

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



DEA MODELY S OHRANIČENIAMÍ NA VÁHY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2020

Bc. Zuzana JANKECHOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DEA MODELY S OHRANIČENIAMÍ NA VÁHY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie

Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci práce: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Zuzana Jankechová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: DEA modely s ohraničeniami na váhy
DEA models with restricted weights

Anotácia: V obálkovej analýze dát (DEA) existujú viaceré modely, ktoré nejakým spôsobom obmedzujú voľbu váh. Napríklad tzv. Assurance region model povoľuje určiť horné a dolné ohraničenia na pomery váh. V súčasnej časopiseckej literatúre sa opisujú rozličné spôsoby, ako stanoviť tieto ohraničenia, ale nie je známe porovnanie metód a ich dôkladnejšia analýza. Táto práca sa pokúsi analyzovať známe postupy a prípadne navrhnúť nové.

Vedúci: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Dátum zadania: 07.01.2019

Dátum schválenia: 08.01.2019

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Podakovanie Touto cestou by som sa chcela poďakovať doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc., za jej čas, ochotu, pomoc, odborné vedenie, cenné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi poskytla pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich morálnu podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

JANKECHOVÁ, Zuzana: DEA modely s ohraničeniami na váhy [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2020, 70 s.

V diplomovej práci sa zaoberáme DEA modelmi s ohraničeniami na váhy. V obálkovej analýze dát existuje viacero modelov, ktoré nejakým spôsobom obmedzujú voľbu váh. V tejto práci sa snažíme analyzovať známe postupy používané pri stanovovaní ohraničení na váhy. V literatúre sa aplikujú dodatočné ohraničenia zvyčajne nad orientovanými modelmi. V našej práci aplikujeme ohraničenia aj nad hyperbolickým a Russellovým modelom, ktoré sú neorientované. Uvádzame konkrétne typy ohraničení, s ktorými sa možno v literatúre najčastejšie stretnúť. Na príkladoch ilustrujeme zmenu vlastností jednotlivých modelov po začlenení dodatočných ohraničení na váhy. Taktiež uvádzame jednoduché testy konzistentnosti ohraničení, vďaka ktorým vieme identifikovať, či dodatočné ohraničenia nespôsobujú v modeli problémy. V poslednej časti práce aplikujeme nami zvolené ohraničenia na cvičnom príklade, v ktorom analyzujeme efektivitu bankového systému na Slovensku.

Kľúčové slová: DEA modely, ohraničenia na váhy, hyperbolický model, Russellov model, testovanie konzistentnosti

Abstract

JANKECHOVÁ, Zuzana: DEA models with restricted weights [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2020, 70 p.

In this Diploma thesis we deal with DEA models with restricted weights. There are several models in the Data Envelopment Analysis that somehow limit the choice of weights. In this paper, we try to analyze the well-known procedures used in determining weight restrictions. In the literature, additional weight restrictions are applied, usually over oriented models. In our work, we also apply weight restrictions over the hyperbolic model and Russell model, which are unoriented. We list specific types of weight restrictions that are most often used in the literature. We illustrate on examples the change in the properties of individual models after the inclusion of additional weight restrictions. We also introduce simple consistency tests to help us identify whether additional weight restrictions are causing problems in the model. In the last part of the work we apply our chosen weight restrictions on a practical example, in which we analyze the efficiency of the banking system in Slovakia.

Keywords: DEA models, weight restrictions, hyperbolic model, Russell model, testing for consistency

Obsah

Úvod	7
1 Úvod do DEA modelovania	9
1.1 Symbolika	9
1.2 DEA modely	12
1.2.1 CCR model	12
1.2.2 BCC model	16
1.2.3 Hyperbolický model	18
1.2.4 Russellov model	20
2 Ohraničenia na váhy	22
2.1 Dôvody začlenenia ohraničení na váhy	22
2.2 Typy ohraničení	23
2.3 Problémy spôsobené začlenením ohraničení na váhy	25
2.4 Zmiešané ohraničenia	27
2.5 Jednoduché ohraničenia	29
3 Zmena vlastností modelov s ohraničeniami na váhy	34
3.1 Rozšírenie množiny produkčných možností	34
3.2 Nepripustnosť úlohy	36
3.3 Záporná efektivita	40
3.4 Benchmarking	41
3.5 Úbytok efektívnych útvarov a pseudoefektív	43
4 Testovanie konzistentnosti ohraničení na váhy	47
4.1 Výpočtový prístup	47
4.2 Analytická podmienka	49
5 Aplikácia na reálne dáta	51
5.1 Výber dát	51
5.2 Výber orientácie modelu a použitých parametrov	52
5.3 Voľba dodatočných ohraničení na váhy	53

5.4 Výsledky a diskusia	56
Záver	58
Zoznam použitej literatúry	60
Príloha A	63
Príloha B	64
Príloha C	65
Príloha D	67
Príloha E	69

Úvod

Obáľková analýza dát (Data Envelopment Analysis, skrátene DEA) sa začala rozvíjať koncom 70. rokov 20. storočia, kedy bola publikovaná práca *Measuring the efficiency of decision making units* od Charnesa, Coopera a Rhodesa. Využitie DEA je v súčasnosti pomerne bežné vo viacerých oblastiach, napr. bankovníctve, zdravotníctve, školstve alebo štátnej správe, čomu nasvedčuje narastajúci počet publikácií, ktoré sa tejto problematike venujú.

Obáľková analýza dát je neparametrická metóda, ktorá sa zameriava na vyhodnocovanie a porovnávanie technickej efektivity určitej skupiny organizačných jednotiek. DEA modelovanie sa zvyčajne predstavuje ako aplikácia lineárneho programovania, nakoľko väčšinu modelov možno interpretovať ako lineárne optimalizačné úlohy. V súčasnosti však nadobúdajú na popularitu aj niektoré nelineárne modely, napríklad Russellov model alebo hyperbolický model.

V DEA modeloch si každá organizačná jednotka hľadá vhodné váhy, ktoré prislúchajú jednotlivým vstupom a výstupom. Tieto váhy určujú, ako dôležité sú vstupy resp. výstupy pre danú jednotku pri maximalizácii svojej efektivity. Základné DEA modely na tieto váhy neurčujú žiadne apriórne ohraničenia okrem predpokladu nezápornosti.

Nakoľko sa DEA modely v súčasnosti využívajú najmä pri výpočtoch týkajúcich sa problémov reálneho sveta, je potrebné do analýzy začleniť tzv. *value judgement*. To znamená, že chceme využiť informácie, ktoré o danej oblasti máme. Takýmito informáciami môže byť dôležitosť jednotlivých vstupov / výstupov, ich dostupnosť, ceny na trhu atď. Toto je len jeden z dôvodov, pre ktoré sa do DEA modelov začali začleňovať dodatočné ohraničenia na váhy.

V súčasnosti môžeme nájsť viacero publikácií, ktoré sa zaoberajú začlenením ohraňení na váhy do DEA modelov. Základom pre tieto analýzy sú lineárne modely, najčastejšie radiálne orientované CCR alebo BCC modely. Z týchto publikácií taktiež vieme, že dodatočné ohraničenia na váhy môžu model výrazne zlepšiť, no na druhú stranu môžu spôsobiť aj viacero problémov.

Cieľom tejto diplomovej práce je prehľadne spracovať známe poznatky z oblasti využívania dodatočných ohraňení na váhy a analyzovať zaužívané postupy. Tieto poznatky a postupy rozšírime aplikovaním na niektoré nelineárne neorientované modely.

Práca je rozdelená na päť kapitol. V prvej kapitole uvádzame základné poznatky z teórie DEA modelov a symboliku, ktorá sa v práci ďalej používa. Vysvetlíme, čo je to technológia a uvedieme modely (CCR, BCC, hyperbolický a Russellov model), ktoré budeme v tejto práci používať. V druhej kapitole sa zaoberáme začlenením ohraničení na váhy do modelov. Vysvetlíme základné dôvody, prečo sa ohraničenia do analýzy začleňujú a uvedieme aj v akej forme môžu byť tieto ohraničenia do modelov začlenené. Ďalšia kapitola obsahuje jednoduché príklady, na ktorých ukážeme, akým spôsobom ovplyvňuje začlenenie dodatočných ohraničení použitý model respektíve jeho vlastnosti. V štvrtej kapitole uvádzame dva prístupy, ktorými možno testovať konzistentnosť zvolených ohraničení na váhy. Posledná kapitola obsahuje praktickú časť, resp. cvičný príklad s nami navrhnutými ohraničeniami na váhy v oblasti, ktorá často využíva analýzu pomocou DEA modelov, a to bankovníctvo. Konkrétne budeme analyzovať bankový sektor na Slovensku pomocou prístupu orientovaného na služby. Využívať budeme orientované (BCC) aj neorientované modely (hyperbolický, Russellov model).

1 Úvod do DEA modelovania

Na začiatku tejto práce uvedieme základné poznatky z teórie DEA modelov a zároveň zadefinujeme niektoré pojmy, ktoré budeme neskôr v práci používať. Vychádzať budeme hlavne z [6].

1.1 Symbolika

Podstatou DEA modelov je určovanie relatívnej efektívnosti jednotlivých producentov v rámci určitej skupiny. Pojem efektívnosť sa viaže na určitý spôsob vykonávania nejakej činnosti. Túto činnosť budeme v súlade s ekonomickou teóriou nazývať technológiou, produkčnou činnosťou alebo produkciou. Technológiou v tomto prípade rozumieme spôsob, akým subjekty vytvárajú zo svojich zdrojov výsledné produkty. Dôležitým predpokladom DEA modelov je homogénosť danej skupiny producentov, čo znamená, že môžeme porovnávať len útvary, ktoré sa zaoberajú rovnakým druhom činnosti (výrobnej alebo nevýrobnej).

Technológia T je charakterizovaná vstupmi, ktoré spotrebovávajú a výstupmi, ktoré produkuje. Uvažujme technológiu T , ktorá je charakterizovaná m vstupmi a s výstupmi (viď Obr. 1).



Obr. 1: Technológia a jej vstupy a výstupy (Zdroj: [6])

Jednotlivé vstupy (inputy) označujeme $I_i, (i = 1, \dots, m)$, výstupy (outputy) zase $O_r, (r = 1, \dots, s)$ a v stručnosti hovoríme o i -tom vstupe, kde $i = 1, \dots, m$ a o r -tom výstupe, kde $r = 1, \dots, s$. Konkrétne hodnoty vstupov v technológii T budeme označovať vektorom $x \in \mathbb{R}^m$ a konkrétne hodnoty výstupov vektorom $y \in \mathbb{R}^s$.

Ak pre dvojicu (x, y) platí, že množstvá y výstupov sa dajú v technológii T vyrobiť z množstiev vstupov x , tak hovoríme že dvojica (x, y) je pre technológiu T prípustná.

Množina všetkých prípustných dvojíc (x, y) sa nazýva množinou produkčných možností, ktorá sa označuje G . Pre naše potreby používame len jej aproximáciu M , ktorej dva prípady sú definované nižšie. Pri konštrukcii množiny M budeme vychádzať z pozorovaných dát a axiom odvodených v [6].

Uvažujeme teraz skupinu n homogénnych producentov alebo organizačných útvarov, či jednotiek, ktoré sa riadia technológiou T . Útvary označujeme DMU_j , $(j = 1, \dots, n)$ a hovoríme o j -tom útvare, pre $j = 1, \dots, n$. Skratka DMU pochádza z anglického *Decision Making Unit* a vyjadruje nezávislosť rozhodovania každého útvaru o premene vstupov na výstupy. Každý útvar je tak charakterizovaný svojimi vlastnými hodnotami resp. množstvami každého z m vstupov a s výstupov. Vektor vstupov j -teho útvaru označujeme x_j a vektor výstupov y_j . Predpokladáme, že $x_j \in \mathbb{R}_+^m$ a $y_j \in \mathbb{R}_+^s$. V tejto práci budeme predpokladať, že hodnoty všetkých vstupov a výstupov sú pre každý útvar nezáporné a že každý útvar má aspoň jeden kladný vstup a aspoň jeden kladný výstup. Hodnotu i -teho vstupu pre j -ty útvar označíme x_{ij} , hodnotu r -tého výstupu pre j -ty útvar y_{rj} , a teda

$$x_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \quad y_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{rj} \\ \vdots \\ y_{sj} \end{pmatrix}, \quad (j = 1, \dots, n).$$

Hodnoty vstupov a výstupov pre všetky DMU_j môžeme zapísať pomocou matice vstupov X typu $m \times n$, a matice výstupov Y typu $s \times n$, to znamená:

$$X := \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1j} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{r1} & \dots & y_{rj} & \dots & y_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \dots & y_{sj} & \dots & y_{sn} \end{pmatrix}.$$

Zrejme $x_j \in \mathbb{R}_+^m$ - vektor hodnôt vstupov útvaru DMU_j - je j -ty stĺpec matice X . Podobne $y_j \in \mathbb{R}_+^s$ - vektor hodnôt výstupov útvaru DMU_j - je j -ty stĺpec matice Y , a teda

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_j & \dots & x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_j & \dots & y_n \end{pmatrix}.$$

Úlohou DEA modelov je z daných vstupných údajov určiť, ktoré útvary sú efektívne a ktoré neefektívne. Spomedzi všetkých útvarov DMU_j , $j = 1, \dots, n$ budeme osobitne označovať ten útvar, ktorého efektívnosť budeme práve zisťovať. Tento útvar označíme pomocou špeciálneho indexu, ktorým je malé písmeno $o \in \{1, \dots, n\}$.

Budeme uvažovať prípad konštantných výnosov z rozsahu (CRS z anglického *Constant Return to Scale*), kedy technológia vykazuje vlastnosť, že s každou prípustnou dvojicou hodnôt (x, y) je prípustnou dvojicou aj (kx, ky) , pre každé $k > 0$. Ak takúto informáciu nemáme, hovoríme o variabilných výnosoch (VRS z anglického *Variable Returns to Scale*).

Na základe n pozorovaných dát (organizačných jednotiek) a tzv. axióm produkčnej množiny (konvexnosť, free disposability, výnosy z rozsahu), ktoré sú uvedené v [6] sa definuje množina produkčných možností s konštantnými výnosmi z rozsahu nasledujúcim vzťahom.

$$M_{CRS} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+s} \mid X\lambda \leq x, \quad Y\lambda \geq y, \quad \lambda \geq 0\}, \quad (1)$$

kde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$. Množina M_{CRS} je konvexný kužel generovaný vektormi jednotlivých DMU_j rozšírený o dvojice, ktoré majú väčšie vstupy alebo menšie výstupy.

Podobne sa definuje množina produkčných možností s variabilnými výnosmi z rozsahu vzťahom:

$$M_{VRS} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+s} \mid X\lambda \leq x, \quad Y\lambda \geq y, \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda \geq 0\}, \quad (2)$$

kde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$. Množina M_{VRS} je konvexnou množinou opäť generovanou vektormi jednotlivých DMU_j rozšírenou o dvojice, ktoré majú väčšie vstupy alebo menšie výstupy.

Dvojicu $(x, y) \in M$ nazývame Pareto-efektívnou v M práve vtedy, keď neexistuje taký bod $(x', y') \in M$ že $(x', y') \neq (x, y)$ a zároveň $x \geq x'$ a $y \leq y'$.

Je zrejmé, že efektívna dvojica musí byť z hranice množiny M . Na hranici však môžu ležať aj body, ktoré nie sú efektívne. Takéto dvojice nazývame pseudoefektívne. Body, ktoré ležia vo vnútri množiny M , nazývame neefektívne.

Vo všeobecnosti existujú dva prístupy k interpretácii efektivity. Obáľkový prístup sa zaoberá skracovaním m rozmerného vektora vstupov a/alebo predlžovaním s rozmer-

ného vektora výstupov, až kým sa nedostaneme na hranicu obálky dát. V algebraickom prístupe sa pomocou multiplikátorov váh vytvára z vektora vstupov a vektora výstupov jednorozmerný vstup a jednorozmerný výstup a maximalizuje sa efektivita vzhľadom na voľbu váh. Tento prístup sa vďaka multiplikátorom váh nazýva multiplikatívnym. Každý z týchto dvoch prístupov povedie na určitú úlohu lineárneho programovania, ktoré budú k sebe navzájom duálne.

1.2 DEA modely

Historicky prvým DEA modelom bol model z práce [3], ktorý sa síce v praxi nepoužíva, no predstavuje základ pre odvodenie mnohých v praxi používaných modelov, formulovaných ako úlohy lineárneho programovania.

1.2.1 CCR model

CCR model autorov Charnesa, Coopera a Rhodesa z roku 1978 je historicky prvým DEA modelom, ktorý našiel praktické uplatnenie. Napriek istým nedostatkom patrí dodnes medzi najpoužívanéjšie modely. CCR model zodpovedá konštantným výnosom z rozsahu, viaže sa teda na príslušnú množinu produkčných možností M_{CRS} z (1). Poznáme jeho dve verzie: vstupný a výstupný CCR model, pri ich definovaní čerpáme z [6]. Pri vstupnom modeli radiálne skracujeme vstupy pri nezmenšených hodnotách výstupov. Pri výstupnom modeli radiálne predlžujeme výstupy pri nezväčšených hodnotách vstupov.

