists z \in \mathbb{R}^m : A^T z \in K^* \wedge z^T b < 0\}$$

Všimnime si, že inklúzia

$$\mathcal{S}(A^T) \cap K^* \subseteq \mathcal{S}(A^T) \cap \text{cone}[x_P]^*. \quad (13)$$

je ekvivalentná neplatnosti výroku 2., pretože

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(A^T) \cap K^* &\subseteq \mathcal{S}(A^T) \cap \text{cone}[x_P]^* \\ &\Downarrow \\ \{A^T z \mid A^T z \in K^*\} &\subseteq \{A^T z \mid z^T A x_P = z^T b \geq 0\} \\ &\Downarrow \\ \forall z \in \mathbb{R}^m : A^T z \in K^* &\Rightarrow z^T b \geq 0 \\ &\Downarrow \\ \nexists z \in \mathbb{R}^m : A^T z \in K^* &\wedge z^T b < 0 \end{aligned}$$

Podľa predpokladu inklúzia (13) platí. Pre príslušné duálne kužele teda platí

$$(\mathcal{S}(A^T) \cap \text{cone}[x_P]^*)^* \subseteq (\mathcal{S}(A^T) \cap K^*)^*,$$

kde $(\mathcal{S}(A^T) \cap \text{cone}[x_P]^*)^* = \text{cl}(\mathcal{N}(A) + \text{cone}[x_P]) = \mathcal{N}(A) + \text{cone}[x_P]$, pričom posledná rovnosť vychádza z Tvrdenia 4.1 a $(\mathcal{S}(A^T) \cap K^*)^* = \text{cl}(\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K))$. Za predpokladu uzavretosti kužela $\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)$ teda celkovo platí:

$$\mathcal{N}(A) + \text{cone}[x_P] \subseteq \mathcal{N}(A) + \text{cl}(K).$$

Lenže to znamená podľa Tvrdenia B.0.11 a), že $x_P \in \mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)$. A teda existuje rozklad $x_P = x_H + x_K$, kde $x_H \in \mathcal{N}(A)$ a $x_K \in \text{cl}(K)$. A ďalej $b = Ax_P = A(x_H + x_K) = Ax_K$, teda existuje $x_K \in \text{cl}(K) : Ax_K = b$. To je však spor s neplatnosťou výroku 1.

B) Uvažujme teraz sústavu, kde $b = \vec{0}$. Automaticky platí výrok 1. a neplatí výrok 2., pretože $\vec{0} \in \text{cl}(K)$.

C) Uvažujme teraz systém $Ax = b$, ktorý vôbec nemá riešenie, t. j. $\nexists x \in \mathbb{R}^n : Ax = b$. Potom podľa známej Fredholmovej alternatívy (pozri [11, str. 291]) $\exists z \in \mathbb{R}^m : A^T z = \vec{0} \in K^*$ s vlastnosťou $b^T z < 0$. Výrok 2. je teda splnený. $\square$

Veta 4.2 sa dá dokázať aj iným spôsobom: využitím Lemy 1.10 a Tvrdenia 3.13. Tento dôkaz má však istú výhodu: poskytuje návod, ako zostrojiť príklad, v ktorom kužel $\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)$ nie je uzavretý a neplatí ani výrok 1., ani výrok 2. Takýto príklad uvidíme neskôr.

Poznámka. Upustíme od požiadavky uzavretosti kužela $\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)$. Uvažujme konvexný kužel $\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)$, ktorý nie je uzavretý. Existuje teda vektor $x \notin \mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)$, ale $x \in \text{cl}(\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K))$. Z konvexnosti tohto kužela však vyplýva, že vektor $x \notin \text{relint}(\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K))$, a teda musí sa nachádzať na relatívnej hranici $x \in \partial(\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K))$ vzhľadom na priestor $\text{lin}(\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K))$. Podľa Tvrdenia 2.3 b) vyplýva, že existuje $y \in (\mathcal{S}(A^T) \cap K^*) \setminus \text{sub}(\mathcal{S}(A^T) \cap K^*) : y^T x \leq 0$. Pretože však $x \in \text{cl}(\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)) = (\mathcal{S}(A^T) \cap K^*)^*$, dostávame $y^T x = 0$. Navyše $y \in \mathcal{S}(A^T)$, teda existuje $z \in \mathbb{R}^m : y = A^T z$. Nakoniec dostávame $y^T x = z^T Ax = z^T Ax_P = z^T b = 0$. Ak teda upustíme požiadavky na uzavretosť $\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)$, môže nastať prípad, keď neplatí ani výrok 1., ani výrok 2.

Príklad 4.3. Uvažujme kužel $K = K^* = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\}$ a sústavu $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dá sa ľahko nahliadnuť, že

$$\begin{aligned} x_P &= (0, 1, 0)^T, \\ \mathcal{N}(A) &= \text{span}[(1, 0, -1)^T], \\ \mathcal{S}(A^T) &= \text{span}[(1, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T]. \end{aligned}$$

Ukážeme, $x_P \notin \mathcal{N}(A) + K$. Ako vlastne vyzerá súčet $\mathcal{N}(A) + K$?

$$\mathcal{N}(A) + K = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ q\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, t \in \mathbb{R}, q \geq 1 \right\}$$

Ak by $x_P \in \mathcal{N}(A) + K$, muselo by platiť $x_1 = -t$, $x_2 = 1$ a $-t + q\sqrt{t^2 + 1} = 0$, resp. $(1 - q^2)t^2 = q^2$, avšak $q \geq 1$, a teda nie je možné nájsť vhodné t a $q \geq 1$.

Zoberme krivku

$$\Gamma(t) = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 1 + \frac{1}{t} \\ \sqrt{t^2 + \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zrejme $\forall t \in \mathbb{R} : \Gamma(t) \subseteq K$. Navyše

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 1 + \frac{1}{t} \\ \sqrt{t^2 + \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \frac{1}{t} \\ -t + \sqrt{t^2 + \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Pre $t \rightarrow +\infty$ však dostaneme vektor $x_P = (0, 1, 0)^T$. To ale znamená, že kužeľ $\mathcal{N}(A) + K$ nie je uzavretý, pretože $x_P \notin \mathcal{N}(A) + K$, ale našli sme postupnosť v $\mathcal{N}(A) + K$, ktorá konverguje k bodu x_P .

Dá sa ďalej presvedčiť, že

$$\mathcal{N}(A) + K = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 > 0 \right\} \cup \left\{ (x_1, 0, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0 \right\}.$$

Ďalej máme

$$A^T z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

Aby $A^T z \in K^*$, musíme požadovať, aby $z_1 \geq \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Teda nutne $z_1 \geq 0$ a $z_2 = 0$. To znamená, že $\forall z_1 \geq 0 : (z_1, 0, z_1)^T \in K^*$, ale $z^T b = z_1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

V tomto prípade neexistuje riešenie $x \in K : Ax = b$, ale neexistuje ani $z \in \mathbb{R}^m : A^T z \in K^*, b^T z < 0$. Kvôli neuzavretosti kužela $\mathcal{N}(A) + K$ neplatí ani výrok 1., ani výrok 2.

Poznámka. Alternatívy vo Vete 4.2 majú zaujímavú interpretáciu v prípade, že existuje nejaké riešenie systému $Ax = b$: buď existuje riešenie sústavy $Ax = b$, ktoré sa nachádza v kuželi $\text{cl}(K)$, alebo existuje prvok z množiny $\mathcal{S}(A^T) \cap K^*$, ktorý zvierá s partikulárnym riešením tupý uhol.

4.1.2 Primárna veta o alternatívach pre plný kužeľ

Uvedieme ešte jednu vetu o alternatívach, ktorá platí špeciálne pre plné kužele. Táto veta nevyžaduje uzavretosť kužela K ani uzavretosť jeho lineárneho obrazu. Dôkaz tejto vety možno nájsť v [26, str. 10].

Veta 4.4. *Nech K je plný konvexný kužeľ. Potom platí práve jeden z nasledujúcich výrokov.*

1. $\exists x \in \text{int}(K) : Ax = b \wedge \text{rank}(A) = m.$
2. $\exists \vec{0} \neq z \in \mathbb{R}^m : A^T z \in K^* \wedge z^T b \leq 0.$

4.2 Duálne vety o alternatívach

Pred uvedením a dokázaním duálnych viet o alternatívach, podobne ako pri primárnych vetách o alternatívach, uvedieme najprv pomocné vzťahy a tvrdenia. V duálnych vetách o alternatívach bude hrať dôležitú úlohu vektor $s := c - A^T y$, kde $y \in \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}^n$ je pevný vektor. Vektor c možno jednoznačne rozložiť na dve zložky: $c_H \in \mathcal{N}(A)$ a $c_P \in \mathcal{S}(A^T)$ tak, aby $c = c_H + c_P$; pre $c \notin \mathcal{S}(A^T)$ platí $c_H \neq \vec{0}$. Navyše, zložka c_P sa dá vyjadriť v tvare $c_P = A^T y_P$ pre vhodné $y_P \in \mathbb{R}^m$. Vektor s možno potom zapísať v tvare $s = c_H - A^T(y - y_P)$. Pre $z \in \mathcal{N}(A)$ potom platí $z^T s = z^T c = z^T c_H$.

Pre $c \notin \mathcal{S}(A^T)$ vytvorme kužeľ $\text{cone}[c_H] := \{t \cdot c_H \mid t \geq 0\}$. Duálny kužeľ k tomuto kuželu má tvar $\text{cone}[c_H]^* = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u^T c_H \geq 0\}$, opäť teda ide o polopriestor, v ktorom sa nachádza $\text{cone}[c_H]$, ale nie lineárny obal $\text{span}[c_H] = \{t \cdot c_H \mid t \in \mathbb{R}\}$. Kužeľ $\text{cone}[c_H]$ je špicatý, konvexný, uzavretý a nie je to lineárny podpriestor, teda spĺňa Predpoklad 2.1. Zo špicatosti kužela $\text{cone}[c_H]$ vyplýva plnosť kužela $\text{cone}[c_H]^*$. Navyše $\text{int}(\text{cone}[c_H]^*) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u^T c_H > 0\}$. Ďalej je možné odvodiť analogické tvrdenie k Tvrdeniu 4.1.

Tvrdenie 4.5. *Nech $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ a nech $c_H \in \mathcal{N}(A)$. Potom Minkowského súčet $\mathcal{S}(A^T) + \text{cone}[c_H]$ je uzavretá množina a $\mathcal{N}(A) \cap \text{int}(\text{cone}[c_H]^*) \neq \emptyset$.*

Dôkaz. Pretože $c_H \in \mathcal{N}(A)$, platí $\mathcal{S}(A^T) \cap \text{cone}[c_H] = \{\vec{0}\}$. Platí podmienka (iii) z Tabuľky 5 d) a podľa Dôsledku 3.12 je Minkowského súčet $\mathcal{S}(A^T) + \text{cone}[c_H]$ uzavretá množina. Podľa (ii) z Tabuľky 5 d) navyše platí $\mathcal{N}(A) \cap \text{int}(\text{cone}[c_H]^*) \neq \emptyset$. $\square$

4.2.1 Duálna veta o alternatívach

Veta 4.6. *Najviac jedno z nasledujúcich tvrdení je pravdivé.*

1. $\exists y \in \mathbb{R}^m : c - A^T y \in K^*.$

2. $\exists z \in \text{cl}(K) : Az = \vec{0} \wedge c^T z < 0.$

Navyše, ak je kužel $\mathcal{S}(A^T) + K^$ uzavretý, potom platí práve jeden z výrokov 1. a 2.*

Dôkaz. Dôkaz rozdelíme na 3 časti.

A) Dôkaz vykonáme najprv pre $c = (c_H + c_P) \notin \mathcal{S}(A^T)$, t. j. $c_H \neq \vec{0}$, a $\mathcal{N}(A) \neq \{\vec{0}\}$.

1.) Ukážeme, že obe alternatívy naraz platiť nemôžu. Predpokladajme, že platí

$$\left\{ \exists y \in \mathbb{R}^m : c - A^T y \in K^* \right\} \wedge \left\{ \exists z \in \text{cl}(K) : Az = \vec{0} \wedge c^T z < 0 \right\}.$$

Zoberme teda $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ a $\bar{z} \in \text{cl}(K)$, ktoré spĺňajú výrok 1. a výrok 2. Z vlastností duálneho kužela, z Definície 1.8, však máme

$$\bar{z}^T (c - A^T \bar{y}) = \bar{z}^T c \geq 0;$$

to je spor s platnosťou výroku 2.

2.) Ukážeme, že ak je kužel $\mathcal{S}(A^T) + K^*$ uzavretý, obe alternatívy nemôžu naraz neplatiť.

Predpokladajme, že platí

$$\left\{ \forall y \in \mathbb{R}^m : c - A^T y \notin K^* \right\} \wedge \left\{ \forall z \in \text{cl}(K) : Az = \vec{0} \Rightarrow c^T z \geq 0 \right\}.$$

Všimnime si, že inklúzia

$$\mathcal{N}(A) \cap \text{cl}(K) \subseteq \mathcal{N}(A) \cap \text{cone}[c_H]^*. \quad (14)$$

je ekvivalentná neplatnosti výroku 2., pretože

$$\begin{aligned}
& \mathcal{N}(A) \cap \text{cl}(K) \subseteq \mathcal{N}(A) \cap \text{cone}[c_H]^* \\
& \Updownarrow \\
& \{z \mid Az = \vec{0}, z \in \text{cl}(K)\} \subseteq \{z \mid Az = \vec{0}, z^T c_H = z^T c \geq 0\} \\
& \Updownarrow \\
& \forall z \in \text{cl}(K) : Az = \vec{0} \Rightarrow z^T c \geq 0 \\
& \Updownarrow \\
& \nexists z \in \text{cl}(K) : Az = \vec{0} \wedge z^T c < 0
\end{aligned}$$

Inklúzia (14) podľa predpokladu platí. Pre príslušné duálne kužele dostaneme vzťah

$$\mathcal{S}(A^T) + \text{cone}[c_H] \subseteq \text{cl}(\mathcal{S}(A^T) + K^*) = \mathcal{S}(A^T) + K^*,$$

a teda $c_H \in \mathcal{S}(A^T) + K^*$. To ale znamená, že

$$\exists y \in \mathbb{R}^m \exists k^* \in K^* : c_H = A^T(y - y_P) + k^*,$$

respektíve $c - A^T y \in K^*$. To je však spor s neplatnosťou výroku 1.

B) Ak $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$, potom $\text{rank}(A) = n = m$. Potom pre $k^* \in K^*$ máme $y = (A^T)^{-1}(c - k^*)$, t. j. automaticky platí výrok 1. a neplatí výrok 2.

C) Ak $c \in \mathcal{S}(A^T)$, potom $\forall z \in \mathcal{N}(A) : z^T c = 0$, teda neplatí výrok 2. Platí však výrok 1., pretože vektor c sa dá zapísať v tvare $c = A^T y_P$ pre vhodné $y_P \in \mathbb{R}^m$. To ale znamená, že pre $y = y_P$ máme $A^T y_P - A^T y_P = \vec{0} \in K^*$. $\square$

Poznámka. V prípade, keď kužel $\mathcal{S}(A^T) + K^*$ nie je uzavretý, existuje $c_H \in \text{cl}(\mathcal{S}(A^T) + K^*)$, ale $c_H \notin \mathcal{S}(A^T) + K^*$. Pretože kužel $\mathcal{S}(A^T) + K^*$ je konvexný, vektor $c_H \notin \text{relint}(\mathcal{S}(A^T) + K^*)$, ale $c_H \in \partial(\mathcal{S}(A^T) + K^*)$, kde $\partial(\mathcal{S}(A^T) + K^*)$ je relatívna hranica vzhľadom na $\text{lin}(\mathcal{S}(A^T) + K^*)$. Podľa Tvrdenia 2.3 a) existuje $z \in (\mathcal{N}(A) \cap \text{cl}(K)) \setminus \text{sub}(\mathcal{N}(A) \cap \text{cl}(K)) : z^T c_H \leq 0$. Pretože však $c_H \in \text{cl}(\mathcal{S}(A^T) + K^*) = (\mathcal{N}(A) \cap K)^*$, platí $z^T c_H = 0$. Navyše, $z \in \mathcal{N}(A)$ a teda platí $z^T c_H = z^T(c_H - A^T y_P) = z^T c = 0$. Môže teda nastať prípad, keď neplatí výrok 1. ani výrok 2.

