UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OPTIMALIZÁCIA PORTFÓLIA S OHRANIČENÍM NA RIZIKO

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2020 Bc. Jakub KANDRIČÁK

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OPTIMALIZÁCIA PORTFÓLIA S OHRANIČENÍM NA RIZIKO

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2020

Bc. Jakub KANDRIČÁK

72733844

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jakub Kandričák
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Optimalizácia portfólia s ohraničením na riziko
Portfolio optimization with risk constraint

Anotácia: Práca sa bude zaoberať modelmi, v ktorých sa maximalizuje očakávaná užitočnosť hodnoty portfólia, pričom je zhora ohraničené riziko. Okrem prehľadu existujúcich modelov sa zameriame na dotiahnutie detailov dôkazov v modeli s rizikovou mierou Value-at-Risk a v modeli zaistenia portfólia.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Dátum zadania: 08.01.2019

Dátum schválenia: 08.01.2019 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Poďakovanie Veľmi sa chcem poďakovať školiteľovi doc. Mgr. Igorovi Melicherčíkovi PhD. za jeho prístup, ochotu, komunikáciu a rady pri tvorbe tejto diplomovej práce. Ďalej sa chcem poďakovať mame a priateľke za ich podporu a vytvorenie priestoru na písanie tejto práce a ďakujem sestre za cenné rady pri úprave diplomovej práce.

Abstrakt

KANDRIČÁK, Jakub: Optimalizácia portfólia s ohraničením na riziko [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, školiteľ: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2020, 46 s.

V predkladanej diplomovej práci sa venujeme úlohám optimalizácie portfólia na konečnom časovom horizonte. V práci stručne popisujeme predpoklady a kľúčové pojmy pri optimalizácii portfólia. Zaoberáme sa úlohou nezaisteného investora, ale aj úlohami s rizikovými ohraničeniami ako sú úloha VaR-RM investora a úloha zaistenie portfólia. Zameriavame sa najmä na dotiahnutie detailov dôkazov v úlohách optimalizácie portfólia. Taktiež definujeme úlohu maximálnej dolnej hranice pri úlohe VaR-RM investora.

Kľúčové slová: Riziková miera, Optimalizácia portfólia, Mertonova úloha, Rizikové ohraničenie, Value at Risk, Úloha Var-RM investora, Dolná hranica, Zaistenie portfólia, Optimálna stratégia

Abstract

KANDRIČÁK, Jakub: Portfolio optimalization with risk constraint [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2020, 46 p.

The main focus of this thesis is on portfolio optimization problems related to a finite time horizon. In the thesis, we also briefly describe assumptions and the key concepts of portfolio optimization. We deal with Merton problem, VaR-RM problem and Portfolio insurance problem, with the main focus on finalising the details of the proofs associated with portfolio optimization problems. We also define the maximum floor problem for VaR-RM problem.

Keywords: Risk measure, Portfolio optimization, Merton problem, Risk constrain, Value at Risk, VaR-RM problem, Floor, Portfolio insurer, Optimal strategy

Obsah

Úvod

Optimalizácia rozloženia portfólia má bohatú históriu. Jednou z prvých bola práca Mertona [10], kde uviedol spojitú úlohu stochastického programovania, ktorá je základom výskumu v oblasti optimalizácie portfólia. Merton nadviazal na prácu Samuelsona [12] z roku 1969, ktorý úlohu optimalizácie portfólia uviedol ako diskrétnu úlohu stochastického dynamického programovania [5].

V ďalších prácach autori začali merať riziko portfólia pridávaním rizikových ohraničení k základnej Mertonovej úlohe. Postupne sa do popredia dostávala riziková miera VaR, ktorá sa pre svoju jednoduchosť stala v praxi štandardom. V práci [1] autori definovali základné axiómy rizikových mier, kde popísali aj vlastnosti koherentných rizikových mier. Tu nastal zlom v používaní rizikovej miery VaR.

Basak a Shapiro vo svojej práci [2] z roku 2001 uviedli problematické vlastnosti rizikovej miery VaR. Okrem iného uvádzajú, že táto riziková miera nie je koherentná ako aj to, že disperzia sa pri používaní VaR pri optimalizácii portfólia zvyšuje v zlých časoch. Pri používaní tejto miery sa pri optimalizácii portfólia dosahujú nižšie hodnoty výplatnej funkcie v zlých stavoch ako pri modeli nezaisteného investora, pretože pre investora optimalizujúceho pomocou VaR sú príliš drahé, aby sa proti nim zabezpečil [2].

Po uverejnení danej práce, sa touto problematikou začalo zaoberať viac autorov. Vzniklo viacero prác, napr. [4], v ktorej sa začali používať iné rizikové miery na meranie rizika. Rovnako aj Basak a Shapiro [2] navrhli novú rizikovú mieru LEL, ktorá ohraničovala očakávanú stratu.

Optimalizácii hodnoty portfólia pri ohraničenej očakávanej strate sa venovali aj Gabih, Sass a Wunderlich [4] pomocou rizikovej miery EL. Oproti VaR, rizikové miery LEL a EL berú do úvahy nielen pravdepodobnosť straty, ale aj jej výšku. Avšak rovnako ako VaR nie sú tieto miery koherentné.

Palmquist a Uryasev [7] navrhli rizikovú mieru AVaR, ktorá rieši problém koherentnosti a kontroly výšky strát. Kvôli týmto dobrým vlastnostiam sa stala táto miera obľúbená vo výskume, v ktorom sa skúmajú vlastnosti optimálnych riešení a optimálnej stratégie [5].

Naďalej sa riziková miera VaR najviac používa v praxi, a to aj v nariadeniach daných regulátorom. Avšak po poslednej hospodárskej kríze sa začala riešiť otázka zmeny prístupu k používaniu tejto rizikovej miery.

Hlavným cieľom predkladanej diplomovej práce je dotiahnutie dôkazov publikovaných vo významných prácach v oblasti optimalizácie portfólia. Snažíme sa to dosiahnuť pútavou formou a rovnako spracovať úlohy optimalizácie pre čitateľa tak, aby ho táto práca zaujala.

Ďalšími cieľmi diplomovej práce je vysvetlenie základných pojmov, stručné objasnenie predpokladov, ako aj jasné odvodenie používaných výrazov. To sa snažíme podať komplexne, ale zároveň v čo najjednoduchšej forme, aby to bolo pre čitateľa zrozumiteľné. Súčasne dbáme na matematickú korektnosť jednotlivých tvrdení.

Úvodom diplomovej práce sa venujeme predpokladom a základným pojmom v oblasti optimalizácie portfólia. Ďalej sa zaoberáme základnou Mertonovou úlohou, ktorú používame ako benchmark v ďalších kapitolách. Taktiež uvádzame stručný prehľad jednotlivých, v praxi najpoužívanejších, rizikových ohraničení pri optimalizácii portfólia. V hlavnej časti práce sa zaoberáme vlastnosťami, optimálnymi riešeniami a dopĺňaním dôkazov v úlohe VaR-RM investora a úlohe zaistenia portfólia.

1 Všeobecné predpoklady modelov

V tejto kapitole sme sa zaoberali popisom všeobecných predpokladov, ktoré sú totožné pre všetky základné úlohy smerované na optimalizáciu portfólia. Vychádzali sme hlavne z [8] a [11]. Avšak základné predpoklady a nastavenia sme čerpali aj z [2], ale aj z ďalších zdrojov [5] a [4].

1.1 Predpoklady

Uvažujme trh s n rizikovými aktívami (napr. akcie) a jediným bezrizikovým aktívom (bezrizikový dlhopis). Nech je tento trh likvidný, čo znamená, že môžeme nakúpiť a predať ľubovoľné množstvo aktív za trhové ceny, aj neceločíselné. Uvažujme konečný časový horizont $[0, T]$, ktorý si zvolí investor [2].

Ďalej predpokladajme, že na tomto intervale sa cena rizikových aktív riadi Itôvým procesom, kde pohyb ceny i-tej akcie je zadaný stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dS_t^i = S_t^i(\mu_t^i dt + \sigma_t^i dw_t),^1 \tag{1}$$

pričom $S_0^i > 0$ a proces w_t je štandardný n-rozmerný Brownov pohyb na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ s filtráciou $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ generovanou Brownovým pohybom w. Procesy μ_t^i a σ_t^i sú ohraničené, adaptované procesy na $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ s hodnotami v $\mathbb{R}$, resp. v $\mathbb{R}^n$[8].

Cena bezrizikového aktíva, je v čase t popísaná rovnicou

$$dB_t = B_t r_t dt, \tag{2}$$

kde $r_t \geq 0$ je ohraničený adaptovaný proces úrokovej miery [8]. Pre zjednodušenie predpokladáme, že na začiatku časového horizontu je cena aktíva rovná 1, takže $B_0 = 1$. Použitím Itôvej lemy sa dá ľahko dostať, že $B_t = \exp\left(\int\limits_0^t r_s ds\right)$.

Za účelom, aby trh, ktorý uvažujeme, bol úplný bez možnosti arbitráže, predpokladáme, že matica σ_t, ktorej i-ty riadok je σ_t^i, je regulárna [8, str. 3] pre každý čas $t \in [0, T]$ a zároveň proces

$$\kappa_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t \mathbb{1}),$$

[1]V celej práci index t vyjadruje čas t.

kde $\mathbb{1}$ je vektor samých jednotiek, je ohraničený adaptovaný proces. Tento proces nazývame aj trhová cena rizika.

Podľa [11, Kapitola 10.2], proces η_t pre $t \in [0, T]$ definovaný ako

$$\eta_t = \exp\left(-\int_0^t \kappa_s dw_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\kappa_s\|^2 ds\right), \tag{3}$$

kde $\|\kappa_t^2\| = \kappa_t^\intercal \kappa_t$, je $\mathbb{P}$-martingal. Navyše, podľa [11, Tvrdenie 10.2.1] existuje jediná rizikovo-neutrálna miera $\mathbb{Q}$ pre odúročené ceny rizikových aktív S_t^i/B_t, $i = 1, \ldots, N$, pre $t \in [0, T]$ a Radon-Nikodymova derivácia rizikovo-neutrálnej miery $\mathbb{Q}$ vzhľadom na reálnu pravdepodobnostnú mieru $\mathbb{P}$ je

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \eta_T = \xi_T B_T, \tag{4}$$

kde podľa [2, str. 375] je zmena $\xi_t = B_t^{-1}\eta_t$ pre $t \in [0, T]$ popísaná stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$d\xi_t = -\xi_t r_t dt - \xi_t \kappa_t dw_t$$

s počiatočnou podmienkou

$$\xi_0 = 1. \tag{5}$$

Použitím Itôvej lemy sa dá ľahko ukázať, že

$$\xi_t = \xi_0 \exp\left(-\int_0^t r_s ds - \int_0^t \kappa_s dw_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\kappa_s\|^2 ds\right). \tag{6}$$

Ďalej sme si označili hodnotu nášho portfólia v čase t ako W_t. Investor má v čase t investované prostriedky v jednotlivých aktívach a snaží sa maximalizovať svoj celkový úžitok z hodnoty výplatnej funkcie W_T v čase T.

Podľa [11, Definícia 10.2.1] je trh úplný, ak každá $\mathcal{F}_T$-merateľná, $\mathbb{Q}$-integrovateľná a zdola ohraničená náhodná premenná W_T môže byť replikovaná prípustnou investičnou stratégiou φ_t, pre $t \in [0, T]$. Podľa [11, Definícia 10.1.7] je prípustná stratégia adaptovaná, samofinancovaná a hodnota portfólia W_t v čase $t \in [0, T]$ replikujúceho W_T je zdola ohraničená pre $\forall t \in [0, T]$. Naše predpoklady implikujú podľa [11, Tvrdenie 10.2.1], že trh popísaný rovnicami (1)-(2) je úplný.

Vďaka tomu, že máme úplný trh, tzn. že vieme každú výplatnú funkciu replikovať pomocou dynamickej samofinancovanej stratégie z aktív S_t a B_t, pričom platí [9]:

$$\begin{aligned} W_t &= \varphi_t^\top S_t + \psi_t B_t, \\ dW_t &= \varphi_t^\top dS_t + \psi_t dB_t \\ &= \varphi_t^\top S_t(\mu_t dt + \sigma_t dw_t) + \psi_t B_t r_t dt. \end{aligned} \tag{7}$$

kde φ_t je vektor počtov jednotlivých rizikových aktív v portfóliu a ψ_t je počet bezrizikových aktív pre samofinancovaciu stratégiu [8].

Ak $W_t > 0$ potom môžeme definovať proces stratégie θ_t, kde jednotlivé zložky

$$\theta_t^i = \frac{\varphi_t^i S_t^i}{W_t}$$

sú dané ako hodnota podielu i-tej akcie na hodnote portfólia v každom čase $t \in [0, t]$. Pomocou stratégie θ_t môžeme hodnotu portfólia zapísať

$$W_t = W_t \theta_t^\top + W_t(1 - \theta_t^\top \mathbb{1}),$$

kde $1 - \theta_t^\top \mathbb{1} = \frac{\psi_t B_t}{W_t}$. Zmenu hodnoty výplatnej funkcie W_t v čase t, rovnica (7), sa dá rovnako zapísať pomocou stratégie θ_t

$$dW_t = W_t \theta_t^\top (\mu_t dt + \sigma_t dw_t) + W_t(1 - \theta_t^\top \mathbb{1}) r_t dt. \tag{8}$$

Cieľom investora je určiť investičnú stratégiu θ_t, t.j. podiely v jednotlivých aktívach, ktorá maximalizuje jeho úžitok a v každom čase popisuje podiely portfólia v jednotlivých rizikových aktívach.