Pod vstupným CCR modelom v obáľkovom zápise $(CCR-I-OM)_o$ aplikovaným na DMU_o rozumieme úlohu:

$$\min_{\theta, \lambda} \quad \theta \tag{3a}$$

$$\text{pri podmienkach} \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j \leq \theta x_o, \tag{3b}$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j \geq y_o, \tag{3c}$$

$$\lambda \geq 0_n. \tag{3d}$$

Pod výstupným CCR modelom v obáľkovom zápise $(CCR-O-OM)_o$ aplikovaným na DMU_o , rozumieme úlohu:

$$\max_{\psi, \lambda} \quad \psi \quad (4a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j \leq x_o, \quad (4b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j \geq \psi y_o, \quad (4c)$$

$$\lambda \geq 0_n. \quad (4d)$$

Nerovnosti v ohraničeniach môžeme previesť na rovnosti zavedením doplnkových premenných, ktoré budeme nazývať z anglického originálu slacks. Zápis modelu s týmito nezápornými ohraničeniami budeme potrebovať pri interpretácii riešení.

$$(CCR - I - OM - S)_o :$$

$$\begin{aligned} \min_{\theta, \lambda, s^x, s^y} \quad & \theta \\ \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x &= \theta x_o, \\ \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y &= y_o, \\ \lambda &\geq 0_n, \quad s^x \geq 0_m, \quad s^y \geq 0_s. \end{aligned}$$

$$(CCR - O - OM - S)_o :$$

$$\begin{aligned} \max_{\psi, \lambda, s^x, s^y} \quad & \psi \\ \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x &= x_o, \\ \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y &= \psi y_o, \\ \lambda &\geq 0_n, \quad s^x \geq 0_m, \quad s^y \geq 0_s. \end{aligned}$$

Vyššie uvedené modely CCR-I-OM aj CCR-O-OM majú tvar úlohy lineárneho programovania (LP). K obom tak vieme zostrojiť príslušné duálne úlohy - modely v multiplikatívnom zápise.

Pod vstupným CCR modelom v multiplikatívnom zápise $(CCR-I-MM)_o$ aplikovaným na DMU_o rozumieme úlohu:

$$\max_{u, v} \quad u^T y_o \quad (5a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad v^T x_o = 1, \quad (5b)$$

$$u^T y_j - v^T x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (5c)$$

$$u \geq 0_s, \quad v \geq 0_m. \quad (5d)$$

Účelovú funkciu budeme označovať $U_o := U_o(u, v) := u^T y_o$ a jej optimálnu hodnotu U_o^* .

Pod výstupným CCR modelom v multiplikatívnom zápise $(\text{CCR-O-MM})_o$ aplikovaným na DMU_o , rozumieme úlohu:

$$\min_{u,v} v^T x_o \quad (6a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad u^T y_o = 1, \quad (6b)$$

$$u^T y_j - v^T x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6c)$$

$$u \geq 0_s, \quad v \geq 0_m. \quad (6d)$$

Účelovú funkciu budeme označovať $V_o := V_o(u, v) := v^T x_o$ a jej optimálnu hodnotu V_o^* .

Oba multiplikatívne modely (vstupný aj výstupný) možno odvodiť z nasledovného modelu v zlomkovom tvare, ktorý má bezprostrednú interpretáciu.

$$\max_{u,v} \frac{u^T y_o}{v^T x_o} \quad (7a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7b)$$

$$u \geq 0_s, \quad v \geq 0_m. \quad (7c)$$

V tomto modeli hľadáme váhy u a v tak, aby produktivita útvaru DMU_o reprezentovaná účelovou funkciou v (7a) bola maximálna pri podmienkach, že váhy sú nezáporné a pri podmienkach (7b), že produktivity všetkých uvažovaných útvarov sú menšie alebo rovné jednej. Keďže pri CRS sa definuje efektivita ako podiel produktivity ku maximálnej produktivite v súbore tak podľa [6] model (7), vďaka normalizačným podmienkam (7b), vlastne maximalizuje efektivitu DMU_o .

Pri interpretácii multiplikatívnych CCR modelov vychádzame z optimálnej hodnoty účelovej funkcie príslušnej úlohy, pričom $U_o^* \in (0, 1]$ a $V_o^* \in [1, \infty)$. Pomocou týchto hodnôt definujeme efektivitu $E_o^* = U_o^*$ v prípade vstupne orientovaného modelu, resp. $E_o^* = \frac{1}{V_o^*}$ v prípade výstupne orientovaného modelu. Pri interpretácii riešenia taktiež potrebujeme informáciu o existencii optimálneho riešenia, ktoré je kladné vo všetkých zložkách $(u^*, v^*) > 0$.

Podľa silnej vety o dualite vieme, že ak existuje optimálne riešenie primárnej úlohy, potom existuje optimálne riešenie pre duálnu úlohu a hodnoty účelových funkcií sa rovnajú.

$$\theta_o^* = U_o^*, \quad \psi_o^* = V_o^*$$

Taktiež platí nasledovná ekvivalencia z [6]:

$$\exists_{(u^*, v^*)_{\text{opt.r.}(MM)} : u^* > 0, v^* > 0 \Leftrightarrow \forall_{(s^{x*}, s^{y*})_{\text{opt.r.}(OM)} : s^{x*} = 0, s^{y*} = 0. \quad (8)$$

Pri interpretácii výsledkov CCR modelov potrebujeme vedieť rozlíšiť, či optimálna hodnota účelovej funkcie príslušnej úlohy LP vyjadruje efektivitu, alebo len pseudoefektivitu. Podľa vyššie uvedenej ekvivalencie (8) nám k tomu stačí overiť splnenie niektorej z uvedených ekvivalentných podmienok. Na overenie platnosti týchto podmienok existuje niekoľko nástrojov, napr. metóda vnútorného bodu, ϵ -metóda alebo dvojfázová metóda.

V tejto práci budeme na overenie podmienok používať metódu vnútorného bodu, prípadne dvojfázovú metódu. Výsledkom úlohy s použitím metódy vnútorného bodu je primárno-duálne optimálne riešenie $(u^*, v^*, s^{x*}, s^{y*})$, ktoré je ostrokomplementárne. Ostrá komplementarita znamená, že pre každé i je práve jeden činiteľ v súčine $v_i^* s_i^{x*}$ nulový. Analogicky to platí o vektoroch u^* a s^{y*} .

Myšlienku dvojfázovej metódy vysvetlíme na vstupne orientovanom CCR modeli. Rovnako sa dá aplikovať aj na výstupne orientovaný model. Metóda sa aplikuje na obáľkovú formu modelu. Vyriešením úlohy $(\text{CCR-I-OM-S})_o$ dostaneme optimálne riešenie $\theta^*, \lambda^*, s^{x*}, s^{y*}$. Ak sme riešením úlohy dostali $s^{x*} \neq 0$ alebo $s^{y*} \neq 0$ môžeme povedať, že ide o prípad pseudoefektivity. Ak v riešení platí $s^{x*} = 0, s^{y*} = 0$, budeme riešiť úlohu:

$$\max_{\lambda, s^x, s^y} H := e^T s^x + e^T s^y \quad (9a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = \theta^* x_o, \quad (9b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = y_o, \quad (9c)$$

$$\lambda, s^x, s^y \geq 0, \quad (9d)$$

kde θ^* predstavuje optimálnu hodnotu účelovej funkcie pôvodnej úlohy. Ak optimálna hodnota účelovej funkcie $H^* > 0$, potom niektorá zložka vektora s^{x*} alebo s^{y*} musela vyjsť kladná, čo znamená, že ide o pseudoefektivitu. Ak $H^* = 0$, musí platiť $s^{x*} = 0, s^{y*} = 0$, a teda ide o efektivitu. Teraz vieme interpretovať výsledky z multiplikatívnych aj obáľkových CCR modelov podľa tabuliek uvedených nižšie.

u^*, v^*	s^{x*}, s^{y*}	$U_o^* = \theta_o^*$	$E_o^* = U_o^*$	DMU_o	efektivita/pseudo
$\exists(u^*, v^*) > 0$	$\forall(s^{x*}, s^{y*}) = (0, 0)$	$U_o^* = 1$	$E_o^* = 1$	efektívne	efektivita
$\exists(u^*, v^*) > 0$	$\forall(s^{x*}, s^{y*}) = (0, 0)$	$U_o^* < 1$	$E_o^* < 1$	neefektívne	efektivita
$\nexists(u^*, v^*) > 0$	$\exists(s^{x*}, s^{y*}) \neq (0, 0)$	$U_o^* = 1$	$E_o^* = 1$	pseudoefektívne	pseudoefektivita
$\nexists(u^*, v^*) > 0$	$\exists(s^{x*}, s^{y*}) \neq (0, 0)$	$U_o^* < 1$	$E_o^* < 1$	neefektívne	pseudoefektivita

Tabuľka 1: Interpretácia riešení vstupne orientovaného CCR modelu

u^*, v^*	s^{x*}, s^{y*}	$V_o^* = \psi_o^*$	$E_o^* = \frac{1}{V_o^*}$	DMU_o	efektivita/pseudo
$\exists(u^*, v^*) > 0$	$\forall(s^{x*}, s^{y*}) = (0, 0)$	$V_o^* = 1$	$E_o^* = 1$	efektívne	efektivita
$\exists(u^*, v^*) > 0$	$\forall(s^{x*}, s^{y*}) = (0, 0)$	$V_o^* > 1$	$E_o^* < 1$	neefektívne	efektivita
$\nexists(u^*, v^*) > 0$	$\exists(s^{x*}, s^{y*}) \neq (0, 0)$	$V_o^* = 1$	$E_o^* = 1$	pseudoefektívne	pseudoefektivita
$\nexists(u^*, v^*) > 0$	$\exists(s^{x*}, s^{y*}) \neq (0, 0)$	$V_o^* > 1$	$E_o^* < 1$	neefektívne	pseudoefektivita

Tabuľka 2: Interpretácia riešení výstupne orientovaného CCR modelu

1.2.2 BCC model

CCR modely z predchádzajúcej podkapitoly odpovedajú konštantným výnosom z rozsahu s odpovedajúcou množinou produkčných možností M_{CRS} . Množine M_{VRS} , odpovedajúcej variabilným výnosom z rozsahu, odpovedajú analógie CCR modelov pre variabilné výnosy z rozsahu. Takéto modely zostavili autori Banker, Charnes, Cooper v roku 1984 a označujeme ich skratkou BCC. Rovnako ako CCR modely sa BCC model vyskytuje v dvoch verziách: vstupný a výstupný BCC model, pri ich definovaní znova čerpáme z [6].

BCC modely sa od obáľkovej verzie CCR modelov líšia iba pridaním ohraničenia $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$. V príslušných duálnych úlohách (multiplikatívny tvar modelu) sa táto zmena prejaví pribudnutím voľnej premennej $z \in \mathbb{R}$.

Pod vstupným BCC modelom v obáľkovom zápise $(BCC-I-OM)_o$ aplikovaným na

DMU_o rozumieme úlohu:

$$\min_{\theta, \lambda} \quad \theta \quad (10a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j \leq \theta x_o, \quad (10b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j \geq y_o, \quad (10c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda \geq 0_n. \quad (10d)$$

Pod výstupným BCC modelom v obáľkovom zápise $(BCC-O-OM)_o$ aplikovaným na DMU_o rozumieme úlohu:

$$\max_{\psi, \lambda} \quad \psi \quad (11a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j \leq x_o, \quad (11b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j \geq \psi y_o, \quad (11c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda \geq 0_n. \quad (11d)$$

Pod vstupným BCC modelom v multiplikatívnom zápise $(BCC-I-MM)_o$ aplikovaným na DMU_o rozumieme úlohu:

$$\max_{u, v, z} \quad u^T y_o + z \quad (12a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad v^T x_o = 1, \quad (12b)$$

$$u^T y_j - v^T x_j + z \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (12c)$$

$$u \geq 0_s, \quad v \geq 0_m, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (12d)$$

Pod výstupným BCC modelom v multiplikatívnom zápise $(BCC-O-MM)_o$ aplikovaným na DMU_o rozumieme úlohu:

$$\min_{u, v, z} \quad v^T x_o - z \quad (13a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad u^T y_o = 1, \quad (13b)$$

$$u^T y_j - v^T x_j + z \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (13c)$$

$$u \geq 0_s, \quad v \geq 0_m, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (13d)$$

Optimálne riešenia BCC modelov interpretujeme analogicky ako v prípade CCR modelov, t.j. optimálna hodnota účelovej funkcie vstupného, resp. prevrátená hodnota výstupného modelu určujú hodnotu efektivity (pseudoeфективности). Existencia kladného riešenia modelu v multiplikatívnom tvare, prípadne nulovosť slackov v každom optimálnom riešení modelu v obáľkovom tvare rozhodnú o vylúčení pseudoeфективности.

1.2.3 Hyperbolický model

Hyperbolický model, ktorý predstavili Färe, Grosskopf a Lovell v roku 1985 kombinuje vstupné a výstupné orientované radiálne modely do jedného. Model sa snaží o maximálnu možnú proporcionálnu zmenu vo všetkých premenných, t.j. zvýšenie všetkých výstupov a zníženie všetkých vstupov súčasne. Táto vlastnosť hyperbolického modelu sa ukázala ako veľmi užitočná najmä pre aplikácie z environmentálneho prostredia s nežiadúcimi vstupmi alebo výstupmi. Predpokladajme, že všetky výstupy sa zvýšia ψ -krát a všetky vstupy sa znížia θ -krát. Keďže hľadáme maximálnu možnú proporcionálnu zmenu súčasne vo všetkých premenných, budeme predpokladať $\psi = \frac{1}{\theta}$.

Hyperbolickým modelom v obáľkovom tvare zodpovedajúcim variabilným výnosom z rozsahu rozumieme úlohu:

$$\min_{\theta, \lambda} \quad \theta \tag{14a}$$

$$\text{pri podmienkach} \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j \leq \theta x_o, \tag{14b}$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j \geq \frac{1}{\theta} y_o, \tag{14c}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda \geq 0_n, \tag{14d}$$

kde λ predstavuje n -rozmerný vektor a θ predstavuje koeficient maximálneho skrátenia vstupov, resp. predĺženia výstupov. Ak by sme chceli model zodpovedajúci konštantným výnosom z rozsahu stačí vynechať ohraničenie $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$.

V článku [8] bol odvodený multiplikatívny tvar hyperbolického modelu zodpoveda-

júcemu variabilným výnosom z rozsahu:

$$\max_{u,v,z,\sigma} -\sigma - 2z \quad (15a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq \sigma, \quad j = 1, \dots, n, \quad (15b)$$

$$\begin{pmatrix} 1 - v^T x_o & z \\ z & u^T y_o \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (15c)$$

$$u, v \geq 0. \quad (15d)$$

Ak chceme multiplikatívny tvar hyperbolického modelu zodpovedajúcemu konštantným výnosom z rozsahu, stačí položiť $\sigma = 0$.

Hyperbolický model je radiálny neorientovaný model, ktorý je naformulovaný ako úloha nelineárneho programovania, a preto si vyžaduje použitie konvexných programovacích techník. Napriek tomu podľa [8] Färe, Grosskopf a Zaim v roku 2002 ukázali vzťah medzi hyperbolickým modelom pri konštantných výnosoch z rozsahu s CCR modelmi. Stačí prenásobiť nerovnosti parametrom $\theta > 0$ a použiť označenie

$$\lambda_{CCR-I} = \lambda\theta, \quad \theta_{CCR-I} = \theta^2, \quad (16)$$

vdaka čomu dostávame vstupne orientovaný CCR model. Potom medzi optimálnymi riešeniami modelov platí:

$$\theta_{HM}^* = \sqrt{\theta_{CCR-I}^*}, \quad \lambda_{HM}^* = \frac{\lambda_{CCR-I}^*}{\theta_{CCR-I}^*}. \quad (17)$$

Hyperbolický model má geometrickú interpretáciu, z ktorej je odvodený názov tohto modelu. Minimalizácia θ vedie k posunu po hyperbolickej krivke $(\theta x_o, \frac{1}{\theta} y_o)$ zo začiatočného bodu (x_o, y_o) do bodu na hranici množiny produkčných možností. Hodnota θ , pri ktorej krivka dosiahne hranicu množiny produkčných možností, je optimálna hodnota ($\theta^* \in (0, 1]$). Ak nie je možný žiaden posun, bod (x_o, y_o) leží na hranici množiny produkčných možností a jeho hodnota efektivity je rovná 1.

Nakoľko je hyperbolický model zovšeobecnením vstupného a výstupného modelu môže projektovať na hranicu pseudoeфекtívnosti, a teda nezachytáva všetku neefektívnosť. Z toho dôvodu môže za efektívne označiť aj útvary, ktoré sú v skutočnosti pseudoeфекtívne, čiže sa nachádzajú na neefektívnej hranici množiny produkčných možností.

Rovnako ako pri predchádzajúcich modeloch môžeme pomocou slackov nerovnosti v obáľkovom tvare hyperbolického modelu previesť na rovnosti. Pri rozlišovaní efektivity a pseudoefektivity budeme znova využívať dvojfázovú metódu:

$$\max_{\lambda, s^x, s^y} H := e^T s^x + e^T s^y \quad (18a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = \theta^* x_o, \quad (18b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = \frac{1}{\theta^*} y_o, \quad (18c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad (18d)$$

$$\lambda, s^x, s^y \geq 0, \quad (18e)$$

kde θ^* predstavuje optimálnu hodnotu účelovej funkcie pôvodnej úlohy.