4.2.2 Duálna veta o alternatívach pre špicatý kužeľ

Uvedieme ešte jednu vetu o alternatívach, ktorá platí špeciálne pre špicaté kužele. Dôkaz tejto vety možno nájsť v [26, str. 11].

Veta 4.7. *Nech $cl(K)$ je špicatý kužeľ. Potom platí práve jedno z nasledujúcich tvrdení.*

1. $\exists y \in \mathbb{R}^m : c - A^T y \in \text{int}(K^*)$.
2. $\exists z \in cl(K), z \neq \vec{0} : Az = \vec{0}, c^T z \leq 0$.

5 Dualita v kónickom programovaní

5.1 Primárna a duálna úloha kónického programovania

V tejto časti, podobne ako v [26, str. 4], uvedieme primárnu a duálnu úlohu kónického programovania, základnú terminológiu a značenie. Duálnu úlohu odvodíme pomocou konceptu Lagrangeovej duality.

Nech $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ sú dané vektory a $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ je daná $m \times n$ matica, kde $m \leq n$. Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je **uzavretý** konvexný kužeľ. Primárna úloha kónického programovania má potom tvar

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ & Ax = b, \\ & x \in K. \end{aligned} \tag{15}$$

Pre primárnu úlohu (15) sa definuje množina primárne prípustných riešení

$$\mathcal{P} := \{x \in K \mid Ax = b\}$$

a množina ostro (striktne) prípustných riešení

$$\mathcal{P}^0 := \{x \in \text{relint}(K) \mid Ax = b\}.$$

Ďalej sa definuje optimálna hodnota úlohy (15) ako $p^* := \inf_x \{c^T x \mid x \in \mathcal{P}\}$, ak $\mathcal{P} \neq \emptyset$ a $p^* := +\infty$, ak $\mathcal{P} = \emptyset$. Množina optimálnych riešení sa definuje ako $\mathcal{P}^* := \{x \in \mathcal{P} \mid c^T x = p^*\}$.

Duálnu úlohu možno odvodiť štandardnou Lagrangeovou technikou: k primárnej úlohe sa definuje Lagrangeova funkcia $L : K \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ nasledovne

$$L(x, y) = c^T x - y^T (Ax - b) = x^T (c - A^T y) + y^T b. \tag{16}$$

Počítajme $G(y) := \inf_{x \in K} L(x, y)$:

$$G(y) = \inf_{x \in K} L(x, y) = y^T b + \inf_{x \in K} x^T (c - A^T y).$$

Z Definície 1.8 duálneho kužela možno vyvodiť ohraničenie $x^T(c - A^T y) \geq 0$, ak $c - A^T y \in K^*$. V opačnom prípade môže výraz $x^T(c - A^T y)$ nadobúdať ľubovoľne malé hodnoty, teda

$$\inf_{x \in K} x^T(c - A^T y) = \begin{cases} 0, & c^T - A^T y \in K^*, \\ -\infty, & \text{inak.} \end{cases}$$

Lagrangeova duálna úloha k primárnej úlohe kónického programovania má teda tvar

$$\begin{aligned} \max_y y^T b \\ c - A^T y \in K^*. \end{aligned} \quad (17)$$

Ak sa zavedie nová premenná $s := c - A^T y \in K^*$, úlohu (17) možno formulovať v tvare

$$\begin{aligned} \max_{y, s} y^T b \\ A^T y + s = c \\ s \in K^*. \end{aligned} \quad (18)$$

Pre duálnu úlohu v tvare (18) sa definuje množina duálne prípustných riešení

$$\mathcal{D} := \{(y, s) \in \mathbb{R}^m \times K^* \mid A^T y + s = c\},$$

množina ostro (striktne) duálne prípustných riešení

$$\mathcal{D}^0 := \{(y, s) \in \mathbb{R}^m \times \text{relint}(K^*) \mid A^T y + s = c\}.$$

Optimálna hodnota sa definuje ako $d^* := \sup_{y, s} \{b^T y \mid (y, s) \in \mathcal{D}\}$, ak $\mathcal{D} \neq \emptyset$ a $d^* := -\infty$, ak $\mathcal{D} = \emptyset$. Množina optimálnych riešení duálnej úlohy sa definuje ako $\mathcal{D}^* := \{(y, s) \in \mathcal{D} \mid b^T y = d^*\}$.

Poznámka. Ak $\text{rank}(A) = m$, potom medzi duálnymi premennými y a s existuje jednoznačné zobrazenie, pretože sústava $A^T y = c - s$ má pre vektor $(c - s) \in \mathcal{S}(A^T)$ práve jedno riešenie: teda ak pre nejaký vektor $s \in K^*$ platí $(c - s) \in \mathcal{S}(A^T)$, potom existuje práve jeden vektor $y \in \mathbb{R}^m$, pre ktorý platí $A^T y = c - s$.

Pozorovanie. Pri predpoklade ostrej prípustnosti primárnej úlohy (15), t. j. $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$, nie je nutné, aby bol kužel K uzavretý. Predpokladajme, že platí $K \neq \text{cl}(K)$. Množiny $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}^0$ sa dajú vyjadriť v tomto tvare

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \cap K \\ \mathcal{P}^0 &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \cap \text{relint}(K) = \text{relint}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}) \cap \text{relint}(K). \end{aligned}$$

Pretože $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$, platí podľa [5, str. 32] vzťah

$$\begin{aligned}\text{cl}(\mathcal{P}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \cap \text{cl}(K) \\ &= \{x \in \text{cl}(K) \mid Ax = b\}.\end{aligned}$$

Navyše sa dá jednoducho ukázať, že optimálna hodnota účelovej funkcie sa zachová, t. j. platí $\inf_x \{c^T x \mid x \in \mathcal{P}\} = \inf_x \{c^T x \mid x \in \text{cl}(\mathcal{P})\}$. Zrejme platí nerovnosť

$$\inf_x \{c^T x \mid x \in \text{cl}(\mathcal{P})\} \leq \inf_x \{c^T x \mid x \in \mathcal{P}\}.$$

Zoberme teraz ľubovoľné ale pevné $\bar{x} \in \text{cl}(\mathcal{P})$. To znamená, že existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{P}$, že $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$. Platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : c^T x_n \geq \inf_x \{c^T x \mid x \in \mathcal{P}\}.$$

Zo spojitosti funkcie $c^T x$ dostaneme $c^T x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c^T \bar{x}$. To ale znamená

$$c^T \bar{x} \geq \inf_x \{c^T x \mid x \in \mathcal{P}\}.$$

Pretože $\bar{x}$ bolo ľubovoľné, dostaneme

$$\inf_x \{c^T x \mid x \in \text{cl}(\mathcal{P})\} \geq \inf_x \{c^T x \mid x \in \mathcal{P}\},$$

a teda $\inf_x \{c^T x \mid x \in \text{cl}(\mathcal{P})\} = \inf_x \{c^T x \mid x \in \mathcal{P}\}$. Duálna úloha ostane nezmenená vďaka Tvrdeniu 1.9 d).

5.2 Slabá dualita

Výsledky v tejto kapitole sú štandardné výsledky, ktoré vyplývajú priamo z konceptu Lagrangeovej duality. V tejto práci ich pre úplnosť uvádzame aj s dôkazmi.

Veta 5.1 (Slabá dualita). *Pre ľubovoľné primárne prípustné riešenie $x \in \mathcal{P}$ a pre ľubovoľné duálne prípustné riešenie $(y, s) \in \mathcal{D}$ platí*

$$c^T x - b^T y = s^T x \geq 0. \quad (19)$$

Dôkaz. Pretože pre prípustné x a s platí: $s \in K^*$ a $x \in K$, dostávame na základe Definície 1.8:

$$0 \leq s^T x = (c^T - y^T A)x = c^T x - y^T Ax,$$

pretože $x \in \mathcal{P}$, máme $Ax = b$, a teda $0 \leq c^T x - y^T b$. □

Slabá veta o dualite má niekoľko dôsledkov.

Dôsledok 5.2. a) Pre optimálne hodnoty p^* a d^* platí: $d^* \leq p^*$.

b) Ak pre nejakú primárne prípustnú hodnotu $\bar{x} \in \mathcal{P}$ a pre nejakú duálne prípustnú dvojicu hodnôt $(\bar{y}, \bar{s}) \in \mathcal{D}$ platí $c^T \bar{x} - b^T \bar{y} = s^T \bar{x} = 0$, potom $\bar{x}$ je optimálne riešenie úlohy (15) a $(\bar{y}, \bar{s})$ je optimálne riešenie úlohy (18).

c) Ak je úloha (15) (zdola) neohraničená, potom úloha (18) je neprípustná. Ak je úloha (18) (zhora) neohraničená, potom úloha (15) je neprípustná.

Dôkaz. a) Z Vety 5.1 platí $\forall x \in \mathcal{P}, \forall (y, s) \in \mathcal{D}: c^T x \geq y^T b$. Špeciálne teda platí $\forall (y, s) \in \mathcal{D}: \inf_x \{c^T x \mid x \in \mathcal{P}\} \geq y^T b$, respektíve

$$p^* = \inf_x \{c^T x \mid x \in \mathcal{P}\} \geq \sup_{y,s} \{y^T b \mid (y, s) \in \mathcal{D}\} = d^*.$$

b) Z Vety 5.1 platí

$$\forall (y, s) \in \mathcal{D}: y^T b \leq c^T \bar{x} = \bar{y}^T b,$$

$$\forall x \in \mathcal{P}: c^T x \geq \bar{y}^T b = c^T \bar{x}.$$

Z definície optimálneho riešenia pre primárnu a duálnu úlohu máme $c^T \bar{x} = p^*$ a $\bar{y}^T b = d^*$.

c) Nech úloha (15) je (zdola) neohraničená, t. j. $p^* = -\infty$. Z Vety 5.1 však platí $\forall (y, s) \in \mathcal{D}: p^* \geq y^T b$, nutne teda $\mathcal{D} = \emptyset$. Nech úloha (18) je (zhora) neohraničená, t. j. $d^* = +\infty$. Z vety 5.1 však platí $\forall x \in \mathcal{P}: c^T x \geq d^*$, nutne teda $\mathcal{P} = \emptyset$. $\square$

Poznámka. Všeobecný kontext k Vete 5.1 a Dôsledku 5.2 možno nájsť v [11, str. 173].

5.3 Vnútorne body a množiny optimálnych hodnôt

V nasledujúcej podkapitole uvidíme dve dôležité tvrdenia o primárnej a duálnej úlohe kónického programovania. Ide o zovšeobecnenie známych výsledkov pre lineárne programovanie [10] a semidefinitné programovanie [25]. Výsledky v tejto kapitole možno nájsť v [26]. Uvádzame ich pre úplnosť a miestami dopĺňami o kompletné dôkazy.

V nasledujúcom texte požadujeme platnosť Predpokladu 2.1. Navyše vyžadujeme, aby bol kužel K uzavretý.

Tvrdenie 5.3. *Nech $\bar{x} \in \text{relint}(K)$. Definujme množinu*

$$\mathcal{C}_{\bar{x}} := \left\{ y \in K^* \mid \bar{x}^T y \leq \beta \right\},$$

kde $\beta \geq 0$ je ľubovoľná konštanta. Potom množina $\mathcal{C}_{\bar{x}} \cap \text{lin}(K)$ je kompaktná.

Dôkaz. Množina $\mathcal{C}_{\bar{x}} \cap \text{lin}(K)$ je uzavretá, pretože prienik dvoch uzavretých množín je uzavretá množina. Predpokladajme, že táto množina nie je ohraničená. Potom existuje postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}_{\bar{x}} \cap \text{lin}(K)$ taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = +\infty$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \neq \vec{0}$ a vytvorme novú postupnosť $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}_{\bar{x}} \cap \text{lin}(K)$ položením $Y_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$. Táto postupnosť je zrejmé ohraničená, možno z nej teda vybrať konvergentnú podpostupnosť. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že postupnosť $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná, t. j. existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = \bar{Y}$. Z uzavretosti $\mathcal{C}_{\bar{x}} \cap \text{lin}(K)$ navyše vyplýva, že $\bar{Y} \in \mathcal{C}_{\bar{x}} \cap \text{lin}(K)$. Máme teda

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \bar{x}^T Y_n = \bar{x}^T \frac{y_n}{\|y_n\|} \leq \frac{\beta}{\|y_n\|},$$

pričom ľavá nerovnosť vychádza z Definície 1.8. V limite $n \rightarrow +\infty$ dostaneme $\bar{x}^T \bar{Y} = 0$. To je však v spore s Dôsledkom 2.5, pretože $\bar{Y} \in \text{lin}(K) = \text{sub}(K^*)^{\perp}$, teda $\bar{Y} \in K^* \setminus \text{sub}(K^*)$ a nutne musí platiť $\bar{x}^T \bar{Y} > 0$. $\square$

Dôsledok 5.4. *Nech K je plný kužeľ, t. j. $\text{lin}(K) = \mathbb{R}^n$, a nech $x \in \text{int}(K)$. Potom množina $\mathcal{C}_{\bar{x}}$ definovaná v Tvrdení 5.3 je kompaktná.*

Poznámka. Dôsledok 5.4 možno nájsť dokázaný v [25, str. 8] pre kladne semidefinitné matice.

Veta 5.5. *a) Nech $\mathcal{P} \cap \text{lin}(K^*) \neq \emptyset$ a $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, potom $\mathcal{P}^* \cap \text{lin}(K^*)$ je neprázdna a ohraničená.*

b) Nech $\text{rank}(A) = m$, $\mathcal{D} \cap (\mathbb{R}^m \times \text{lin}(K)) \neq \emptyset$ a $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$, potom $\mathcal{D}^ \cap (\mathbb{R}^m \times \text{lin}(K))$ je neprázdna a ohraničená.*

Dôkaz. a) Nech $\mathcal{P} \cap \text{lin}(K^*) \neq \emptyset$, existuje teda vektor $\hat{x} \in \mathcal{P} \cap \text{lin}(K^*)$. Uvažujme množinu

$$\hat{\mathcal{P}} = \left\{ x \in \mathcal{P} \mid c^T x \leq c^T \hat{x} \right\}.$$

Všimnime si, že úloha (15) má rovnakú množinu optimálnych riešení ako úloha

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{a.} \quad & Ax = b, \\ & c^T x \leq c^T \hat{x}, \\ & x \in K. \end{aligned} \tag{20}$$

Pretože $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, existuje dvojica $(\hat{y}, \hat{s}) \in \mathcal{D}^0$. Počítajme $\hat{s}^T x$:

$$\begin{aligned} \hat{s}^T x &= (c - A^T \hat{y})^T x = c^T x - \hat{y}^T Ax = c^T x - b^T \hat{y}, \\ &= c^T x - b^T \hat{y} \leq c^T \hat{x} - b^T \hat{y} = c^T \hat{x} - \hat{y}^T A\hat{x} = \hat{x}^T (c - A^T \hat{y}) = \hat{s}^T \hat{x}. \end{aligned}$$

Ohraničenie $c^T x \leq c^T \hat{x}$ možno teda v úlohe (20) ekvivalentne nahradiť ohraničením $\hat{s}^T x \leq \hat{s}^T \hat{x}$, teda

$$\hat{\mathcal{P}} = \{x \in \mathcal{P} \mid \hat{s}^T x \leq \hat{s}^T \hat{x}\}.$$

Pretože $\hat{s} \in \text{relint}(K^*)$, podľa Tvrdenia 5.3 dostaneme, že množina $\hat{\mathcal{P}} \cap \text{lin}(K^*)$ je kompaktná, t. j. uzavretá a ohraničená. Navyše $\hat{x} \in \hat{\mathcal{P}}$, teda $\hat{\mathcal{P}} \cap \text{lin}(K^*) \neq \emptyset$. Pretože účelová funkcia v úlohe (15), respektíve v úlohe (20), je spojitá, podľa Weierstrassovej vety nadobúda na (neprázdnej) kompaktnej množine svoje extrémny, t. j. množina $\hat{\mathcal{P}}^* \cap \text{lin}(K^*)$ je neprázdna. Množina $\hat{\mathcal{P}}^* \cap \text{lin}(K^*)$ je navyše ohraničená, pretože ide o podmnožinu ohraničenej množiny $\hat{\mathcal{P}} \cap \text{lin}(K^*)$.

b) Nech $\text{rank}(A) = m$, potom $\mathcal{N}(A^T) = \{\vec{0}\}$. Z dvojice (y, s) , ktorá spĺňa rovnicu $A^T y = c - s$, možno teda jednoznačne vyjadriť y v tvare $y = (AA^T)^{-1}A(c - s)$. Medzi premennými y a s existuje jednoznačný vzťah: $s = c - A^T y$, resp. $y = (AA^T)^{-1}A(c - s)$.