Hodnota replikovaného portfólia W_t v čase $t \in [0, T]$ sa dá pre každú $\mathcal{F}_T$-merateľnú funkciu W_T zdola ohraničenú a $\mathbb{Q}$-integrovateľnú podľa [11, Tvrdenie 10.1.2] vypočítať ako

$$B_t^{-1} W_t = E_{\mathbb{Q}}[B_T^{-1} W_T | \mathcal{F}_t]. \tag{9}$$

Rovnicu (9) možno prepísať pomocou Radon-Nikodymovej derivácie (4) na

$$\xi_t W_t = E_{\mathbb{P}}[\xi_T W_T | \mathcal{F}_t].$$

Z toho vyplýva, že hodnotu výplatnej funkcie vypočítame

$$W_t = \frac{1}{\xi_t} E_{\mathbb{P}}[\xi_T W_T | \mathcal{F}_t].$$

Z tejto rovnice a z (5) vyplýva

$$W_0 = E_{\mathbb{P}}[\xi_T W_T | \mathcal{F}_t].$$

Funkciu užitočnosti, budeme ju označovať $u(x)$, predpokladáme [2, str. 375-376] spojitú, dvakrát diferencovateľnú, rastúcu a konkávnu funkciu, ktorá zároveň spĺňa Inadiho podmienky [4]: $\lim_{x \to 0} u'(x) = \infty$ a $\lim_{x \to \infty} u'(x) = 0$. Zároveň ďalej v práci predpokladáme $r_t = r$ a $\kappa_t = \kappa$.

2 Úloha nezaisteného investora

V tejto kapitole sme uvažovali investora, ktorý chce maximalizovať očakávanú hodnotu svojho portfólia bez rizikových ohraničení. T.j. takého investora, ktorý hľadá stratégiu zo všetkých stratégií, ktorá by maximalizovala jeho úžitok. Táto úloha sa volá aj Mertonova úloha[4].

V tejto kapitole sme sa zamerali aj na prehľadné postupy vyjadrení optimálnej hodnoty portfólia v čase t, ako aj optimálnej stratégie, ktorých hodnoty sú uvedené, napr. v [2].

2.1 Mertonova úloha

Jediným ohraničením je pre nášho investora výška kapitálu, ktorú môže investovať na začiatku. Z toho, že odúročená hodnota výplatnej funkcie $[B_T^{-1}W_T]$ je $\mathbb{Q}$–martingal [9, str. 170] vyplýva, že stredná hodnota výplatnej funkcie na konci časového horizontu musí byť menšia nanajvýš rovná hodnote kapitálu investora na začiatku tohto horizontu. Voľne povedané, môže investovať maximálne toľko, koľko má na začiatku.

Túto úlohu môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \max_{\forall \text{stratégie}} \quad & E_{\mathbb{P}}\left[u(W_T)\right] \\ & E_{\mathbb{Q}}[B_T^{-1}W_T] \leq W_0. \end{aligned} \tag{10}$$

Podľa (3) a (4) môžeme nerovnicu v úlohe (10) prepísať do tvaru

$$E_{\mathbb{Q}}[B_T^{-1}W_T] = E_{\mathbb{P}}[\xi_T W_T] \leq W_0. \tag{11}$$

Keďže náš trh je úplný, tak maximalizácia cez stratégie je ekvivalentná maximalizácii cez výplatné funkcie. Spojením (10) a (11) dostávame výslednú úlohu nezaisteného investora [5, str.23]

$$\begin{aligned} \max_{W_T} \quad & E_{\mathbb{P}}[u(W_T)] \\ & E_{\mathbb{P}}[\xi_T W_T] \leq W_0. \end{aligned} \tag{12}$$

Riešenie tejto úlohy je uvedené napr. v [5] a [2] a my ho uvádzame v nasledujúcej vete.

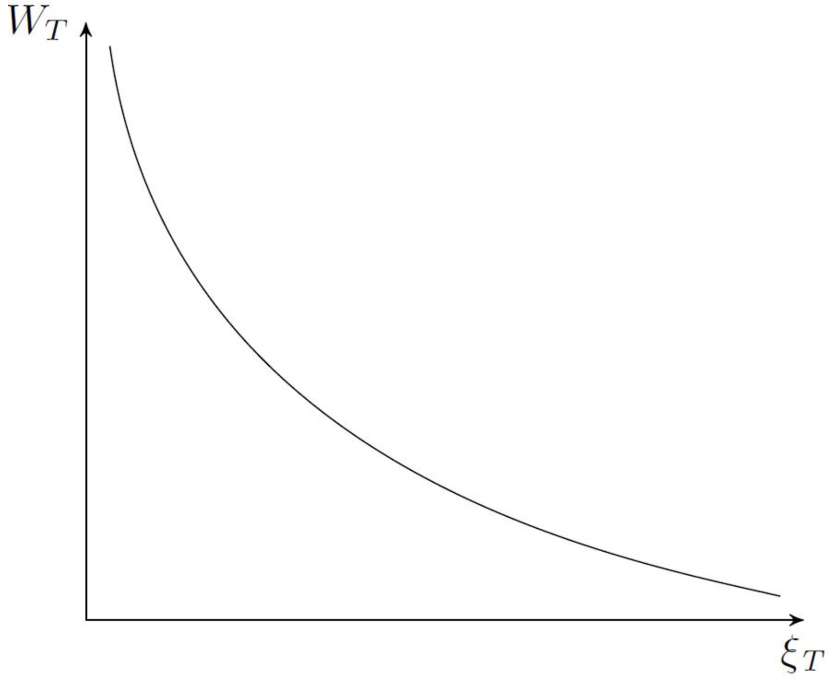
Veta 2.1 (Riešenie úlohy nezaisteného investora, [10])**.** *Riešením úlohy nezaisteného investora, definovanej v (12), je výplatná funkcia*

$$\hat{W}_T^M(\xi_T, y) = I(y\xi_T),$$

kde $I(.)$ je inverzná funkcia prvej derivácie funkcie užitočnosti $u(.)$ a $y \geq 0$ je riešením rovnice

$$E\left[\xi_T \hat{W}_T^M(\xi_T, y)\right] = W_0.$$

Dôkaz je uvedený napr. v [5, str. 23]. Tvar optimálneho riešenia Mertonovej úlohy môžeme vidieť na Obr. 1.



Obr. 1: Optimálne riešenie úlohy nezaisteného investora.

2.2 Optimálna hodnota portfólia v čase t

Nech $r_t = r$ a $\kappa_t = \kappa$ sú konštanty. Za tohto predpokladu sme odvodili optimálnu hodnotu portfólia pre každý čas $t \in [0, T]$. V Kapitole 1 sme uviedli hodnotu portfólia v tvare

$$W_t = \frac{1}{\xi_t} E[\xi_T W_T | \mathcal{F}_t].$$

Použitím funkcie užitočnosti v tvare $u(x) = \frac{x^p}{p}$ a dosadením optimálneho riešenia z

Vety 2.1 sme dostali

$$\begin{aligned} W_t &= \frac{1}{\xi_t} E\left[\xi_T \xi_T^{\frac{1}{p-1}} y^{\frac{1}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \frac{1}{\xi_t} E\left[\xi_T^{\frac{p}{p-1}} y^{\frac{1}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \frac{y^{\frac{1}{p-1}}}{\xi_t} E\left[\xi_T^{\frac{p}{p-1}} \middle| \xi_t\right], \end{aligned} \tag{13}$$

kde sme poslednú rovnosť dostali z toho, že ξ_t je nositeľom všetkých informácií do času t [8, str. 10]. Vyjadrením ξ_T pomocou ξ_t

$$\xi_T = \xi_t \exp\left(-\left(r + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2\right)(T-t) - \kappa(w_T - w_t)\right)$$

a následným dosadením do (13) sme dostali

$$W_t = \frac{y^{\frac{1}{p-1}}}{\xi_t} E\left[\xi_t^{\frac{p}{p-1}} \exp\left(\frac{p}{p-1}\left(-\left(r + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2\right)(T-t) - \kappa(w_T - w_t)\right)\right)\right].$$

Tento výraz sme si upravili do tvaru

$$W_t = (y\xi_t)^{\frac{1}{p-1}} \exp\left(-\frac{p}{p-1}\left(r + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2\right)(T-t)\right) E\left[\exp\left(-\frac{p}{p-1}\kappa(w_T - w_t)\right)\right],$$

kde sme si vybrali všetky nenáhodné členy pred strednú hodnotu. Takže nám zostal jediný náhodný člen v strednej hodnote, ktorý má lognormálne rozdelenie, kde

$$-\frac{p}{p-1}\kappa(w_T - w_t) \sim N\left(0, \left(\frac{p}{(p-1)}\|\kappa\|\right)^2 (T-t)\right).$$

Použitím známeho vzorca na výpočet strednej hodnoty náhodnej premennej s lognormálnym rozdelením sme dostali

$$E\left[\exp\left(-\frac{p}{p-1}\kappa(w_T - w_t)\right)\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2(p-1)}\|\kappa\|\right)^2 (T-t)\right).$$

Spojením predchádzajúcich výsledkov sme dostali optimálnu hodnotu portfólia W_t

$$W_t = (y\xi_t)^{\frac{1}{p-1}} \exp\left[\frac{p}{p-1}\left(\left(\frac{\|\kappa\|^2}{2(p-1)} - r\right)(T-t)\right)\right]. \tag{14}$$

2.3 Optimálna stratégia v čase t

Optimálnu stratégiu pre úlohu nezaisteného investora sme vypočítali pomocou diferenciálu optimálnej hodnoty portfólia v čase t (14), ktorú sme si označili ako funkciu $W_t = g(t, \xi_t)$. Pomocou Itôvej lemy sme dostali diferenciál

$$dW_t = \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial \xi_t}d\xi_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial \xi_t^2}\|V\|^2 dt, \tag{15}$$

kde

$$
\begin{aligned}
d\xi_t &= -\xi_t r dt - \xi_t \kappa^T dw_t, \\
g &= (y\xi_t)^{\frac{1}{p-1}} \exp\left[\frac{p}{p-1}\left(\left(\frac{\|\kappa\|^2}{2(p-1)} - r\right)(T-t)\right)\right], \\
V &= \xi_t \kappa^T
\end{aligned}
$$

a jednotlivé parciálne derivácie sú

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial t} &= -g\frac{p}{p-1}\left(\frac{\|\kappa\|^2}{2(p-1)} - r\right), \\
\frac{\partial g}{\partial \xi_t} &= -g\frac{1}{\xi_t} + g\left[\frac{p}{p-1}\frac{1}{\xi_t}\right] = g\frac{1}{\xi_t}\left[\frac{1}{p-1}\right], \\
\frac{\partial^2 g}{\partial \xi_t^2} &= \frac{\partial g}{\partial \xi_t}\frac{1}{\xi_t}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{\xi_t^2}g\frac{1}{p-1} = g\frac{1}{\xi_t^2}\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{p-1} - 1\right] = g\frac{1}{\xi_t^2}\frac{1}{p-1}\left[\frac{2-p}{p-1}\right].
\end{aligned}
$$

Dosadením do (15) sme dostali

$$
dW_t = -g\frac{p}{p-1}\left(\frac{\|\kappa\|^2}{2(p-1)} - r\right)dt - g\frac{1}{\xi_t}\left[\frac{1}{p-1}\right]d\xi_t + \frac{1}{2}\xi_t^2\|\kappa\|^2 g\frac{1}{\xi_t^2}\frac{1}{p-1}\left[\frac{2-p}{p-1}\right]dt
$$

a následnými úpravami sme dostali

$$
\begin{aligned}
dW_t &= g\frac{1}{1-p}\left(\|\kappa\|^2\frac{p}{2(p-1)} - pr - \|\kappa\|^2\frac{2-p}{2(p-1)}\right)dt \\
&\quad + g\frac{1}{\xi_t}\left[\frac{1}{1-p}\right]\left(\xi_t r dt + \xi_t \kappa^T dw_t\right) \\
&= g\frac{1}{1-p}\left(\|\kappa\|^2\frac{p}{2(p-1)} - pr - \|\kappa\|^2\frac{2-p}{2(p-1)} + r\right)dt + g\frac{1}{1-p}\kappa^T dw_t \\
&= g\frac{1}{1-p}\left(\|\kappa\|^2\frac{2(p-1)}{2(p-1)} + (1-p)r\right)dt + g\frac{1}{1-p}\kappa^T dw_t \\
&= g\frac{1}{1-p}\left(\|\kappa\|^2 + r\right)dt + g\frac{1}{1-p}\kappa^T dw_t.
\end{aligned}
$$

Po dosadení optimálnej výplatnej funkcie za funkciu g sme dostali

$$
dW_t = W_t\frac{1}{1-p}\left(\|\kappa\|^2 + r\right)dt + W_t\frac{1}{1-p}\kappa^T dw_t
$$

a následne po dosadení za κ

$$
\begin{aligned}
dW_t &= W_t\frac{1}{1-p}\left(\kappa^T\sigma^{-1}(\mu - r\mathbb{1}) + r\right)dt + W_t\frac{1}{1-p}\kappa^T dw_t \\
&= W_t\frac{1}{1-p}\kappa^T\sigma^{-1}(\mu dt + \sigma dw_t) + W_t\left(1 - \frac{1}{1-p}\kappa^T\sigma^{-1}\mathbb{1}\right)r dt.
\end{aligned}
$$

Porovnaním s rovnicou (8) sme dostali, že optimálna stratégia je rovná $\theta = \frac{1}{1-p}\sigma^{-1}\kappa$.

3 Mertonova úloha s pridanými rizikovými ohraničeniami

V tejto kapitole sme sa zaoberali modifikáciami Mertonovej úlohy pridaním rizikových ohraničení. Pozreli sme sa na v aplikáciách najviac používané rizikové ohraničenia. Rovnako sme sa pozreli aj na výhody a nevýhody jednotlivých mier na meranie rizika.

Podkapitola 3.1 je spracovaná podľa [2] a [5], podkapitola 3.3 podľa [4] a podkapitola 3.4 podľa [8].

3.1 Úloha VaR-RM investora

Majme investora, ktorý okrem maximalizovania hodnoty portfólia, ako v úlohe nezaisteného investora (12), má navyše požiadavku na svoje portfólio, aby hodnota celého portfólia, s nejakou pravdepodobnosťou, nespadla pod ním uvedenú hranicu.