1.2.4 Russellov model

Ďalší príklad na nelineárny model je takzvaný Russellov model, ktorý podľa [15] na základe Russellových teoretických prác predstavili Färe a Lovell v roku 1978 ako alternatívu k radiálnym modelom orientovaným na vstupy resp. výstupy.

Russellovým modelom v obáľkovom tvare rozumieme úlohu:

$$\min_{\theta, \phi, \lambda} \frac{1}{m + s} (e^T \theta + e^T \phi^{-1}) \quad (19a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j \leq \theta \circ x_o, \quad \theta \leq e, \quad (19b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j \geq \phi \circ y_o, \quad \phi \geq e, \quad (19c)$$

$$\lambda \geq 0_n, \quad (19d)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad (19e)$$

kde e je vektor jednotiek príslušnej veľkosti, premenná θ je m -rozmerný vektor, premenná ϕ je s -rozmerný vektor a symbol $\circ$ označuje Hadamardov súčin po zložkách.

Tento model odpovedá variabilným výnosom z rozsahu. Ak z modelu vynecháme ohraničenie (19e), tak bude odpovedať konštantným výnosom z rozsahu. Model sme

sformulovali v tvare nerovností, ale je možné ukázať, že ak v (19b) a (19c) nahradíme prvé nerovnosti rovnosťami, tak model poskytne rovnaké optimálne riešenia ako pôvodný model.

Pri interpretácií Russellovho modelu definujeme:

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j^*, \quad i = 1, \dots, m, \quad (20)$$

$$\bar{y}_r = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j^*, \quad r = 1, \dots, s. \quad (21)$$

Útvar $(\bar{x}, \bar{y})$ je projekciou útvaru (x_o, y_o) na efektívnu hranicu množiny produkčných možností. Hodnoty $\frac{\bar{x}_i}{x_{io}} \leq 1$ a $\frac{y_{ro}}{\bar{y}_r} \leq 1$ interpretujeme ako parciálne efektivity vstupu i a výstupu r . Potom dostávame:

$$\theta_i^* = \frac{\bar{x}_i}{x_{io}}, \quad \frac{1}{\phi_r^*} = \frac{y_{ro}}{\bar{y}_r}, \quad (22)$$

a teda optimálna hodnota tohto modelu reprezentuje aritmetický priemer všetkých parciálnych vstupných a výstupných efektívít. Keďže všetky parciálne efektivity sú z intervalu $(0, 1]$, ich aritmetický priemer má rovnakú vlastnosť. Útvar (x_o, y_o) je vyhodnotený ako Pareto-efektívny, vtedy a len vtedy ak jeho parciálne efektivity sú rovné 1.

V článku [7] bol tento model prevedený do multiplikatívneho tvaru. Russellovým modelom v multiplikatívnom tvare rozumieme úlohu:

$$\max_{\sigma, u_r, v_i, Z_r} \quad -\sigma + \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} - \sum_{i=1}^m v_i x_{io} + 1 - \sum_{r=1}^s (z_{1r} + z_{2r} + 2z_{3r}) \quad (23a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq \sigma, \quad j = 1, \dots, n, \quad (23b)$$

$$v_i \geq \frac{1}{m+s} \frac{1}{x_{io}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (23c)$$

$$u_r \geq \frac{z_{2r}}{y_{ro}}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (23d)$$

$$z_{1r} = \frac{1}{m+s}, \quad Z_r := \begin{pmatrix} z_{1r} & z_{3r} \\ z_{3r} & z_{2r} \end{pmatrix} \succeq 0, \quad r = 1, \dots, s. \quad (23e)$$

Model uvedený vyššie odpovedá variabilným výnosom z rozsahu. Rovnako ako pri hyperbolickom modeli, ak chceme dostať multiplikatívny tvar Russellovho modelu odpovedajúcemu konštantným výnosom z rozsahu stačí položiť premennú σ rovnú 0.

2 Ohraničenia na váhy

V tejto kapitole sa budeme zaoberať dodatočnými ohraničeniami na váhy. V základných multiplikatívnych DEA modeloch je množina prípustných vstupných váh v a výstupných váh u apriorne obmedzená iba na ich nezápornosť. Podľa [9] sa vo väčšine literatúry flexibilita váh považovala za jednu z hlavných výhod DEA modelovania v porovnaní s inými technikami na meranie efektívnosti.

Uvedieme niekoľko základných dôvodov, prečo sa ohraničenia na váhy začali zaradiť do DEA modelov a aké problémy môžu tieto ohraničenia spôsobiť. Takisto uvedieme rôzne typy ohraničení, s ktorými sa môžeme v literatúre stretnúť. Čerpať budeme najmä z [1], [5], [9] a [12].

2.1 Dôvody začlenenia ohraničení na váhy

Pri základných multiplikatívnych DEA modeloch uvažujeme váhy u, v úplne voľné. Okrem prirodzených ohraničení na nezápornosť váh na ne nekladíme žiadne apriorné požiadavky. To znamená, že váhy spojené s jednotlivými vstupmi a výstupmi nie sú vopred nijak špecifikované, a teda vyberie ich použitý model tak, aby zobrazoval každú organizačnú jednotku v čo najpriaznivejšom svetle. Úplne voľná voľba váh však nemusí byť vždy vhodná.

Autori staršej literatúry napr. [1] alebo [9] uvádzajú nasledovné dôvody na začlenenie dodatočných ohraničení na váhy:

- **Dodatočné informácie**

V súčasnosti sa veľakrát DEA modely aplikujú na problémy reálneho sveta. Práve to je dôvod, prečo chceme do analýzy začleniť tzv. *value judgement*. V niektorých prípadoch môžeme očakávať, že je dostupné určité množstvo informácií o dôležitosti vstupov / výstupov resp. o cenách a ziskoch. Začlenenie takýchto informácií do analýzy sa všeobecne považuje za výhodné.

- **Nulovosť váh**

V DEA modeloch bez ohraničení na váhy sa častokrát mohlo stať, že niektorú z váh pre vstupy resp. výstupy určil model za nulovú. V takom prípade bol daný vstup / výstup odignorovaný. Ak vstupy a výstupy v analýze nie sú rovnako dôle-

žité, nie je rozumné tvrdiť, že organizačná jednotka *DMU* je relatívne efektívna, ak váhy priradené k dôležitým vstupom a výstupom sú nulové, resp. veľmi nízke, a teda dominujú menej dôležité faktory.

- **Homogenita organizačných jednotiek**

V Kapitole 1 sme uviedli, že uvažujeme homogénne organizačné jednotky resp. homogénnych producentov. To znamená, že sa zaoberajú nejakou spoločnou činnosťou, resp. produkujú rovnaký druh výstupov a majú rovnaké celkové ciele, a preto môže byť neprijateľné predpokladať, že relatívny význam (váhy), ktorý pripisuje k jednotlivým vstupom a výstupom jedna jednotka sa bude výrazne líšiť od tých, ktoré k nim pripisuje iná jednotka.

- **Rozlišovanie medzi efektívnymi DMU**

V základných DEA modeloch je možné, že model vyhodnotí veľmi veľa organizačných jednotiek za efektívne. V prípade, že do modelu začleníme dodatočné ohraničenia na váhy, očakávame, že efektivity sa budú rovnať alebo budú menšie ako efektivity dosiahnuté modelom bez ohraničení na váhy. To znamená, že získame menej efektívnych jednotiek, medzi ktorými si budeme musieť vybrať najlepšieho kandidáta.

2.2 Typy ohraničení

V tejto časti práce uvedieme akým spôsobom resp. v akom tvare môžu byť dodatočné ohraničenia na váhy do modelov začlenené. Čerpať budeme najmä z [1], [5] a [12].

Neskôr v tejto práci sa budeme zaoberať jedným typom zápisu ohraničení na váhy, ale v tejto časti uvádzame prehľad ohraničení, s akými sa môžeme stretnúť v dostupných publikáciách. V staršej literatúre (napríklad [1] alebo [5]) sa môžeme najčastejšie stretnúť s ohraničeniami na váhy uvedenými vo všeobecnej formulácii v *Tabuľke 3*, pričom predpokladáme $1 \leq r < p < q \leq s$ a $1 \leq i < k < l \leq m$. V *Tabuľke 3* sú tieto ohraničenia rozdelené na vstupné (s indexom I) a výstupné (s indexom O).

$\delta_i \leq v_i \leq \epsilon_i$	(a_I)	$\rho_r \leq u_r \leq \eta_r$	(a_O)
$\kappa_i v_i + \kappa_k v_k \leq v_l$	(b_I)	$\omega_r u_r + \omega_p u_p \leq u_q$	(b_O)
$\alpha_i \leq \frac{v_i}{v_k} \leq \beta_i$	(c_I)	$\xi_r \leq \frac{u_r}{u_p} \leq \zeta_r$	(c_O)
$\gamma_i v_i \geq u_r$	(d)		

Tabuľka 3: Známe druhy ohraničení na váhy

Autori publikácií [1] a [5] tieto ohraničenia ďalej rozdeľujú do nasledovných kategórií:

- **Absolute weights restrictions**

Tento typ ohraničenia na váhy podľa [5] prvýkrát použili Dyson a Thanassoulis v roku 1988 a sú reprezentované nerovnosťami v *Tabuľke 3* ako (a_I) pre vstupy a (a_O) pre výstupy. Prevažne sa zavádzajú na prevenciu toho, aby niektorý zo vstupov / výstupov bol ignorovaný resp. mu bola priradená príliš nízka váha. Tak tiež zabraňujú, aby niektorý vstup / výstup bol zbytočne príliš zdôrazňovaný, a teda mu bola priradená príliš vysoká váha. Hodnota obmedzenia závisí od kontextu úlohy, môže napríklad predstavovať maximálne alebo minimálne náklady daného faktora. Vzhľadom na svoju nehomogenitu začlenenie takýchto ohraničení do DEA modelov spôsobuje vážne problémy.

- **Assurance regions**

Tieto ohraničenia sa ďalej delia na Assurance region typu I, skrátene ARI (v *Tabuľke 3* označené ako (b_I) , (b_O) , (c_I) , (c_O)) a Assurance region typu II, skrátene ARII (v *Tabuľke 3* označené (d)). Podľa [1] sú závislé od škálovania vstupov a výstupov, teda sú citlivé na merné jednotky jednotlivých faktorov. ARI sú zavádzané do analýzy kvôli začleneniu relatívneho poradia hodnôt vstupov / výstupov. Pre ARI sa bežnejšie používa (c_I) a (c_O) , a to aj v špeciálnych tvaroch iba s jednostraným ohraničením. Podľa [1] Charnes a Thompson ukázali, že pri použití ARI bude existovať vždy aspoň jedna efektívna DMU. ARII sa zavádzajú pre zdôraznenie prepojenia vstupov a výstupov, nakoľko efektivita má reflektovať práve toto prepojenie a v mnohých aplikáciách DEA modelov sa toto prepojenie vyžaduje.

V novej literatúre (napríklad [12], [13]) autori väčšinou pracujú so všeobecným zápisom ohraničení na váhy:

$$q_t^T u - p_t^T v \leq c_t, \quad t = 1, \dots, K, \quad (24)$$

kde zložky vektorov $q_t \in \mathbb{R}^s$ a $p_t \in \mathbb{R}^m$ a skalár c_t môžu byť kladné, záporné alebo nulové. Ohraničenie t je zmiešané ak oba vektory p_t a q_t sú nenulové, inak je ohraničenie jednoduché. Ohraničenia autor ďalej rozdeľuje na homogénne, ak $c_t = 0$ a nehomogénne v ostatných prípadoch. V [12] autor uvádza, že pri konštantných výnosoch z rozsahu a použitím normalizačnej rovnosti v multiplikatívnych modeloch možno akékoľvek nehomogénne ohraničenie nahradiť homogénnym. Pri variabilných výnosoch z rozsahu táto možnosť nie je. V praktickej časti tejto práce sme sa rozhodli používať len homogénne ohraničenia.

2.3 Problémy spôsobené začlenením ohraničení na váhy

V predchádzajúcej časti sme uviedli niekoľko dôvodov, prečo je výhodné začleniť ohraničenia na váhy do modelov. Je však potrebné poznamenať, že dodatočné ohraničenia na váhy môžu priniesť niekoľko nových problémov. Dôkladnejšia analýza je uvedená v článku [4], z ktorého čerpáme v nasledovnom texte.

Problémy spôsobené začlenením dodatočných ohraničení na váhy:

- **Odôvodnenie ohraničení**

Jedným z cieľov zavedenia ohraničení na váhy je jednoduchšie rozlišovanie medzi efektívnymi *DMU* pri posudzovaní výkonnosti organizačných jednotiek. Prípadne, lepšie odrážať dôležitosť jednotlivých vstupov / výstupov. V oboch prípadoch je potrebné, aby ohraničenia na váhy boli zmysluplné a opodstatnené. Zvyčajne je veľmi obtiažne vysvetliť, prečo by mali byť jednotlivé ohraničenia použité.

- **Neprenosnosť ohraničení**

Neprenosnosťou sa myslí fakt, že význam určitého ohraničenia môže byť odlišný pri rôznych modeloch, dokonca aj pri ekvivalentných modeloch. Preto ak modifikujeme model, hrozí nám, že ohraničenia na váhy začlenené do pôvodného modelu

nebudeme môcť aplikovať na nový model. Podľa [4] sa nehomogénne ohraňčenia nedajú vo všeobecnosti preniesť z jedného modelu na iný. Ako príklad autor uvádza model (7) s dodatočnými ohraňčeniami v tvare (a_I) resp. (a_O) z *Tabulky 3*, ktorý vo všeobecnosti nie je ekvivalentný s lineárnymi formami tohto modelu (modely (5) a (6)) s rovnakými dodatočnými nehomogénnymi ohraňčeniami. To znamená, že efektivita DMU bude vo všeobecnosti v týchto modeloch odlišná. Homogénne ohraňčenia majú však v týchto troch modeloch rovnaký význam a ak ich vieme odôvodniť v jednom modeli, môžeme ich aplikovať aj v ostatných dvoch.

- **Interpretácia výsledkov**

Výsledky dosiahnuté z DEA modelov s dodatočnými ohraňčeniami na váhy nemôžu byť vo všeobecnosti interpretované rovnako ako výsledky dosiahnuté bez týchto ohraňčení. Optimálna hodnota θ^* modelu (3) sa štandardne interpretuje ako koeficient radiálneho skracovania vstupov, ktorým sa musia prenasobiť vstupy DMU_o , aby sa útvar dostal na efektívnu hranicu. Analogicky sa optimálna hodnota ψ^* modelu (4) interpretuje ako koeficient radiálneho predlžovania výstupov. Pri štandardnej definícii technologickej množiny a zavedení dodatočných ohraňčení na váhy nezostane platná ani jedna z týchto interpretácií. Podľa [4] sa DEA model s dodatočnými ohraňčeniami na váhy už nemôže považovať za radiálny model. Mení sa taktiež interpretácia multiplikatívneho modelu, ktorú budeme rozoberať v časti 3.4.

- **Redundantné ohraňčenia**

Určité typy nehomogénnych ohraňčení na váhy sa môžu ukázať ako redundantné (prebytočné), čo znamená, že nemajú žiadny efekt na maximum relatívnej efektívnosti organizačnej jednotky.

Podľa nášho názoru môže byť ďalším problémom nekonzistentnosť ohraňčení. Ak dodatočné ohraňčenia na váhy nie sú konzistentné, zvyčajne to poukazuje na chybu v ich posudzovaní a malo by sa ich začlenenie znovu zvážiť. Problém nekonzistentnosti budeme neskôr v tejto práci bližšie analyzovať.

2.4 Zmiešané ohraňičenia

Ohraňičenia v tvare (24) s oboma vektormi p_t, q_t nenulovými budeme nazývať zmiešané a v nadväznosti na *Tabuľku 3* označovať ako ARII. Autori dostupnej literatúry ohraňičenia v tomto tvare začleňujú do orientovaných CCR modelov. V tejto práci uvedieme len vstupne orientovaný model so zmiešanými dodatočnými ohraňičeniami. Ako sme už spomenuli vyššie, budeme sa zaoberať len homogénnymi ohraňičeniami. Pre výstupný model je postup analogický.

$$\max_{u,v} u^T y_o \quad (25a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad v^T x_o = 1, \quad (25b)$$

$$y_j^T u - x_j^T v \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (25c)$$

$$q_t^T u - p_t^T v \leq 0, \quad t = 1, \dots, K, \quad (25d)$$

$$u \geq 0_s, v \geq 0_m. \quad (25e)$$

Na preukázanie toho, že ohraňičenia na váhy vedú k rozšíreniu štandardnej množiny produkčných možností zodpovedajúcej CRS, uvažujeme duálnu úlohu (obáľkovú) k modelu uvedenému vyššie:

$$\min_{\theta, \lambda, \pi, s^x, s^y} \theta \quad (26a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + \sum_{t=1}^K p_t \pi_t + s^x = \theta x_o, \quad (26b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j + \sum_{t=1}^K q_t \pi_t - s^y = y_o, \quad (26c)$$

$$\lambda, \pi, s^x, s^y \geq 0. \quad (26d)$$

Uvedený model umožňuje priamu interpretáciu. $(\hat{x}, \hat{y}) = (\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j, \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j)$ je jednotka zo štandardnej množiny produkčných možností s CRS. $(\hat{x}, \hat{y})$ je ďalej modifikované výrazmi generovanými ohraňičeniami na váhy: (p_t, q_t) , $t = 1, \dots, K$. Tieto výrazy špecifikujú simultánne zmeny vstupov a výstupov a sú implementované v pomeroch $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_K) \geq 0$. Vektory slackov s^x a s^y zodpovedajú predpokladu free disposability vstupov a výstupov.