Nech $\mathcal{D} \cap (\mathbb{R}^m \times \text{lin}(K)) \neq \emptyset$. Potom existuje dvojica $(\hat{y}, \hat{s}) \in \mathcal{D} \cap (\mathbb{R}^m \times \text{lin}(K))$, teda $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$ a $\hat{s} \in K^* \cap \text{lin}(K)$. Uvažujme množinu

$$\hat{\mathcal{D}} = \{(y, s) \in \mathcal{D} \mid b^T \hat{y} \leq b^T y\}.$$

Opäť, úloha (18) má rovnakú množinu optimálnych riešení ako úloha

$$\begin{aligned} \max_{y,s} \quad & y^T b \\ & A^T y + s = c, \\ & b^T y \geq b^T \hat{y}, \\ & s \in K^*. \end{aligned} \tag{21}$$

Pretože $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$, existuje $\hat{x} \in \mathcal{P}^0$. Počítajme $\hat{x}^T s$:

$$\begin{aligned} \hat{x}^T s &= \hat{x}^T (c - A^T y) = \hat{x}^T c - \hat{x}^T A^T y = \hat{x}^T c - b^T y, \\ &\leq \hat{x}^T c - b^T \hat{y} = \hat{x}^T (A^T \hat{y} + \hat{s}) - b^T \hat{y} = \hat{x}^T \hat{s}. \end{aligned}$$

Ohraničenie $b^T y \geq b^T \hat{y}$ možno teda v úlohe (21) ekvivalentne nahradiť ohraničením $\hat{x}^T s \leq \hat{x}^T \hat{s}$, teda

$$\hat{\mathcal{D}} = \{(y, s) \in \mathcal{D} \mid \hat{x}^T s \leq \hat{x}^T \hat{s}\}.$$

Pretože $\hat{x} \in \text{relint}(K)$, podľa Tvrdenia 5.3 dostávame, že množina $\hat{\mathcal{D}} \cap (\mathbb{R}^m \times \text{lin}(K))$ je kompaktná a neprázdna, lebo $(\hat{y}, \hat{s}) \in \hat{\mathcal{D}} \cap (\mathbb{R}^m \times \text{lin}(K))$. Analogicky ako v a) dostaneme $\mathcal{D}^* \cap (\mathbb{R}^m \times \text{lin}(K))$ je neprázdna a ohraničená. $\square$

Špeciálne, pre špicatý a plný kužeľ dostávame tento dôsledok.

Dôsledok 5.6. a) *Nech K je špicatý kužeľ. Ak $\mathcal{P} \neq \emptyset$ a $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, potom $\mathcal{P}^*$ je neprázdna a ohraničená množina.*

b) *Nech K je plný kužeľ. Ak $\text{rank}(A) = m$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$ a $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$, potom $\mathcal{D}^*$ je neprázdna a ohraničená množina.*

Poznámka. Podmienka $\text{rank}(A) = m$ pomáha rozšíriť ohraničenosť slackovej premennej $s \in K^* \cap \text{lin}(K)$ na celú dvojicu $(y, s) \in \mathcal{D} \cap (\mathbb{R}^m \times \text{lin}(K))$.

Analogicky ako v [26] a v [28] je možné dokázať aj obrátené tvrdenia.

Veta 5.7. a) *Nech K je špicatý kužeľ. Ak $\mathcal{P}^*$ je neprázdna a ohraničená množina, potom $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$.*

b) *Nech K je plný kužeľ. Ak $\mathcal{D}^*$ je neprázdna a ohraničená množina, potom $\text{rank}(A) = m$ a $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$.*

Dôkaz. a) Nech $\mathcal{P}^*$ je neprázdna a ohraničená. Predpokladajme, že množina $\mathcal{D}^0$ je prázdna. To znamená, že neexistuje $y \in \mathbb{R}^m : c - A^T y \in \text{relint}(K)$. Vo Vete 4.7 platí výrok 2. Existuje teda $\vec{0} \neq z \in K : Az = \vec{0}$ a $c^T z \leq 0$. Pretože $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$, existuje vektor $\hat{x} \in \mathcal{P}^*$; navyše $-\infty < p^* = c^T \hat{x} < +\infty$. Zoberme $t \geq 0$ a pozrime sa na lúč $\{\hat{x} + tz \mid t \geq 0\}$.

Ukážeme, že $\forall t \geq 0 : \hat{x} + tz \in \mathcal{P}$. Pretože K je kužeľ a $z \in K$, platí $\forall t \geq 0 : tz \in K$. Navyše, pretože K je konvexný kužeľ a $\hat{x} \in K$, platí $\forall t \geq 0 : \hat{x} + tz \in K$. Navyše $\forall t \geq 0 : A(\hat{x} + tz) = A\hat{x} = b$, pretože $\hat{x} \in \mathcal{P}$. Ďalej platí

$$\forall t \geq 0 : c^T(\hat{x} + tz) = c^T \hat{x} + tc^T z = p^* + tc^T z \leq p^*.$$

Pretože p^* je optimálna hodnota, máme $\forall t \geq 0 : c^T(\hat{x} + tz) \geq p^*$, a teda $\forall t \geq 0 : c^T(\hat{x} + tz) = p^*$. To však znamená, že množina $\mathcal{P}^*$ obsahuje celý lúč $\{\hat{x} + tz \mid t \geq 0\}$. To je však v spore s ohraničenosťou $\mathcal{P}^*$. Nutne teda $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$.

b) Nech $\mathcal{D}^*$ je neprázdna a ohraničená. Predpokladajme, že množina $\mathcal{P}^0$ je prázdna alebo $\text{rank}(A) < m$. Vo Vete 4.4 platí výrok 2. Existuje teda vektor $\vec{0} \neq z \in \mathbb{R}^m$, pre ktorý platí $A^T z \in K^*$ a $z^T b \leq 0$. Podľa predpokladu $\mathcal{D}^* \neq \emptyset$, teda existuje dvojica $(\hat{y}, \hat{s}) \in \mathcal{D}^*$ a navyše $-\infty < d^* = b^T \hat{y} < \infty$. Uvažujme lúč $\{\hat{y} - tz \mid t \geq 0\}$.

Ukážeme, že $\forall t \geq 0 : \hat{y} - tz \in \mathcal{D}$. Zrejme $c - A^T \hat{y} \in K^*$ a $\forall t \geq 0 : tA^T z \in K^*$. Pretože K^* je konvexný kužeľ, máme $\forall t \geq 0 : c - A^T \hat{y} + tA^T z = c - A^T(\hat{y} - tz) \in K^*$. Ďalej máme

$$\forall t \geq 0 : b^T(\hat{y} - tz) = b^T \hat{y} - tb^T z = d^* - tb^T z \geq d^*.$$

Pretože d^* je optimálna hodnota, máme $\forall t \geq 0 : b^T(\hat{y} - tz) \leq d^*$, a teda $\forall t \geq 0 : b^T(\hat{y} - tz) = d^*$. To však znamená, že množina $\mathcal{D}^*$ obsahuje celý lúč $\{\hat{y} - tz \mid t \geq 0\}$. To je však v spore s ohraničenosťou množiny $\mathcal{D}^*$. Nutne teda $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$ a $\text{rank}(A) = m$. $\square$

Zhrnutím oboch viet dostaneme tento dôsledok.

Dôsledok 5.8. a) Nech K je špicatý kužeľ. Potom množina $\mathcal{P}^*$ je neprázdna a ohraničená práve vtedy, keď $\mathcal{P} \neq \emptyset$ a $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$.

b) Nech K je plný kužeľ. Potom množina $\mathcal{D}^*$ je neprázdna a ohraničená práve vtedy, keď

$\text{rank}(A) = m$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$ a $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$.

c) Nech K je vlastný kužeľ. Potom platí výrok a) aj výrok b).

5.4 Silná dualita

V tejto podkapitole uvádzame, že ostrá prípustnosť jednej z dvojice primárnej-duálnej úlohy implikuje vlastnosť silnej duality, t. j. $p^* = d^*$. Pre vlastné kužele možno nájsť tieto výsledky v [2, str. 62] a v [27, str. 45]. Všeobecnejšie výsledky s predpokladom plnosti, respektíve špicatosti, kužela možno nájsť v [26, str. 14]. V tomto texte zovšeobecňujeme spomínané výsledky na uzavreté kužele, ktoré spĺňajú Predpoklad 2.1. Silná dualita pre všeobecné kužele bola odlišným spôsobom skúmaná v [19].

Ťažisko nášho dôkazu spočíva, podobne ako v [27], hlavne vo vetách o alternatívach: Veta 4.2 a Veta 4.6. Aby sme mohli v týchto vetách využiť ostré nerovnosti, potrebujeme zabezpečiť uzavretosť kuželov $\mathcal{N}(A) + K$, respektíve $\mathcal{S}(A^T) + K^*$. V dôkazoch používame tento rad implikácií:

ostrá prípustnosť $\Rightarrow$ uzavretosť $\mathcal{N}(A) + K$, resp. $\mathcal{S}(A^T) + K^* \Rightarrow$ ostré nerovnosti.

Je nutné poznamenať, že ostrá prípustnosť je len postačujúcou podmienkou na uzavretosť kuželov $\mathcal{N}(A) + K$, respektíve $\mathcal{S}(A^T) + K^*$. Uzavretosť týchto kuželov je opäť len postačujúcou podmienkou, ktorá umožňuje použiť striktné nerovnosti.

Veta 5.9. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavretý kužeľ spĺňajúci Predpoklad 2.1. Ak $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, potom $d^* = p^*$. Navyše, ak optimálna hodnota je konečná, potom $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$.*

Dôkaz. A) Ak $d^* = +\infty$, potom z Dôsledku 5.2 a) vyplýva $p^* = +\infty$ a silná dualita platí.

B) Nech $d^* < +\infty$. Navyše, pretože $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, zrejme $d^* > -\infty$. Sporom predpokladajme, že platí $d^* < p^*$. Položme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{m \times n} \\ c_{1 \times n}^T \end{pmatrix} \in M_{m+1, n}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_{m \times 1} \\ d_{1 \times 1}^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

Z Vety 5.1 vyplýva $\forall x \in \mathcal{P} : c^T x \geq \sup_{y, s} \{y^T b \mid (y, s) \in \mathcal{D}\} = d^*$. Pri predpoklade $d^* < p^*$ dokonca platí $\forall x \in \mathcal{P} : c^T x \geq p^* > d^*$. To však znamená, že neexistuje taký

vektor $x \in K$, ktoré rieši sústavu

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}. \quad (22)$$

Pretože $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, existuje $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$, pre ktoré platí $c - A^T \bar{y} \in \text{relint}(K^*)$. Navyše, dá sa ľahko overiť, že platí $c \in \mathcal{S}(\mathbf{A}^T)$ a $\forall y \in \mathbb{R}^m : A^T y \in \mathcal{S}(\mathbf{A}^T)$, preto $c - A^T \bar{y} \in \mathcal{S}(\mathbf{A}^T)$. To ale znamená, že v Dôsledku 3.5 v Tabuľke 3 a) je splnená podmienka (ii), pretože $\mathcal{S}(\mathbf{A}^T) \cap \text{relint}(K^*) \neq \emptyset$. Podľa Vety 3.7 dostaneme, že kužel $\mathbf{A}(K)$ je uzavretý, respektíve podľa Tvrdenia 3.13 a) ekvivalentne platí, že kužel $\mathcal{N}(\mathbf{A}) + K$ je uzavretý. To znamená, že vo Vete 4.2 platí pre sústavu (22) výrok 2. a neplatí výrok 1. Existuje teda vektor

$$\mathbf{z} := \begin{pmatrix} z_{m \times 1} \\ t_{1 \times 1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} : \mathbf{A}^T \mathbf{z} \in K^* \wedge \mathbf{b}^T \mathbf{z} < 0,$$

teda $A^T z + tc \in K^*$ a $z^T b + td^* < 0$.

Existujú 3 možnosti:

- Nech $t = 0$. Potom $A^T z \in K^*$, $z^T b < 0$, a teda $\forall \alpha \geq 0 : c - A^T \bar{y} + \alpha A^T z = c - A^T(\bar{y} - \alpha z) \in K^*$. To však znamená, že $\forall \alpha \geq 0 : (\bar{y} - \alpha z, c - A^T(\bar{y} - \alpha z)) \in \mathcal{D}$. Ďalej platí $b^T(\bar{y} - \alpha z) = b^T \bar{y} - \alpha b^T z$. Pre $\alpha \rightarrow +\infty$ však $b^T(\bar{y} - \alpha z) \rightarrow +\infty$; to znamená, že $d^* = +\infty$, a to je spor.
- Nech $t > 0$. Potom $A^T \frac{z}{t} + c \in K^*$, $-b^T \frac{z}{t} > d^*$, a teda $(-\frac{z}{t}, c + A^T \frac{z}{t}) \in \mathcal{D}$. Pretože však $d^* = \sup_{y,s} \{y^T b \mid (y, s) \in \mathcal{D}\}$, nutne platí $-b^T \frac{z}{t} \leq d^*$. Teda platnosť $-b^T \frac{z}{t} > d^*$ je v spore s definíciou d^* .
- Nech $t < 0$. Potom $A^T(-\frac{z}{t}) - c \in K^*$, $b^T(-\frac{z}{t}) < d^*$. Výraz $d^* + b^T(\frac{z}{t}) > 0$, t. j. je odrazený od nuly. To znamená, že

$$\exists \varepsilon > 0 : d^* + b^T\left(\frac{z}{t}\right) > \varepsilon \Leftrightarrow d^* - \varepsilon > b^T\left(-\frac{z}{t}\right).$$

Pretože $d^* = \sup_{y,s} \{y^T b \mid (y, s) \in \mathcal{D}\}$, z definície suprema platí:

1. $\forall (y, s) \in \mathcal{D} : y^T b \leq d^*$,
2. $\forall \delta > 0 \exists (y_\delta, s_\delta) \in \mathcal{D} : y_\delta^T b > d^* - \delta$.

Zvoľme $\delta < \varepsilon$. Potom $b^T \left(\left(-\frac{z}{t} \right) - y_\delta \right) < (d^* - \varepsilon) - (d^* - \delta) = \delta - \varepsilon < 0$. Pretože $(y_\delta, s_\delta) \in \mathcal{D}$, platí $c - A^T y_\delta = s_\delta \in K^*$, a teda $(c - A^T y_\delta) + \left(A^T \left(-\frac{z}{t} \right) - c \right) = A^T \left(\left(-\frac{z}{t} \right) - y_\delta \right) \in K^*$. Zrejme platí $\forall \alpha \geq 0 : \alpha A^T \left(\left(-\frac{z}{t} \right) - y_\delta \right) \in K^*$. A teda

$$\forall \alpha \geq 0 : (c - A^T \bar{y}) + \alpha A^T \left(\left(-\frac{z}{t} \right) - y_\delta \right) = c - A^T \left(\bar{y} - \alpha \left(-\frac{z}{t} - y_\delta \right) \right) \in K^*,$$

respektíve $\left(\left(-\frac{z}{t} - y_\delta \right), c - A^T \left(\bar{y} - \alpha \left(-\frac{z}{t} - y_\delta \right) \right) \right) \in \mathcal{D}, \forall \alpha \geq 0$. Avšak

$$b^T \left(\bar{y} - \alpha \left(-\frac{z}{t} - y_\delta \right) \right) \rightarrow +\infty,$$

pre $\alpha \rightarrow +\infty$. To je spor s tým, že d^* je konečná hodnota.