Takže dostávame ohraničenie

$$\mathbb{P}(W_T \geq \underline{W}) \geq 1 - \alpha, \tag{16}$$

kde $\underline{W}$ je spodná hranica, na ktorú je ochotný investor, s pravdepodobnosťou α, nechať spadnúť hodnotu svojho portfólia. Spojením ohraničenia (16) s pôvodnou Mertonovou úlohou (12) dostávame úlohu

$$\begin{aligned} \max_{W_T} \quad & E_{\mathbb{P}}[u(W_T)] \\ & E_{\mathbb{P}}[\xi_T W_T] \leq W_0 \\ & \mathbb{P}(W_T \geq \underline{W}) \geq 1 - \alpha. \end{aligned} \tag{17}$$

Táto úloha sa označuje ako úloha VaR-RM investora, pretože pridané ohraničenie (16) sa dá prepísať pomocou rizikovej miery VaR. Táto miera je definovaná ako najvyššia možná strata, ktorú môže portfólio dosiahnuť s pravdepodobnosťou $(1 - \alpha)$.

Rovnicu (16) môžeme prepísať do tvaru

$$\mathbb{P}(W_0 - W_T \leq W_0 - \underline{W}) \geq 1 - \alpha.$$

Ak maximálnu akceptovateľnú stratu $W_0 - \underline{W}$ nahradíme VaR(α), tak z definície VaR dostaneme rovnosť

$$\mathbb{P}(W_0 - W_T \leq VaR_\alpha(W_T - W_0)) = 1 - \alpha.$$

Ak v úlohe (17) vezmeme $\alpha = 1$, tak dostávame pôvodnú úlohu nezaisteného investora.

Problém miery rizika VaR je, že neberie do úvahy výšku možných strát, iba ich pravdepodobnosť. To znamená, že s malou pravdepodobnosťou môžu nastať oveľa väčšie straty, aké by investor normálne predpokladal. Tieto straty by pre investora mohli mať značný dopad.

Ďalšou nevýhodou VaR je, že VaR nie je koherentná riziková miera [1]. Pri VaR je možné zvýšenie rizika pri diverzifikácii, ktoré je teoreticky dokázané [1]. Napriek týmto nedostatkom je táto riziková miera naďalej v praxi najviac používaná, a to hlavne pre svoju jednoduchosť.

3.2 Úloha zaistenia portfólia

Majme investora, ktorý okrem maximalizovania hodnoty svojho portfólia chce od svojho portfólia, aby jeho hodnota nespadla pod ním určenú hodnotu. Takže dostávame ohraničenie

$$W_T \geq \underline{W}. \tag{18}$$

Pridaním ohraničenia (18) k Mertonovej úlohe (12) dostávame úlohu

$$\begin{aligned} \max_{W_T} \quad & E_{\mathbb{P}}[u(W_T)] \\ & E_{\mathbb{P}}[\xi_T W_T] \leq W_0 \qquad (19) \\ & W_T \geq \underline{W}. \qquad (20) \end{aligned}$$

Túto úlohu si môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} \max_{W_T \geq \underline{W}} \quad & E_{\mathbb{P}}[u(W_T)] \\ & E_{\mathbb{P}}[\xi_T W_T] \leq W_0, \end{aligned} \tag{21}$$

kde sme zmenili pridané ohraničenie na oblasť, cez ktorú maximalizujeme.

Porovnaním (16) a (20) je zrejmé, že úloha zaistenia portfólia je limitným prípadom úlohy VaR-RM investora pre $\alpha = 0$.

3.3 Úloha EL-RM investora

Majme investora, ktorý okrem maximalizácie hodnoty portfólia chce navyše, aby očakávaná strata, ktorú môže jeho portfólio nadobudnúť pod ním určenou dolnou hranicou

$\underline{W}$, bola menšia, ako ním určená hodnota. Takže dostávame ohraničenie

$$E_{\mathbb{P}}[(W_T - \underline{W})^-] \leq \varepsilon,$$

kde ε je ním určená maximálna možná očakávaná strata (angl. Expected loss). Spojením s pôvodnou Mertonovou úlohou dostávame úlohu

$$\begin{aligned} \max_{W_T} \quad & E_{\mathbb{P}}[u(W_T)] \\ & E_{\mathbb{P}}[\xi_T W_T] \leq W_0 \\ & E_{\mathbb{P}}[(W_T - \underline{W})^-] \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

ktorá sa volá úloha EL-RM investora. Avšak táto riziková miera nie je koherentná [4, str.378]. Tento problém sa dá vyriešiť modifikáciou úlohy na úlohu AVaR-RM investora.

3.4 Úloha AVaR-RM investora

Majme investora, ktorý chce okrem maximalizovania hodnoty svojho portfólia aj kontrolovať straty, ktoré môže nadobúdať s malými pravdepodobnosťami. T. j. investora, ktorý chce kontrolovať priemernú očakávanú stratu z najväčších strát, ktoré môže nadobudnúť portfólio s pravdepodobnosťou menšou ako α.

Jedným z možných spôsobov, ako kontrolovať tieto straty je riziková miera AVaR (Average Value at Risk). AVaR na hladine významnosti $\alpha \in (0,1)$ je podľa [3, Definícia 4.48] definovaná ako

$$AVaR_\alpha(W_T - W_0) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_p(W_T - W_0)dp.$$

Táto riziková miera sa niekedy nazýva aj Tail Conditional Expectation (TCE), Expected shortfall (ES) alebo Conditional Value at Risk (CVaR). Avšak, CVaR sa taktiež používa na označenie VaR pre podmienené rozdelenie a ES môže vyjadrovať očakávanú hodnotu $[W_T - W_0]^-$ [3].

Za predpokladu, že náhodná premenná má hustotu, AVaR nadobúda rovnakú hodnotu ako riziková miera TCE, definovaná pre hladinu významnosti $\alpha \in (0,1)$ ako [1]

$$\begin{aligned} TCE_\alpha(W_T - W_0) &= -E[W_T - W_0 | W_T - W_0 \leq -VaR_\alpha(W_T - W_0)] \\ &= E[W_0 - W_T | W_0 - W_T \geq VaR_\alpha(W_T - W_0)]. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že rizikovú mieru TCE_α môžeme interpretovať ako strednú hodnotu strát na konečnom časovom horizonte $[0, T]$, ktoré sú väčšie alebo rovné ako VaR_α.

Ak ohraničíme AVaR maximálnou akceptovateľnou stratou pomocou podielu δ počiatočnej hodnoty portfólia W_0 dostávame rizikové ohraničenie v tvare

$$AVaR_\alpha(W_T - W_0) \leq \delta W_0. \tag{22}$$

Spojením (22) s pôvodnou Mertonovou úlohou dostávame úlohu AVaR-RM investora

$$\begin{aligned} \max_{W_T} \quad & E_{\mathbb{P}}[u(W_T)] \\ & E_{\mathbb{P}}[\xi_T W_T] \leq W_0 \\ & AVaR_\alpha(W_T - W_0) \leq \delta W_0. \end{aligned}$$

Táto riziková miera, je narozdiel od Value at Risk, koherentná [1]. Tzn., že napr. pri diverzifikácii portfólia nemôže nastať zvýšenie rizika.

Optimálne riešenie tejto úlohy, vlastnosti optimálneho riešenia, optimálnu hodnotu portfólia v čase t, ako aj optimálnu stratégiu je možné nájsť napr. v [5]. My sme sa však ďalej v tejto práci bližšie pozreli na rizikovú mieru VaR, zaistenie portfólia a ich vlastnosti.

4 Úloha VaR-RM

V tejto kapitole sme sa zaoberali úlohou s pridaným rizikovým ohraničením, ktoré meria riziko straty pomocou miery Value at Risk. Hlavným cieľom tejto kapitoly bolo doplnenie prázdnych miest z článku [2]. Preto sme sa hlavne zamerali na existenciu riešenia sústavy zadanej v [2, str. 377].

Najprv sme sa venovali maximálnej možnej dolnej hranici, ďalej sme uviedli rozšírenú vetu o optimálnom riešení úlohy VaR-RM aj s dôkazom existencie riešenia. Na konci kapitoly sme spomenuli optimálnu hodnotu portfólia a optimálnu stratégiu v čase t, ktoré sme použili v nasledujúcej kapitole.

4.1 Maximálna hodnota dolnej hranice

Pri riešení úlohy (17) je dôležitou otázkou hodnota nastavenej dolnej hranice, pod ktorú sa investor nechce dostať. V tejto časti sme sa zaoberali maximálnou hodnotou tejto dolnej hranice pre ktorú je ešte úloha (17) prípustná. Z tejto úvahy dostávame úlohu

$$\begin{aligned} \max_{W_T} \quad & \underline{W} \\ & E_{\mathbb{P}}[\xi_T W_T] \le W_0 \\ & \mathbb{P}(W_T \ge \underline{W}) \ge 1 - \alpha. \end{aligned} \tag{23}$$

Veta 4.1 (Maximálna hodnota dolnej hranice)**.** *Riešením úlohy (23) je*

$$\hat{W}_T = \begin{cases} \underline{W}^{max}, & ak\ \xi_T \le \overline{\xi} \\ 0, & ak\ \xi_T > \overline{\xi}, \end{cases} \tag{24}$$

kde $\underline{W}^{max}$ *rieši rovnicu*

$$E_{\mathbb{P}}[\xi_T \underline{W}^{max} 1_{\xi_T \le \overline{\xi}}] = W_0$$

a $P(\xi_T > \overline{\xi}) = \alpha$.

Kvôli dôkazu Vety 4.1 sme si vytvorili úlohu

$$\begin{aligned} \min_{W_T} \quad & E_{\mathbb{P}}[\xi_T W_T] \\ & \mathbb{P}(W_T \ge \underline{W}) \ge 1 - \alpha. \end{aligned} \tag{25}$$

Riešenie tejto úlohy je uvedené v nasledujúcej vete.

Veta 4.2. *Riešením úlohy (25) je*

$$\hat{W}_T = \begin{cases} \underline{W}, & ak\ \xi_T \le \overline{\xi} \\ 0, & ak\ \xi_T > \overline{\xi}, \end{cases} \tag{26}$$

kde $P(\xi_T > \overline{\xi}) = \alpha$.

Dôkaz. Túto úlohu sme si prepísali na ekvivalentnú maximalizačnú úlohu v tvare

$$\begin{aligned} \max_{W_T} \quad & E_{\mathbb{P}}[-\xi_T W_T] \\ & \mathbb{P}(W_T \ge \underline{W}) \ge 1 - \alpha. \end{aligned} \tag{27}$$

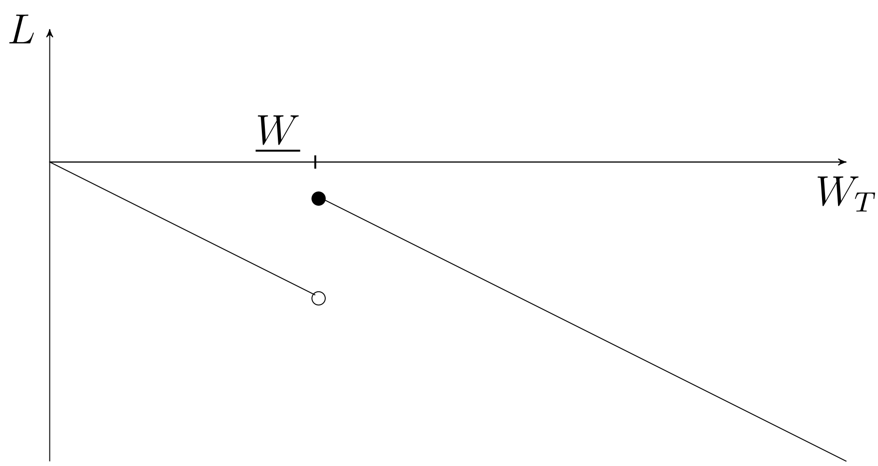
Pri hľadaní maxima tejto úlohy sme použili nasledujúcu lemu.

Lema 4.3. *Pre* $\forall \xi_T$, $\hat{W}_T$ *v tvare (26) maximalizuje*

$$L = -\xi_T W_T + \overline{\xi}\underline{W} 1_{W_T \ge \underline{W}}.$$

Dôkaz tejto lemy sme rozdelili na dva prípady.

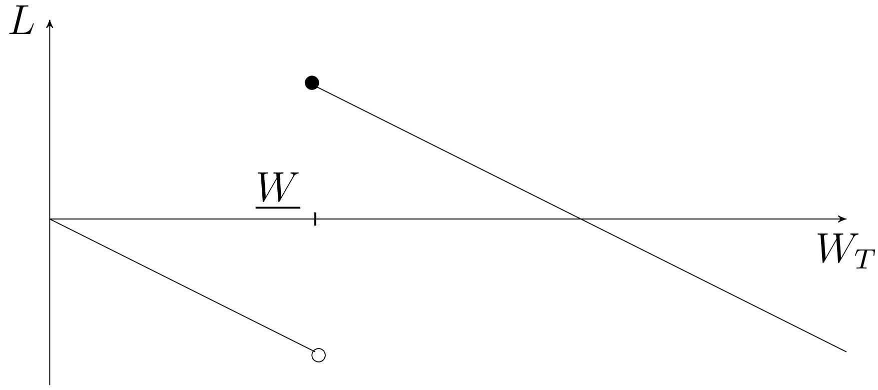
1. Pre $\xi_T > \overline{\xi}$ nadobúda funkcia L maximum pre $W_T = 0$, pretože v tomto prípade je funkcia $L \le 0$ a hodnotu 0 nadobúda iba pre $W_T = 0$. Tvar funkcie L pre tento prípad je zobrazený na Obr. 2.



Obr. 2: Tvar funkcie L pre $\xi_T > \overline{\xi}$.

2. Pre $\xi_T \le \overline{\xi}$ nadobúda funkcia L maximum pre $W_T = \underline{W}$. V tomto prípade nadobúda funkcia L aj kladné hodnoty (pre $\xi_T = \overline{\xi}$ iba nezáporné), pretože $(\overline{\xi} - \xi_T) \le 0$.

Najvyššiu hodnotu nadobúda pre $W_T = \underline{W}$, pretože pre toto W_T dochádza k skoku a postupne sa hodnota znižuje. Tvar funkcie L pre tento prípad je zobrazený na Obr. 3.