V nadväznosti na Podinovského [10] zavedieme týmto výrazom (p_t, q_t) názov produkčné trade-offy. Ďalej zavedieme maticové označenie:

$$P = \begin{pmatrix} p_1, \dots, p_K \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_1, \dots, q_K \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Niekedy pre nás bude výhodné použiť úspornejší maticovo vektorový zápis modelu v multiplikatívnom aj obáľkovom tvare:

$$\max_{u,v} \quad u^T y_o \quad (29a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad v^T x_o = 1, \quad (29b)$$

$$Y^T u - X^T v \leq 0_n, \quad (29c)$$

$$Q^T u - P^T v \leq 0_K, \quad (29d)$$

$$u \geq 0_s, v \geq 0_m. \quad (29e)$$

$$\min_{\theta, \lambda, \pi, s^x, s^y} \quad \theta \quad (30a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad X\lambda + P\pi + s^x = \theta x_o, \quad (30b)$$

$$Y\lambda + Q\pi - s^y = y_o, \quad (30c)$$

$$\lambda, \pi, s^x, s^y \geq 0, \quad (30d)$$

kde $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1, \dots, \lambda_n \end{pmatrix}^T$ a $\pi = \begin{pmatrix} \pi_1, \dots, \pi_K \end{pmatrix}^T$.

Minimalizáciou θ model identifikuje vstupnú radiálnu projekciu DMU_o na hranici rozšírenej množiny produkčných možností M_{CRS}^{ARII} , ktorú Podinovski v [10] definuje nasledujúcim spôsobom:

$$M_{CRS}^{ARII} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s} \mid X\lambda + P\pi \leq x, \quad Y\lambda + Q\pi \geq y, \quad \lambda, \pi \geq 0\}, \quad (31)$$

kde $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1, \dots, \lambda_n \end{pmatrix}^T$ a $\pi = \begin{pmatrix} \pi_1, \dots, \pi_K \end{pmatrix}^T$.

Je známe, že v niektorých prípadoch môže byť multiplikatívny model neprípustný, čo zodpovedá neohraničenej optimálnej hodnote duálneho modelu. Podinovski a Bouzdine-Chameeva v [13] dokázali, že vo všetkých takýchto prípadoch umožňuje rozšírená množina produkčných možností voľnú produkciu. V tomto prípade sa ohraničenia na váhy,

resp. produkčné trade-offy nazývajú nekonzistentné (so súborom údajov vytvoreným pozorovanými DMU). Podinovski a Bouzdine-Chameeva ukázali, že ohraničenia na váhy môžu byť nekonzistentné, aj keď je použitý model s danými dodatočnými ohraničeniami na váhy prípustný a má konečnú hodnotu optimálneho riešenia θ^* pre všetky pozorované DMU_o , a vyvinuli analytické a výpočtové testy konzistentnosti, ktoré budeme rozoberať v ďalšej kapitole.

2.5 Jednoduché ohraničenia

Ako sme už spomínali vyššie, ohraničenie t v tvare (24) nazývame jednoduché, ak je jeden z vektorov p_t , q_t nulový. Znova uvažujeme len homogénne ohraničenia, a teda môžeme ich zapísať nasledovne:

$$q_{t_O}^T u \leq 0 \quad t_O = 1, \dots, K_O, \quad (32)$$

$$-p_{t_I}^T v \leq 0 \quad t_I = 1, \dots, K_I. \quad (33)$$

Tieto ohraničenia budeme v súlade s *Tabuľkou 3* nazývať ARI. Pozrime sa bližšie na to, ako sú vektory p_{t_I} , q_{t_O} zostrojené. Každý vektor predstavuje práve jedno jednostranné ohraničenie na váhy. Ideu zostrojenia vektorov ukážeme na výstupných ohraničeniach. Pri vstupných je postup analogický.

Ak máme ohraničenia v tvare (b_O) z *Tabuľky 3*:

$$\omega_r u_r + \omega_p u_p \leq u_q \quad \Leftrightarrow \quad \omega_r u_r + \omega_p u_p - u_q \leq 0,$$

potom príslušný vektor q_t v ohraničení (32) vyzerá nasledovne:

$$q_{t_O}^T = (0, \dots, 0, \omega_r, 0, \dots, 0, \omega_p, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots),$$

pričom nenulové zložky vektora sú práve na r, p a q -tom mieste.

Ak máme ohraničenia v tvare (c_O) z *Tabuľky 3*:

$$\theta_r \leq \frac{u_r}{u_p} \leq \zeta_r \quad \Leftrightarrow \quad \theta_r u_p \leq u_r \leq \zeta_r u_p,$$

potom tieto ohraničenia môžeme rozpísať na jednostranné ohraničenia nasledovne:

$$\begin{aligned} u_r - \zeta_r u_p &\leq 0, \\ -u_r + \theta_r u_p &\leq 0. \end{aligned}$$

Potom príslušné vektory v ohraničeniach (32) vyzerajú nasledovne:

$$\begin{aligned} q_{t_O}^T &= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -\zeta_r, 0, \dots), \\ q_{t_O+1}^T &= (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0, \theta_r, 0, \dots), \end{aligned}$$

pričom nenulové zložky vektora sú práve na r a p -tom mieste.

Rovnako ako pri zmiešaných ohraničeniach začleníme jednoduché ohraničenia do vstupne orientovaného CCR modelu v multiplikatívnom tvare:

$$\max_{u,v} \quad u^T y_o \quad (34a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad v^T x_o = 1, \quad (34b)$$

$$y_j^T u - x_j^T v \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (34c)$$

$$-p_{t_I}^T v \leq 0, \quad t_I = 1, \dots, K_I, \quad (34d)$$

$$q_{t_O}^T u \leq 0, \quad t_O = 1, \dots, K_O, \quad (34e)$$

$$u \geq 0_s, v \geq 0_m, \quad (34f)$$

kde K_I a K_O vyjadrujú počet ohraničení na vstupy, resp. výstupy.

Pre úplnú interpretáciu výsledkov je potrebná aj obáľková verzia modelu:

$$\min_{\theta, \lambda, \pi, \tau, s^x, s^y} \quad \theta \quad (35a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + \sum_{t_I=1}^{K_I} p_{t_I} \pi_{t_I} + s^x = \theta x_o, \quad (35b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j + \sum_{t_O=1}^{K_O} q_{t_O} \tau_{t_O} - s^y = y_o, \quad (35c)$$

$$\lambda, \pi, \tau, s^x, s^y \geq 0, \quad (35d)$$

kde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_{K_I})^T$ a $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{K_O})^T$.

Aj pri jednoduchých ohraničeniach budeme používať maticový zápis podobný (27) a (28), pričom rozmer matíc P a Q závisí od počtu ohraničení, t.j. K_I a K_O a taktiež maticovo vektorový zápis modelov:

$$\max_{u,v} u^T y_o \quad (36a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad v^T x_o = 1, \quad (36b)$$

$$Y^T u - X^T v \leq 0_n, \quad (36c)$$

$$-P^T v \leq 0_{K_I}, \quad (36d)$$

$$Q^T u \leq 0_{K_O}, \quad (36e)$$

$$u \geq 0_s, v \geq 0_m, \quad (36f)$$

kde K_I a K_O vyjadrujú počet ohraňení na vstupy, resp. výstupy.

$$\min_{\theta, \lambda, \pi, \tau, s^x, s^y} \theta \quad (37a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad X\lambda + P\pi + s^x = \theta x_o, \quad (37b)$$

$$Y\lambda + Q\tau - s^y = y_o, \quad (37c)$$

$$\lambda, \pi, \tau, s^x, s^y \geq 0, \quad (37d)$$

kde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_{K_I})^T$ a $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{K_O})^T$.

Efektívnosť DMU_o v zmysle CCR-ARI multiplikatívneho aj obáľkového modelu sa určuje analogicky ako pri štandardnom CCR modeli, a teda môžeme znova vychádzať z *Tabuľky 1*.

Pre efektivity daného útvaru DMU_o dosiahnuté pomocou CCR a CCR-ARI modelu platí, že $U_{CCR}^* \geq U_{CCR-ARI}^*$. Čoho dôsledkom je fakt, že pri modeli s ohraňeniami na váhy sa nezvyší počet efektívnych útvarov oproti počtu efektívnych útvarov pri modeli bez ohraňení na váhy. V porovnaní s CCR modelom sa vplyvom zavedených ohraňení multiplikátorov v CCR-ARI modeli množina produkčných možností niektorými smermi rozšíri. Ak v prípade konštantných výnosov z rozsahu bola množina produkčných možností daná predpisom (1), tak po pridání ohraňení (32) a (33) dostaneme množinu

$$M_{CRS}^{ARI} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+s} \mid X\lambda + P\pi \leq x, \quad Y\lambda + Q\tau \geq y, \quad \lambda, \pi, \tau \geq 0\}, \quad (38)$$

kde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_{K_I})^T$ a $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{K_O})^T$. Môžeme teda zapísať: $M_{CRS} \subset M_{CRS}^{ARI}$.

Pre CCR model vždy existuje optimálne riešenie. Podobne je tomu tak aj teraz, stačí aby platila nasledovná veta inšpirovaná tvrdením uvedeným v [6] bez dôkazu. V dôkaze nasledovnej vety budeme vychádzať zo vstupne orientovaného CCR modelu. Dôkaz pre výstupne orientovaný model je analogický.

Veta 2.1. *Ak existuje $v > 0$, také, že $-P^T v \leq 0$ a zároveň existuje $u > 0$, také, že $Q^T u \leq 0$, potom pre CCR-ARI model vždy existuje optimálne riešenie.*

Dôkaz. Nech existuje $\bar{v} > 0$, také, že $-P^T \bar{v} \leq 0$ a zároveň existuje $\bar{u} > 0$, také, že $Q^T \bar{u} \leq 0$. Potom pre každé $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ taktiež platia nerovnosti $-P^T \alpha \bar{v} \leq 0$ a $Q^T \beta \bar{u} \leq 0$. Z ohraničenia $v^T x_o = 1$ vieme vyjadriť konkrétnu hodnotu parametra α nasledovne:

$$\alpha \bar{v}^T x_o = 1,$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\bar{v}^T x_o}.$$

Následne z ohraničenia $y_j^T u - x_j^T v \leq 0, j = 1, \dots, n$, po dosadení získavame:

$$y_j^T \beta \bar{u} - x_j^T \bar{\alpha} \bar{v} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\beta y_j^T \bar{u} - \frac{1}{\bar{v}^T x_o} x_j^T \bar{v} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\beta \leq \frac{\frac{1}{\bar{v}^T x_o} x_j^T \bar{v}}{y_j^T \bar{u}}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (39)$$

Voľbou:

$$\bar{\beta} = \min_j \left\{ \frac{\frac{1}{\bar{v}^T x_o} x_j^T \bar{v}}{y_j^T \bar{u}} \right\}$$

zabezpečíme splnenie nerovníc (39) pre všetky $j = 1, \dots, n$ a teda $(\bar{\beta} \bar{u}, \bar{\alpha} \bar{v})$ tvorí prípustné riešenie.

Možno vidieť, že účelová funkcia tejto úlohy je zhora ohraničená, keďže $o \in \{1, \dots, n\}$, tak z (36c) máme:

$$y_o^T u - x_o^T v \leq 0,$$

z čoho využitím (36b) dostávame

$$y_o^T u \leq 1.$$

CCR-ARI model daný vzťahom (36) je maximalizačnou úlohou lineárneho programovania. Pre takúto úlohu podľa [6] platí, že ak je úloha prípustná a účelová funkcia je na množine prípustných riešení zhora ohraničená, potom existuje optimálne riešenie úlohy. $\square$

Pomocou matíc P , Q možno pridať ohraničenia (36d) a (36e) ku akémukoľvek modelu v multiplikatívnom tvare, alebo modifikovať obáľkový model podobne ako v (37). Keďže pridaním ohraničení k multiplikatívnemu modelu sa zúži množina multiplikátorov (váh) na istú špeciálnu oblasť (región), z toho pochádza i anglický názov Assurance Region (AR). Pri takomto dodatočnom ohraničení sa však zmenia niektoré vlastnosti modelov, ktoré budú viac analyzované v Kapitole 3.

3 Zmena vlastností modelov s ohraňčeniami na váhy

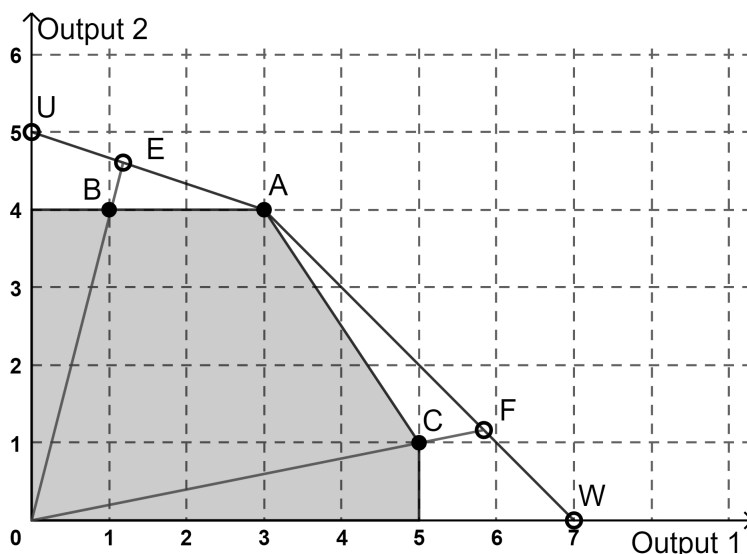
V tejto časti na niekoľkých príkladoch ukážeme, akými spôsobmi môže zavedenie ohraňčení na váhy ovplyvniť model. Ako sme už spomenuli v Kapitole 2, pri zavedení dodatočných ohraňčení na váhy sa zmenia niektoré vlastnosti modelov, čo môže spôsobiť problémy, ale taktiež to môže model aj výrazne vylepšiť.

Keďže ohraňčenia zmenšujú množinu prípustných váh (u, v) úlohy lineárneho programovania multiplikatívneho modelu, príslušné hodnoty efektívít sa určite nezvýšia, môžu sa však znížiť. Možno preto očakávať úbytok počtu efektívnych útvarov. Vhodnou voľbou ohraňčení ubudne riešenie s nulovými váhami (ubudne pseudoeffectívít). Na druhej strane nevhodnou voľbou ohraňčení sa úloha lineárneho programovania môže stať neprípustnou.

3.1 Rozšírenie množiny produkčných možností

Na ilustráciu vplyvu produkčných trade-offov na množinu produkčných možností uvádzame nasledujúce dva príklady od Podinovského z [11] a [13].

Uvažujme 3 organizačné jednotky A, B a C znázornené na Obr. 2. Predpokladáme, že tieto útvary majú rovnakú hodnotu jediného vstupu, ktorý nie je zobrazený, a rôzne hodnoty dvoch výstupov.



Obr. 2: Rozšírenie množiny produkčných možností spôsobené ohraňčeniami na váhy (Podľa: [11])

Efektívnou hranicou množiny produkčných možností, zobrazenej šedou, je úsečka AC. Útvar B sa nachádza na hranici množiny produkčných možností, ale dominuje mu útvar A, to znamená, že útvar B je pseudoejektívny. Optimálna hodnota účelovej funkcie pri výstupnom BCC modeli pre útvary A a C je rovná 1.

Zavedme nasledovné produkčné trade-offy:

$$q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

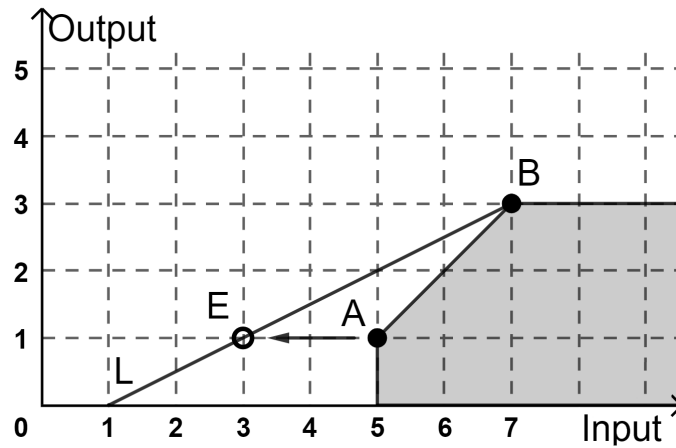
ktoré môžeme vyjadriť pomocou ohraňení na váhy nasledovne:

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &\leq 0, \\ -3u_1 + u_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Prvý trade-off znázorňuje skutočnosť, že pre ktorýkoľvek útvar, napríklad A, môžeme zvýšiť množstvo výstupu 1 a súčasne znížiť množstvo výstupu 2 o rovnaké množstvo. Tento postup sa môže opakovať viackrát, čím sa vytvorí priamka AW. Využitím predpokladu free disposability do množiny produkčných možností pridáme aj nezápornú oblasť pod AW. Pri druhom trade-offe postupujeme analogicky, čím získavame priamku AU, ktorú spolu s nezápornou oblasťou pod ňou, doplníme do množiny produkčných možností.