Vo Vete 4.2 neplatí výrok 2. a platí výrok 1., teda existuje vektor $\hat{x} \in K$, pre ktorý platí $A\hat{x} = b$ a $c^T \hat{x} = d^*$, t. j. primárne prípustné riešenie $\hat{x} \in \mathcal{P}$ s vlastnosťou $c^T \hat{x} = d^* < +\infty$. Podľa Dôsledku 5.2 b) platí $\hat{x} \in \mathcal{P}^*$. $\square$

Veta 5.10. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavretý kužel spĺňajúci Predpoklad 2.1. Ak $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$, potom $d^* = p^*$. Navyše, ak optimálna hodnota je konečná, potom $\mathcal{D}^* \neq \emptyset$.*

Dôkaz. A) Z dôsledku vety o slabej dualite, t. j. Dôsledku 5.2 a), platí $d^* \leq p^*$. Ak $p^* = -\infty$, potom nutne $d^* = -\infty$ a silná dualita platí.

B) Nech $-\infty < p^*$. Navyše, pretože $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$, platí $p^* < +\infty$. Sporom predpokladajme, že $d^* < p^*$. Definujme

$$\mathbf{A} := (A \mid -b) \in M_{m,n+1}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{c} := \begin{pmatrix} c \\ -p^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Z Vety 5.1 vyplýva $\forall (y, s) \in \mathcal{D} : p^* = \sup_x \{c^T x \mid x \in \mathcal{P}\} \geq b^T y$. Pri našom predpoklade dokonca $\forall (y, s) \in \mathcal{D} : p^* > b^T y$, teda $0 > b^T y - p^*$. To ale znamená, že neexistuje $y \in \mathbb{R}^m$, že platí

$$\mathbf{c} - \mathbf{A}^T y \in K^* \times \mathbb{R}_+ := \mathcal{K}^*. \quad (23)$$

Pretože $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$, existuje $\bar{x} \in \text{relint}(K)$, pre ktoré platí $A\bar{x} = b$, respektíve

$$(A \mid -b) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0},$$

teda $\mathbf{A}(\bar{x}^T \mid 1)^T = \vec{0}$. Zrejme $\mathcal{K} = K \times \mathbb{R}_+$, teda $\text{relint}(\mathcal{K}) = \text{relint}(K) \times \mathbb{R}_{++}$, a teda $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \text{relint}(\mathcal{K}) \neq \emptyset$. V Dôsledku 3.5 v Tabuľke 3 b) je splnená podmienka (ii). Podľa Dôsledku 3.11 b) platí, že Minkowského súčet $\mathcal{S}(\mathbf{A}^T) + \mathcal{K}^*$ je uzavretá množina. Vo Vete 4.6 pre vektor (23) platí výrok 2. a neplatí výrok 1., teda existuje vektor

$$\mathbf{z} := \begin{pmatrix} z_{n \times 1} \\ t_{1 \times 1} \end{pmatrix} \in K \times \mathbb{R}_+ : \mathbf{A}\mathbf{z} = \vec{0} \wedge \mathbf{c}^T \mathbf{z} < 0,$$

teda $Az - bt = 0$ a $c^T z - p^* t < 0$.

Existujú 3 možnosti:

- Nech $t = 0$. Potom $\forall \alpha \geq 0$ máme $\bar{x} + \alpha z \in \mathcal{P}$ a $c^T z < 0$. To však znamená, že $c^T(\bar{x} + \alpha z) \rightarrow -\infty$ pre $\alpha \rightarrow +\infty$. To by znamenalo, že $p^* = -\infty$, to je spor.
- Nech $t > 0$. Pretože $z \in K$, nutne aj $\frac{z}{t} \in K$. Navyše $A\frac{z}{t} = b$, teda $\frac{z}{t} \in \mathcal{P}$. Platí však $c^T \frac{z}{t} < p^*$. To je v spore s definíciou p^* , pretože $p^* = \inf_x \{c^T x \mid x \in \mathcal{P}\}$.
- Nech $t < 0$. Zrejme platí $A\frac{z}{t} = b$ a $c^T \frac{z}{t} > p^*$. Hodnota $c^T \frac{z}{t} - p^*$ je odrazená od nuly, t. j. $\exists \varepsilon > 0 : c^T \frac{z}{t} > p^* + \varepsilon$. Ďalej, $p^* = \inf_x \{c^T x \mid x \in \mathcal{P}\}$, teda podľa definície infima platí

$$1. \forall x \in \mathcal{P} : p^* \leq c^T x,$$

$$2. \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in \mathcal{P} : c^T x_\delta < p^* + \delta.$$

Zvoľme $\delta < \varepsilon$. Potom

$$c^T \left(x_\delta - \frac{z}{t} \right) = c^T x_\delta - c^T \frac{z}{t} < p^* + \delta - (p^* + \varepsilon) = \delta - \varepsilon < 0.$$

Pretože $z \in K$, platí $-\frac{z}{t} \in K$. Navyše, $x_\delta \in \mathcal{P}$, teda $x_\delta \in K$. To znamená, že $\forall \alpha \geq 0 : \alpha \left(x_\delta - \frac{z}{t} \right) \in K$. Navyše, $\forall \alpha \geq 0 : \bar{x} + \alpha \left(x_\delta - \frac{z}{t} \right) \in \mathcal{P}$, pretože

$$\forall \alpha \geq 0 : A \left(\bar{x} + \alpha \left(x_\delta - \frac{z}{t} \right) \right) = b + \alpha \cdot (b - b) = b.$$

To znamená, že $c^T \left(\bar{x} + \alpha \left(x_\delta - \frac{z}{t} \right) \right) \rightarrow -\infty$, pre $\alpha \rightarrow +\infty$, a teda $p^* = -\infty$, to je spor.

Vo Vete 4.6 neplatí výrok 2. a platí výrok 1. Existuje teda $\hat{y} \in \mathbb{R}^m : \hat{s} := c - A^T \hat{y} \in K^*$, teda $(\hat{y}, \hat{s}) \in \mathcal{D}$. Navyše platí $b^T \hat{y} \geq p^* > -\infty$, a teda z Vety 5.1 vyplýva $b^T \hat{y} = p^*$. Podľa Dôsledku 5.2 b) platí, že $(\hat{y}, \hat{s}) \in \mathcal{D}^*$. $\square$

Výsledky z Vety 5.9, Vety 5.10 a Dôsledku 5.8 do týchto dôsledkov.

Dôsledok 5.11. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavretý kužeľ spĺňajúci Predpoklad 2.1. Ak $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$ a $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, potom existuje vektor $\hat{x} \in \mathcal{P}$ a dvojica vektorov $(\hat{y}, \hat{s}) \in \mathcal{D}$, pre ktoré platí*

$$p^* - d^* = c^T \hat{x} - b^T \hat{y} = \hat{s}^T \hat{x} = 0.$$

Navyše, ak je kužeľ K vlastný, potom množina $\mathcal{P}^$ je neprázdna a ohraničená a ak $\text{rank}(A) = m$, potom aj množina $\mathcal{D}^*$ je neprázdna a ohraničená.*

Dôsledok 5.12. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavretý kužeľ spĺňajúci Predpoklad 2.1. Ak platí ľubovoľná z týchto podmienok*

- $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, $\mathcal{P} \neq \emptyset$,
- $\mathcal{P}^*$ je neprázdna a ohraničená

a navyše kužeľ K je špicatý, potom platí $-\infty < d^ = p^* < +\infty$.*

Ak platí ľubovoľná z týchto podmienok

- $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$, $\text{rank}(A) = m$,
- $\mathcal{D}^*$ je neprázdna a ohraničená;

a navyše kužeľ K je plný, potom platí $-\infty < d^ = p^* < +\infty$.*

Ak je kužeľ K vlastný a platí ľubovoľná z predtým uvedených podmienok, potom platí $-\infty < d^ = p^* < +\infty$.*

Z Vety 5.1, Vety 5.9, Vety 5.10 a Dôsledku 5.2 dostaneme tento dôsledok.

Dôsledok 5.13. *a) Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavretý kužeľ spĺňajúci Predpoklad 2.1. Ak $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, potom $p^* = +\infty \Leftrightarrow d^* = +\infty$. Teda, ak existuje duálne ostro prípustné riešenie, potom platí: primárna úloha je neprípustná práve vtedy, keď duálna úloha je neohraničená.*

b) *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavretý kužel spĺňajúci Predpoklad 2.1. Ak $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$, potom $d^* = -\infty \Leftrightarrow p^* = -\infty$. Teda, ak existuje primárne ostro prípustné riešenie, potom platí: primárna úloha je neohraničená práve vtedy, keď duálna úloha je neprípustná.*

Napokon uvedieme ešte jeden dôsledok, ktorý hovorí o nutných a postačujúcich podmienkach na optimalitu pre úlohy (15) a (18).

Dôsledok 5.14. *Uvažujme systém*

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^T y + s &= c \\ x^T s &= 0 \\ x &\in K \\ s &\in K^*. \end{aligned} \tag{24}$$

Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavretý kužel spĺňajúci Predpoklad 2.1.

Systém (24) je systém postačujúcich podmienok na optimalitu pre úlohy (15) a (18), t. j. ak existuje trojica vektorov $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{s})$, ktorá spĺňa tento systém, potom $\hat{x}$ je optimálne riešenie úlohy (15) a dvojica $(\hat{y}, \hat{s})$ je optimálne riešenie úlohy (18).

Ak $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$ a $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, potom systém (24) je systém nutných podmienok na optimalitu pre úlohy (15) a (18), t. j. ak existuje optimálne riešenie $\hat{x}$ primárnej úlohy (15) a optimálne riešenie $(\hat{y}, \hat{s})$ duálnej úlohy (18), potom trojica vektorov $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{s})$ spĺňa systém (24).

Existencia riešenia systému (24) je predpokladom $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$ a $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$ zaručená. Systém (24) pri predpoklade $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$ a $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$ je systémom nutných a postačujúcich podmienok na optimalitu pre úlohy (15) a (18).

6 Silná dualita v úlohe konvexného programovania

V tejto kapitole sa budeme sústrediť na klasickú úlohu konvexného programovania. Klasické úlohy konvexného programovania tvoria špeciálnu triedu úloh kónického programovania. Pomocou poznatkov o silnej dualite z kapitoly 5 budeme schopní ukázať súvislosť medzi Vetou 5.10 a známou Slaterovou podmienkou (pozri [11, str. 239]).

6.1 Úloha konvexného programovania

Pod klasickou úlohou konvexného programovania budeme podľa [11] rozumieť takúto minimalizačnú úlohu

$$\begin{aligned} \min_x f_0(x) \\ f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \\ Ax = b, \end{aligned} \tag{25}$$

kde $f_i : \emptyset \neq X_i \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, k$ sú konvexné funkcie definované na otvorených konvexných množinách X_i , s maticou $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, vektorom $b \in \mathbb{R}^m$ a $k < n$. Spoločný definičný obor funkcií f_i , $i = 0, 1, \dots, k$ sa definuje ako $X := \bigcap_{i=0}^k X_i$, pričom ide o otvorenú a konvexnú množinu. Pre úlohu (25) sa definujú pojmy

- množina prípustných riešení $\mathcal{P} := \{x \in X \mid Ax = b, f_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k\}$;
- optimálna hodnota účelovej funkcie $p^* := \inf_x \{f_0(x) \mid x \in \mathcal{P}\}$, ak $\mathcal{P} \neq \emptyset$ a $p^* := +\infty$, ak $\mathcal{P} = \emptyset$;
- množina optimálnych riešení $\mathcal{P}^* := \{x \in \mathcal{P} \mid f_0(x) = p^*\}$.

K úlohe (25) prislúcha podľa [11] Lagrangeova funkcia v tvare

$$L : X \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, y, \lambda) = f_0(x) + y^T(b - Ax) + \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x)$$

Lagrangeova duálna úloha k úlohe (25) má tento tvar

$$\begin{aligned} \max_{y, \lambda} \inf_{x \in X} L(x, y, \lambda) \\ \lambda \geq \vec{0}, \quad y \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \tag{26}$$

Analogicky sa definujú pojmy

- množina prípustných riešení $\mathcal{D} := \{(y, \lambda) \mid \lambda \geq \vec{0}\}$;
- optimálna hodnota účelovej funkcie $d^* := \sup_{y, \lambda} \left\{ \inf_{x \in X} L(x, y, \lambda) \mid \lambda \geq \vec{0}, y \in \mathbb{R}^m \right\}$,
ak $\mathcal{D} \neq \emptyset$ a $d^* := -\infty$, ak $\mathcal{D} = \emptyset$;
- množina optimálnych riešení $\mathcal{D}^* := \{(y, \lambda) \in \mathcal{D} \mid \inf_{x \in X} L(x, y, \lambda) = d^*\}$.

6.2 Transformácia na úlohu kónického programovania

Úlohu konvexného programovania (25) možno podľa postupu v [27, str. 16] transformovať na úlohu (15) kónického programovania. Úloha (25) sa najprv transformuje na úlohu s lineárnou účelovou funkciou

$$\begin{aligned} \min_{x, t} \quad & t \\ & f_0(x) \leq t, \\ & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \\ & Ax = b. \end{aligned}$$

Položme $\mathcal{F} := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid f_0(x) \leq t, f_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k\}$. Množina $\mathcal{F}$ je prienikom epigrafu konvexnej funkcie a podúrovňových množín konvexných funkcií, a teda ide o konvexnú množinu. Každú konvexnú množinu možno podľa [27, str. 15] vnoriť do konvexného kužela. Vytvorme kužel

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{F}} := & \\ = & \left\{ (x^T, t, s)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{x}{s} \in X, s > 0, f_0\left(\frac{x}{s}\right) \leq \frac{t}{s}, f_i\left(\frac{x}{s}\right) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\} \cup \\ & \cup \{\vec{0}\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Úlohu (25) možno prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} \min_{x, t, s} \quad & t \\ & Ax = b, \\ & s = 1, \\ & (x^T, t, s)^T \in K_{\mathcal{F}}. \end{aligned} \tag{28}$$

Duálna úloha k úlohe (28) má tvar

$$\begin{aligned} \max_{y,z,S} \quad & b^T y + z \\ & (y^T A, 0, z)^T + S = (0^T, 1, 0)^T \\ & S \in K_{\mathcal{F}}^*, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{29}$$

Vektor S možno vyjadriť v tvare

$$S = \begin{pmatrix} -A^T y \\ 1 \\ -z \end{pmatrix}.$$

6.3 Slaterova podmienka

Známou postačujúcou podmienkou na platnosť silnej duality v klasickej úlohe konvexného programovania je tzv. Slaterova podmienka alebo podmienka S -regularity. Definíciu S -regulárnej úlohy preberáme z [11, str. 239], respektíve [7, str. 226].

Definícia 6.1. *Úloha konvexného programovania (25) sa nazýva S -regulárna, ak existuje $\bar{x} \in X$ také, že*

$$A\bar{x} = b, \quad f_i(\bar{x}) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

V tomto tvrdení ukážeme, ako súvisí Slaterova podmienka s vnútornými bodmi kužela $K_{\mathcal{F}}$.