Obr. 3: Tvar funkcie L pre $\xi_T \leq \overline{\xi}$.

Tým sme dokázali, že (26) maximalizuje funkciu zo zadania Lemy 4.3. To, že táto funkcia rieši aj úlohu (25) sme dokázali nasledovne.

Zobrali sme si funkciu $\hat{W}_T$ zo zadania lemy a ľubovoľné W_T, ktoré spĺňa podmienku (27) a porovnali sme hodnoty účelových funkcií. Dostali sme

$$E[-\xi_T \hat{W}_T] - E[-\xi_T W_T] = E[-\xi_T \hat{W}_T] - E[-\xi_T W_T] + \overline{\xi}\underline{W}(1-\alpha) - \overline{\xi}\underline{W}(1-\alpha),$$

kde sme na pravú stranu pripočítali a odpočítali konštantu, ktorú sme mohli podľa (27) prepísať na

$$E[-\xi_T \hat{W}_T] - E[-\xi_T W_T] \geq E[-\xi_T \hat{W}_T] - E[-\xi_T W_T] + \overline{\xi}\underline{W}E[1_{\hat{W}_T \geq \underline{W}}] - \overline{\xi}\underline{W}E[1_{W_T \geq \underline{W}}],$$

kde nerovnosť vznikla vďaka tomu, že rovnosť $E[1_{W_T \geq \underline{W}}] = (1-\alpha)$ nastáva pre $W_T = \hat{W}_T$ a pre ľubovoľné W_T môže nastávať aj nerovnosť. Na pravej strane sme prešli s konštantou do strednej hodnoty a následne sme celú pravú stranu spojili do jednej strednej hodnoty a dostali sme

$$E[-\xi_T \hat{W}_T] - E[-\xi_T W_T] \geq E[(-\xi_T \hat{W}_T + \overline{\xi}\underline{W}1_{\hat{W}_T \geq \underline{W}}) - (-\xi_T W_T + \overline{\xi}\underline{W}1_{W_T \geq \underline{W}})] \geq 0,$$

kde sme druhú nerovnosť dostali z Lemy 4.3, keďže $\hat{W}_T$ maximalizuje funkciu $-\xi_T W_T + \overline{\xi}\underline{W}1_{W_T \geq \underline{W}}$. Tým sme dokázali Vetu 4.2. ∎

Dôkaz Vety 4.1. $\hat{W}_T$ v tvare (24) je prípustným riešením úlohy (23). Nech $\underline{W} > \underline{W}^{max}$. Potom podľa Vety 4.2 je riešenie (25) v tvare (26). Keďže rovnosť $E[\xi_T \underline{W} 1_{\xi_T \leq \bar{\xi}}] = E[\xi_T W_T] = W_0$ nastáva pre $\underline{W} \equiv \underline{W}^{max}$, zjavne pre vyššie hodnoty $\underline{W}$ nastáva $E[\xi_T W_T] > W_0$, čo nie je prípustné riešenie úlohy (23). Z toho vyplýva, že maximálna možná hodnota dolnej hranice je $\underline{W} = \underline{W}^{max}$. ∎

4.2 Riešenie úlohy VaR-RM investora

Hlavným cieľom tejto kapitoly bolo doplnenie prázdnych miest v dôkaze nasledujúcej vety, ktorej riešenie pre prípad (iii) je uvedené v článku [2]. Avšak v tomto článku sa nespomína maximálne $\underline{W}$, pre ktoré je táto úloha riešiteľná. My sme pôvodnú vetu rozšírili o ďalšie možné prípady.

Veta 4.4 (Riešenie úlohy VaR investora)**.** *Riešením úlohy VaR investora je výplatná funkcia:*

i) *Ak $\underline{W} > \underline{W}^{max}$, potom neexistuje riešenie.*

ii) *Ak $\underline{W} \leq \underline{W}^M$, kde $\underline{W}^M$ je hodnota optimálneho riešenia Mertonovej úlohy v $\bar{\xi}$, potom výplatná funkcia má tvar ako pri Metonovej úlohe.*

iii) *Ak $\underline{W}^M < \underline{W} \leq \underline{W}^{max}$, potom*

$$\hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y) = \begin{cases} I(y\xi_T), & ak\ \xi_T < \underline{\xi} \\ \underline{W}, & ak\ \underline{\xi} \leq \xi_T < \bar{\xi} \\ I(y\xi_T), & ak\ \bar{\xi} \leq \xi_T, \end{cases} \tag{28}$$

kde $I(.)$ je inverzná funkcia prvej derivácie funkcie užitočnosti $u(.)$,

$$\underline{\xi} = \frac{u'(\underline{W})}{y}, \tag{29}$$

$\bar{\xi}$ je riešením rovnice

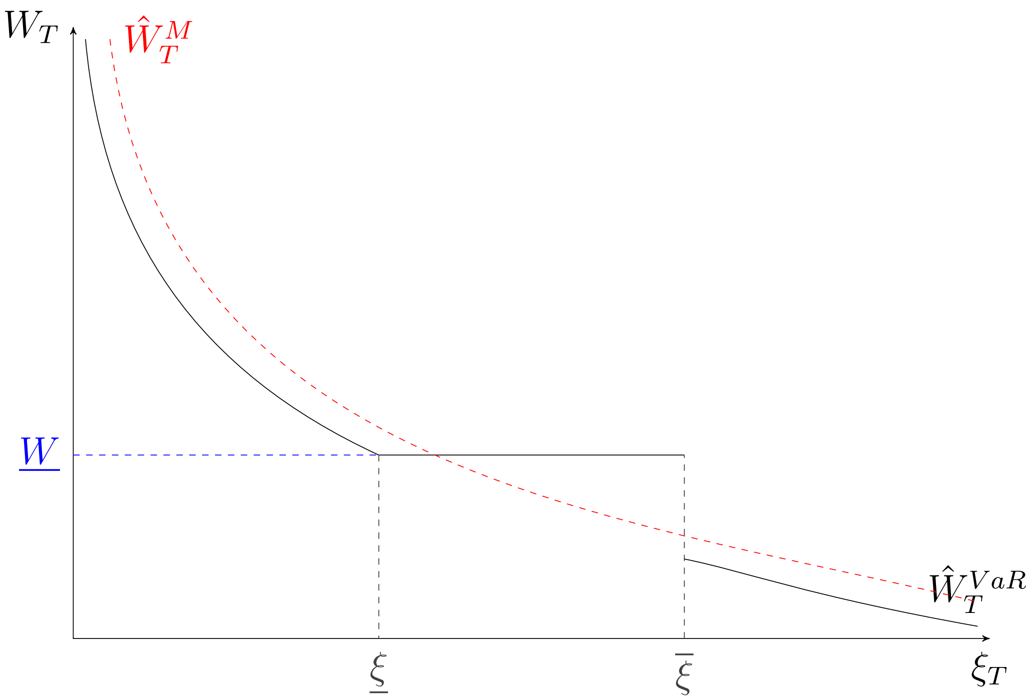
$$\mathbb{P}(\xi_T > \bar{\xi}) = \alpha \tag{30}$$

a $y \geq 0$ je riešením rovnice

$$E\left[\xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y)\right] = W_0. \tag{31}$$

Dôkaz (i) sme urobili v Kapitole 4.1 tým, že sme dokázali, že $\underline{W}^{max}$ je maximálna hodnota dolnej hranice, pre ktorú je ešte úloha prípustná. Dôkaz (ii) a (iii) je možné urobiť na základe [2]. Avšak v tomto článku nie je uvedený dôkaz existencie riešenia sústavy (28)-(31). Tento problém sme riešili v nasledujúcej vete.

Na Obr. 4 je zobrazené optimálne riešenie úlohy VaR-RM investora pre prípad (iii).



Obr. 4: Optimálne riešenie úlohy VaR-RM investora pre prípad (iii) je zobrazené čiernou farbou a červenou čiarou je zobrazené, pre porovnanie, optimálne riešenie pre Mertonovu úlohu. Modrou čiarou je zobrazená dolná hranica, ktorú si zvolí investor.

Veta 4.5. *Nech* $\underline{W}^M < \underline{W} < \underline{W}^{max}$. *Potom existuje práve jedno riešenie sústavy (28)-(31). Navyše* $\overline{\xi} = \exp\left(\Phi^{-1}(1-\alpha)\|\kappa\|\sqrt{T} - \left(r + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2\right)T\right)$.

Dôkaz. Dôkaz, že $\overline{\xi} = \exp\left(\Phi^{-1}(1-\alpha)\|\kappa\|\sqrt{T} - \left(r + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2\right)T\right)$ je úplne priamy. Predpokladajme $\overline{\xi}$, ako je zadané v (30)

$$\mathbb{P}(\xi_T > \overline{\xi}) = \alpha.$$

Snažili sme sa ho vyjadriť pomocou kvantilu štandardizovaného normálneho rozdelenia. Najprv sme si pravdepodobnosť vyjadrili pomocou distribučnej funkcie normálneho rozdelenia

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 - \mathbb{P}(\xi_T \le \overline{\xi}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\ln \xi_T \le \ln \overline{\xi}) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\ln \xi_T - E[\ln \xi_T]}{\sqrt{D[\ln \xi_T]}} \le \frac{\ln \overline{\xi} - E[\ln \xi_T]}{\sqrt{D[\ln \xi_T]}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln \overline{\xi} - E[\ln \xi_T]}{\sqrt{D[\ln \xi_T]}}\right),\end{aligned}$$

pretože za predpokladu $r_t = r$ a $\kappa_t = \kappa$ má $\ln \xi_T \sim N\left(-(r + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2)T, \|\kappa\|^2 T\right)$, čo vyplýva z rovnice (6). Odtiaľ sme dostali vyjadrenie $\ln \overline{\xi}$

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(1-\alpha) &= \frac{\ln \overline{\xi} - E[\ln \xi_T]}{\sqrt{D[\ln \xi_T]}}, \\ \ln \overline{\xi} &= \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{D[\ln \xi_T]} + E[\ln \xi_T] \\ &= \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{\|\kappa\|^2 T} - \left(r + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2\right)T.\end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že $\overline{\xi} = \exp\left(\Phi^{-1}(1-\alpha)\|\kappa\|\sqrt{T} - \left(r + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2\right)T\right)$.

Predpokladajme, že existuje riešenie a je v tvare ako je zadané v (28). Odtiaľ sme si zobrali y, ktoré je riešením rovnice (31)

$$E\left[\xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y)\right] = W_0.$$

Strednú hodnotu na ľavej strane rovnice sme vyjadrili v tvare

$$\begin{aligned}E\left[\xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y)\right] &= E\left[\xi_T (I(y\xi_T)1_{\xi_T < \underline{\xi}} + \underline{W} 1_{\underline{\xi} \le \xi_T < \overline{\xi}} + I(y\xi_T)1_{\overline{\xi} \le \xi_T})\right] \\ &= E\left[\xi_T I(y\xi_T)1_{\xi_T < \underline{\xi}}\right] + E\left[\xi_T \underline{W} 1_{\underline{\xi} \le \xi_T < \overline{\xi}}\right] + E\left[\xi_T I(y\xi_T)1_{\overline{\xi} \le \xi_T}\right].\end{aligned}$$

Funkcia $E\left[\xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y)\right]$ je parametrický integrál

$$E\left[\xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y)\right] = \int_\Omega \xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y) d\mathbb{P}. \tag{32}$$

Ten sme si prepísali pomocou poznatku, že $\ln \xi_T \sim N(-(r + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2)T, \|\kappa\|^2 T$, za predpokladu, že $r_t = r$ a $\kappa_t = \kappa$, na tvar

$$\int_\Omega \xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y) d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^+} x \hat{W}_T^{VaR}(x, y) f_{\xi_T}(x) dx,$$

kde $f_{\xi_T}(x)$ je hustota ξ_T.

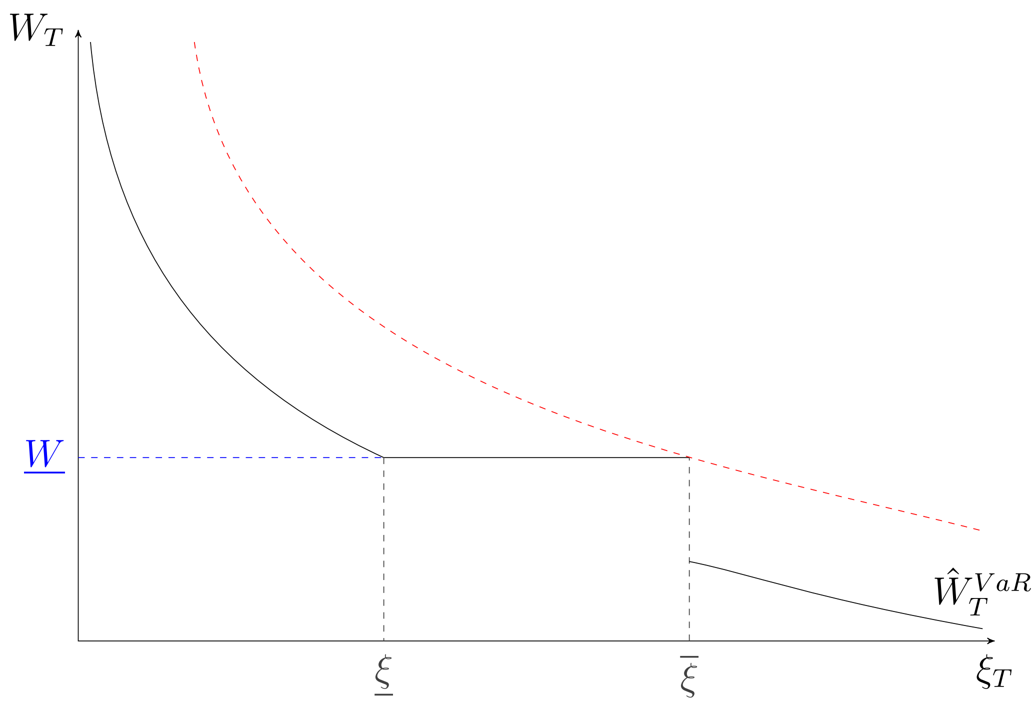
Ďalej sme v dôkaze použili nasledujúcu lemu.