Celkovo má začlenenie vyššie uvedených trade-offov za následok rozšírenie množiny produkčných možností zo šedej oblasti na Obr. 2 na oblasť pod čiarou UAW, ktorá tvorí novú efektívnu hranicu. Útvar A zostáva efektívny, zatiaľ čo útvary B a C už nie sú efektívne a projektujú sa na útvary E a F.

V druhom príklade ilustrujeme vplyv zmiešaných ohraňení na váhy. Uvažujme úlohu s jedným vstupom a jedným výstupom pri variabilných výnosoch z rozsahu. Majme dve organizačné jednotky A a B, ktoré sú obe efektívne a generujú množinu produkčných možností zobrazenú na Obr. 3.



Obr. 3: Rozšírenie množiny produkčných možností spôsobené ohraňčeniami na váhy (Podľa: [13])

Zavedme dodatočné ohraňčenie na váhy resp. trade-offy v tvare:

$$-u + 2v \leq 0, \text{ resp. } p_1 = (-2), q_1 = (-1)$$

Toto ohraňčenie je zobrazené na Obr. 3 úsečkou LB , ktorá po dodaní ohraňčenia tvorí efektívnu hranicu množiny produkčných možností. Vidíme, že množina sa rozšírila a útvar A už neleží na hranici, čo znamená, že už nie je efektívny.

Na predchádzajúcich príkladoch vidíme aj to, že rozšírenie množiny produkčných možností má za následok aj zmenu hranice efektívnosti. Preto sa pôvodne efektívne jednotky, ktoré vo svojom optimálnom riešení nespĺňajú ohraňčenia váh, presunú do neefektívnej oblasti.

3.2 Neprípustnosť úlohy

Je známe, že začlenením ohraňčení na váhy do multiplikatívnych CCR a BBC modelov môže viesť k ich neprípustnosti (vychádzajúc z [1] a [9]). Podobný problém sa môže vyskytnúť, keď sú produkčné trade-offy začlenené do obáľkových DEA modelov. Podľa teórie duality, ak je multiplikatívny model s ohraňčeniami na váhy neprípustný, jeho duálny obáľkový model (ktorý je vždy prípustný) musí byť neohraňčený.

Neohraňčenosť účelovej funkcie ψ vo výstupne orientovanom CCR alebo BCC modeli naznačuje, že začlenenie ohraňčení na váhy (resp. produkčných trade-offov) vedie ku neohraňčenosti výstupného vektora y . (Pretože ψy môže viesť do nekonečna

pri zachovaní konštantného vstupného vektora x .) Naznačuje to, že sa pri konštrukcii ohraňení na váhy alebo produkčných trade-offov vyskytla chyba.

Neohraňenosť účelovej funkcie θ vo vstupne orientovanom CCR alebo BCC modeli naznačuje, že v modeli je prípustná možnosť $\theta = 0$. V dôsledku toho je možná voľná produkcia výstupného vektora y_o z nulového vektora vstupov x_o . Toto je rovnako problematická situácia, ktorá naznačuje, že by sa mali začlenené ohraňenia na váhy opätovne zvážiť.

Podinovski a Bouzdine-Chameeva v [13] ukázali, že k voľnej a neohraňenej produkcii výstupných vektorov môže dôjsť, aj keď je úloha prípustná a všetky výsledné hodnoty efektívít sa zdajú byť vierohodné. V takýchto prípadoch je technológia modelovaná nesprávne a hodnoty efektívít sú taktiež nesprávne. Preto sa nemožno spoliehať na skutočnosť, kedy sa hodnoty efektívít javia ako bezproblémové. Stále môže existovať neodhalený problém s ohraňeniami na váhy, ktorý zneplatňuje výsledky analýzy a je potrebné ho opraviť. Tento jav budeme ďalej rozoberať v nasledovnej podkapitole.

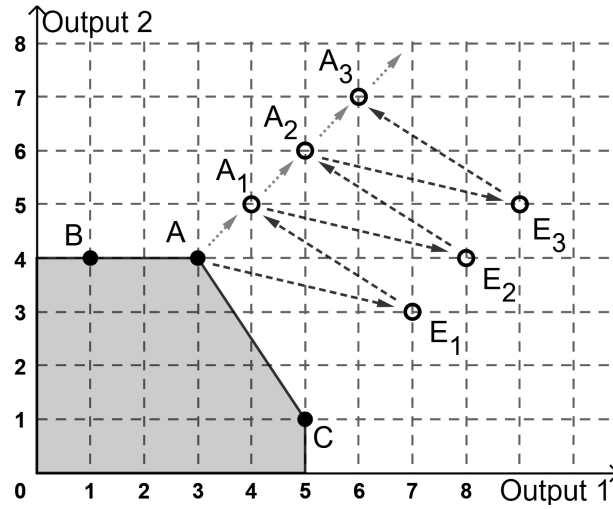
Na ilustráciu problému neohraňenej produkcie použijeme príklad z [11], ktorý sme použili aj v časti 3.1. Tentokrát zavedieme produkčné trade-offy nasledovne:

$$q_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ktoré môžeme vyjadriť pomocou ohraňení na váhy nasledovne:

$$\begin{aligned} 4u_1 - u_2 &\leq 0, \\ -3u_1 + 2u_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Aplikovaním prvého trade-offu na útvar A zvýšime množstvo prvého výstupu o štyri jednotky a zároveň znížime množstvo druhého výstupu o jednu jednotku, čím vznikol bod E_1 . Pri aplikovaní druhého trade-offu postupujeme analogicky, čím sa dostávame do bodu A_1 . Tento postup je možné opakovať niekoľkokrát, čím vznikne postupnosť útvarov $A_t, t = 1, 2, \dots$. Využitím predpokladu free disposability doplníme do množiny produkčných možností aj oblasť útvarov, ktorým dominuje A_t . Nakoľko $t \rightarrow \infty$, táto oblasť pokrýva celý nezáporný ortant.



Obr. 4: Neohraničená produkcia spôsobená ohraničeniami na váhy (Podľa: [11])

Na ilustráciu problému voľnej produkcie uvažujme úlohu s dvoma vstupmi a jedným výstupom a tromi pozorovanými *DMU*: A, B a C. Predpokladajme, že výstup je rovnaký pre všetkých producentov. Môžeme preto obmedziť našu ilustráciu iba na dvojrozmerný priestor vstupov. Predpokladajme, že sme zaviedli nasledovné ohraničenia na váhy:

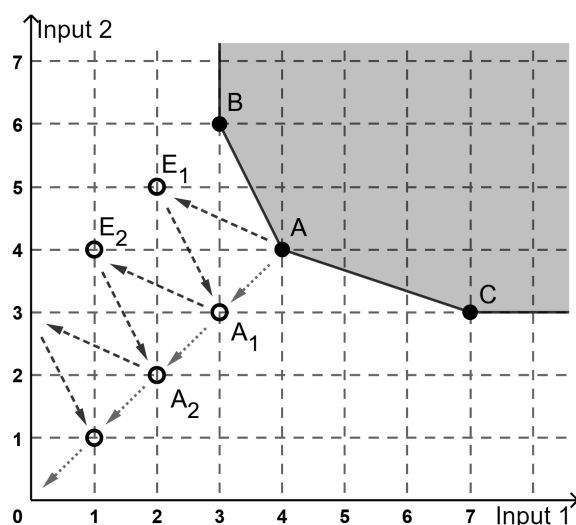
$$2v_1 - v_2 \leq 0, \quad -v_1 + 2v_2 \leq 0,$$

ktoré vieme prepísať do maticového tvaru nasledovne:

$$p_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

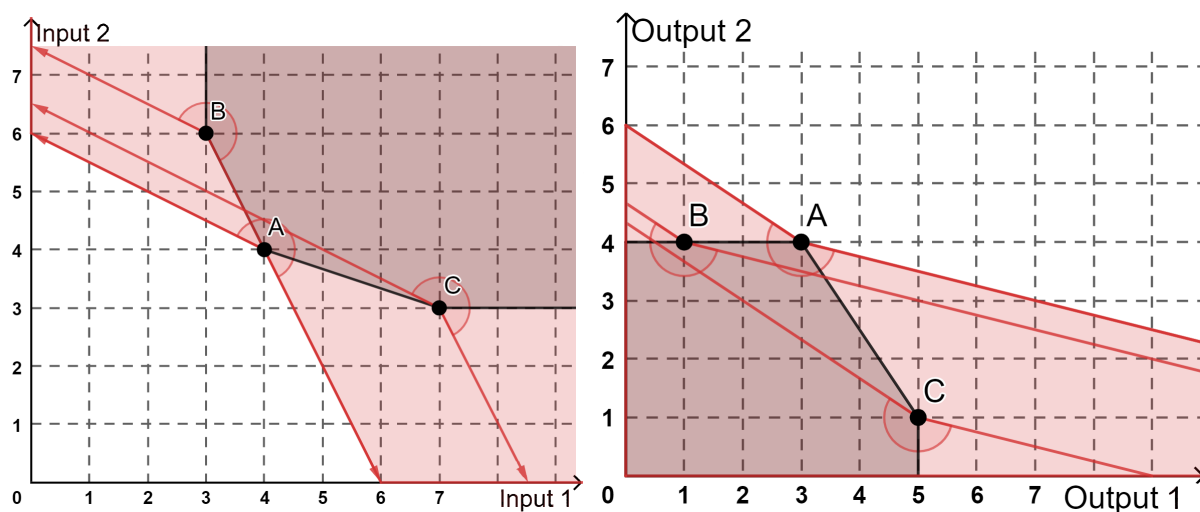
Je zrejmé, že jediné váhy, ktoré spĺňajú ohraničenia, sú $v_1 = v_2 = 0$.

Obr. 5 zobrazuje fakt, že aplikácia prvého ohraničenia na útvar A zníži prvý vstup o dve jednotky a zároveň zvýši druhý vstup o jednotku, čím vytvára útvar E_1 . Aplikovanie druhého ohraničenia na E_1 vedie analogickým spôsobom k A_1 . Oba vstupy A_1 sú menšie ako vstupy A. To vedie k nereálnemu dôsledku, že môžeme znížiť oba vstupy daného *DMU* bez toho, aby to malo negatívny vplyv na jeho výstup. Opakovaním tohto postupu sa vytvorí postupnosť $A_1, A_2, \dots$ až vznikne limitný útvar A_i , ktorý produkuje výstup útvaru A s oboma vstupmi nulovými. V [10] je dokázané, že rozšírená množina produkčných možností je uzavretá, a teda obsahuje aj limitný útvar A_i . To znamená, že dve ohraničenia použité v tomto príklade vytvorili voľnú produkciu.



Obr. 5: Voľná produkcia spôsobená ohraňčeniami na váhy (Podľa: [13])

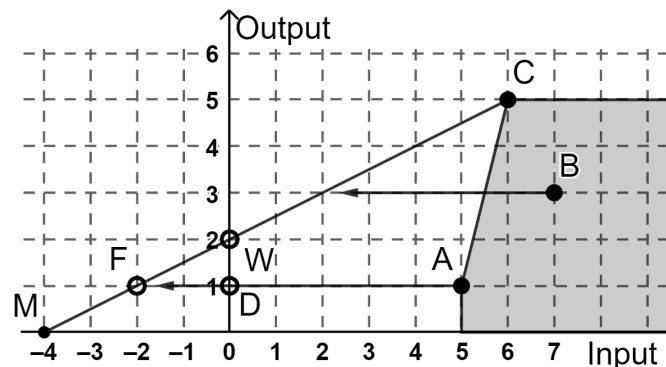
Naše vysvetlenie toho, ako pridanie ohraňčení na váhy zmení množinu produkčných možností z predchádzajúcich dvoch príkladov môžeme vidieť na *Obr. 6*. Je založené na interpretácii popísanej v [6]. V tejto interpretácii riešenia na každý bod pôvodnej množiny zavesíme kužeľ generovaný produkčnými trade-offmi a nová množina produkčných možností zobrazená na *Obr. 6* je zjednotením všetkých takýchto množín. Ako môžeme vidieť kužele sú v oboch prípadoch nekonvexné. Aplikovanie axiómy konvexnosti spôsobí, že množinou produkčných možností bude celý priestor, čo umožňuje voľnú aj neohraňčenú produkciu.



Obr. 6: Zmena množiny produkčných možností

3.3 Záporná efektivita

Uvažujme úlohu s variabilnými výnosmi z rozsahu a množinu produkčných možností generovanú útvarmi A, B a C zobrazenými na Obr. 7.

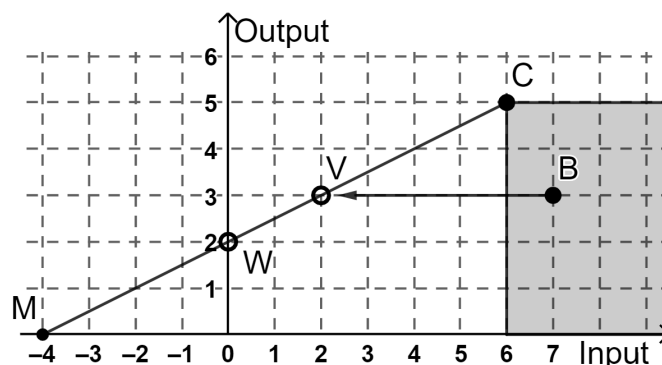


Obr. 7: Projekcia do zápornej oblasti (Podľa: [13])

Zavedieme produkčné trade-offy v tvare:

$$p_1 = (-2), \quad q_1 = (-1).$$

Po aplikovaní týchto trade-offov na útvar C získavame priamku CM, ktorú spolu s oblasťou pod ňou doplníme do rozšírenej množiny produkčných možností. Ako môžeme z obrázku vidieť, technológia umožňuje voľnú produkciu reprezentovanú útvarom W. Taktiež môžeme vidieť, že vstupne orientovaný BCC model projektuje útvar A na útvar F. Riešením obáľkového modelu získavame konečnú optimálnu hodnotu $\theta^* = \frac{-2}{5} = -0,4$. Táto „efektivita“ zjavne nemá význam.



Obr. 8: Nezachytený problém s ohraňeniami (Podľa: [13])

Ak by sme v predchádzajúcom príklade neuvažovali útvar A, získali by sme množinu produkčných možností generovanú útvarmi B a C zobrazenú na Obr. 8.

Použijeme rovnaké trade-offy ako v predchádzajúcom príklade, ktoré generujú priamku CM a s ňou aj rozšírenú množinu produkčných možností. Vstupná radiálna efektivita útvaru C je rovná 1 a útvaru B je rovná $\frac{2}{7}$, čo sa zdá byť bezproblémové. Avšak ako sme uviedli pri predchádzajúcom príklade, daný trade-off zapríčinil voľnú produkciu, a preto toto ohraničenie nemôže byť považované za rozumné. Aj keď sa zdá, že efektivita útvaru B je hodnoverná, v skutočnosti sa tento útvar projektuje na hranicu, ktorá by sa mala považovať za nesprávnu, a preto efektivitu útvaru B hodnotíme ako nesprávnu.

V [13] autori dokázali niekoľko tvrdení, ktoré poukazujú na to, že neprípustnosť multiplikatívneho modelu s ohraničeniami na váhy alebo jeho nekladná konečná optimálna hodnota je priamym dôsledkom toho, že ohraničenia na váhy vyvolali voľnú resp. neohraničenú produkciu. Taktiež uvádzajú dva prístupy, ktoré možno použiť na testovanie existencie voľnej alebo neohraničenej produkcie. Týmito postupmi sa budeme zaoberať v Kapitole 4.

3.4 Benchmarking

Podľa konvenčnej interpretácie multiplikatívneho modelu, jeho optimálne váhy zobrazujú rozhodovaciu jednotku v najlepšom svetle v porovnaní so všetkými pozorovanými $DMU_j, j = 1, \dots, n$. V prípade multiplikatívnych modelov s dodatočnými ohraničeniami na váhy je podľa [12] takáto interpretácia všeobecne považovaná za nesprávnu (špeciálne ak sú ohraničenia na váhy zložené alebo nehomogénne). V [12] autor dokázal, že optimálne váhy (u^*, v^*) multiplikatívneho modelu s dodatočnými ohraničeniami zobrazujú DMU_o v najlepšom svetle v porovnaní s rozšírenou množinou produkčných možností, nie len s pozorovanými útvarmi.

Nasledujúci príklad ukazuje, že váhy (u, v) , ktoré zobrazujú DMU_o v najlepšom svetle v porovnaní so všetkými pozorovanými DMU, sa všeobecne líšia od váh, ktoré zobrazujú DMU_o v najlepšom svetle v porovnaní so všetkými útvarmi v rozšírenej množine produkčných možností.