Tvrdenie 6.2. *Ak existuje vektor $\bar{x} \in X$, pre ktorý platí*

$$f_i(\bar{x}) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

potom $\text{int}(K_{\mathcal{F}}) \neq \emptyset$ a platí $(\bar{x}^T, f_0(\bar{x}) + 1, 1)^T \in \text{int}(K_{\mathcal{F}})$.

Dôkaz. Funkcie f_i sú konvexné a definované na otvorenej konvexnej množine X . Podľa Vety 8.1 v [11, str. 212] sú funkcie f_i spojité na X . Z definície spojitosti vieme, že funkcia $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na otvorenej množine X práve vtedy, keď vzor každej otvorenej množiny v $\mathbb{R}$ je otvorená množina v $\mathbb{R}^n$, respektíve v X . To znamená, že množiny $f_i^{-1}(-\infty, 0)$, $i = 1, \dots, k$ sú otvorené v $\mathbb{R}^n$. Ďalej platí

$$\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^k f_i^{-1}(-\infty, 0).$$

Množina $\bigcap_{i=1}^k f_i^{-1}(-\infty, 0)$ je otvorená, pretože ide o prienik konečného počtu otvorených množín. To ale znamená, že vektor $\bar{x}$ je vnútorný bod množiny

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in X, f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, k\},$$

pretože existuje guľa $\mathcal{B}_\varepsilon(\bar{x})$, pre ktorú platí

$$\mathcal{B}_\varepsilon(\bar{x}) \subset \bigcap_{i=1}^k f_i^{-1}(-\infty, 0) \subset M.$$

Položme

$$M_1 := M \times \mathbb{R} = \{(x^T, t)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in X, f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, k\}.$$

Zrejme platí $\text{int}(M_1) = \text{int}(M) \times \mathbb{R}$.

Definujme $\bar{t} := f_0(\bar{x}) + 1$. Ukážeme, že vektor $(\bar{x}^T, \bar{t})^T$ je vnútorný bod množiny

$$M_0 := \{(x^T, t)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in X, f_0(x) \leq t\}.$$

Definujme funkciu $G : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $G(x, t) = f_0(x) - t$. Funkcia G je zrejme konvexná funkcia definovaná na otvorenej množine: je teda spojitá na $X \times \mathbb{R}$. Podľa definície spojitej funkcie je množina $G^{-1}(-\infty, 0)$ otvorená množina v $\mathbb{R}^{n+1}$. Zrejme platí $(\bar{x}^T, \bar{t})^T \in G^{-1}(-\infty, 0)$, z čoho vyplýva, že vektor $(\bar{x}^T, \bar{t})^T$ je vnútorným bodom množiny M_0 .

Všimnime si, že platí $\mathcal{F} = M_0 \cap M_1$. Pre vnútro množiny $\mathcal{F}$ platí podľa [24, str. 7] vzťah

$$\text{int}(\mathcal{F}) = \text{int}(M_0) \cap \text{int}(M_1).$$

Vektor $(\bar{x}^T, \bar{t})^T \in \text{int}(\mathcal{F})$, pretože $(\bar{x}^T, \bar{t})^T \in \text{int}(M_0)$ a $(\bar{x}^T, \bar{t})^T \in \text{int}(M_1)$.

Definujme teraz perspektívu $P : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ danú predpisom $P : (x^T, t, s)^T \mapsto \left(\frac{x^T}{s}, \frac{t}{s}\right)^T$. Zrejme platí

$$P^{-1}(\mathcal{F}) \cup \{\vec{0}\} = \left\{ (x^T, t, s)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid s > 0, \left(\frac{x^T}{s}, \frac{t}{s}\right)^T \in \mathcal{F} \right\} \cup \{\vec{0}\} = K_{\mathcal{F}}.$$

Perspektíva je na svojom definičnom obore, ktorý je otvorená množina, spojitá funkcia, teda opäť platí, že vzor ľubovoľnej otvorenej množiny v $\mathbb{R}^{n+1}$ je otvorená množina v $\mathbb{R}^{n+2}$. Pretože $(\bar{x}^T, \bar{t})^T \in \text{int}(\mathcal{F})$, existuje guľa $\mathcal{B}_r(\bar{x}^T, \bar{t})^T$, pre ktorú platí

$$\mathcal{B}_r(\bar{x}^T, \bar{t})^T \subset \mathcal{F}.$$

Táto guľa je otvorená množina v $\mathbb{R}^{n+1}$, a tak jej vzor v perspektíve $P^{-1}(\mathcal{B}_r(\bar{x}^T, \bar{t})^T)$ bude tiež otvorená množina. Navyše platí

$$P^{-1}(\mathcal{B}_r(\bar{x}^T, \bar{t})^T) \subseteq P^{-1}(\mathcal{F}).$$

Pretože $\left(\frac{\bar{x}^T}{1}, \frac{\bar{t}}{1}\right)^T \in \mathcal{B}_r(\bar{x}^T, \bar{t})^T$, musí existovať vzor vektora $\left(\frac{\bar{x}^T}{1}, \frac{\bar{t}}{1}\right)^T$ v zobrazení P , t. j. existuje vektor

$$(\hat{x}^T, \hat{t}, \hat{s})^T \in P^{-1}(\mathcal{B}_r(\bar{x}^T, \bar{t})^T) : \left(\frac{\hat{x}^T}{\hat{s}}, \frac{\hat{t}}{\hat{s}}\right)^T = \left(\frac{\bar{x}^T}{1}, \frac{\bar{t}}{1}\right)^T.$$

Vektor $(\hat{x}^T, \hat{t}, \hat{s})^T$ sa nachádza v otvorenej množine, t. j. existuje guľa $\mathcal{B}_\rho(\hat{x}^T, \hat{t}, \hat{s})^T$, že platí

$$\mathcal{B}_\rho(\hat{x}^T, \hat{t}, \hat{s})^T \subset P^{-1}(\mathcal{B}_r(\bar{x}^T, \bar{t})^T) \subseteq P^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq K_{\mathcal{F}}.$$

Z toho vyplýva, že $(\hat{x}^T, \hat{t}, \hat{s})^T \in \text{int}(K_{\mathcal{F}})$, t. j. $\text{int}(K_{\mathcal{F}}) \neq \emptyset$.

Zrejme $\hat{s} > 0$. Podľa Tvrdenia 1.6 je množina $\text{int}(K_{\mathcal{F}}) \cup \{\vec{0}\}$ tiež konvexný kužeľ, teda $\forall \alpha > 0$ platí $(\alpha \hat{x}^T, \alpha \hat{t}, \alpha \hat{s})^T \in \text{int}(K_{\mathcal{F}})$. Špeciálne pre $\alpha = \frac{1}{\hat{s}} > 0$ máme $(\bar{x}^T, \bar{t}, 1)^T = (\bar{x}^T, f_0(\bar{x}) + 1, 1)^T \in \text{int}(K_{\mathcal{F}})$. $\square$

Podľa Tvrdenia 6.2 existencia vektora $\bar{x} \in X$, ktorý splňa ostro splňa ohraničenia s nerovnosťou, zaručuje neprázdnosť vnútra kužeľa $K_{\mathcal{F}}$. Ak navyše vektor $\bar{x}$ splňa afínne ohraničenie $A\bar{x} = b$, potom je splnená Slaterova podmienka pre úlohu (25). Zároveň však vektor $(\bar{x}^T, f_0(\bar{x}) + 1, 1)^T$ je prípustný vektor do kónickej úlohy (28). Navyše, ide o ostro prípustné riešenie, pretože $(\bar{x}^T, f_0(\bar{x}) + 1, 1)^T \in \text{int}(K_{\mathcal{F}})$. Podľa pozorovania v kapitole 5.1 môžeme vďaka ostrej prípustnosti nahradiť kužeľ $K_{\mathcal{F}}$ kužeľom $\text{cl}(K_{\mathcal{F}})$ v úlohe (28).

Pre kužeľ $\text{cl}(K_{\mathcal{F}})$ sú splnené podmienky Vety 5.10. Podľa Vety 5.10 platí silná dualita, t. j. $p^* = d^*$, pre kónické úlohy (28) a (29). Navyše, ak $-\infty < d^* = p^* < +\infty$, potom sa duálne optimálne riešenie nadobúda.

Podmienku ostrej prípustnosti vo Vete 5.10 pre úlohu (28) možno teda transformovať na Slaterovu podmienku pre úlohu (25) v tomto zmysle: ak je splnená Slaterova podmienka, potom je splnená podmienka vo Vete 5.10. Pre úlohu konvexného programovania tak môžeme z Vety 5.10 odvodiť tento dôsledok.

Dôsledok 6.3. *Ak úloha konvexného programovania (25) je S -regulárna, potom platí $p^* = d^*$. Navyše, ak $+\infty > p^* = d^* > -\infty$, potom*

$$\begin{aligned} \exists \hat{y} \in \mathbb{R}^m \exists \hat{z} \in \mathbb{R} : \hat{S} \in K_{\mathcal{F}}^* \\ b^T \hat{y} + \hat{z} = d^* = p^*. \end{aligned}$$

Poznámka. Dôsledok 6.3 nehovorí o existencii optimálneho riešenia primárnej úlohy (25), respektíve (28).

6.4 Analýza duálnych úloh

V tejto podkapitole sa budeme venovať klasickej Lagrangeovej duálnej úlohe (26) a kónickej duálnej úlohe (29). Budeme skúmať, či sa úloha (29) dá naformulovať v tvare úlohy (26).

Z Definície 1.8 pre $K_{\mathcal{F}}^*$ platí

$$K_{\mathcal{F}}^* = \left\{ (u^T, v, w)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \forall (x^T, t, s)^T \in K_{\mathcal{F}} : x^T u + tv + sw \geq 0 \right\}.$$

Podľa Tvrdenia 1.9 d) stačí uvažovať prípad $s > 0$, t. j. $x^T u + tv + sw \geq 0$, $s > 0$. Ak má platiť $S \in K_{\mathcal{F}}^*$, potom musí platiť

$$\forall (x^T, t, s)^T \in K_{\mathcal{F}} : -\frac{x^T}{s} A^T y + \frac{t}{s} - z \geq 0. \quad (30)$$

Výraz (30) má byť nezáporný pre všetky vektory z kužela $K_{\mathcal{F}}$. Aj jeho najmenšia hodnota musí byť preto nezáporná, t. j.

$$\inf_{x,t,s} \left\{ -\frac{x^T}{s} A^T y + \frac{t}{s} - z \mid (x^T, t, s)^T \in K_{\mathcal{F}}, s > 0 \right\} \geq 0. \quad (31)$$

Analogicky ako v Príklade 1.17 môžeme podmienku (31) prepísať do tohto tvaru

$$\inf_{\alpha, \beta} \left\{ -\alpha^T A^T y + \beta \mid \alpha \in X, f_0(\alpha) \leq \beta, f_i(\alpha) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\} \geq z,$$

pretože pre $s > 0$ platí $\left(\frac{x^T}{s}, \frac{t}{s}, 1\right)^T \in K_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow (x^T, t, s)^T \in K_{\mathcal{F}}$. V tejto podmienke sa môžeme zbaviť ohraničenia $f_0(\alpha) \leq \beta$, pretože ak pre nejakú prípustnú dvojicu $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ platí $f_0(\hat{\alpha}) < \hat{\beta}$, potom $-\hat{\alpha}^T A^T y + \hat{\beta} > -\hat{\alpha}^T A^T y + f_0(\hat{\alpha})$. Ak teda pre nejaké prípustné $\hat{\alpha}$ platí $-\hat{\alpha}^T A^T y + f_0(\hat{\alpha}) \geq z$, potom pre ľubovoľné $\beta \leq f_0(\hat{\alpha})$ platí $-\hat{\alpha} + \beta \geq z$. Dostaneme teda

$$\inf_{\alpha \in X} \left\{ -\alpha^T A^T y + f_0(\alpha) \mid f_i(\alpha) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\} \geq z, \quad (32)$$

Úlohu (29) teda prepísať do tohto tvaru:

$$\begin{aligned} & \max_{y, z} b^T y + z \\ & \inf_{\alpha \in X} \left\{ -\alpha^T A^T y + f_0(\alpha) \mid f_i(\alpha) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\} \geq z. \end{aligned} \quad (33)$$

V účelovej funkcii v úlohe (33) možno eliminovať premennú z položením

$$z = \inf_{\alpha \in X} \left\{ -\alpha^T A^T y + f_0(\alpha) \mid f_i(\alpha) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\}.$$

Dostaneme teda úlohu

$$\max_y \inf_{\alpha \in X} \left\{ y^T (b - A\alpha) + f_0(\alpha) \mid f_i(\alpha) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\}. \quad (34)$$

Výraz $\inf_{\alpha \in X} \left\{ y^T (b - A\alpha) + f_0(\alpha) \mid f_i(\alpha) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\}$ možno vnímať ako minimalizačnú úlohu s parametrom y , ktorej prislúcha Lagrangeova funkcia v tomto tvare

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : X \times \mathbb{R}_+^k &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}(\alpha, \lambda; y) &= f_0(\alpha) + y^T (b - A\alpha) + \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(\alpha). \end{aligned}$$

Zo samotnej konštrukcie Lagrangeovej funkcie platí

$$\inf_{\alpha \in X} \left\{ y^T (b - A\alpha) + f_0(\alpha) \mid f_i(\alpha) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\} = \inf_{\alpha \in X} \sup_{\lambda \geq \vec{0}} \mathcal{L}(\alpha, \lambda; y).$$

Pri maximalizovaní účelovej funkcie v úlohe (34) teda dostaneme

$$\begin{aligned} & \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \inf_{\alpha \in X} \left\{ y^T (b - A\alpha) + f_0(\alpha) \mid f_i(\alpha) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\} = \\ & = \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \left\{ \inf_{\alpha \in X} \sup_{\lambda \geq \vec{0}} \mathcal{L}(\alpha, \lambda; y) \right\} = \\ & = \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \left\{ \inf_{\alpha \in X} \sup_{\lambda \geq \vec{0}} L(\alpha, y, \lambda) \right\}, \end{aligned}$$

kde $L(\alpha, y, \lambda)$ je Lagrangeova funkcia prislúchajúca úlohe (25).

Úlohu (29) nemožno bez dodatočných predpokladov naformulovať ako úlohu (26). Ak však možno vymeniť $\inf_{\alpha \in X} \sup_{\lambda \geq \vec{0}}$ za $\sup_{\lambda \geq \vec{0}} \inf_{\alpha \in X}$, potom dostaneme

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^m} \left\{ \inf_{\alpha \in X} \sup_{\lambda \geq \vec{0}} L(\alpha, y, \lambda) \right\} = \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \left\{ \sup_{\lambda \geq \vec{0}} \inf_{\alpha \in X} L(\alpha, y, \lambda) \right\} = \sup_{y \in \mathbb{R}^m, \lambda \geq \vec{0}} \inf_{\alpha \in X} L(\alpha, y, \lambda).$$

Ak teda platí $\inf_{\alpha \in X} \sup_{\lambda \geq \vec{0}} L(\alpha, y, \lambda) = \sup_{\lambda \geq \vec{0}} \inf_{\alpha \in X} L(\alpha, y, \lambda)$, potom už možno úlohu (29) ekvivalentne naformulovať ako úlohu (26), teda v tvare

$$\begin{aligned} \max_{y, \lambda} \quad & \inf_{\alpha \in X} L(\alpha, \lambda, y) \\ & \lambda \geq \vec{0}, \quad y \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \tag{35}$$

Poznámka. Rovnosť

$$\inf_{\alpha \in X} \sup_{\lambda \geq \vec{0}} L(\alpha, y, \lambda) = \sup_{\lambda \geq \vec{0}} \inf_{\alpha \in X} L(\alpha, y, \lambda)$$

nastáva napríklad vtedy, keď existuje $\tilde{\alpha} \in X : f_i(\tilde{\alpha}) < 0, i = 1, 2, \dots, k$. V tomto prípade totiž platí silná dualita pre úlohu

$$\inf_{\alpha \in X} \left\{ y^T(b - A\alpha) + f_0(\alpha) \mid f_i(\alpha) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\},$$

pretože pre túto úlohu je splnená Slaterova podmienka. Pre ľubovoľné ale pevné $y \in \mathbb{R}^m$ máme

$$p^*(y) := \inf_{\alpha \in X} \left\{ y^T(b - A\alpha) + f_0(\alpha) \mid f_i(\alpha) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\} = \inf_{\alpha \in X} \sup_{\lambda \geq \vec{0}} \mathcal{L}(\alpha, \lambda; y),$$

$$d^*(y) := \sup_{\lambda \geq \vec{0}} \inf_{\alpha \in X} \mathcal{L}(\alpha, \lambda; y),$$

a navyše $\forall y \in \mathbb{R}^m : p^*(y) = d^*(y)$.