Lema 4.6 (Spojitosť parametrického integrálu, [6]). *Parametrický integrál je spojitý na okolí bodu y_0, ak*

1. $y \to f(x,y)$ *je spojitá na okolí bodu* y_0 *pre* $\forall x \in \Omega$
2. *existuje integrovateľná majoranta* $g : \Omega \to \mathbb{R}^+, |f(x,y)| \leq g(x)$ *pre každé* $x \in \Omega, y \in O(y_0)$ *taká, že* $\int\limits_{\Omega} g(x) < \infty$.

Označili sme si funkciu pod integrálom za našu funkciu $f(x,y) = x\hat{W}_T^{VaR}(x,y)f_{\xi_T}(x)$. Potom táto funkcia je spojitá v x na celom $\mathbb{R}^+$ pre každé y.

Ako našu majorantu sme si zobrali funkciu $g(x) = xI(y\xi_T)f_{\xi_T}(x)$, kde $I(y\bar{\xi}) = \underline{W}$, t.j. $y = u'(\underline{W})/\bar{\xi}$. To znamená, že naša funkcia $I(y\xi_T)$ je optimálna výplatná funkcia z Mertonovej úlohy, ktorá prechádza cez bod $(\bar{\xi}, \underline{W})$. Táto funkcia je zobrazená na Obr. 5.



Obr. 5: Optimálne riešenie úlohy VaR-RM investora a červenou farbou je zobrazená funkcia $I(y\xi)$, ktorá prechádza cez bod $(\bar{\xi}, \underline{W})$.

Táto funkcia spĺňa požiadavku, že je väčšia nanajvýš rovná pôvodnej a aj požiadavku konečnosti integrálu, kvôli tvaru hustoty ξ_T. Z toho vyplýva, že podľa Lemy (4.6) je funkcia $E\left[\xi_T\hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y)\right]$ spojitá.

Pri dokazovaní monotónnosti tejto funkcie pre $y \geq 0$, pri použití funkcie užitočnosti v tvare $u(x) = \frac{x^p}{p}$, pre $p < 1$, sme si to rozdelili na dva prípady:

1) Pre $\xi_T \geq \overline{\xi}$. Tento prípad je jednoduchší, pretože $\overline{\xi}$ nie je závislé od y. Z toho vyplýva, že pri zväčšení y o $\varepsilon > 0$ sa hodnota výplatnej funkcie na tejto oblasti zníži

$$E\left[\xi_T I(y\xi_T) 1_{\overline{\xi} \leq \xi_T}\right] < E\left[\xi_T I((y+\varepsilon)\xi_T) 1_{\overline{\xi} \leq \xi_T}\right],$$

pretože $y^{\frac{1}{p-1}} > (y+\varepsilon)^{\frac{1}{p-1}}$.

2) Pre $\xi_T < \overline{\xi}$. V tomto prípade sme brali do úvahy výraz

$$E\left[\xi_T I(y\xi_T) 1_{\xi_T < \underline{\xi}}\right] + E\left[\xi_T \underline{W} 1_{\underline{\xi} \leq \xi_T < \overline{\xi}}\right]$$

a následne sme sa pozreli čo sa deje s členmi jednotlivo.

V prvom sčítanci sa nám zníži hodnota, ale zároveň sa nám zmenší aj oblasť, pretože $\underline{\xi}$ sa zníži kvôli zväčšeniu y o $\varepsilon > 0$

$$\underline{\xi} = \frac{u'(\underline{W})}{y} = \frac{\underline{W}^{p-1}}{y} > \frac{\underline{W}^{p-1}}{y+\varepsilon} = \underline{\tilde{\xi}}.$$

V druhom sčítanci sa oblasť zväčší a funkcia vo vnútri strednej hodnoty bude nadobúdať hodnotu $\underline{W}$.

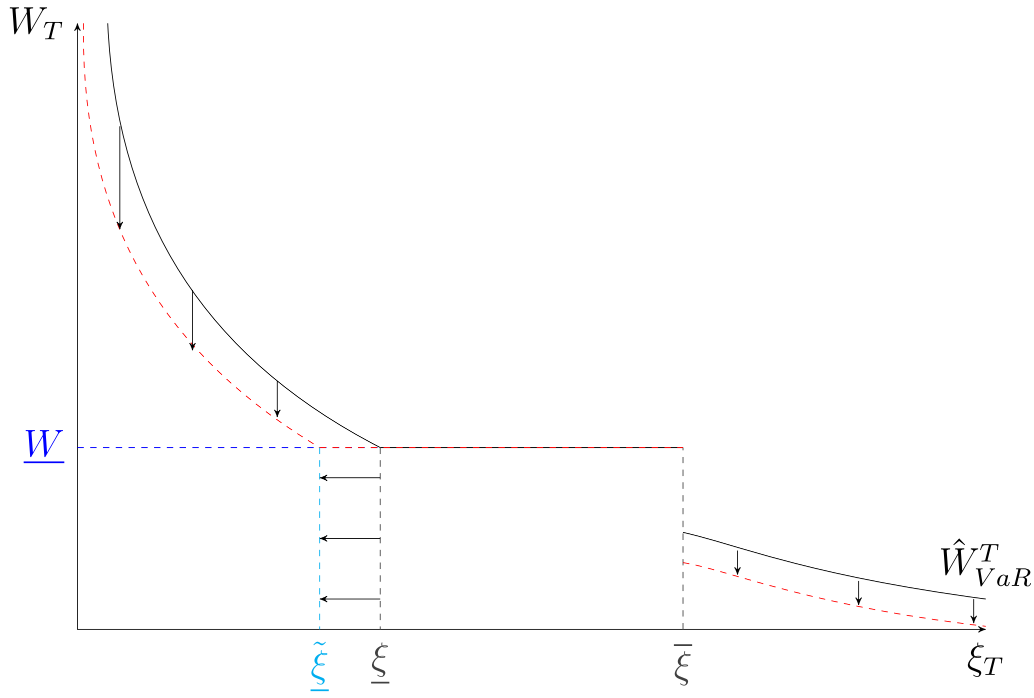
Z týchto výsledkov vyplýva, že:

a) pre $0 \leq \xi_T < \underline{\tilde{\xi}}$ nadobúda funkcia vo vnútri strednej hodnoty nižšie hodnoty ako pôvodná,

b) pre $\underline{\tilde{\xi}} \leq \xi_T < \underline{\xi}$ nadobúda funkcia vo vnútri strednej hodnoty hodnotu $\underline{W}$, ktorá je nižšia ako hodnoty pôvodnej funkcie,

c) pre $\underline{\xi} \leq \xi_T < \overline{\xi}$ nadobúda funkcia rovnaké hodnoty ako pôvodná funkcia, a to $\underline{W}$.

Zmena výplatnej funkcie pri zväčšení y o $\varepsilon > 0$ je zobrazená na Obr. 6.



Obr. 6: Zmena hodnoty výplatnej funkcie pri zväčšení y o $\varepsilon > 0$.

Z a) - c) vyplýva, že

$$E\left[\xi_T I(y\xi_T)1_{\xi_T<\underline{\xi}}\right] + E\left[\xi_T \underline{W} 1_{\underline{\xi}\leq\xi_T<\bar{\xi}}\right] > E\left[\xi_T I((y+\varepsilon)\xi_T)1_{\xi_T<\hat{\underline{\xi}}}\right] + E\left[\xi_T \underline{W} 1_{\hat{\underline{\xi}}\leq\xi_T<\bar{\xi}}\right].$$

Odtiaľ a z bodu (1) vyplýva, že táto funkcia je klesajúca.

Opäť sme si zobrali rovnicu (31), ktorú má spĺňať optimálne y

$$E\left[\xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y)\right] = W_0.$$

Keďže táto funkcia je parametrický integrál, tak sme si ju prepísali do tvaru ako v (32)

$$E\left[\xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y)\right] = \int\limits_{\Omega} \xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y) d\mathbb{P}.$$

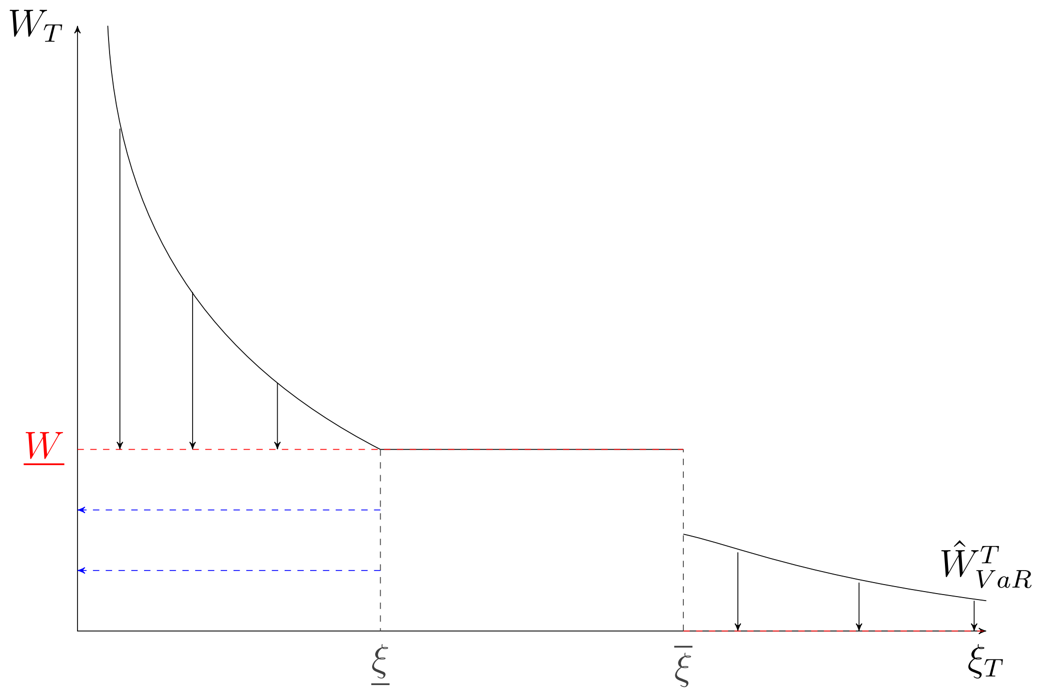
Keďže má táto funkcia majorantu a je nezáporná, môžeme vo výraze

$$\lim_{y\to\infty} \int\limits_{\Omega} \xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y) d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} \lim_{y\to\infty} \xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y) d\mathbb{P} \tag{33}$$

prejsť s limitou pod integrál. Pretože

$$\lim_{y\to\infty} \underline{\xi} = \frac{u'(\underline{W})}{y} = \frac{\underline{W}^{p-1}}{y} = 0 \text{ a } \lim_{y\to\infty} I(y\xi_T) = \lim_{y\to\infty} (y\xi_T)^{\frac{1}{p-1}} = 0 \text{ pre } p < 1,$$

je jasné, že $\lim_{y\to\infty} \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y) = \underline{W} 1_{0\le\xi_T<\bar{\xi}}$. Tento limitný prechod je zobrazený na Obr. 7.



Obr. 7: Optimálne riešenie v limite pre $y \to \infty$.

Z toho sme dostali, že rovnica (33)

$$\lim_{y\to\infty} E\left[\xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y)\right] \quad = \quad E\left[\xi_T \underline{W} 1_{0\le\xi_T<\bar{\xi}}\right] < E\left[\xi_T \underline{W}^{max} 1_{0\le\xi_T<\bar{\xi}}\right] = W_0,$$

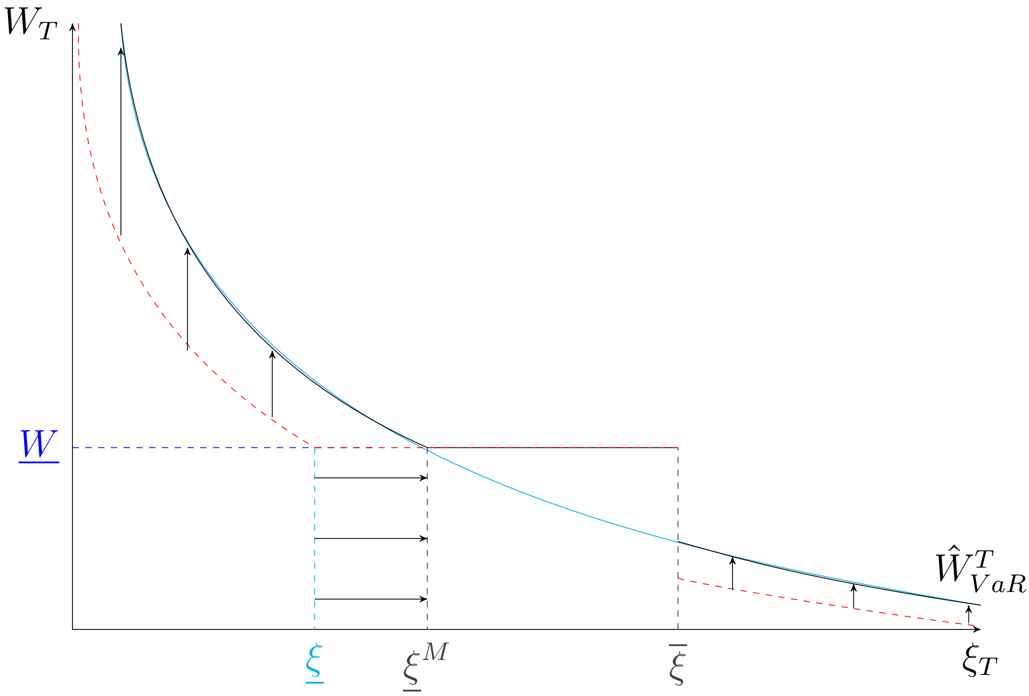
kde sme nerovnosť dostali z toho, že $\underline{W} < \underline{W}^{max}$ a poslednú rovnosť z definície $\underline{W}^{max}$. Z toho je zrejmé, že $\exists y_0 : \forall y > y_0$ platí

$$E\left[\xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y)\right] < W_0. \tag{34}$$

Keďže y^M je riešením rovnice $E[\xi_T \hat{W}_T^M(\xi_T, y)] = W_0$, kde $\hat{W}_T^M$ je optimálne riešenie Mertonovej úlohy, je jasné, že:

1. $\hat{W}^{VaR}(\xi_T, y^M) = \hat{W}_T^M$ pre $\xi_T \le \underline{\xi}^M$,
2. $\hat{W}^{VaR}(\xi_T, y^M) > \hat{W}_T^M$ pre $\underline{\xi}^M \le \xi_T < \overline{\xi}$,
3. $\hat{W}^{VaR}(\xi_T, y^M) = \hat{W}_T^M$ pre $\overline{\xi} \le \xi_T$.