V Tabuľke 4 sú uvedené údaje o dvoch pozorovaných útvaroch A, B. Použijeme vstupne orientovaný CCR model v multiplikatívnom tvare, do ktorého začleníme dodatočné zmiešané ohraničenie: $4u_2 - v_1 \leq 0$. Pre útvar A potom dostávame nasledovnú

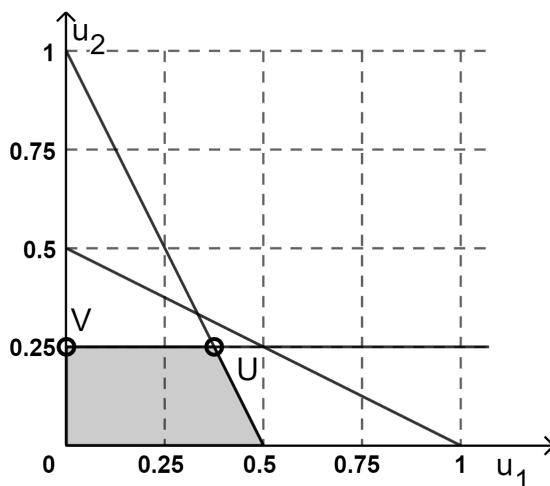
DMU	Input	Output 1	Output 2
A	1	1	2
B	1	2	1

Tabuľka 4: Údaje pozorovaných útvarov

úlohu lineárneho programovania:

$$\begin{aligned}
 \max_{u_1, u_2, v_1} \quad & u_1 + 2u_2 \\
 & v_1 = 1, \\
 & u_1 + 2u_2 - v_1 \leq 0, \\
 & 2u_1 + u_2 - v_1 \leq 0, \\
 & 4u_2 - v_1 \leq 0, \\
 & u_1, u_2, v_1 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Túto úlohu vieme jednoducho vyriešiť graficky. Oblasť prípustných riešení váh u_1 a u_2 je zobrazená na Obr. 9. Váha $v_1 = 1$ pre akékoľvek prípustné riešenie.



Obr. 9: Grafické riešenie príkladu (Podľa: [12])

Z Obr. 9 vieme jednoducho vyčítať optimálne riešenie tejto úlohy, ktorým je bod U s hodnotami $u_1^* = 0,375$, $u_2^* = 0,25$ a $v_1^* = 1$. Zodpovedajúca optimálna hodnota účelovej funkcie je $\theta^* = 0,875$. Vyjadrime produktivitu pozorovaných útvarov A a B

ako pomer váženého súčtu výstupov k váženému súčtu vstupov nasledovne:

$$P_A(u, v) = \frac{u_1 + 2u_2}{v_1},$$

$$P_B(u, v) = \frac{2u_1 + u_2}{v_1}.$$

Dosadením vyššie uvedených optimálnych váh dostávame $P_A(u^*, v^*) = 0,875$ a $P_B(u^*, v^*) = 1$, a teda útvar A by mal byť považovaný za neefektívny.

Avšak uvažujme iné prípustné riešenie tejto úlohy: $\hat{u}_1 = 0$, $\hat{u}_2 = 0,25$ a $\hat{v}_1 = 1$. Toto riešenie predstavuje bod V na Obr. 9. Pomocou týchto váh získavame nasledovnú produktivitu pozorovaných útvarov: $P_A(\hat{u}, \hat{v}) = 0,5$ a $P_B(\hat{u}, \hat{v}) = 0,25$. To znamená, že pre váhy reprezentované bodom V má útvar A maximálnu produktivitu spomedzi pozorovaných útvarov, a preto by mal byť považovaný za efektívny.

Teraz je zrejmé, že optimálna hodnota $\theta^* = 0,875$ multiplikatívneho modelu uvedeného vyššie nepredstavuje najvyššiu hodnotu efektivity, ktorú môže útvar A dosiahnuť pri porovnávaní so všetkými pozorovanými *DMU*.

Autor [12] dokázal, že optimálne hodnoty u_1^* , u_2^* a v_1^* zobrazujú útvar A v najlepšom svetle v porovnaní so všetkými útvarmi v rozšírenej technologickej množine. Okrem toho autor dokázal, že optimálna hodnota účelovej funkcie ($\theta^* = 0,875$) je najvyššou hodnotou produktivity, akú môže *DMU* A dosiahnuť, ak je tento útvar porovnávaný so všetkými útvarmi v rozšírenej technologickej množine a nielen s pozorovanými *DMU*.

3.5 Úbytok efektívnych útvarov a pseudoeфективít

Na nasledovnom príklade si ukážeme, ako sa zmenia efektivity jednotlivých *DMU* po zavedení dodatočných ohraničení na váhy. Dáta k príkladu čerpáme z [16] a uvádzame ich v Prílohe A.

V tejto úlohe porovnáваме efektivitu 13 robotov. Zadané sú tri výstupy (Repeat, Load, Velocity) a vstupom sú náklady (Cost). Výstup Repeat chápeme ako schopnosť robota vykonávať opakovanú činnosť za určitý čas, Load predstavuje nosnosť robota a Velocity jeho rýchlosť. V DEA modeloch je väčšia hodnota výstupov hodnotená ako lepšia oproti nízkej hodnote. Preto pri výstupe Repeat budeme brať obrátené hodnoty zadaných hodnôt, nakoľko ak robot dokáže zopakovať činnosť za kratší čas, považujeme ho za lepší. Taktiež všetky dáta normalizujeme tým, že ich predelíme priemerom daného

vstupu resp. výstupu.

Na tieto dáta sme najskôr použili vstupný CCR model. Dodali sme ohraňenie na výstupné váhy nasledovne:

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3,$$

ktoré môžeme zapísať ako produkčné trade-offy nasledovne:

$$q_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tieto ohraňenia sme začlenili do CCR modelu a taktiež do Russellovho a hyperbolického modelu s konštantnými výnosmi z rozsahu. Výsledné efektivity jednotlivých robotov sú uvedené v *Tabuľke 5*. Údaje označené symbolom ^b predstavujú psuedoefektivity. Na rozlišovanie efektivity a pseudoefektivity sme použili metódu vnútorného bodu.

Robot	CCR	CCR s AR ohr.	RM	RM s AR ohr.	HM	HM s AR ohr.
1	0.7000 ^b	0.4691	0.5749	0.5521	0.8367 ^b	0.6849
2	1	0.6419	1	0.6707	1	0.8012
3	0.4722	0.4722	0.5772	0.5754	0.6872	0.6872
4	0.4266 ^b	0.2819	0.4882	0.4235	0.6531 ^b	0.5310
5	1	1	1	1	1	1
6	1	0.6972	1	0.6383	1	0.8350
7	1	1	1	1	1	1
8	0.7365 ^b	0.5841	0.6885	0.6617	0.8582 ^b	0.7643
9	1	1	1	1	1	1
10	0.8293	0.6690	0.7946	0.7482	0.9107	0.8179
11	0.3992	0.3131	0.5032	0.4801	0.6318	0.5595
12	0.7664	0.5309	0.6539	0.5533	0.8754	0.7286
13	0.5322 ^b	0.4219	0.5719	0.5397	0.7295 ^b	0.6495

Tabuľka 5: Efektivity jednotlivých robotov pri modeloch s CRS

Vidíme, že zatiaľ čo pri každom modeli bez ohraničení na váhy získavame 5 efektívnych jednotiek, pri modeli s dodatočnými ohraničeniami na výstupné váhy sme získali len 3. Taktiež pomocou údajov z *Tabuľky 5* vieme jednoducho overiť vzťah (17) medzi CCR a hyperbolickým modelom. Všimnime si, že tieto vzťahy platia, aj ak do modelov začleníme ohraničenia na váhy.

Rovnakú analýzu údajov o robotoch sme vykonali aj s modelmi pri variabilných výnosoch z rozsahu. Výsledné efektivity sú uvedené v *Tabuľke 6*.

Robot	BCC	BCC s AR ohr.	RM	RM s AR ohr.	HM	HM s AR ohr.
1	0.9120 ^b	0.6892	0.5781	0.5541	0.9375 ^b	0.7061
2	1	0.6473	1	0.7357	1	0.8160
3	0.5154 ^b	0.5066 ^b	0.6698	0.6331	0.7091	0.6993
4	0.4507 ^b	0.3357	0.5530	0.4604	0.6655 ^b	0.5311
5	1	1	1	1	1	1
6	1	0.7413	1	0.6590	1	0.8816
7	1	1	1	1	1	1
8	0.9435 ^b	0.7216	0.6886	0.6652	0.9600 ^b	0.7732
9	1	1	1	1	1	1
10	0.9417 ^b	0.8358	0.7961	0.7523	0.9558 ^b	0.8462
11	1	1	1	1	1	1
12	0.7777 ^b	0.5313	0.7082	0.5830	0.8927 ^b	0.7663
13	0.5731 ^b	0.4683 ^b	0.6460	0.5823	0.7506	0.6851

Tabuľka 6: Efektivity jednotlivých robotov pri modeloch s VRS

Vidíme, že v tomto prípade získavame dokonca až 6 efektívnych jednotiek pri každom modeli bez ohraničení na váhy a 4 efektívne jednotky pri modeloch s dodatočnými ohraničeniami. Celkovo sa hodnoty efektívít pri všetkých modeloch zvýšili pre každú pozorovanú jednotku. Taktiež sa zvýšil počet pseudoefektívít.

V podkapitole 2.1 sme ako jeden z dôvodov začlenenia dodatočných ohraničení na váhy uviedli nulovosť váh. Na predchádzajúcom príklade ukážeme, že vhodnou voľbou ohraničení ubudne riešení s nulovými váhami, a teda ubudne pseudoefektívít.

Údaje v *Tabulke 5* označené symbolom ^b predstavujú hodnoty psuedoefektívít. Tieto hodnoty sa vyskytujú iba pri CCR a hyperbolickom modeli, nakoľko Russellov model vždy projektuje na efektívnu časť hranice množiny produkčných možností. Z výsledkov môžeme vidieť, že po pridaní dodatočných ohraničení na váhy sa pri daných robotoch už nevyskytujú pseudoefektivity. Všetky hodnoty predstavujú efektivitu.

V *Tabulke 6* sa síce pseudoefektívne útvary vyskytujú aj pri dodatočných ohraničeniach na váhy pri BCC modeli, ale taktiež pozorujeme úbytok týchto pseudoefektívít.

4 Testovanie konzistentnosti ohraňení na váhy

Ako sme už vyššie spomenuli, v [13] autori dokázali tvrdenia, ktoré poukazujú na to, že neprípustnosť multiplikatívneho modelu s ohraňeniami na váhy alebo jeho nekladná konečná optimálna hodnota je priamym dôsledkom toho, že ohraňenia na váhy vyvolali voľnú resp. neohraňenú produkciu. Jedno z týchto tvrdení vysvetľuje povahu problematických výsledkov v modeloch s CRS. Podľa tohto tvrdenia v takýchto modeloch znamená existencia voľnej produkcie taktiež existenciu neohraňenej produkcie a naopak. Ďalšie tvrdenie z [13] dokazuje, že ak sú ohraňenia na váhy v technológii CRS problematické, potom sú problematické aj v technológii VRS a naopak.

Autori [13] a [14] vo svojich prácach uvádzajú dva prístupy, ktorými možno testovať existenciu voľnej alebo neohraňenej produkcie.

Prvý je založený na technike lineárneho programovania a dá sa použiť na všetky typy ohraňení na váhy. Druhým prístupom je analytická podmienka, ktorá sa dá ľahko overiť, ale je použiteľná len na jednoduché ohraňenia. V [14] rozšírili túto podmienku aj na zmiešané ohraňenia. Takýmto testovaním je možné zistiť, či sú ohraňenia na váhy resp. produkčné trade-offy konzistentné.

Podľa [14] sú ohraňenia na váhy konzistentné pre danú množinu pozorovaných útvarov (organizačných jednotiek), ak rozšírená množina produkčných možností neumožňuje voľnú a neohraňenú produkciu. Treba poznamenať, že rovnaké ohraňenia na váhy môžu byť konzistentné pre jednu sadu pozorovaných útvarov a nekonzistentné pre inú sadu.

4.1 Výpočtový prístup

Autori [14] dokázali tvrdenie, že existencia voľnej a neohraňenej produkcie v množine produkčných možností s variabilnými výnosmi z rozsahu a konštantnými výnosmi je vzájomne prepojená. Nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou, ktorá vylučuje všetky tieto možnosti (a potvrdzuje platnosť ohraňení na váhy), je to, že v množine produkčných možností s konštantnými výnosmi z rozsahu nie je možná neohraňená produkcia.

Vyššie spomenuté sa dá testovať riešením s dodatočných DEA úloh (jedna úloha pre každý výstup). Myšlienkou tohto postupu je fakt, že ak nejaký výstupný vektor

$y_o \neq 0$ vieme vyprodukovať v neobmedzenom množstve zo vstupného vektora x_o , potom jednotlivé kladné zložky výstupného vektora y_o môžu byť tiež vyprodukované z x_o v neobmedzenom množstve.

Na otestovanie tejto možnosti musíme rozšíriť množinu pozorovaných útvarov DMU zahrnutím ďalších umelo „pozorovaných“ jednotiek, z ktorých každá produkuje iba jeden z výstupov $r = 1, \dots, s$. Musíme taktiež zaistiť, aby nové „pozorované“ jednotky boli dominované už existujúcimi reálne pozorovanými organizačnými jednotkami, a teda aby množina produkčných možností použitá v DEA modeli nebola ovplyvnená.

Konkrétne pre každé r definujeme vektor $g_r \in \mathbb{R}_+^s$, ktorého zložky $k = 1, \dots, s$ sú nasledovné:

$$(g_r)_k = \begin{cases} (y_o)_r, & k = r \\ 0, & \forall k \neq r. \end{cases} \quad (40)$$

Ako je uvedené vyššie, chceme testovať, či je možné ktorýkoľvek z jednotlivých výstupov vyprodukovať v neobmedzenom množstve pri množine produkčných možností, ktorá obsahuje nové umelo pozorované útvary, ale zároveň je identická s pôvodnou množinou produkčných možností bez týchto dodatočných útvarov.

Na testovanie konzistentnosti ohraňení na váhy potom riešime s úloh v nasledovnom tvare:

$$\min_{u,v} \quad v^T x_o \quad (41a)$$

$$\text{pri podmienkach} \quad u^T g_r = 1, \quad (41b)$$

$$u^T y_j - v^T x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (41c)$$

$$u^T g_r - v^T x_o \leq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad (41d)$$

$$u^T q_t - v^T p_t \leq 0, \quad t = 1, \dots, K, \quad (41e)$$

$$u \geq 0_s, \quad v \geq 0_m. \quad (41f)$$

Podľa tohto prístupu, množina produkčných možností umožňuje neohraňenú produkciu vtedy a len vtedy, ak existuje $r = 1, \dots, s$, pre ktoré je model (41) neprípustný. V takom prípade sú ohraňenia na váhy nekonzistentné pre danú množinu pozorovaných útvarov a treba tieto ohraňenia prehodnotiť.

Tento spôsob testovania konzistentnosti váh však môže byť výpočtovo veľmi náročný.

4.2 Analytická podmienka

Predpokladajme, že v našej analýze sa nachádzajú ohraničenia na váhy v nasledovnej podobe:

$$q_{t_O}^T u \leq 0, t_O = 1, \dots, K_O, \quad (42)$$

$$-p_{t_I}^T v \leq 0, t_I = 1, \dots, K_I, \quad (43)$$

$$q_t^T u - p_t^T v \leq 0, t = 1, \dots, K. \quad (44)$$

Taktiež predpokladajme, že ohraničenie z (44) je zmiešané, a teda $p_t \neq 0$ a $q_t \neq 0$ pre každé $t = 1, \dots, K$.

Literatúra zaoberajúca sa DEA modelovaním s ohraničeniami na váhy naznačuje, že (42) a (43) sú najbežnejším typom ohraničení na váhy používaným v aplikáciách. V [13] autori zaviedli kritérium pre jednoduché ohraničenia, ktoré umožňuje preskúmať existenciu voľnej produkcie bez riešenia dodatočných úloh ako v prípade výpočtového prístupu z predchádzajúcej časti. Podľa tohto kritéria množina produkčných možností neumožňuje neohraničenú produkciu vtedy a len vtedy, ak sú splnené nasledovné dve podmienky:

- (i) existuje kladný vektor $\hat{u} > 0$, ktorý spĺňa (42),
- (ii) existuje nezáporný vektor $\hat{v} \geq 0$, ktorý spĺňa (43) a taký, že $(\hat{v})^T x_j > 0$ platí pre všetky pozorované útvary $j = 1, \dots, n$.

Ak niektoré ohraničenie z (42) a (43) chýba, potom sa zodpovedajúca podmienka (i) alebo (ii) vynechá.

Podľa [13] vo väčšine praktických aplikácií môže byť platnosť ohraničení na váhy potvrdená kontrolou nasledovnej postačujúcej podmienky: Ak existujú kladné vektory $\hat{u}$ a $\hat{v}$, ktoré vyhovujú (42) a (43), potom množina produkčných možností neumožňuje neohraničenú produkciu. Táto podmienka je ekvivalentná s našou Vetou 2.1, podľa ktorej existencia kladných vektorov $\hat{u}$ a $\hat{v}$ vylučuje neprípustnosť multiplikatívneho modelu.

Ak do analýzy začleníme aj zmiešané ohraničenia v tvare (44), potom vyššie uvedené body (i) a (ii) tvoria nutnú podmienku konzistentnosti ohraničení, nie však postačujúcu.

Je potrebné zdôrazniť, že vyššie uvedené kritérium nevyžaduje, aby vektory $\hat{u}$ a $\hat{v}$ spĺňali akékoľvek ohraničenia resp. nerovnosti z multiplikatívnych modelov, vektory musia spĺňať iba ohraničenia na váhy (42) - (44). Taktiež možno poznamenať, že ak všetky vstupy všetkých pozorovaných útvarov sú kladné, t. j. $x_j > 0$ pre všetky $j = 1, \dots, n$, potom sa dá podmienka (ii) uvedená vyššie ekvivalentne vyjadriť ako $\hat{v} \geq 0, \hat{v} \neq 0$.