Z tejto analýzy plyní záver: kónická duálna úloha (29) a štandardná Lagrangeova duálna úloha (26) nie sú ekvivalentné, pretože bez dodatočných predpokladov nemožno zameniť suprium a infimum. V prípade existencie vektora, pre ktorý sú väzby dané funkciami f_i splnené s ostrou nerovnosťou, čo podľa Tvrdenia 6.2 implikuje $\text{int}(K_{\mathcal{F}}) \neq \emptyset$, sú tieto úlohy ekvivalentné.

V nasledujúcom príklade ukážeme, že ak vnútro kužela $\text{int}(K_{\mathcal{F}})$ je prázdne, potom môže v úlohách konvexného programovania (25) a (26) nastať nenulová duálna medzera.

Na druhej strane, ak $\text{relint}(K_{\mathcal{F}})$ je neprázdné a existuje ostro prípustné riešenie kónickej úlohy (28), potom v kónických úlohách (28) a (29) platí silná dualita.

Príklad 6.4. Uvažujme príklad 5.21 z [7, str. 280], teda úlohu

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & e^{-x_1} \\ & \frac{x_1^2}{x_2} \leq 0, \end{aligned} \tag{36}$$

na definičnom obore $X = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$. Množina prípustných riešení tejto úlohy má tvar

$$\mathcal{P} = \left\{ (x_1, x_2)^T \in X \mid \frac{x_1^2}{x_2} \leq 0 \right\} = \left\{ (0, x_2)^T \mid x_2 > 0 \right\}.$$

To znamená, že $p^* = 1$ pre optimálne riešenie $\hat{x}_1 = 0$ a $\hat{x}_2 > 0$. Ďalej si môžeme všimnúť, že v úlohe (36) nie je splnená Slaterova podmienka a neskôr ukážeme, že $\text{int}(K_{\mathcal{F}}) = \emptyset$.

Príslušná Lagrangeova funkcia k úlohe (36) má tvar

$$L : X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x_1, x_2, \lambda) = e^{-x_1} + \lambda \frac{x_1^2}{x_2}.$$

Zrejme platí $\forall (x_1, x_2, \lambda)^T \in X \times \mathbb{R}_+ : L(x_1, x_2, \lambda) \geq 0$. Špeciálne pre ľubovoľné ale pevné $\bar{\lambda} \geq 0$ a $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^4$, $t \neq 0$ platí $L(x_1(t), x_2(t), \bar{\lambda}) = e^{-t} + \bar{\lambda} \frac{1}{t^2}$. Zrejme $\inf_{t \neq 0} L(x_1(t), x_2(t), \bar{\lambda}) = 0$, teda pre $\lambda \geq 0$ platí

$$\inf_{(x_1, x_2) \in X} L(x_1, x_2, \lambda) = 0.$$

Lagrangeova duálna úloha má tvar

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & 0 \\ & \lambda \geq 0, \end{aligned} \tag{37}$$

a teda $d^* = 0$. Medzi úlohami (36) a (37) neplatí silná dualita. Duálna medzera medzi týmito úlohami je nenulová: $p^* - d^* = 1 - 0 = 1$.

Kónická formulácia úlohy (36) má tvar

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2, t, s} \quad & t \\ & s = 1, \\ & (x_1, x_2, t, s)^T \in K_{\mathcal{F}}, \end{aligned} \tag{38}$$

kde

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{F}} &= \left\{ (x_1, x_2, t, s)^T \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{x_2}{s} > 0, s > 0, e^{-\frac{x_1}{s}} \leq \frac{t}{s}, \frac{x_1^2}{x_2 s} \leq 0 \right\} \cup \{\vec{0}\} = \\ &= \left\{ (x_1, x_2, t, s)^T \in \{\vec{0}\} \times \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \mid 1 \leq \frac{t}{s} \right\} \cup \{\vec{0}\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Zo vzťahu (39) hneď vyplýva, že $\text{int}(K_{\mathcal{F}}) = \emptyset$.

Duálna úloha ku kónickej úlohe (38) má tvar

$$\begin{aligned} \max_z \quad & z \\ (0, 0, 1, -z)^T & \in K_{\mathcal{F}}^*. \end{aligned} \quad (40)$$

Ukážeme, že $(0, 0, 1, -1)^T \in K_{\mathcal{F}}^*$, teda $\forall (x_1, x_2, t, s)^T \in K_{\mathcal{F}} : t - s \geq 0$, z čoho dostaneme $\frac{t}{s} \geq 1$. Táto podmienka je ale podľa definície $K_{\mathcal{F}}$, t. j. vzťahu (39), splnená. To ale znamená, že vektor $(0, 0, 1, -1)^T$ je prípustný vektor do úlohy (40) s hodnotou účelovej funkcie +1. Na druhej strane vieme, že optimálna hodnota účelovej funkcie primárnej úlohy (38) je $p^* = 1$, pretože ide o ekvivalentnú formuláciu úlohy (36). Podľa Dôsledku 5.2 b) platí $\sup_z \{z \mid (0, 0, 1, -z)^T \in K_{\mathcal{F}}^*\} = p^* = 1$. Duálna medzera medzi úlohami (38) a (40) je nulová a platí silná dualita.

V tomto príklade sme videli niekoľko zaujímavých javov.

- $\text{int}(K_{\mathcal{F}}) = \emptyset$: to implikuje, že Slaterova podmienka pre úlohu (36) nie je splnená. To sme aj overili.
- Nenulová duálna medzera medzi úlohami (36) a (37).
- Neekvivalencia medzi duálnymi úlohami (37) a (40).
- Silná dualita medzi úlohami (38) a (40).

Silná dualita medzi úlohami (38) a (40) je spôsobená ostrou prípustnosťou úlohy (38).

Zrejme platí

$$\text{relint}(K_{\mathcal{F}}) = \{(0, x_2, t, s)^T \mid x_2 > 0, s > 0, s < t\}.$$

Vektor $(0, 1, 2, 1)^T \in \text{relint}(K_{\mathcal{F}})$ je prípustný pre úlohu (38). To znamená, že pre $\text{cl}(K_{\mathcal{F}})$ je splnená Veta 5.10, podľa ktorej platí silná dualita pre kónické úlohy (38) a (40).

Záver

Cieľom diplomovej práce bolo skúmanie duálnych vlastností kónických úloh a analýza duálnych vlastností špecifických podtried kónického programovania. V našej práci sme sa sústredili predovšetkým na vlastnosť silnej duality medzi primárnou a duálnou úlohou kónického programovania.

Pri skúmaní silnej duality sme vychádzali najmä z článku [26], ktorý slúžil ako teoretická predloha tejto práce. Medzi ďalšie zdroje, ktoré sme pri písaní použili, patrí článok [19], v ktorom sa nachádzajú niektoré výsledky o silnej dualite v kónickom programovaní, avšak tento článok je písaný silným a komplikovaným matematickým akcentom. Ďalšie poznatky o silnej dualite sme čerpali zo zdrojov [17], [18], [23], [25], [27], [28], [29]. Sekundárnym cieľom práce bolo v tejto oblasti rozšíriť a zovšeobecniť výsledky z článku [26].

V rámci analýzy duálnych vlastností špecifických podtried kónického programovania sme sa venovali štandardnej úlohe konvexného programovania. Štandardná úloha konvexného programovania sa dá ekvivalentne naformulovať ako úloha kónického programovania. Tento postup je v [27] opísaný v dvoch krokoch: transformáciou pôvodnej úlohy na úlohu s lineárnou účelovou funkciou a následným vnorením množiny prípustných riešení do konvexného kužela.

Aby sme boli schopní naplniť ciele práce, bolo nutné, aby sme najskôr vybudovali silný teoretický základ. Tento základ sme budovali v prvých štyroch kapitolách.

V prvej kapitole sme sa venovali kuželom a ich základným vlastnostiam. Uviedli sme definíciu kužela (Definíciu 1.2) a vo forme tvrdení sme uviedli základné vlastnosti kužela. Uviedli sme aj príklady niektorých kuželov. Ďalej sme uviedli definíciu duálneho kužela (Definícia 1.8) a základné vlastnosti duálneho kužela. Niektoré vlastnosti sme ukázali na príkladoch. V tejto časti sa nachádza aj veľmi dôležitá tzv. bipolárna veta (Veta 1.11), ktorá dáva do súvislosti duálny kužel k duálnemu kuželu s pôvodným kuželom. Na záver tejto kapitoly sme uviedli príklady niektorých duálnych kuželov. V tejto časti sme v Príklade 1.17 odvodili vzťah pre duálny kužel (vzťah (5)) ku kuželu (1), ktorý sa v literatúre neuvádza. Ukazuje sa, že kužele tohto typu sú veľmi dôležité pri skúmaní kónických formulácií štandardných úloh konvexného programovania. V tejto kapitole sme poznatky čerpali z [1], [2], [7], [11], [16], [19], [22], [26], [27] a [30].

Druhá kapitola bola venovaná vlastnostiam a charakterizáciám relatívneho vnútra konvexného kužela. V Tvrdení 2.2 a v Tvrdení 2.3 sme rozšírili doposiaľ známe charakterizácie z [26] a z [19]. Ďalej sme skúmali vzťahy medzi základnými množinami $\text{lin}(\cdot)$, $\text{sub}(\cdot)$ a $\text{relint}(\cdot)$ pre kužele K , K^* a $\text{cl}(K)$, ktoré sme prezentovali v Tabuľke 2, a poukázali sme na rozdiel, ktorý v tabuľke vznikne, ak kužel K nie je uzavretý. Aby sme boli schopní odvodiť spomínané vzťahy, bolo nutné uviesť dôležitú Lemu 2.4, ktorá dáva do súvislosti relatívneho vnútra kužela a relatívne vnútro uzáveru tohto kužela, respektíve lineárny obal kužela a lineárny obal uzáveru tohto kužela. Z tejto lemy vyplýva charakterizácia relatívneho vnútra konvexného kužela, ktoré sme uviedli v Dôsledku 2.5. Ďalej sme uviedli pomocné tvrdenia, Tvrdenie 2.6 a Tvrdenie 2.7, ktoré uľahčili a sprehľadnili dôkazy tvrdení v kapitole 3. Nie je nám známe, že sa tieto tvrdenia vyskytujú v literatúre. V závere kapitoly sme uviedli ďalšie dôležité Tvrdenie [21], ktoré opisuje relatívne vnútro súčtu dvoch konvexných kuželov, respektíve relatívne vnútro karteziánskeho súčinu dvoch konvexných kuželov. V tejto kapitole sme poznatky čerpali z [5], [12], [19], [21] a [26].

V tretej kapitole sme skúmali uzavretosť lineárneho obrazu konvexného uzavretého kužela, respektíve uzavretosť Minkowského súčtu kužela a vektorového podpriestoru. Na začiatku kapitoly sme uviedli Príklad 3.1, na ktorom sme ukázali, že lineárny obraz konvexného uzavretého kužela nemusí byť nutne uzavretý kužel. Ďalej sme uviedli pomocnú Lemu 3.2, ktorú sme na rozdiel od [20] a [26] formulovali aj pre neuzavreté kužele. Dôležité výsledky vyplývajúce z tejto lemy sme prehľadne uviedli vo forme tabuliek: Tabuľka 3, Tabuľka 4 a Tabuľka 5. Uviedli a dokázali sme dôležitú Vetu 3.7 a uviedli sme niektoré jej dôsledky. Na záver kapitoly uvádzame Tvrdenie 3.13, ktoré dáva do súvislosti uzavretosť lineárneho obrazu konvexného uzavretého kužela a uzavretosť Minkowského súčtu kužela a vektorového podpriestoru. V tejto kapitole sme čerpali poznatky z [3], [4], [6], [20], [21], [22] a [26].

V štvrtej kapitole sme sa venovali vetám o alternatívach, ktoré sme preberali z [26]. V našej práci sme vety o alternatívach rozdelili do dvoch skupín: primárne vety o alternatívach a duálne vety o alternatívach. V práci sme uviedli dve primárne vety o alternatívach: Vetu 4.2 a Vetu 4.4, pričom Veta 4.4 platí špeciálne pre plný kužel; a dve duálne vety o alternatívach: Vetu 4.6 a Vetu 4.7, pričom Veta 4.7 platí špeciálne pre špicatý kužel. Ďalej sme v tejto časti uviedli Príklad 4.3, ktorý ukazuje, že predpoklad o uzavretosti kužela

$\mathcal{N}(A) + \text{cl}(K)$ je nevyhnutný na to, aby vo Vete 4.2 platil práve jeden výrok. Na dôkaz Vety 4.2 a Vety 4.6 sme nepoužili štandardný postup, t. j. vetu o separovacej nadrovine, ale využili sme poznatky z lineárnej algebry, niektoré vlastnosti kužeľov z prvej kapitoly a niektoré tvrdenia z tretej kapitoly. Dôležité a všeobecne známe poznatky z lineárnej algebry sme uviedli v krátkom úvode do tejto kapitoly.

Dualitu v kónickom programovaní sme boli pripravení skúmať až v piatej kapitole. Najskôr sme uviedli štandardný tvar úlohy kónického programovania, respektíve príslušnej duálnej úlohy kónického programovania. Ďalej sme sa venovali slabej dualite, vnútorným bodom a množinám optimálnych hodnôt primárnej a duálnej úlohy. Tieto výsledky sme prebrali z [26] a miestami doplnili o kompletne dôkazy. V poslednej časti tejto kapitoly sme sformulovali a dokázali najdôležitejšie vety v tejto práci: Vetu 5.9 a Vetu 5.10, ktoré hovoria o postačujúcich podmienkach na silnú dualitu. Tieto vety boli v [26] formulované pre špicatý a plný kužeľ, a teda sa podarilo rozšíriť ich platnosť na všeobecný uzavretý konvexný kužeľ, ktorý netvorí vektorový podpriestor. Veta 5.10 a Veta 5.9 sa obsahovo zhodujú (s výnimkou predpokladu uzavretosti kužela) s vetami o silnej dualite, ktoré sú uvedené v [19]. Naše vety však boli dokázané jednoduchším a pre čitateľa zrozumiteľnejším spôsobom, analogickým ako pri dôkaze silnej duality v semidefinitnom programovaní. Na záver tejto kapitoly sme uviedli štyri dôsledky, ktoré priamo vyplývajú z viet o silnej dualite, z vety o slabej dualite a z viet o množinách optimálnych hodnôt. V tejto kapitole sme využili poznatky z [2], [10], [25], [26] a [28].

V poslednej kapitole sme sa zamerali na analýzu duálnych vlastností štandardnej úlohy konvexného programovania. Využívajúc postup z [27], podarilo sa nám preformulovať úlohu konvexného programovania na úlohu kónického programovania (28) s afínnymi ohraňovaniami a kužeľom (27). Uviedli sme aj príslušnú duálnu úlohu kónického programovania (29). V ďalšej podkapitole sme uviedli známu Slaterovu podmienku pre úlohu konvexného programovania. Napokon sme sformulovali a dokázali vlastné Tvrdenie 6.2. Existencia vektora, ktorý ostro splňa ohraňovania s nerovnosťou v úlohe konvexného programovania, implikuje neprázdne vnútro kužela (27). Týmto tvrdením sme vysvetlili súvis medzi Slaterovou podmienkou a Vetou 5.10, ktorý sme uviedli v Dôsledku 6.3. V poslednej podkapitole sme analyzovali štandardnú Lagrangeovu duálnu úlohu (26) a duálnu úlohu k úlohe kónického programovania (29). Ukázali sme, že tieto úlohy nie sú vo všeobec-

nosti ekvivalentné. Ak však existuje vektor, ktorý ostro spĺňa ohraničenia s nerovnosťou v úlohe konvexného programovania, potom sú tieto úlohy ekvivalentné. V závere kapitoly sme uviedli Príklad 6.4, v ktorom neplatí silná dualita medzi úlohami konvexného programovania, avšak silná dualita platí medzi úlohami kónického programovania. V tejto kapitole sme čerpali poznatky z [7], [11], [24] a [27].