Zmena riešenia pri prechode y na y^M je zobrazená na Obr. 8.



Obr. 8: Zmena riešenia pri prechode y na y^M. Modrou čiarou je zobrazené optimálne riešenie Mertonovej úlohy.

Z bodov 1. - 3. a rovnosti $E[\xi_T W_T^M(\xi_T, y^M)] = W_0$ vyplýva, že

$$E\left[\xi_T \hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y^M)\right] > W_0.$$

Z toho je zrejmé, že $\exists y_1 : \forall y < y_1$ platí

$$E\left[\xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y)\right] > W_0. \tag{35}$$

Ako funkciu $F(y)$ sme si označili funkciu

$$F(y) \quad = \quad E\left[\xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y)\right] - W_0.$$

Keďže funkcia $F(y)$ je funkcia $E\left[\xi_T \hat{W}_T^{VaR}(\xi_T, y)\right]$ znížená o konštantu má rovnaké vlastnosti.

Z (34), (35) a zo spojitosti funkcie $F(y)$ v $y \geq 0$, sme dostali pomocou Vety o medzihodnote, že musí existovať aspoň jedno také $y \in (y_0, y_1)$, pre ktoré je platná rovnosť (31). Z monotónnosti funkcie $F(y)$ v $y \geq 0$ sme dostali, že existuje jediné také y. ■

Veta 4.7. *Nech* $\underline{W} = \underline{W}^{max}$. *Potom existuje práve jedno riešenie sústavy (28)-(31) a riešenie je v tvare (24).*

Dôkaz. Dôkaz priamo vyplýva z Vety 4.1. ■

4.3 Optimálna hodnota portfólia v čase t

Nech $r_t = r$ a $\kappa_t = \kappa$ sú konštanty a funkcia užitočnosti je v tvare $u(x) = \frac{x^p}{p}$. Za týchto predpokladov získame podľa [2, str. 380-381] a [5, str. 28], dosadením optimálneho riešenia z Vety 4.4 výslednú optimálnu hodnotu výplatnej funkcie W_t, pre každý čas $t \in [0, T]$ v tvare

$$\begin{aligned}\hat{W}_t^{VaR}(\xi_t, y) &= \frac{\exp(\Gamma_t)}{(y\xi_t)^{\frac{1}{1-p}}} - \left[\frac{\exp(\Gamma_t)}{(y\xi_t)^{\frac{1}{1-p}}}\Phi(-d_1(\underline{\xi})) - \underline{W}e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2(\underline{\xi}))\right] \\ &+ \left[\frac{\exp(\Gamma_t)}{(y\xi_t)^{\frac{1}{1-p}}}\Phi(-d_1(\bar{\xi})) - \underline{W}e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2(\bar{\xi}))\right],\end{aligned}$$

kde $\Phi(.)$ je distribučná funkcia štandardizovaného normálneho rozdelenia a

$$\begin{aligned}\Gamma_t &= \frac{p}{1-p}\left(r + \frac{\|\kappa\|^2}{2(1-p)}\right)(T-t), \\ d_1(x) &= \frac{\ln x - \ln \xi_t + \left(r + \frac{\|\kappa\|^2}{2}\right)(T-t)}{\|\kappa\|\sqrt{T-t}}, \\ d_2(x) &= \frac{\ln x - \ln \xi_t + \left(r - \frac{\|\kappa\|^2}{2}\right)(T-t)}{\|\kappa\|\sqrt{T-t}},\end{aligned}$$

čo môžeme prepísať pomocou $\Phi(-x) = 1 - \Phi(-x)$ do tvaru

$$\begin{aligned}\hat{W}_t^{VaR}(\xi_t, y) &= (y\xi_t)^{\frac{1}{p-1}}\left(\exp\left[\frac{p}{1-p}\left(r + \frac{\|\kappa\|^2}{2(1-p)}\right)(T-t)\right]\right)\left[1 + \Phi(d_1(\underline{\xi})) - \Phi(d_1(\bar{\xi}))\right] \\ &+ \underline{W}e^{-r(T-t)}\left[\Phi(d_2(\bar{\xi})) - \Phi(d_2(\underline{\xi}))\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

4.4 Optimálna stratégia v čase t

Opäť za rovnakých predpokladov ako pri optimálnej hodnote portfólia pre čas $t \in [0.T]$, sa podľa [2, str. 381] dá optimálna stratégia vyjadriť pomocou optimálnej stratégie Mertonovej úlohy

$$\theta_t^{VaR} = q_t^{VaR}\theta_t^M,$$

kde $\theta_t^M = \frac{1}{1-p}\sigma^{-1}\kappa$ je optimálna stratégia Mertonovej úlohy a q_t^{VaR} je dané ako

$$\begin{aligned} q_t^{VaR} &= 1 - \frac{\underline{W} e^{-r(T-t)} \left[\Phi(d_2(\overline{\xi})) - \Phi(d_2(\underline{\xi})) \right]}{\hat{W}_t^{VaR}} \\ &+ \frac{(1-p)(\underline{W} - \underline{\underline{W}}) e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(\overline{\xi}))}{\hat{W}_t^{VaR} \|\kappa\| \sqrt{T-t}}, \end{aligned} \tag{37}$$

kde $\underline{\underline{W}}$ je v [2] definované ako

$$\underline{\underline{W}} = \begin{cases} I(y\overline{\xi}), & \text{ak } \underline{\xi} < \overline{\xi} \\ \underline{W} & \text{ak } \underline{\xi} \geq \overline{\xi}, \end{cases}$$

Z toho vyplýva, že sa nemenia pomery rizikových aktív, pretože $\theta_t^M = \frac{1}{1-p}\sigma^{-1}\kappa$ je konštantný vektor a stratégia q_t^{VaR} tento vektor len prenásobuje skalárom.

5 Zaistenie portfólia

V tejto kapitole sme sa zaoberali úlohou zaistenia portfólia (z anglického Portfolio insurance). T. j., uvažovali sme investora, ktorý si chce zaistiť hodnotu portfólia na ním určenej hodnote $\underline{W}$.

Hlavným cieľom tejto kapitoly bolo doplnenie prázdnych miest z článku [2]. Najprv sme uviedli optimálne riešenie tejto úlohy v čase T aj s dôkazom tohto tvrdenia a s dôkazom existencie tohto riešenia. Na konci kapitoly sme uviedli optimálnu hodnotu portfólia v čase t a optimálna stratégiu v čase t, ktoré sme odvodili pomocou poznatku, že úloha zaistenia portfólia je limitným prípadom úlohy VaR-RM investora pre $\alpha = 0$.

5.1 Riešenie úlohy zaistenia portfólia

Veta 5.1 (Optimálne riešenie úlohy zaistenia portfólia)**.** *Nech* $\underline{W} < W_0 e^{rT}$*. Potom existuje jediné riešenie úlohy (21) v tvare*

$$\hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y) = \begin{cases} I(y\xi_T), & \text{pre } \xi_T < \underline{\xi} \\ \underline{W}, & \text{pre } \xi_T \geq \underline{\xi}, \end{cases} \tag{38}$$

kde $I(.)$ *je inverzná funkcia prvej derivácie funkcie užitočnosti* $u(.)$ *a* $\underline{\xi}$ *je riešenie rovnice*

$$I(y\underline{\xi}) = \underline{W}$$

a $y \geq 0$ *je riešenie rovnice*

$$E_{\mathbb{P}}[\xi_T \hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)] = W_0. \tag{39}$$

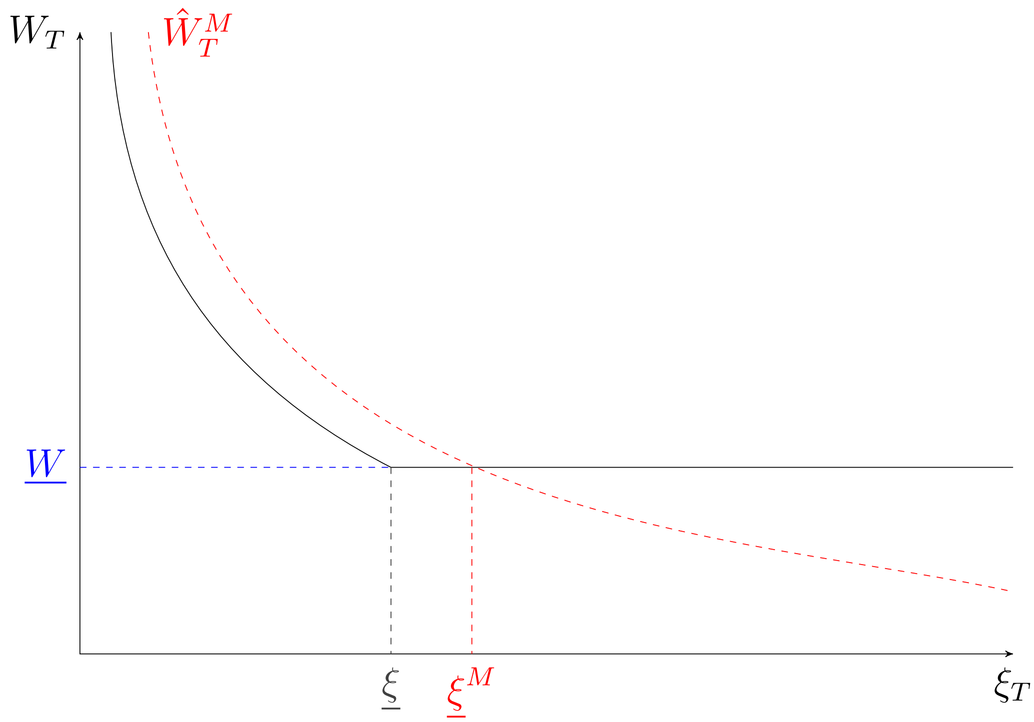
Optimálne riešenie úlohy zaistenia portfólia investora je zobrazené na Obr. 9.

Dôkaz. Pri dokazovaní tejto vety sme použili nasledovnú lemu.

Lema 5.2. *Funkcia (38) rieši úlohu*

$$\max_{W_T \geq \underline{W}} (u(W_T) - y\xi_T W_T), \tag{40}$$

pre $\forall \xi_T$ *a* $y > 0$.



Obr. 9: Optimálne riešenie úlohy zaistenia portfólia je zobrazené čiernou farbou a červenou čiarou je zobrazené, pre porovnanie, optimálne riešenie pre Mertonovu úlohu. Modrou čiarou je zobrazená dolná hranica, ktorú si zvolí investor.

Dokazovanie tejto lemy sme rozdelili na dva prípady:

1) Pre $\xi_T < \underline{\xi}$.

   V tomto prípade sme hľadali maximum štandardne tým, že sme výraz (40) zderivovali podľa W_T

$$\frac{\partial(u(W_T) - y\xi_T W_T)}{\partial W_T} = u'(W_T) - y\xi_T. \tag{41}$$

   Výraz (41) sme položili rovný 0

$$u'(W_T) - y\xi_T = 0$$

   a odtiaľ sme si vyjadrili

$$W_T = I(y\xi_T),$$

   kde $W_T \geq \underline{W}$, pretože $\xi_T < \underline{\xi}$. Takže pre prvý prípad sme to dokázali.

2) Pre $\xi_T \geq \underline{\xi}$.

V tomto prípade sme postupovali inak. Tvrdíme, že v takomto prípade rieši výraz (40) funkcia $W_T = \underline{W}$. Stačí nám dokázať, že platí

$$u(\underline{W}) - y\xi_T\underline{W} \geq u(W_T) - y\xi_T W_T$$

pre ľubovoľné W_T, ktoré spĺňa $W_T \geq \underline{W}$.

Zobrali sme si ľubovoľné W_T, ktoré spĺňa $W_T \geq \underline{W}$. Ďalej sme si zderivovali funkciu, ktorá sa maximalizuje vo výraze (40). Následne dosadením $\underline{W}$ a ľubovoľného W_T, ktoré spĺňa $W_T \geq \underline{W}$, do zderivovanej funkcie a ich porovnaním dostaneme

$$u'(\underline{W}) - y\xi_T \geq u'(W_T) - y\xi_T, \tag{42}$$

keďže funkcia užitočnosti $u(W_T)$ je konkávna, tak prvá derivácia tejto funkcie je klesajúca funkcia. Z toho vyplýva, že pre $W_T > \underline{W}$ nadobúda nižšie funkčné hodnoty ako pre $W_T = \underline{W}$. Keďže rovnosť $u'(\underline{W}) - y\xi_T = 0$ nastáva pre $\xi_T = \underline{\xi}$, pretože

$$\underline{\xi} = \frac{u'(\underline{W})}{y},$$

tak pre $\xi_T > \underline{\xi}$ platí $u'(\underline{W}) - y\xi_T < 0$, keďže je táto funkcia klesajúca v ξ_T. Odtiaľ a z výrazu (42) vyplýva, že aj $u'(W_T) - y\xi_T W_T < 0$. Keďže derivácia funkcie je záporná pre $W_T \geq \underline{W}$, maximum sa nadobúda pre krajný bod intervalu, a to pre najnižšiu hodnotu, ktorá je $W_T = \underline{W}$.

Tým sme dokázali, že výplatná funkcia zo zadania Vety 5.1, maximalizuje funkciu zo zadania Lemy 5.2.