V [14] autori taktiež dokázali tvrdenie, podľa ktorého postačujúcu podmienku konzistentnosti zmiešaných ohraničení na váhy tvoria podmienky (i) a (ii), ak všetky zložky vektorov $p_t, t = 1, \dots, K$ z (44) sú nezáporné.

5 Aplikácia na reálne dáta

DEA modely sú jednou z najpopulárnejších metód uplatňovaných v štúdiách zameraných na meranie efektívnosti rôznych spoločností. Oblasťou častých a úspešných aplikácií DEA modelov je aj hodnotenie efektívnosti bankového sektora. Takéto aplikácie boli zverejnené v mnohých nedávnych publikáciách. V týchto prácach sú väčšinou použité prevažne základné CCR a BCC modely. V našej práci sme sa rozhodli na cvičnom príklade analyzovať efektívnosť bankového sektora na Slovensku, pričom do použitých modelov začleníme aj dodatočné ohraničenia na váhy.

5.1 Výber dát

Podľa Národnej banky Slovenska aktuálne k 1.4.2020 na Slovensku pôsobí 27 bánk a pobočiek zahraničných bánk. Na Slovensku sú stavebné sporiteľne taktiež klasifikované ako banky. Do našej analýzy sme sa rozhodli nezačleniť pobočky zahraničných bánk, a teda budeme uvažovať len inštitúcie z *Tabuľky 7*.

Poradie	Obchodné meno spoločnosti
1	Československá obchodná banka, a.s.
2	ČSOB stavebná sporiteľňa, a.s.
3	OTP Banka Slovensko a.s.
4	Poštová banka, a.s.
5	Prima banka Slovensko, a.s.
6	Privatbanka, a.s.
7	Prvá stavebná sporiteľňa, a. s.
8	Slovenská sporiteľňa, a.s.
9	Slovenská záručná a rozvojová banka, a. s.
10	Tatra banka, a.s.
11	Všeobecná úverová banka, a.s.
12	Wüstenrot stavebná sporiteľňa, a.s.

Tabuľka 7: Zoznam bánk pôsobiacich na Slovensku

Analyzovať budeme najaktuálnejšie zverejnené údaje, ktorými sú údaje za rok 2018 získané z výročných správ jednotlivých bánk. Tieto údaje uvádzame v Prílohe B.

5.2 Výber orientácie modelu a použitých parametrov

Naša úloha je založená na variabilných výnosoch z rozsahu, ktorý predpokladá, že pri proporcionálnej zmene všetkých vstupov nedochádza k proporcionálne rovnakej zmene výstupov.

Podľa [2] boli vyvinuté a intenzívne sa používajú tri základné prístupy pri hodnotení efektívnosti komerčných bánk: prístup sprostredkovania, prístup orientovaný na služby a prístup orientovaný na zisk. Hlavným rozdielom medzi nimi je zaobchádzanie s vkladmi, ktoré môžu mať vstupný aj výstupný charakter.

Podľa prístupu sprostredkovania je komerčná banka hlavným finančným sprostredkovateľom v ekonomike a jej primárnou úlohou je premena vkladov na úvery. Tento prístup považuje za výstup úvery a investície, pričom sa ako vstupy využívajú vklady, pracovná sila a kapitál. Prístup orientovaný na služby predpokladá, že cieľom komerčných bánk je produkovať vklady, ako aj úvery a ďalšie služby, preto vklady spolu s úvermi a úrokovými výnosmi považuje za výstupy. Prístup orientovaný na zisk je najnovší z uvedených troch. V tomto prístupe sa za vstupy berú úrokové náklady a / alebo neúrokové náklady a úrokové výnosy a / alebo neúrokové výnosy sa používajú ako výstupy.

V našej práci sme sa rozhodli využiť prístup orientovaný na služby, a teda úvery a vklady budeme považovať za výstupy. Ďalšou službou, ktorú banka svojim klientom poskytuje je počet dostupných bankomatov, čo bude tvoriť ďalší z výstupov. Za vstupy budeme uvažovať náklady spojené s prevádzkovaním banky a taktiež počet zamestnancov danej banky. Celkovo teda použijeme 5 faktorov uvedených v *Tabuľke 8*.

Rozhodli sme sa použiť vstupne a výstupne orientovaný BCC model a taktiež dva neorientované modely a to hyperbolický a Russellov model pri VRS.

Vstupy	Charakteristika	Výstupy	Charakteristika
x_1	prevádzkové náklady	y_1	úvery poskytnuté klientom
x_2	počet zamestnancov	y_2	vklady klientov
		y_3	počet bankomatov

Tabuľka 8: Zoznam použitých faktorov

5.3 Voľba dodatočných ohraničení na váhy

Ako sme uviedli vyššie, do analýzy začleníme dodatočné ohraničenia na váhy, ktorými chceme rozlíšiť dôležitosť jednotlivých vstupov resp. výstupov.

Tabuľka 9 uvádza hodnoty efektívít a / alebo pseudoeфективít jednotlivých bánk vypočítaných pomocou vstupne orientovaného BCC modelu (BCC-I), výstupne orientovaného BCC modelu (BCC-O), hyperbolického modelu (HM) a Russellovho modelu (RM) bez dodatočných ohraničení na váhy.

DMU	BCC-I	BCC-O	HM	RM
1	0,8528 ^b	0,8663 ^b	0,9267 ^b	0,8297
2	1	1	1	1
3	0,7609 ^b	0,7301 ^b	0,8633 ^b	0,7362
4	0,7112 ^b	0,7524 ^b	0,8573 ^b	0,7552
5	1	1	1	1
6	0,8407 ^b	0,6772 ^b	0,8815 ^b	0,6596
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	0,7276 ^b	0,4083 ^b	0,7805 ^b	0,4903
10	0,9179 ^b	0,9241 ^b	0,9598 ^b	0,8421
11	1	1	1	1
12	1	1	1	1

Tabuľka 9: Efektivity bánk bez použitia dodatočných ohraničení na váhy

V Prílohe C uvádzame tabuľky s hodnotami jednotlivých váh priradených k použi-

tým vstupom resp. výstupom. Vo viacrozmerných úlohách akou je aj táto, kde nemáme geometrickú predstavu o hranici množiny produkčných možností, sú hodnoty optimálnych riešení dôležité pre získanie predstavy o danom útvere. Veľkosť optimálnej váhy poukazuje na to, ako je príslušný vstup, či výstup pre daný útvar dôležitý.

Pri dôkladnejšej analýze váh uvedených v Prílohe C si môžeme všimnúť, že pomerne veľké množstvo váh vychádza nulových. Najväčší problém podľa nášho názoru tvoria nulové váhy prvých dvoch výstupov pre banku č. 3 (OTP Banka Slovensko a.s.) pri BCC modeloch aj hyperbolickom modeli. Tieto nulové váhy znamenajú, že pri vyhodnocovaní efektivity danej banky sú odignorované úvery poskytnuté klientom, ako aj vklady od klientov a jediným výstupným ukazovateľom efektivity je počet bankomatov.

Predpokladáme, že pre banku sú poskytnuté úvery dôležitejším parametrom než vklady klientov. Pri úveroch poskytnutých klientom banka vyžaduje od klientov zaplatiť vyššie úroky v porovnaní s úrokmi, ktoré banka klientom vypláca za vklady na termínované účty. Taktiež predpokladáme, že pre banku je najmenej dôležitou službou, ktorú klientom ponúka, počet dostupných bankomatov. Pri týchto predpokladoch do analýzy začleníme nasledovné dodatočné ohraničenia na výstupné váhy:

$$u_1 \geq u_2,$$

$$u_2 \geq u_3,$$

ktoré môžeme prepísať na nasledovný produkčný trade-off:

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ak chceme tieto ohraničenia začleniť do analýzy, musia spĺňať podmienky uvedené v Kapitole 4. V našom prípade, kedy máme jednoduché dodatočné ohraničenia len na výstupy, musí platiť podmienka (i). Tú vieme jednoducho overiť. Majme napríklad vektor $\hat{u}$ daný nasledovne:

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T > 0.$$

Po dosadení do podmienky (42) získavame:

$$Q^T \hat{u} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

čím je splnená podmienka (i), a tým aj analytická podmienka konzistentnosti ohraň-
čenie na váhy.

V *Tabuľke 10* uvádzame výsledky jednotlivých modelov po začlenení dodatočných
ohraňčenie na výstupné váhy. Hodnoty jednotlivých váh priradených ku vstupom a
výstupom uvádzame v Prílohe D.

DMU	BCC-I	BCC-O	HM	RM
1	0,8500 ^b	0,8663 ^b	0,9266 ^b	0,8297
2	1	1	1	1
3	0,6496	0,6075 ^b	0,7882 ^b	0,7362
4	0,6051 ^b	0,6354	0,7857 ^b	0,7529
5	1	1	1	1
6	0,8327 ^b	0,6499	0,8738 ^b	0,6596
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	0,7276 ^b	0,4083 ^b	0,7805 ^b	0,4903
10	0,8381 ^b	0,8539 ^b	0,9202 ^b	0,8417
11	1	1	1	1
12	1	1	1	1

Tabuľka 10: Efektivity bánk s použitím dodatočných ohraňčenie na výstupné váhy

Z Prílohy D vieme usúdiť, že začlenením dodatočných váh sa výrazne znížil počet
nulových váh pre výstupy. Taktiež ale vidíme, že pre vstupy zostalo stále množstvo
váh nulových, a to najmä pre vstupný BBC model a hyperbolický model. Nakoľko pre
vstupy nie sú žiadne očividné ohraňčenia resp. trade-offy, ktoré by sme mohli aplikovať,
budeme postupovať technicky a ohraňčíme pomery váh vstupov pre jednotlivé banky
nasledovne:

$$0,01 \leq \frac{v_1}{v_2} \leq 100,$$

respektíve zavedieme produkčný trade-off tvaru:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0,01 & 100 \end{pmatrix}.$$

Aj pre tieto ohraňenia musí byť splnená analytická podmienka konzistentnosti z Kapitoly 4, aby v analýze nespôsobovali problémy. Pre ohraňenia na vstupné váhy musí platiť podmienka (ii). Majme teda vektor $\hat{v}$ daný nasledovne:

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T \geq 0.$$

Po dosadení do podmienky (43) získavame:

$$-P^T \hat{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0,01 \\ 1 & -100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

čím je splnená prvá časť podmienky (ii). Nakoľko všetky hodnoty vstupov sú kladné čísla, druhá časť podmienky (ii) pre vektor $\hat{v}$: $(\hat{v})^T x_j$ platí pre všetky $j = 1, \dots, n$. To znamená, že nami zvolené ohraňenia spĺňajú analytickú podmienku konzistentnosti ohraňení na váhy, a teda podľa [13] tieto dodatočné ohraňenia na váhy nespôsobujú v analýze problémy s voľnou resp. neohraňenou produkciou.

5.4 Výsledky a diskusia

Po dosadení všetkých ohraňení z predchádzajúcej časti (vstupných aj výstupných) do jednotlivých modelov získavame výsledky uvedené v *Tabuľke* 11.

Pri porovnaní s výsledkami z predchádzajúcej časti vidíme, že dodatočné ohraňenia na váhy výrazne neovplyvnili výsledné hodnoty efektívít jednotlivých bánk. Pri všetkých modeloch získavame znova šesť efektívnych útvarov: ČSOB stavebná sporiteľňa, a.s., Prima banka Slovensko, a.s., Prvá stavebná sporiteľňa, a. s., Slovenská sporiteľňa, a.s., Všeobecná úverová banka, a.s. a Wüstenrot stavebná sporiteľňa, a.s.

Príliš veľký počet efektívnych útvarov (v našom prípade polovica útvarov) môže napovedať o nevhodnom pomere počtu DMU vzhľadom na počet vstupov a výstupov. Tento problém by sa dal riešiť začlenením väčšieho počtu bánk do analýzy. Mohli by

DMU	BCC-I	BCC-O	HM	RM
1	0,8478	0,8641 ^b	0,9254 ^b	0,8297
2	1	1	1	1
3	0,6496	0,6073	0,7882	0,7362
4	0,6046	0,6354	0,7857	0,7529
5	1	1	1	1
6	0,8314	0,6499	0,8731	0,6596
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	0,7247 ^b	0,4078 ^b	0,7786 ^b	0,4903
10	0,8381 ^b	0,8539 ^b	0,9202 ^b	0,8417
11	1	1	1	1
12	1	1	1	1

Tabuľka 11: Efektivity bánk s použitím dodatočných ohraničení na vstupné a výstupné váhy

sme napríklad analyzovať bankový sektor Slovenska spolu s krajinami Vyšehradskej štvorky.

Pozitívnym faktom je, že sa vo výsledkoch výrazne znížil počet nulových váh. Z výsledkov v Prílohe C sme za najväčší problém považovali množstvo nulových váh, ktoré boli priradené vstupom resp. výstupom polovice pozorovaných útvarov. V Prílohe E vidíme, že po začlenení dodatočných váh na vstupy aj výstupy do vstupne orientovaného BCC modelu sú nulové váhy priradené už len dvom pozorovaným útvarom (Slovenská záručná a rozvojová banka, a. s. a Tatra banka, a.s.). Nakoľko naše výpočty poskytujú ostro komplementárne výsledky, nulovosť váh naznačuje pseudoeфективitu týchto útvarov. Pri hyperbolickom modeli a výstupne orientovanom BCC modeli s dodatočnými ohraničeniami na vstupné a výstupné váhy získavame nulové váhy pri troch pozorovaných útvaroch.

Možným rozšírením by mohlo byť začlenenie zmiešaných ohraničení, ktoré by spĺňali podmienku konzistentnosti a zároveň rozšírenie počtu pozorovaných útvarov.

Záver

V tejto práci sme sa zaoberali DEA modelmi s ohraničeniami na váhy. V prvej časti práce sme sa venovali spracovaniu základnej teórie o DEA modeloch. Uviedli sme základné pojmy a sformulovali vybrané modely. Ďalej sme zostavili prehľad o dôvodoch, spôsoboch a možnostiach začlenenia ohraničení na váhy do modelov. Bližšie sme sa venovali konkrétnym typom ohraničení, ktorými sú zmiešané a jednoduché ohraničenia. Pre jednoduché ohraničenia nad CCR-I modelom sa nám podarilo dokázať existenciu optimálneho riešenia vo Vete 2.1.

V ďalšej časti sme sa venovali známym zmenám vlastností modelov, ku ktorým dochádza po začlenení dodatočných ohraničení. Ku každému poznatku sme uviedli jednoduchý konkrétny príklad, na ktorom danú zmenu ilustrujeme. V tejto časti sme zväčša ukázali, k akým problémom môžu ohraničenia viesť. Riešením na problémy zapríčinené začlenením dodatočných ohraničení na váhy sú testy konzistentnosti uvedené v Kapitole 4. Tieto testy boli odvodené v práci [13] už v roku 2013, ale s reálnym využitím, a teda testovaním konzistentnosti ohraničení na váhy sme sa nestretli v žiadnej literatúre, ktorá sa zaoberala DEA modelmi s ohraničeniami na váhy a ich aplikáciami.

V poslednej časti našej práce sme na základe teoretických poznatkov, nadobudnutých z predchádzajúcich častí, vytvorili vlastnú aplikáciu, v ktorej sme do bežnej analýzy bankového sektora zakomponovali ohraničenia na váhy. Analýza bankového sektora je bežnou aplikáciou DEA modelov. V rôznych publikáciách sa môžeme stretnúť s analýzou bankového sektora určitej krajiny resp. skupiny krajín. V týchto prácach autori zväčša využívajú základné orientované DEA modely bez dodatočných ohraničení. My sme sa rozhodli využiť orientované a taktiež aj neorientované modely, akými sú hyperbolický a Russellov model. Do týchto modelov sme podľa vlastného uváženia začlenili ohraničenia na vstupné a výstupné váhy. Tieto váhy sme otestovali pomocou testu konzistentnosti, ktorý potvrdil, že v modeloch nespôsobujú zbytočné problémy. Výsledky možno nájsť v časti 5.4.