V týchto šiestich kapitolách sa nám podarilo naplniť ciele práce stanovené v úvode práce. Za prínosy tejto práce považujeme rozšírenie teórie, ktoré sme uviedli pri jednotlivých kapitolách. Za prínos práce možno považovať aj kompaktné a ucelené spracovanie niektorých teoretických poznatkov z oblasti kónickej optimalizácie. Z výsledkov zo šiestej kapitoly sa zdá, že kónická formulácia úloh konvexného programovania umožňuje vysporiadať sa so zbytočne zložitou reprezentáciou množiny prípustných riešení pomocou funkcií, pri ktorej nemusí byť splnená Slaterova podmienka. Má teda zmysel zaoberať sa kónickou formuláciou niektorých úloh konvexného programovania, podobne ako v [16]. V práci by sa na základe pozorovania v podkapitole 5.1 dala rozšíriť Veta 5.10 na neuzavreté kužele. Dôsledky, ktoré z nej vyplývajú, by sa dali tiež náležite upraviť. Ďalší možný smer skúmania by mohol spočívať v štúdiu kónických formulácií štandardných úloh konvexného programovania s dôrazom na duálnu úlohu (29) a na poznatky z Príkladu 1.17 a Lemy 1.15. Rovnako by bolo možné skúmať vlastnosti kužeľov (1) a (5).

Príloha A

V tejto časti dokážeme ekvivalenciu Definície 1.1 a Definície 1.5 pre konvexné kužele. Táto ekvivalencia platí nielen pre konvexné kužele, ale aj pre ľubovoľné konvexné množiny.

V tomto texte budeme uvažovať k -rozmerný vektorový podpriestor $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^n$ ($k \leq n$), $n \times n$ maticu $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ v tvare $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$. Stĺpce matice A tvoria vektory $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$, navyše $\text{span}[a_1, a_2, \dots, a_n] = \mathbb{R}^n$ a $\text{span}[a_1, a_2, \dots, a_k] = \mathcal{V}$. Matica A je zrejme regulárna, a teda existuje inverzná matica A^{-1} k matici A .

Pod zápisom $\|A\|_1$ budeme rozumieť maticovú normu indukovanú l_1 vektorovou normou

$$\|A\|_1 := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

kde $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$. Z takejto definície automaticky vyplýva nerovnosť $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|A\|_1 \|x\|_1 \geq \|Ax\|_1$. Ďalej predpokladáme, že $\|a_j\|_1 = 1$, $\forall j = 1, 2, \dots, n$. To však znamená, že $\|A\|_1 = 1$.

Označme $S_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 \leq 1\}$ a

$$A(S_1) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = Ax, x \in S_1\} = \{Ax \mid x \in S_1\}.$$

Ďalej pre $k \in \mathbb{R}_+$ budeme používať zápis

$$kS_1 := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\|_1 \leq k\}.$$

Teraz ukážeme platnosť tohto tvrdenia.

Tvrdenie A.0.5. a) $A(S_1) \subseteq S_1$,

b) $\frac{1}{\|A^{-1}\|_1} S_1 \subseteq A(S_1) \subseteq S_1$,

c) $\frac{1}{\|A^{-1}\|_1} S_1 \cap \mathcal{V} \subseteq A(S_1) \cap \mathcal{V} \subseteq S_1 \cap \mathcal{V}$.

Dôkaz. a) Zoberme ľubovoľný vektor $y \in A(S_1)$. To znamená, že existuje vektor $x \in S_1$ taký, že $y = Ax$. Počítajme $\|y\|_1$:

$$\|y\|_1 = \|Ax\|_1 \leq \|A\|_1 \|x\|_1 = \|x\|_1 \leq 1,$$

teda $y \in S_1$. Z toho vyplýva $A(S_1) \subseteq S_1$.

b) Stačí ukázať ľavú inklúziu. Pravá inklúzia vychádza z časti a). Zoberme ľubovoľný vektor $u \in \frac{1}{\|A^{-1}\|_1} S_1$ a počítajme normu vektora $\|A^{-1}u\|_1$:

$$\|A^{-1}u\|_1 \leq \|A^{-1}\|_1 \|u\|_1 \leq \|A^{-1}\|_1 \frac{1}{\|A^{-1}\|_1} = 1,$$

teda $A^{-1}u \in S_1$. To znamená, že $u \in A(S_1)$, a teda $\frac{1}{\|A^{-1}\|_1} S_1 \subseteq A(S_1)$.

c) Vychádza z b) a z teórie množín: nech A, B, C sú tri množiny a $A \subseteq B$, potom $A \cap C \subseteq B \cap C$. □

Definujme

$$C_n := \left\{ \sum_{i=1}^n (c_i - c_{i+n}) a_i \mid \sum_{i=1}^n (c_i + c_{i+n}) = 1, c_i, c_{i+n} \geq 0, i = 1, \dots, n \right\},$$

$$C_k := \left\{ \sum_{i=1}^k (c_i - c_{i+k}) a_i \mid \sum_{i=1}^k (c_i + c_{i+k}) = 1, c_i, c_{i+k} \geq 0, i = 1, \dots, k \right\}.$$

Teraz ukážeme platnosť tohto tvrdenia.

Tvrdenie A.0.6. a) $C_n \cap \mathcal{V} = C_k$,

b) $A(S_1) \cap \mathcal{V} = C_n \cap \mathcal{V}$.

Dôkaz. a) Inklúzia $C_k \subseteq C_n \cap \mathcal{V}$:

Zoberme ľubovoľný vektor $y \in C_k$. Položením $c_i = c_{i+n} = 0$ pre $i = k+1, k+2, \dots, n$ dostaneme $y \in C_n \cap \mathcal{V}$, pretože zrejme $y \in \mathcal{V}$ a $y \in C_n$.

Inklúzia $C_k \supseteq C_n \cap \mathcal{V}$:

Zoberme ľubovoľný vektor $y \in C_n \cap \mathcal{V}$. To znamená, že $y \in \mathcal{V}$. Nutne musí platiť $c_i = c_{i+n}$ pre $i = k+1, k+2, \dots, n$, v opačnom prípade $y \notin \mathcal{V}$. Platí teda $y = \sum_{i=1}^n (c_i - c_{i+n}) a_i = \sum_{i=1}^k (c_i - c_{i+n}) a_i$. Ďalej platí $1 = \sum_{i=1}^k c_i + \sum_{i=1}^k c_{i+n} + 2 \sum_{i=k+1}^n c_i$. Položme teda

$$\gamma_1 := c_1 + \sum_{i=k+1}^n c_i;$$

$$\gamma_i := c_i, \quad i = 2, 3, \dots, k;$$

$$\gamma_{1+k} := c_{1+k} + \sum_{i=k+1}^n c_i;$$

$$\gamma_{i+k} := c_{i+n}, \quad i = 2, 3, \dots, k;$$

Koeficienty γ_i , $i = 1, 2, \dots, 2k$ sú vhodné koeficienty do množiny C_k , pretože $\gamma_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, 2k$ a $\sum_{i=1}^{2k} \gamma_i = 1$. Navyše,

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^n (c_i - c_{i+n}) a_i = \sum_{i=1}^k (c_i - c_{i+n}) a_i \\ &= \sum_{i=1}^k (c_i - c_{i+n}) a_i + \left(\sum_{i=k+1}^n c_i \right) a_1 - \left(\sum_{i=k+1}^n c_i \right) a_1 = \sum_{i=1}^k (\gamma_i - \gamma_{i+k}) a_i. \end{aligned}$$

To znamená, že $y \in C_k$ a $C_n \cap \mathcal{V} \subseteq C_k$.

b) Inklúzia $C_n \cap \mathcal{V} \subseteq A(S_1) \cap \mathcal{V}$:

Pripomeňme, že

$$A(S_1) = \{Ax \mid \|x\|_1 \leq 1\} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \mid \|x\| \leq 1 \right\}.$$

V definícii množiny C_n položíme $x_i := c_i - c_{i+n}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Zrejme platí $-1 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ďalej platí

$$\sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n |c_i - c_{i+n}| \leq \sum_{i=1}^n (|c_i| + |c_{i+n}|) = \sum_{i=1}^n c_i + c_{i+n} = 1.$$

Z toho však vyplýva, že $C_n \subseteq A(S_1)$, respektíve $C_n \cap \mathcal{V} \subseteq A(S_1) \cap \mathcal{V}$.

Inklúzia $A(S_1) \cap \mathcal{V} \subseteq C_n \cap \mathcal{V}$:

Nech $y \in A(S_1)$, teda existuje $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\|x\|_1 \leq 1$, že platí $y = Ax = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Ukážeme, že existujú koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_{2n} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{2n} c_i = 1$, že $y = \sum_{i=1}^n (c_i - c_{i+n}) a_i$. Zistíme, či je tento systém prípustný:

$$x_1 = c_1 - c_{n+1},$$

$$x_2 = c_2 - c_{n+2},$$

$$\vdots$$

$$x_n = c_n - c_{n+n},$$

$$1 = c_1 + c_2 + \dots + c_{2n},$$

$$0 \leq c_1, c_2, \dots, c_{2n}.$$

Ak definujeme $c := (c_1, c_2, \dots, c_{2n})^T$, potom môžeme tento systém prepísať do maticového

tvaru:

$$\begin{pmatrix} I_{n \times n} & | & -I_{n \times n} \\ \mathbf{1}_{1 \times 2n}^T & & \end{pmatrix}_{(n+1) \times 2n} c_{2n \times 1} = \begin{pmatrix} x_{n \times 1} \\ \mathbf{1}_{1 \times 1} \end{pmatrix}_{(n+1) \times 1}, \quad (\text{A.1})$$

$$c \geq \vec{0}_{2n \times 1},$$

kde $\mathbf{1}^T = (1, 1, \dots, 1)$. Podľa Farkasovej lemy (pozri [11, str. 292], [9] alebo Veta 4.2 pre $K = \mathbb{R}_+^{2n}$) je systém (A.1) prípustný práve vtedy, keď platí táto implikácia:

$$\forall z \in \mathbb{R}^{n+1} : z^T \begin{pmatrix} I & | & -I \\ \mathbf{1}^T & & \end{pmatrix} \leq 0_{1 \times 2n}^T \Rightarrow z^T \begin{pmatrix} x_{n \times 1} \\ \mathbf{1}_{1 \times 1} \end{pmatrix} \leq 0.$$

Aby bol antecedent v implikácii pravdivý, je nutné, aby pre vektor z platilo:

$$\begin{aligned} z_1 + z_{n+1} &\leq 0, \\ z_2 + z_{n+1} &\leq 0, \\ &\vdots \\ z_n + z_{n+1} &\leq 0, \\ -z_1 + z_{n+1} &\leq 0, \\ &\vdots \\ -z_n + z_{n+1} &\leq 0, \end{aligned}$$

respektíve

$$\begin{aligned} z_{n+1} &\leq -|z_1|, \\ z_{n+1} &\leq -|z_2|, \\ &\vdots \\ z_{n+1} &\leq -|z_n|. \end{aligned}$$

Evidentne musí platiť $z_{n+1} \leq 0$.

Ďalej platí táto séria nerovností:

$$\begin{aligned} z_{n+1} |x_1| &\leq -|z_1 x_1|, \\ z_{n+1} |x_2| &\leq -|z_2 x_2|, \\ &\vdots \\ z_{n+1} |x_n| &\leq -|z_n x_n|. \end{aligned}$$

Po sčítaní týchto nerovností dostaneme $z_{n+1} \|x\|_1 \leq -\sum_{i=1}^n |z_i x_i| \leq -|\sum_{i=1}^n z_i x_i|$, pričom pravá nerovnosť vyplýva z trojuholníkovej nerovnosti. Pretože $z_{n+1} \leq 0$ a $\|x\|_1 \leq 1$, platí $z_{n+1} \|x\|_1 \geq z_{n+1}$. Dostávame teda

$$z_{n+1} \leq -\left|\sum_{i=1}^n z_i x_i\right| \Leftrightarrow \left|\sum_{i=1}^n z_i x_i\right| + z_{n+1} \leq 0.$$

Pri počítaní $z^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ dostaneme:

$$z^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n z_i x_i + z_{n+1} \leq \left|\sum_{i=1}^n z_i x_i\right| + z_{n+1} \leq 0.$$

To však znamená, že systém (A.1) je prípustný, a teda $A(S_1) \subseteq C_n$, respektíve $A(S_1) \cap \mathcal{V} \subseteq C_n \cap \mathcal{V}$. $\square$

Teraz ukážeme platnosť tohto tvrdenia.

Tvrdenie A.0.7. a) *Nech $x \in \mathbb{R}^n$. Potom platí*

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2,$$

kde $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

b) $\mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_2 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\} \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_1 < \varepsilon\}$ pre pevné $x \in \mathbb{R}^n$.

Dôkaz. a) Zrejme $\|x\|_1^2 = \|x\|_2^2 + 2 \sum_{i>j} |x_i| |x_j|$, a teda $\|x\|_1^2 \geq \|x\|_2^2$. Z nezápornosti noriem vyplýva $\|x\|_1 \geq \|x\|_2$.

Nech $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí $0 \leq (|a| - |b|)^2 \Leftrightarrow |a| |b| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$. Ďalej platí

$$\begin{aligned} \|x\|_1^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i| |x_j| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i^2 + x_j^2}{2} \\ &\leq \sum_{i=1}^n n \frac{x_i^2}{2} + \sum_{j=1}^n n \frac{x_j^2}{2} = n \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

Z nezápornosti noriem opäť vyplýva $\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$.

b) Nech $z \in \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}}(x)$, teda $\|z - x\|_2 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Podľa a) však $\|z - x\|_1 \leq \sqrt{n} \|z - x\|_2 < \varepsilon$, a teda $z \in \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_1 < \varepsilon\}$. $\square$

Veta A.0.8. *Nech $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ je k -rozmerný ($k \leq n$) vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^n$ a $\emptyset \neq M \subseteq \mathcal{V}$ je konvexná množina. Ak má vektor $\hat{x} \in M$ vlastnosť:*

$$\forall v \in \mathcal{V} \exists \lambda > 0 : \hat{x} + \lambda v \in M,$$

potom $\hat{x} \in \text{relint}(M)$ vzhľadom na vektorový podpriestor $\mathcal{V}$.

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že množina $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ je ľubovoľná l_1 normalizovaná báza priestoru $\mathbb{R}^n$ taká, že $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ je báza vektorového podpriestoru $\mathcal{V}$.

Vytvorme množinu $\mathcal{E} := \{a_1, \dots, a_k, -a_1, \dots, -a_k\}$. Podľa predpokladu vo vete ku každému vektoru $a \in \mathcal{E}$ existuje $\lambda_a \equiv \lambda(a) > 0$, že platí $\hat{x} + \lambda_a a \in M$. Pretože množina M je navyše konvexná, platí $\forall \lambda > 0 : \lambda_a \geq \lambda$ platí $\hat{x} + \lambda a \in M$.

Pretože množina $\mathcal{E}$ má len konečný počet prvkov, môžeme položiť $\lambda_m := \min_{a \in \mathcal{E}} \lambda_a > 0$. Zrejme $\forall a \in \mathcal{E}$ platí $\lambda_a \geq \lambda_m > 0$, a teda $\forall a \in \mathcal{E} : \hat{x} + \lambda_m a \in M$.