To, že výplatná funkcia $\hat{W}_T^{PI}$ rieši úlohu (21) sme dokázali nasledovne. Zobrali sme si ľubovoľné W_T, ktoré spĺňa podmienky (19) a (20) a jeho strednú hodnotu funkcie užitočnosti sme porovnali so strednou hodnotou funkcie užitočnosti pre $\hat{W}_T^{PI}$ ako je zadané vo Vete 5.1. Dostali sme

$$E[u(\hat{W}_T^{PI})] - E[u(W_T)] = E[u(\hat{W}_T^{PI})] - E[u(W_T)] - yW_0 + yW_0.$$

To sme si mohli podľa podmienky (19) prepísať na tvar

$$E[u(\hat{W}_T^{PI})] - E[u(W_T)] \geq E[u(\hat{W}_T^{PI})] - E[u(W_T)] - yE[\xi_T\hat{W}_T^{PI}] + yE[\xi_T W_T],$$

kde nerovnosť vznikla vďaka tomu, že rovnosť (19) nastáva pre $W_T = \hat{W}_T^{PI}$ a pre ľubovoľné W_T môže nastávať aj nerovnosť.

S konštantnou sme prešli do vnútra strednej hodnoty a zároveň sme výraz na pravej strane spojili do jednej strednej hodnoty, pretože súčet stredných hodnôt je stredná hodnota súčtu. Takže sme dostali

$$E[u(\hat{W}_T^{PI})] - E[u(W_T)] \geq E[(u(\hat{W}_T^{PI}) - y\xi_T\hat{W}_T^{PI}) - (u(W_T) - y\xi_T W_T)] \geq 0,$$

kde sme druhú nerovnosť dostali z Lemy 5.2, pretože výraz $\hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)$ maximalizuje funkciu $u(W_T) - y\xi_T W_T$.

Zatiaľ sme dokázali iba aký tvar by mohla mať funkcia, ktorá maximalizuje našu úlohu. Na dokončenie dôkazu sme potrebovali ešte dokázať, či takáto funkcia existuje. Postupovali sme rovnako ako pri dokazovaní existencie riešenia pri VaR úlohe.

Predpokladajme, že existuje riešenie a je v tvare ako je zadané vo Vete (5.1). Zobrali sme si rovnicu (39), ktorú má spĺňať y

$$E_{\mathbb{P}}[\xi_T\hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)] = W_0.$$

Strednú hodnotu na ľavej strane rovnice sme vyjadrili, rovnako ako pri VaR, v tvare

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}[\xi_T\hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)] &= E\left[\xi_T(I(y\xi_T)1_{\xi_T<\underline{\xi}} + \underline{W}1_{\underline{\xi}\leq\xi_T})\right] \\ &= E\left[\xi_T I(y\xi_T)1_{\xi_T<\underline{\xi}}\right] + E\left[\xi_T\underline{W}1_{\underline{\xi}\leq\xi_T}\right]. \end{aligned}$$

Funkcia $E\left[\xi_T\hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)\right]$ je parametrický integrál

$$E_{\mathbb{P}}[\xi_T\hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)] = \int_{\Omega} \xi_T\hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)(T, y)d\mathbb{P}. \tag{43}$$

Ten sme si prepísali pomocou poznatku, že $\ln\xi_T \sim N(-(r + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2)T, \|\kappa\|^2 T)$, za predpokladu, že $r(t) = r$ a $\kappa(t) = \kappa$, na tvar

$$\int_{\Omega} \xi_T\hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^+} x\hat{W}_T^{PI}(x, y)f_{\xi_T}(x)dx,$$

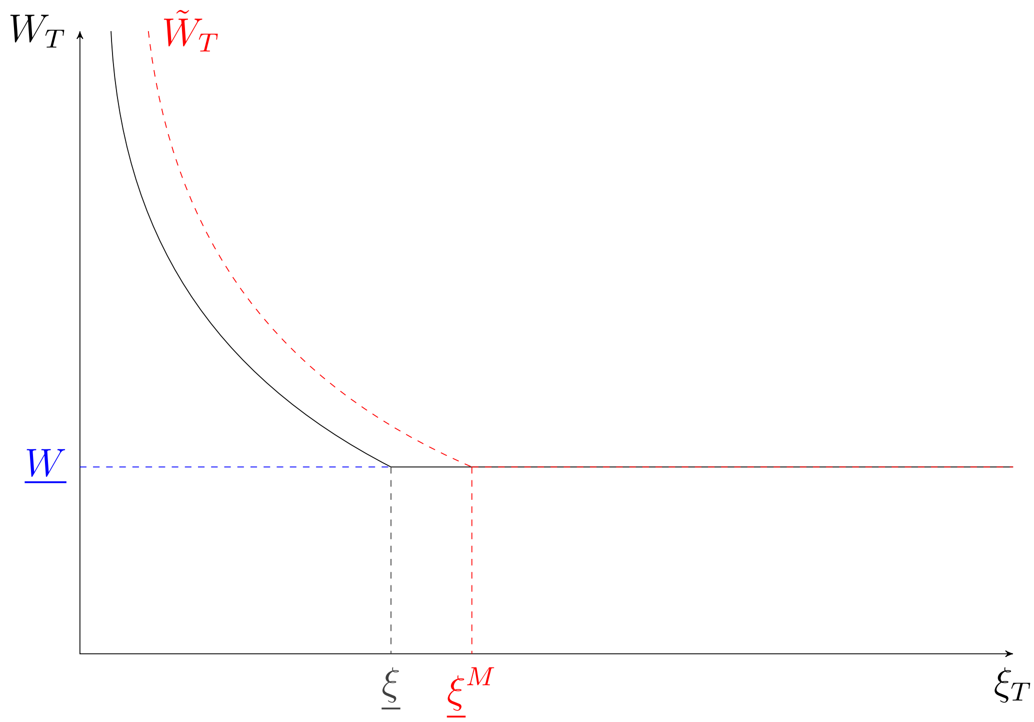
kde $f_{\xi_T}(x)$ je hustota ξ_T. Rovnako ako v dôkaze Vety 4.5, sme použili Lemu 4.6.

Označili sme si funkciu pod integrálom za našu funkciu $f(x, y) = x\hat{W}_T^{PI}(x, y)f_{\xi_T}(x)$. Potom je táto funkcia spojitá v x na celom $\mathbb{R}^+$ pre každé y.

Ako našu majorantu sme si zvolili funkciu $g(x) = x\tilde{W}_T f_{\xi_T}(x)$, kde $\tilde{W}_T$ je v tvare

$$\tilde{W}_T = \begin{cases} \hat{W}_T^M, & \text{pre } \xi_T < \underline{\xi}^M \\ \underline{W}, & \text{pre } \xi_T \geq \underline{\xi}^M, \end{cases} \tag{44}$$

kde $\hat{W}_T^M$ je optimálne riešenie pre Mertonovu úlohu a $\underline{\xi}^M : I(y^M \underline{\xi}^M) = \underline{W}$. Táto funkcia je zobrazená na Obr. 10.



Obr. 10: Optimálne riešenie úlohy zaistenia portfólia je zobrazené čiernou farbou a červenou čiarou je zobrazená funkcia $\tilde{W}_T$.

Funkcia $g(x) \geq |f(x,y)|$ a zároveň spĺňa aj požiadavku konečnosti integrálu, kvôli tvaru hustoty ξ_T. Z toho vyplýva, že podľa Lemy 4.6 je funkcia $E\left[\xi_T \hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)\right]$ spojitá.

Pri dokazovaní monotónnosti tejto funkcie pre $y \geq 0$, pri použití funkcie užitočnosti v tvare $u(x) = \frac{x^p}{p}$ pre $p < 1$ sme postupovali podobne ako pri dôkaze Vety 4.5.

V tomto prípade sme brali do úvahy výraz

$$E\left[\xi_T I(y\xi_T) 1_{\xi_T < \underline{\xi}}\right] + E\left[\xi_T \underline{W} 1_{\underline{\xi} \leq \xi_T}\right]$$

a následne sme sa pozreli, čo sa deje s členmi jednotlivo.

V prvom sčítanci sa nám zníži hodnota, ale zároveň sa nám zmenší aj oblasť, pretože $\underline{\xi}$ sa zníži kvôli zväčšeniu y o $\varepsilon > 0$

$$\underline{\xi} = \frac{u'(\underline{W})}{y} = \frac{\underline{W}^{p-1}}{y} > \frac{\underline{W}^{p-1}}{y+\varepsilon} = \underline{\tilde{\xi}}.$$

V druhom sčítanci sa oblasť zväčší a funkcia vo vnútri strednej hodnoty bude nadobúdať hodnotu $\underline{W}$.

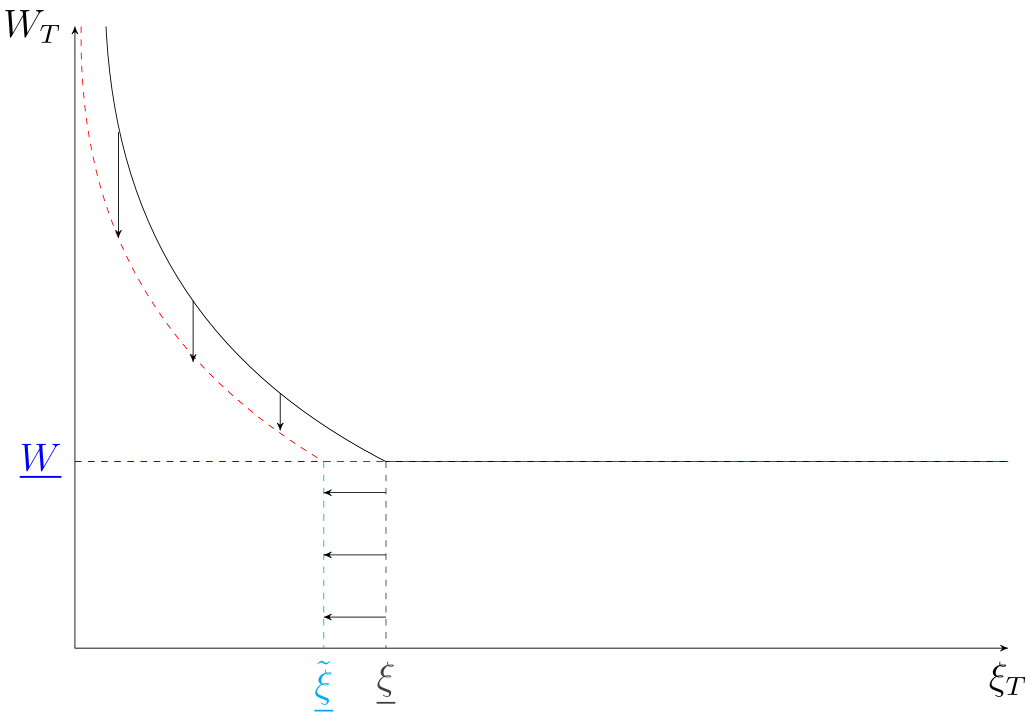
Z týchto výsledkov vyplýva, že:

a) pre $0 \leq \xi_T < \underline{\tilde{\xi}}$ nadobúda funkcia vo vnútri strednej hodnoty nižšie hodnoty ako pôvodná,

b) pre $\underline{\tilde{\xi}} \leq \xi_T < \underline{\xi}$ nadobúda funkcia vo vnútri strednej hodnoty hodnotu $\underline{W}$, ktorá je nižšia ako hodnoty pôvodnej funkcie,

c) pre $\underline{\xi} \leq \xi_T < \bar{\xi}$ nadobúda funkcia rovnaké hodnoty ako pôvodná funkcia, a to $\underline{W}$.

Zmena hodnoty riešenia pri zväčšení y o $\varepsilon > 0$ je zobrazená na Obr. 11.



Obr. 11: Zmena hodnoty riešenia úlohy zaistenia portfólia pri zväčšení y o $\varepsilon > 0$.

Z toho vyplýva, že

$$E\left[\xi_T I(y\xi_T)1_{\xi_T<\underline{\xi}}\right] + E\left[\xi_T \underline{W} 1_{\underline{\xi}\leq\xi_T<\bar{\xi}}\right] > E\left[\xi_T I((y+\varepsilon)\xi_T)1_{\xi_T<\underline{\tilde{\xi}}}\right] + E\left[\xi_T \underline{W} 1_{\underline{\tilde{\xi}}\leq\xi_T<\bar{\xi}}\right].$$

Tým sme dokázali, že funkcia $E\left[\xi_T \hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)\right]$ je klesajúca.

Zobrali sme si rovnicu (39), ktorú má spĺňať optimálne y

$$E\left[\xi_T \hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)\right] = W_0.$$

Keďže táto funkcia je parametrický integrál, tak sme si ju prepísali do tvaru ako v (43)

$$E\left[\xi_T \hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)\right] = \int_\Omega \xi_T \hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y) d\mathbb{P}.$$

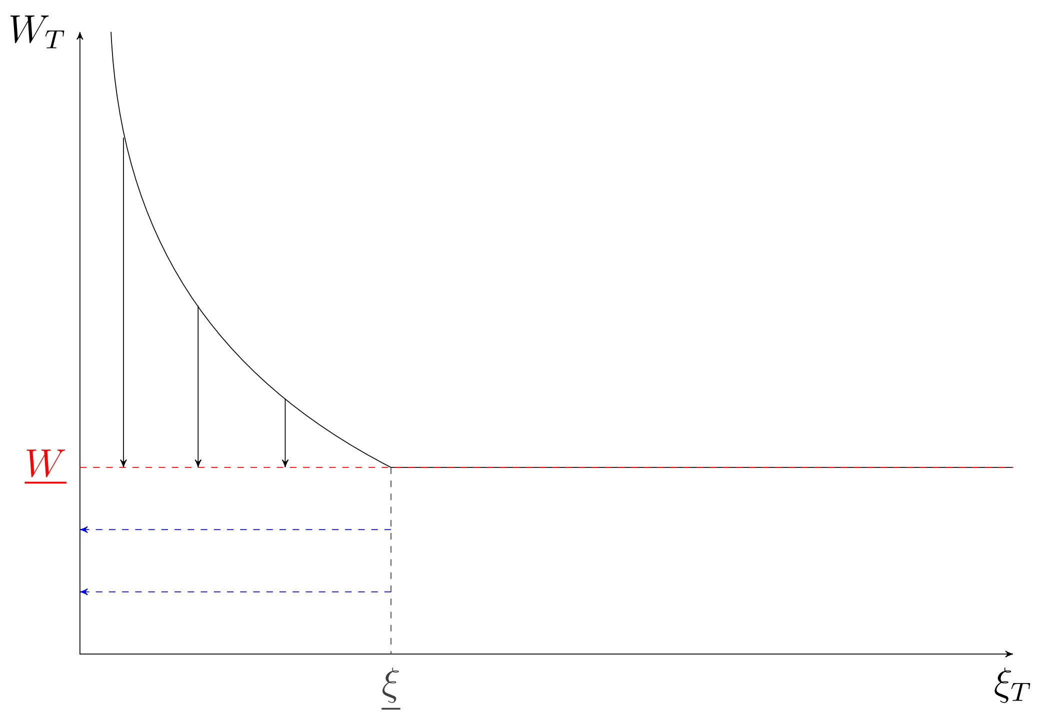
Keďže je táto funkcia nezáporná a má majorantu môžeme vo výraze

$$\lim_{y\to\infty} \int_\Omega \xi_T \hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y) d\mathbb{P} = \int_\Omega \lim_{y\to\infty} \xi_T \hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y) d\mathbb{P}$$

prejsť s limitou pod integrál. Pretože

$$\lim_{y\to\infty} \underline{\xi} = \frac{u'(\underline{W})}{y} = \frac{\underline{W}^{p-1}}{y} = 0$$

je jasné, že $\lim\limits_{y\to\infty} \hat{W}^{PI}(\xi_T, y) = \underline{W}$. Tento limitný prechod je zobrazený na Obr. 12.