Za hlavný prínos tejto práce považujeme najmä spracovanie podrobného prehľadu o poznatkoch spojených s problematikou DEA modelov s ohraničeniami na váhy. Za nový postupom v oblasti DEA modelov s ohraničeniami na váhy považujeme v tejto práci aplikáciu ohraničení do neorientovaných modelov, konkrétne do hyperbolického a

Russellovho modelu. Prínosom je taktiež aj ukážka začlenenia a testovania ohraničení na váhy v analýze bankového sektora Slovenskej republiky, výsledky čoho môžu byť motiváciou pre ďalší výskum.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Allen, R., Athanassopoulos, A., Dzon, R. G., Thanassoulis, E.: *Weights restrictions and value judgements in Data Envelopment Analysis: Evolution, development and future directions*, Annals of Operations Research 73 (1997), 13–34, dostupné na internete (4.1.2020): <https://link.springer.com/article/10.1023/A:1018968909638>
- [2] Boda, M., Zimková, E.: *Efficiency in the Slovak Banking Industry: A Comparison of Three Approaches*, Prague Economic Papers 4 (2015), 434–451, dostupné na internete (1.4.2020): https://www.researchgate.net/publication/283182131_Efficiency_in_the_Slovak_Banking_Industry_A_Comparison_of_Three_Approaches
- [3] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E.: *Measuring the efficiency of decision making units*, s European Journal of Operational Research 2 (1978), 429–444, dostupné na internete (20.12.2019): <https://farapaper.com/wp-content/uploads/2019/06/Fardapaper-Measuring-the-efficiency-of-decision-making-units.pdf>
- [4] Dyson, R. G., Allen, R., Camanho, A. S., Podinovski, V. V., Sarrico, C. S.: *Pitfalls and protocols in DEA*, European Journal of Operational Research 132 (2001), 245–259, dostupné na internete (04.01.2020): <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0377221700001491>
- [5] Fried, H. O., Lovell, C. A. K., Schmidt, S. S. : *The Measurement of Productive Efficiency and Productivity Growth*, Oxford University Press, USA, 2008, dostupné na internete (20.12.2019): <https://spu.fem.uniag.sk/cvicenia/ksov/fandel/Metody%20hodnotenia%20efektivnosti%20a%20produktivity/Literatura/Fried-Lovell-Schmidt/Fried-Chapter3.pdf>
- [6] Halická, M.: *DEA modely*, učebné texty, FMFI UK, Bratislava, 2015, dostupné na internete (4.1.2020): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/teach/DEAskripta.pdf>

- [7] Halická, M., Trnovská, M.: *The Russell measure model: Computational aspects, duality, and profit efficiency*, European Journal of Operational Research 268 (2018), 386–397
- [8] Halická, M., Trnovská, M.: *Duality and profit efficiency for the hyperbolic measure model*, European Journal of Operational Research 278 (2019), 410–421
- [9] Pedraja-Chaparro, F., Salinas-Jimenez, J., Smith, P.: *On the Role of Weight Restrictions in Data Envelopment Analysis*, Journal of Productivity Analysis 8 (1997), 215–230, dostupné na internete (10.01.2020): <https://www.jstor.org/stable/41770537?seq=1>
- [10] Podinovski, V. V.: *Production trade-offs and weight restrictions in data envelopment analysis*, Journal of the Operational Research Society 55 (2004), 1311–1322, dostupné na internete (10.01.2020): <https://orsociety.tandfonline.com/doi/abs/10.1057/palgrave.jors.2601794#.Xh4nDkdKiUk>
- [11] Podinovski, V. V. *DEA Models with Production Trade-offs and Weight Restrictions* In: Zhu, J. : *Data Envelopment Analysis: A Handbook of Models and Methods*, Springer, US, 2015, 105–144
- [12] Podinovski, V. V.: *Optimal weights in DEA models with weight restrictions*, European Journal of the Operational Research 254 (2016), 916–924, dostupné na internete (15.02.2020): https://repository.lboro.ac.uk/articles/Optimal_weights_in_DEA_models_with_weight_restrictions/9504722
- [13] Podinovski, V. V., Bouzdine-Chameeva, T.: *Weight Restrictions and Free Production in Data Envelopment Analysis*, Operations Research 61 (2013), 1–12, dostupné na internete (10.01.2020): <https://ideas.repec.org/a/inm/oropre/v61y2013i2p426-437.html>
- [14] Podinovski, V. V., Bouzdine-Chameeva, T.: *Consistent weight restrictions in data envelopment analysis*, European Journal of Operati-

- onal Research 244 (2015), 201–209, dostupné na internete (20.02.2020):
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221715000570>
- [15] Sueyoshi, T., Sekitani, K.: *Computational strategy for Russell measure in DEA: Second-order cone programming*, European Journal of Operational Research 180(2007), 459–471, dostupné na internete (21.02.2020):
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221706002554>
- [16] Talluri, S., Yoon, K. P.: *A cone-ratio DEA approach for AMT justification*, International Journal of Production Economics 66 (2000), 119–129, dostupné na internete (10.01.2020):
<https://www.semanticscholar.org/paper/A-cone-ratio-DEA-approach-for-AMT-justification-Talluri-Yoon/227c428f923ed8bac078a6fdc51333478ab9aa1b>

Príloha A

Dáta k príkladu o robotoch

Robot	Cost (\$10000)	Repeat	Load	Velocity
1	6	0.2	6	1.50
2	9	0.40	60	2.90
3	9.5	0.08	28	1
4	12.5	1	60	1.20
5	7	0.05	20	2.50
6	7.2	1.25	115	0.90
7	4.25	0.10	50	0.70
8	5.8	0.15	15	1.50
9	11	0.025	10	0.67
10	5	0.2	40	1
11	4	0.5	10	0.50
12	8.5	1.25	100	0.90
13	9	0.25	70	0.65

Príloha B

Dáta k príkladu o bankách

	Vstupy		Výstupy		
DMU	prevádzkové náklady (v tis. €)	# zamestnancov	úvery (v tis. €)	vklady (v tis. €)	# bankomatov
1	186 055	2 239	7 115 588	6 278 268	270
2	4 728	127	145 424	224 273	0
3	41 532	686	1 124 840	1 120 371	158
4	88 043	1 344	2 468 821	3 595 201	186
5	55 071	866	3 054 489	3 087 787	296
6	13 144	192	381 914	547 637	0
7	41 738	400	2 227 112	2 789 698	0
8	281 101	4 105	13 008 000	13 653 000	801
9	15 362	200	286 675	183 513	0
10	240 841	3 858	10 269 773	10 928 189	325
11	227 971	3 809	13 324 663	11 055 766	592
12	6 413	257	348 318	384 433	0

Príloha C

DMU_o	E_o^*	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3
1	0,8528 ^b	0	0,6730	0,5248	0	0,0823
2	1	16,3217	2,7242	1,5546	1,6769	1,8364
3	0,7609 ^b	2,4118	0	0	0	0,8968
4	0,7112 ^b	1,1377	0	0	1,0302	0,0614
5	1	1,0712	0,7153	0,1937	0,2050	1,0122
6	0,8407 ^b	0	7,8485	0	2,4871	0,5401
7	1	0,1680	3,5036	0,5962	2,2431	0,1459
8	1	0,1589	0,2034	0,8781	1,4995	3,6813
9	0,7276 ^b	0	7,5346	2,9374	0	0,4293
10	0,9179 ^b	0,4159	0	0	0,4105	0
11	1	0,2787	0,1447	7,7756	0,3443	0,2261
12	1	14,9466	0,2525	5,6368	1,8991	0,7779

Tabuľka 12: Efektivity bánk bez použitia dodatočných ohraničení na váhy - BCC-I

DMU_o	E_o^*	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3
1	0,8663 ^b	0	0,6894	0,6296	0	0
2	1	38,0449	22,5078	10,9687	12,8838	7,0677
3	0,7301 ^b	3,7275	0	0	0	1,3861
4	0,7524 ^b	1,2964	0	0	1,1740	0,0700
5	1	0,7586	0,6593	0,0971	0,0960	0,6420
6	0,6772 ^b	12,1810	1,0148	0	8,1940	0,3524
7	1	0,2165	4,0934	0,2391	1,4173	0,2114
8	1	0,0399	0,0440	0,0679	0,0947	0,1407
9	0,4083 ^b	0	40,0823	15,6262	0	2,7917
10	0,9241 ^b	0,4160	0	0	0,4106	0
11	1	0,1713	0,0434	0,3056	0,0238	0,0120
12	1	25,9847	0,5111	10,7506	1,9152	1,2733

Tabuľka 13: Efektivity bánk bez použitia dodatočných ohraničení na váhy - BCC-O

DMU_o	E_o^*	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3
1	0,9267 ^b	0	0,3222	0,2513	0	0,0394
2	1	14,9250	2,3008	1,2883	1,1962	1,5456
3	0,8633 ^b	1,2910	0	0	0	0,4801
4	0,8573 ^b	0,5185	0	0	0,4696	0,0280
5	1	0,4028	0,2879	0,0747	0,0739	0,3783
6	0,8815 ^b	0	5,6439	0	1,7885	0,4313
7	1	0,1217	1,6104	0,3214	0,5823	0,0934
8	1	0,0117	0,0125	0,0649	0,0842	0,1335
9	0,7805 ^b	0	5,7578	2,2447	0	0,3507
10	0,9598 ^b	0,1994	0	0	0,1969	0
11	1	0,0448	0,0153	0,2585	0,0198	0,0153
12	1	9,6715	0,1346	3,3648	1,1231	0,5132

Tabuľka 14: Efektivity bánk bez použitia dodatočných ohraničení na váhy - HM

DMU_o	E_o^*	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3
1	0,8297	0,1077	0,1681	0,1205	0,0984	0,0455
2	1	10432	8948	2209,4	1862,8	4744,4
3	0,7362	0,4824	0,4393	0,2003	0,1919	0,1519
4	0,7552	0,2275	0,2242	0,1503	0,2102	0,0723
5	1	24,435	24,523	14,006	15,051	13,89
6	0,6596	1,5258	1,5697	0,8928	0,7579	0,3502
7	1	980,41	21837	680,74	8195,5	4479,8
8	1	7,8442	9,8937	5,9162	8,5619	6.6417
9	0,4903	1,3041	1,5069	1,1183	0,4114	0.3002
10	0,8421	0,0943	0,0781	0,0647	0,0711	0.0301
11	1	17,561	9,6201	16,962	7,7211	4.9794
12	1	25523	273,51	8791	1831,4	4441,4

Tabuľka 15: Efektivity bánk bez použitia dodatočných ohraničení na váhy - RM

Príloha D

DMU_o	E_o^*	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3
1	0,8500 ^b	0	0,6730	0,4537	0,0877	0,0877
2	1	14,2671	3,8750	3,4622	1,7525	0,5678
3	0,6496	0,1375	2,0715	0,4111	0,4111	0,4111
4	0,6051 ^b	1,1377	0	0,4748	0,4748	0,0238
5	1	1,1819	0,6094	0,6133	0,4869	0,4530
6	0,8327 ^b	0	7,8485	1,3719	1,3719	0,3953
7	1	0,2166	3,4273	1,8580	1,1936	0,0759
8	1	0,1874	0,1741	6,8339	3,9666	1,5201
9	0,7276 ^b	0	7,5346	2,9374	0	0
10	0,8381 ^b	0,0722	0,3228	0,2001	0,2001	0
11	1	0,2516	0,1690	13,5641	0,8995	0,1660
12	1	14,9959	0,2340	5,9522	2,3258	0,4012

Tabuľka 16: Efektivity bánk s použitím dodatočných ohraničení na výstupné váhy - BCC-I

DMU_o	E_o^*	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3
1	0,8663 ^b	0	0,6894	0,6296	0	0
2	1	39,8316	28,9797	16,5752	9,2421	4,2167
3	0,6075 ^b	4,2962	0	0,8182	0,8182	0,8182
4	0,6354	0,5351	0,9715	0,6417	0,6417	0,1557
5	1	1,0382	0,5553	0,4902	0,3677	0,3054
6	0,6499	12,5067	2,0898	4,8240	4,8240	0,3173
7	1	0,1831	4,1351	1,3075	0,5629	0,1308
8	1	0,0323	0,0423	0,1448	0,1050	0,0711
9	0,4083 ^b	0	40,0823	15,6262	0	0
10	0,8539 ^b	0,0763	0,3412	0,2115	0,2115	0
11	1	0,2008	0,0401	0,2730	0,0565	0,0180
12	1	24,9870	0,5033	8,9747	3,5271	1,3883

Tabuľka 17: Efektivity bánk s použitím dodatočných ohraničení na výstupné váhy - BCC-O

DMU_o	E_o^*	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3
1	0,9266 ^b	0	0,3149	0,2876	0	0
2	1	15,2152	1,7799	2,3112	1,1362	0,4601
3	0,7882 ^b	1,2670	0	0,2413	0,2413	0,2413
4	0,7857 ^b	0,5489	0	0,2291	0,2291	0,0115
5	1	0,5177	0,2712	0,2832	0,2072	0,1656
6	0,8738 ^b	0	5,7186	0,9996	0,9996	0,2190
7	1	0,1160	1,6097	0,6398	0,3319	0,0618
8	1	0,0104	0,0113	0,1651	0,0989	0,0436
9	0,7805 ^b	0	5,7578	2,2447	0	0
10	0,9202 ^b	0,0341	0,1524	0,0945	0,0945	0
11	1	0,0296	0,0154	0,2677	0,0321	0,0069
12	1	9,4954	0,1539	3,3293	1,2483	0,3130

Tabulka 18: Efektivita bank s použitím dodatočných ohraničení na výstupné váhy - HM

DMU_o	E_o^*	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3
1	0,8297	0,1077	0,1681	0,1205	0,0984	0,0455
2	1	19268	13101	4503,1	4486,4	4432,6
3	0,7362	0,4824	0,4393	0,2003	0,1919	0,1519
4	0,7529	0,2275	0,2242	0,1784	0,1784	0,0776
5	1	28,33	28,466	23,344	16,282	10,462
6	0,6596	1,5258	1,5697	0,8928	0,7579	0,3502
7	1	1139,2	24061	5845,3	4937,7	4458,8
8	1	6,4242	10,67	9,461	7,1358	4,4503
9	0,4903	1,3041	1,5069	1,1183	0,4114	0,3002
10	0,8417	0,0904	0,0781	0,0654	0,0654	0,0315
11	1	16,456	9,2592	16,099	8,2709	3,76
12	1	28741	447,81	7746,6	5363,3	4478,6

Tabulka 19: Efektivita bank s použitím dodatočných ohraničení na výstupné váhy - RM

Príloha E

DMU_o	E_o^*	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3
1	0,8478	0,0066	0,6647	0,4532	0,0866	0,0866
2	1	13,6721	4,2082	2,9373	1,6023	0,6856
3	0,6496	0,1375	2,0715	0,4111	0,4111	0,4111
4	0,6046	1,1263	0,0113	0,4749	0,4749	0,0253
5	1	1,1589	0,6314	0,6276	0,5108	0,4625
6	0,8314	0,0777	7,7685	1,3856	1,3856	0,3337
7	1	0,2670	3,3481	1,8149	1,2385	0,0745
8	1	0,1433	0,2195	69,5668	40,6075	14,0253
9	0,7247 ^b	0,0745	7,4485	2,9630	0	0
10	0,8381 ^b	0,0722	0,3228	0,2001	0,2001	0
11	1	0,1852	0,2289	145,5518	9,2799	1,6385
12	1	14,5385	0,4057	7,5653	1,8982	0,3656

Tabuľka 20: Efektivity bánk s použitím dodatočných ohraničení na váhy - BCC-I

DMU_o	E_o^*	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3
1	0,8641 ^b	0,0064	0,6433	0,3901	0,2718	0
2	1	584,7653	17,7634	17,7396	8,4858	4,8020
3	0,6073	4,2547	0,0425	0,8182	0,8182	0,8182
4	0,6354	0,5351	0,9715	0,6417	0,6417	0,1557
5	1	0,7795	0,7795	0,6863	0,3807	0,1998
6	0,6499	12,5067	2,0898	4,8240	4,8240	0,2580
7	1	0,9761	2,5890	1,3307	0,5444	0,1582
8	1	0,0504	0,0405	0,1363	0,1049	0,0779
9	0,4078 ^b	0,3928	39,2811	15,6262	0	0
10	0,8539 ^b	0,0763	0,3412	0,2115	0,2115	0
11	1	0,1648	0,0610	0,2681	0,0649	0,0158
12	1	24,4583	0,5997	9,6097	2,9507	1,2082

Tabuľka 21: Efektivity bánk s použitím dodatočných ohraničení na váhy - BCC-O

DMU_o	E_o^*	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3
1	0,9254 ^b	0,0031	0,3113	0,2866	0	0
2	1	14,3188	2,3292	2,2457	1,0991	0,4422
3	0,7882	1,2539	0,0125	0,2411	0,2411	0,2411
4	0,7857	0,5427	0,0054	0,2288	0,2288	0,0122
5	1	0,4750	0,3309	0,2931	0,2032	0,1546
6	0,8731	0,0564	5,6425	1,0064	1,0064	0,2584
7	1	0,1910	1,4684	0,6263	0,3527	0,0517
8	1	0,0193	0,0214	0,1533	0,0937	0,0430
9	0,7786 ^b	0,0567	5,6738	2,2571	0	0
10	0,9202 ^b	0,0341	0,1524	0,0945	0,0945	0
11	1	0,0443	0,0263	0,2439	0,0347	0,0079
12	1	8,9770	0,3466	3,7735	0,8490	0,2489

Tabulka 22: Efektivita bank s použitím dodatočných ohraničení na váhy - HM

DMU_o	E_o^*	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3
1	0,8297	0,1077	0,1681	0,1205	0,0984	0,0455
2	1	32238	456,82	7074	5953,7	5187
3	0,7362	0,4824	0,4393	0,2003	0,1919	0,1519
4	0,7529	0,2275	0,2242	0,1784	0,1784	0,0776
5	1	427,78	6,3562	164,72	121,51	83,759
6	0,6596	1,5258	1,5697	0,8928	0,7579	0,3502
7	1	83946	12072	36109	33392	4417,8
8	1	95,071	3,3321	68,296	54,403	36,755
9	0,4903	1,3041	1,5069	1,1183	0,4114	0,30002
10	0,8417	0,0904	0,0781	0,0654	0,0654	0,0315
11	1	155,38	3,4903	98,918	59,708	26,84
12	1	36395	463,23	10689	7475,7	4807,9

Tabulka 23: Efektivita bank s použitím dodatočných ohraničení na váhy - RM