Pretože množina M je konvexná, každá konvexná kombinácia vektorov $\hat{x} + \lambda_m a$, $a \in \mathcal{E}$ bude patriť množine M , teda

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{i=1}^k c_i (\hat{x} + \lambda_m a_i) + c_{i+k} (\hat{x} - \lambda_m a_i) \mid \sum_{i=1}^k c_i + c_{i+k} = 1, c_i, c_{i+k} \geq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\} = \\ & = \left\{ \hat{x} + \lambda_m \sum_{i=1}^k (c_i - c_{i+k}) a_i \mid \sum_{i=1}^k c_i + c_{i+k} = 1, c_i, c_{i+k} \geq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\} = \\ & = \{\hat{x}\} + \lambda_m C_k \subset M \end{aligned}$$

Podľa Tvrdenia A.0.6 a) a b) platí $C_k = A(S_1) \cap \mathcal{V}$. To však znamená, že $\{\hat{x}\} + \lambda_m C_k = \{\hat{x}\} + \lambda_m (A(S_1) \cap \mathcal{V}) \subset M$.

Podľa Tvrdenia A.0.5 c) platí $\{\hat{x}\} + \lambda_m (\frac{1}{\|A^{-1}\|_1} S_1 \cap \mathcal{V}) \subseteq \{\hat{x}\} + \lambda_m (A(S_1) \cap \mathcal{V}) \subset M$. Máme teda

$$\begin{aligned} \{\hat{x}\} + \lambda_m \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|_1} S_1 \cap \mathcal{V} \right) &= \left\{ \hat{x} + \lambda_m y \mid y \in \frac{1}{\|A^{-1}\|_1} S_1 \cap \mathcal{V} \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - \hat{x}\|_1 \leq \frac{\lambda_m}{\|A^{-1}\|_1} \right\} \cap \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Podľa Tvrdenia A.0.7 b) platí

$$\mathcal{B}_{\frac{\lambda_m}{\sqrt{n}\|A^{-1}\|_1}}(\hat{x}) \cap \mathcal{V} \subseteq \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - \hat{x}\|_1 \leq \frac{\lambda_m}{\|A^{-1}\|_1} \right\} \cap \mathcal{V},$$

to podľa Definície 1.1 b) znamená, že $\hat{x} \in \text{relint}(M)$ vzhľadom na vektorový podpriestor $\mathcal{V}$. $\square$

Teraz dokážeme opačné tvrdenie.

Veta A.0.9. *Nech $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ je k -rozmerný ($k \leq n$) vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^n$ a $\emptyset \neq M \subseteq \mathcal{V}$ je konvexná množina. Ak $\hat{x} \in \text{relint}(M)$ vzhľadom na vektorový podpriestor $\mathcal{V}$, potom má vektor $\hat{x}$ vlastnosť*

$$\forall v \in \mathcal{V} \exists \lambda > 0 : \hat{x} + \lambda v \in M.$$

Dôkaz. Nech $\hat{x} \in \text{relint}(M)$, potom podľa Definície 1.1 b) existuje $\hat{\varepsilon} > 0$, že platí $\mathcal{B}_{\hat{\varepsilon}}(\hat{x}) \subset M$. Predpokladajme sporom, že by existoval vektor $\hat{v} \in \mathcal{V}$, že pre všetky $\lambda > 0$ by platilo $\hat{x} + \lambda \hat{v} \notin M$. Zrejme $\hat{v} \neq \vec{0}$, pretože $\hat{x} \in M$. Z toho vyplýva, že $\|\hat{v}\| \neq 0$.

Zvoľme $\lambda := \frac{\hat{\varepsilon}}{2\|\hat{v}\|} > 0$. Pre vektor $\hat{y} := \hat{x} + \frac{\hat{\varepsilon}}{2\|\hat{v}\|}\hat{v}$ platí

$$\left\| \hat{x} + \frac{\hat{\varepsilon}}{2\|\hat{v}\|}\hat{v} - \hat{x} \right\| = \frac{\hat{\varepsilon}}{2} < \hat{\varepsilon}.$$

To znamená, že $\hat{y} \in \mathcal{B}_{\hat{\varepsilon}}(\hat{x}) \subset M$, ale zároveň $\hat{y} \notin M$. To je spor. Nutne teda platí $\forall v \in \mathcal{V} \exists \lambda > 0 : \hat{x} + \lambda v \in M$. $\square$

Poznámka. a) Veta A.0.9 platí aj v prípade nekonvexnej množiny M , avšak Veta A.0.8 nemusí nutne platiť pre nekonvexné množiny. Uvažujme $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ a množinu

$$M = \left\{ (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\} \cup \left\{ (0, 0)^T \right\}.$$

Vektor $(0, 0)^T$ má zrejme uvedenú vlastnosť, ale určite nie je vnútorným bodom množiny M .

b) Veta A.0.8 a Veta A.0.9 dokazujú ekvivalenciu Definície 1.1 s Definíciou 1.5 pre prípad konvexného kužela.

Príloha B

V tejto časti uvádzame základné vlastnosti Minkowského súčtu. Niektoré vlastnosti, ktoré priamo súvisia s kuželmi, možno nájsť v Tvrdení 1.7, v Tvrdení 1.15 a v Tvrdení 2.8. Platnosť tvrdení, ktoré uvádzame v tejto časti, vyplýva priamo z definície Minkowského súčtu. Tieto elementárne tvrdenia sú všeobecne známe a možno ich nájsť v literatúre. Definíciu Minkowského súčtu preberáme z [15].

Definícia B.0.10. *Nech $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Pod Minkowského súčtom množín X a Y sa rozumie množina*

$$X + Y = \{(x + y) \in \mathbb{R}^n \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Poznámka. Podľa [15] je možné ekvivalentne definovať Minkowského súčet dvoch množín X, Y týmto spôsobom

$$X + Y = \bigcup_{x \in X} (\{x\} + Y).$$

Tvrdenie B.0.11. *Nech $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$.*

- a) Ak $\vec{0} \in X$, potom $Y \subseteq (X + Y)$.*
- b) Ak $\vec{0} \in X$ a $\vec{0} \in Y$, potom $(X \cup Y) \subseteq (X + Y)$.*

Poznámka. Zrejme platí $\{\vec{0}\} + Y = Y$ a $\emptyset + Y = \emptyset$.

Dôkaz. a) V Definícii B.0.10 zvolíme $x = \vec{0}$, t. j. $\forall y \in Y : y = y + \vec{0}$, teda $y \in (X + Y)$. Máme teda $Y \subseteq (X + Y)$.

b) Z a) máme $Y \subseteq (X + Y)$ a $X \subseteq (X + Y)$, a teda z vlastností zjednotenia $(X \cup Y) \subseteq (X + Y)$. □

Tvrdenie B.0.12 (distributívnosť + vzhľadom na $\cup$). *Nech $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$. Potom $X + (Y \cup Z) = (X + Y) \cup (X + Z)$.*

Dôkaz. Inklúzia $X + (Y \cup Z) \subseteq (X + Y) \cup (X + Z)$:

Nech $a \in X + (Y \cup Z)$. To znamená, že $\exists x \in X$ a $w \in (Y \cup Z)$ také, že $a = x + w$. Ak $w \in Y$, potom $a \in (X + Y)$ a ak $w \in Z$, potom $a \in (X + Z)$. Celkovo teda $a \in (X + Y)$ alebo $a \in (X + Z)$. To znamená $a \in (X + Y) \cup (X + Z)$.

Inklúzia $X + (Y \cup Z) \supseteq (X + Y) \cup (X + Z)$:

Nech $a \in (X + Y) \cup (X + Z)$. Ak $a \in (X + Y)$, potom existuje rozklad $a = x + w$, kde $x \in X$ a $w \in Y$. Ak $a \in (X + Z)$, potom existuje rozklad $a = x + w$, kde $x \in X$ a $w \in Z$. Analýzou týchto prípadov dostávame $w \in (Y \cup Z)$ a teda $a \in (X + (Y \cup Z))$. $\square$

Poznámka. Operácia $+$ nie je distributívna vzhľadom na operáciu $\cap$. Uvažujme množiny $X = \{(1, 1)^T, (2, 2)^T\}$, $Y = \{(-2, -2)^T\}$ a $Z = \{(-1, -1)^T\}$. Potom $X + (Y \cap Z) = \emptyset$, ale $(X + Y) \cap (X + Z) = \{(0, 0)^T\}$.

Tvrdenie B.0.13 (monotónnosť). *Nech $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}^n$ a $Y \subseteq Z$. Potom platí $X + Y \subseteq X + Z$.*

Dôkaz. Nech $a \in (X + Y)$, teda existuje rozklad $a = x + y$ taký, že $x \in X$ a $y \in Y$. Pretože $Y \subseteq Z$, nutne $y \in Z$. Preto $a \in (X + Z)$. $\square$

V tomto tvrdení uvedieme reprezentáciu konvexného kužela vzhľadom na vektorový podpriestor $\mathcal{V}$ ako Minkowského súčet kuželov $K \cap \mathcal{V}$ a $K \cap \mathcal{V}^\perp$.

Tvrdenie B.0.14. *Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexný kužel a $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ je vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^n$. Potom platí*

$$K \cap \mathcal{V} + K \cap \mathcal{V}^\perp \subseteq K. \quad (\text{B.1})$$

Navyše, ak $\mathcal{V} \subseteq K$, potom platí

$$K = \mathcal{V} + K \cap \mathcal{V}^\perp.$$

Dôkaz. Inklúzia $K \cap \mathcal{V} + K \cap \mathcal{V}^\perp \subseteq K$:

Zoberme ľubovoľné vektory $k_1 \in K \cap \mathcal{V} \subseteq K$ a $k_2 \in K \cap \mathcal{V}^\perp \subseteq K$, teda $k_1 + k_2 \in K \cap \mathcal{V} + K \cap \mathcal{V}^\perp$. Navyše, pretože K je konvexný kužel, dostaneme $k_1 + k_2 \in K$.

Z poznatkov z lineárnej algebry vieme, že pre ľubovoľný vektor $k \in K$ existuje jednoznačný rozklad

$$k = v_1 + v_2,$$

kde $v_1 \in \mathcal{V}$ a $v_2 \in \mathcal{V}^\perp$. Ak platí $\mathcal{V} \subseteq K$, potom $v_1 \in K$. Navyše, $-v_1 \in \mathcal{V}$, a teda $-v_1 \in K$.

Pre vektor $v_2 \in \mathcal{V}^\perp$ dostaneme vzťah

$$v_2 = \underbrace{k}_{\in K} + \underbrace{(-v_1)}_{\in K}.$$

Pretože K je konvexný kužel, platí $v_2 \in K$, respektíve $v_2 \in K \cap \mathcal{V}^\perp$. To znamená, že platí inklúzia $K \subseteq \mathcal{V} + K \cap \mathcal{V}^\perp$. Spolu so vzťahom (B.1) dostaneme

$$K = \mathcal{V} + K \cap \mathcal{V}^\perp.$$

□

Zoznam použitej literatúry

- [1] Aliprantis Ch. D., Tourky R.: *Cones and Duality*, The American Mathematical Society (AMS), Providence (USA), 2007
- [2] Ben-Tal A., Nemirovski A.: *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms and Engineering Applications*, MOS-SIAM, Philadelphia (USA), 2001
- [3] Berge C.: *Topological Spaces*, Dover Publications Inc., New York (USA), 1963
- [4] Berman A.: *Cones, Matrices and Mathematical Programming*, Springer, Berlin (Neamecko), 1973
- [5] Bertsekas D. a kol.: *Convex Optimization Theory*, Athena Scientific, Belmont (USA), 2009
- [6] Borwein J., Moors W.: *Stability of Closedness of Convex Cones under Linear Mappings*, Journal of Convex Analysis 16 (2009), 669–705
- [7] Boyd S., Vandenberghe L.: *Convex Optimization*, Cambridge University Press, New York (USA), 2004
- [8] de Klerk E.: *Applications of cone programming*, prezentácia, Tilburg University (Holandsko), dostupné na internete (13.5.2020): https://spms.ntu.edu.sg/MathematicalSciences/Seminars/Documents/EtiennedeKlerk_tutorial.pdf
- [9] Farkas J.: *Über die Theorie der Einfachen Ungleichungen*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 124 (1902), 1–31, dostupné na internete (13.5.2020): <https://convexoptimization.com/TOOLS/Farkas.pdf>
- [10] Güller O., Ross C., Vial J-Ph., Terlaky T.: *A Survey of the Implications of the Behavior of the Central Path for the Duality Theory for Linear Programming*, Management Science 41 (1995), 1922–1934
- [11] Hamala M., Trnovská M.: *Nelineárne programovanie*, Epos, Bratislava, 2012
- [12] Leonard I. E, Lewis J. E.: *Geometry of Convex Sets*, Wiley, New Jersey (USA), 2015

- [13] Lobo M., Vandenberghe L., Boyd S., Lebret H., *Applications of Second-order Cone Programming*, Linear Algebra and its Applications 284 (1998), 193–228
- [14] Mason K., Van Roy B.: *Formulation and Analysis of Linear Programs*, učebné texty, Stanford University, Kalifornia (USA), 2005, dostupné na internete (13.5.2020): <https://web.stanford.edu/~ashishg/msande111/notes/chapter4.pdf>
- [15] Montejano L.: *Some Results About Minkowski Addition And Difference*, Mathematika 43 (1996), 265–273
- [16] MOSEK ApS: *MOSEK Modeling Cookbook (Release 3.2.1)*, MOSEK ApS, Dánsko, 2020, dostupné na internete (24.4.2020): <https://docs.mosek.com/MOSEKModelingCookbook-letter.pdf>
- [17] Nemirovski A.: *Advances in Convex Optimization: Conic Programming*, Proceedings of International Congress of Mathematicians 1 (2006), dostupné na internete (13.5.2020): <https://www2.isye.gatech.edu/~nemirovs/ICMNemirovski.pdf>
- [18] Nemirovski A.: *Introduction to Linear Optimization*, texty prednášok, Georgia Institute of Technology H. Milton Stewart School of Industrial and Systems Engineering, 2012, dostupné na internete (13.5.2020): https://www2.isye.gatech.edu/~nemirovs/OPTI_LectureNotes.pdf
- [19] Luo Z-Q., Sturm J. F, Zhang S.: *Duality Results for Conic Convex Programming*, Econometric Institute Report No. 9719/A (1997), dostupné na internere (13.5.2020): <https://econpapers.repec.org/paper/emseureir/1412.htm>
- [20] Pataki G.: *On the Closedness of the Linear Image of a Closed Convex Cone*, Mathematics of Operations Research 32 (2006), 395–412, dostupné na internete (13.5.2020): http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2006/12/1556.pdf
- [21] Rockafellar R. T.: *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton (USA), 1970
- [22] Rudin W.: *Functional Analysis* (druhé vydanie), McGraw-Hill, Michigan/Wisconsin (USA), 1991

- [23] Shapiro A.: *On Duality Theory of Conic Linear Problems*, In: Goberna M., López M.: *Semi-infinite Programming*, Springer-Verlag, Boston (USA), 2001, 135–165
- [24] Steen L. A, Seebach J. A.: *Counterexamples in Topology*, (druhé vydanie) Springer-Verlag, New York (USA), 1978
- [25] Todd M. J.: *Semidefinite Optimization*, Acta Numerica 10 (2001), 515–560
- [26] Trnovská M.: *Duality results in conic linear programming with simple proofs*, nepublikovaný rukopis, FMFI UK, Bratislava, 2017
- [27] Trnovská M.: *Kónické lineárne programovanie*, učebné texty, Bratislava, 2018
- [28] Trnovská M.: *Strong Duality Conditions in Semidefinite Programming*, Journal of Electrical Engineering 56 (2005), 1–5
- [29] Vandenberghe L., Boyd S.: *Applications of Semidefinite Programming*, Applied Numerical Mathematics 29 (1999), 283–299
- [30] Zlatoš P.: *Lineárna algebra a geometria*, Marenčin PT, Bratislava, 2011