Obr. 12: Optimálne riešenie úlohy zaistenia portfólia v limite pre $y \to \infty$ je zobrazené červenou čiarou.

Z toho sme dostali

$$\lim_{y\to\infty} E_{\mathbb{P}}\left[\xi_T \hat{W}(T,y)\right] = E_{\mathbb{P}}\left[\lim_{y\to\infty} \xi_T \hat{W}(T,y)\right] = E_{\mathbb{P}}\left[\xi_T \underline{W}\right] = E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}\underline{W}\right] = e^{-rT}\underline{W} < W_0,$$

kde sme tretiu rovnosť dostali pomocou Radon-Nykodimovej derivácie (4) a nerovnosť zo zadania vety, a to z $\underline{W} < W_0 e^{rT}$. Z toho je zrejmé, že $\exists y_0 : \forall y > y_0$ platí

$$E\left[\xi_T \hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)\right] < W_0.$$

Keďže y^M je riešením rovnice $E[\xi_T W_T^M(\xi_T, y)] = W_0$, je jasné, že

1. $\hat{W}^{PI}(\xi_T, y^M) = W_T^M$ pre $\xi_T \leq \underline{\xi}^M$,

2. $\hat{W}^{PI}(\xi_T, y^M) > W_T^M$ pre $\xi_T > \underline{\xi}^M$.

Riešenie úlohy zaistenia portfólia pre y^M je naša funkcia $\tilde{W}_T$ definovaná v (44) a jej priebeh je zobrazený na Obr. 10.

Z bodov 1.-2. a rovnosti $E[\xi_T W_T^M(\xi_T, y^M)] = W_0$ vyplýva, že

$$E\left[\xi_T \hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y^M)\right] > W_0.$$

Z toho je zrejmé, že $\exists y_1 : \forall y < y_1$ platí

$$E\left[\xi_T \hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)\right] > W_0.$$

Ako funkciu $F(y)$ sme si označili funkciu

$$F(y) = E\left[\xi_T \hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)\right] - W_0.$$

Keďže funkcia $F(y)$ je funkcia $E\left[\xi_T \hat{W}_T^{PI}(\xi_T, y)\right]$ znížená o konštantu má rovnaké vlastnosti.

Keďže je funkcia $F(y)$ spojitá v $y \geq 0$, z týchto výsledkov sme dostali pomocou Vety o medzihodnote, že musí existovať aspoň jedno také $y \in (y_0, y_1)$, pre ktoré je platná rovnosť (39). Z monotónnosti funkcie $F(y)$ v $y \geq 0$ sme dostali, že existuje jediné také y. ∎

5.2 Optimálna hodnota portfólia v čase t

Keďže úloha zaistenia portfólia je limitným prípadom úlohy VaR-RM pre $\alpha = 0$, tak aj optimálna hodnota portfólia v čase t je limitným prípadom optimálnej hodnoty portfólia v čase t VaR-RM úlohy pre $\alpha = 0$. Jediný parameter závislý od α v rovnici (36) je $\overline{\xi}$, ktorý je podľa Vety 4.5 v tvare $\overline{\xi} = \exp\left(\Phi^{-1}(1-\alpha)\|\kappa\|\sqrt{T} - \left(r + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2\right)T\right)$. Po dosadení $\alpha = 0$ dostávame, že $\overline{\xi}^{PI} = \infty$.

Preto sme po dosadení $\alpha = 0$ do rovnice (36) dostali

$$\begin{aligned} \hat{W}_t^{PI}(\xi_t, y) &= (y\xi_t)^{\frac{1}{p-1}}\left(\exp\left[\frac{p}{1-p}\left(r + \frac{\|\kappa\|^2}{2(1-p)}\right)(T-t)\right]\right)\Phi(d_1(\underline{\xi})) \\ &+ \underline{W}e^{-r(T-t)}\left[1 - \Phi(d_2(\underline{\xi}))\right], \end{aligned}$$

kde $\Phi(.)$ je distribučná funkcia štandardizovaného normálneho rozdelenia a

$$\begin{aligned} d_1(x) &= \frac{\ln x - \ln \xi_t + \left(r + \frac{\|\kappa\|^2}{2}\right)(T-t)}{\|\kappa\|\sqrt{T-t}}, \\ d_2(x) &= \frac{\ln x - \ln \xi_t + \left(r - \frac{\|\kappa\|^2}{2}\right)(T-t)}{\|\kappa\|\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

5.3 Optimálna stratégia v čase t

Rovnako ako pri optimálnej hodnote portfólia v čase t, aj pri výpočte optimálnej stratégie použijeme fakt, že úloha zaistenia portfólia je limitným prípadom úlohy VaR-RM pre $\alpha = 0$.

Po dosadení $\alpha = 0$ do rovnice (37) sa optimálna stratégia dá vyjadriť pomocou optimálnej stratégie Mertonovej úlohy

$$\theta_t^{PI} = q_t^{PI}\theta_t^M,$$

kde $\theta_t^M = \frac{1}{1-p}\sigma^{-1}\kappa$ je optimálna stratégia Mertonovej úlohy a q_t^{PI} je dané ako

$$q_t^{PI} = 1 - \frac{\underline{W}e^{-r(T-t)}\left[1 - \Phi(d_2(\underline{\xi}))\right]}{\hat{W}_t^{PI}} + \frac{(1-p)\underline{W}e^{-r(T-t)}}{\hat{W}_t^{PI}\|\kappa\|\sqrt{T-t}},$$

keďže $\lim\limits_{\overline{\xi}\to\infty} \underline{\underline{W}} = \lim\limits_{\overline{\xi}\to\infty} I(y\overline{\xi}) = 0$.

Rovnako ako pri VaR, aj teraz sa nemenia pomery rizikových aktív, pretože $\theta_t^M = \frac{1}{1-p}\sigma^{-1}\kappa$ je konštantný vektor a stratégia q_t^{PI} tento vektor len prenásobuje skalárom.

Záver

Hlavným cieľom predkladanej diplomovej práce bolo doplnenie dôkazov, resp. dotiahnutie detailov v modeli Value at Risk a v modeli zaistenia portfólia. Navyše sme sa pozreli aj na maximálnu možnú dolnú hranicu pri úlohe VaR-RM investora.

Najprv sme potrebovali v prvej kapitole zadefinovať predpoklady a základné pojmy, ktoré sú potrebné pri všetkých úlohách optimalizácie portfólia, ktoré sme definovali v diplomovej práci. To sme urobili komplexne, ale čo najzrozumiteľnejšie pre čitateľa.

V druhej kapitole sme popísali základnú úlohu optimalizácie portfólia, a to úlohu nezaisteného investora (12). K tejto úlohe sme sa dopracovali úvahou o investorovi, ktorý chce optimalizovať iba hodnotu svojho portfólia. Neskôr sme uviedli Vetu 2.1, kde je zadefinované optimálne riešenie Mertonovej úlohy, ktoré sme využívali v ďalších kapitolách ako benchmark. Zámerom tejto kapitoly bolo aj prehľadným postupom odvodiť optimálnu hodnotu portfólia v čase t, ako aj optimálnu stratégiu v tomto čase. Uviedli sme odvodenia väčšiny spomenutých výrazov a zároveň sme sa ich snažili čo najviac zjednodušiť.

V tretej kapitole sme popísali rôzne ohraničenia na riziko, ktoré sa v aplikáciách najviac používajú. Ku každému rizikovému ohraničeniu sme sa snažili dostať úvahou tak, aby to bolo pre čitateľa čo najzrozumiteľnejšie. Postupne sme vyjadrili úlohu VaR-RM investora, úlohu zaistenia portfólia, úlohu EL-RM investora a úlohu AVaR-RM investora. Rovnako sme pri týchto úlohách, resp. mierach popísali ich kladné aj záporné vlastnosti. V ďalších dvoch kapitolách sme sa zamerali na v praxi často používané modely: Value at Risk a zaistenie portfólia.

Vo 4. kapitole sme podrobnejšie popísali vlastnosti úlohy VaR-RM investora. Najprv sme sa zamerali na maximálnu možnú dolnú hranicu $\underline{W}$, na ktorú môže spadnúť investorova hodnota portfólia, a ktorú si môže investor sám určiť. Sformulovali sme úlohu o maximálnej možnej hranici $\underline{W}$ (23) a vo Vete 4.1 sme uviedli jej riešenie. Pomocou úlohy (25), ktorej riešenie sme uviedli vo Vete 4.2 a Lemy 4.3 sme dokázali Vetu 4.1.

Následne sme uviedli Vetu 4.4, kde sme uviedli riešenia VaR-RM úlohy, ktoré sa líšia v závislosti od parametra $\underline{W}$. Kde pre $\underline{W} > \underline{W}^{max}$ sme ukázali, že riešenie neexistuje v dôkaze Vety 4.1. Pre $\underline{W} \leq \underline{W}^{M}(\bar{\xi})$ je riešenie v tvare riešenia Mertonovej úlohy, pretože rizikové ohraničenie vo VaR-RM úlohe je redundantné.

My sme sa sústredili na dôkaz existencie riešenia sústavy pre riešenie úlohy VaR-RM pre $\underline{W}^M < \underline{W} \leq \underline{W}^{max}$, čo sme uviedli vo Vete 4.5. Navyše v tejto Vete uvádzame ešte tvar $\overline{\xi}$ pri našich predpokladoch. Dôkaz existencie riešenia sústavy (28)-(31), tzn. existenciu y sme dokazovali pre $\underline{W}^M < \underline{W} < \underline{W}^{max}$.

Prípad $\underline{W} = \underline{W}^{max}$ sme uviedli vo Vete 4.7, kde dôkaz priamo vyplýval z Vety 4.1. Ďalej sme uviedli optimálnu hodnotu portfólia v čase t a rovnako aj optimálnu stratégiu v čase t, ktoré sme použili v 5. kapitole.

V 5. kapitole sme sa venovali úlohe zaistenia portfólia, kde sme uviedli riešenie tejto úlohy vo Vete 5.1. V dôkaze tejto vety sme použili Lemu 5.2. V tejto kapitole sme v závere uviedli optimálnu hodnotu portfólia v čase t, ktorú sme dostali ako optimálnu hodnotu v čase t pre VaR-RM úlohu, pri $\alpha = 0$. Rovnako sme dostali aj optimálnu stratégiu v čase t z optimálnej stratégie pre VaR úlohu.

Hlavným výsledkom predkladanej diplomovej práce je doplnenie dôkazu existencie optimálneho riešenia pre úlohu VaR-RM, ako aj nájdenie riešenia úlohy zaistenia portfólia. Ďalším výsledkom sú aj postupy pri odvádzaní optimálnej hodnoty portfólia a stratégie v čase t pre Mertonovu úlohu, ako aj vyjadrenie optimálnej hodnoty portfólia a stratégie v čase t pre úlohu zaistenia z optimálnej hodnoty portfólia a stratégie v čase t pre úlohu VaR-RM investora.

Literatúra

[1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D.: *Coherent measures of risk* Mathematical Finance 9 (1999), 203-228

[2] Basak, S., Shapiro, A.: *Value-at-risk based risk management: Optimal policies and asset prices*, The Review of Financial Studies 14 (2001), 371-405

[3] Föllmer, H., Schied, A.: *Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Times*, Walter de Gruyter, Berlin, 2011

[4] Gabih,A., Sass, J., Wunderlich R.: *Utility maximization under bounded expected loss*, Stochastic Models 25(3)(2009), 375-407

[5] Harcek, M.: *Riadenie portfólia pomocou zaistených stratégií*, dizertačná práca, FMFI UK, Bratislava, 2014

[6] Kollár, M., Kossaczká, Ľ., Ševčovič, D.: *Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch*, Knižničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, 2012, dostupné na internete (6.2.2020): `http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/knihy/difint-kks.pdf`

[7] Krokhmal, P., Palmquist, J., Uryasev, S.P.: *Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints*, The Journal of Risk Vol. 4, 2 (2002), 11-27

[8] Melicherčík, I., Harcek, M.: *Dynamic portfolio optimization with AVaR constraint*, preprint, FMFI UK, Bratislava, 2017

[9] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, Bratislava, 2005

[10] Merton, R. C.: *Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuoustime case*, The review of Economics ans Statistics 51 (1969), 247-257

[11] Musiela, M., Rutkowski, M.: *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, New York, 1998

[12] Samuelson, P. A.: *Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming* The Review of Economics and Statistics 51 (1969), 239-246