

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



DYNAMICKÉ DEA MODELOVANIE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DYNAMICKÉ DEA MODELOVANIE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: DOC. RNDr. Margaréta Halická, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Anna Mária Miglierini
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Dynamické DEA modelovanie
Dynamic DEA modeling

Anotácia: V poslednom období sa v časopiseckej literatúre z oblasti DEA (Data Envelopment Analysis) publikujú práce, ktoré sa zaoberajú tzv. Network DEA alebo Dynamic Network DEA a poukazuje sa na súvislosť Dynamic Network DEA s Bellmanovou rovnicou dynamického programovania. Táto diplomová práca sa bude venovať problematike Network DEA a analyzovať opodstatnenosť a praktické využitie podobných súvislostí na meranie dynamickej efektívnosti.

Vedúci: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Dátum zadania: 24.01.2018

Dátum schválenia: 25.01.2018

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Pod'akovanie Touto cestou sa chcem pod'akovat svojej vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc. za ochotu, trpezlivosť, podnetné pripomienky, odborné rady a poskytnuté literárne zdroje.

Abstrakt v štátnom jazyku

MIGLIERINI, Anna Mária: Dynamické DEA modelovanie [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2020, 78 s.

V tejto práci sa zaoberáme obáľkovou analýzou dát pri dynamickom procese výroby. Na zachytenie dynamiky v modeloch slúžia tzv. kvázi-fixné vstupy (quasi-fixed inputs), ktoré v tejto práci označujeme ako medziprodukty. V literatúre často reprezentujú rôzne výrobné faktory, ktorých prehľad uvádzame spolu s modelmi, ktoré k nim boli vytvorené. Z modelov sa viac zameriame na dva typy - model založený na minimalizácii nákladov a model založený na optimalizácii technickej efektivity. Ich analógie a modifikácie použijeme na numerické experimenty.

Kľúčové slová: dynamické DEA modelovanie, dynamická efektivita, network DEA, model minimalizácie nákladov, model maximalizácie zisku, model optimalizácie technickej efektivity

Abstract

MIGLIERINI, Anna Mária: Dynamic DEA modeling [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2020, 78 p.

In our work we investigate data envelopment analysis in dynamic framework. To capture the dynamics of production process models use quasi-fixed inputs which according to literature can represent different production factors. We provide overview on this subject, and related models. We focus on two types of models - one that minimizes costs and one that optimizes technical efficiency measure. Modifications of those serve for numeric experiments.

Keywords: dynamic DEA modeling, dynamic effectivity, network DEA, cost minimization model, profit maximization model, technical efficiency measure optimization

Obsah

Úvod	8
1 Modely bez dynamiky	10
1.1 Viacstupňový výrobný proces bez medzičasovej závislosti vstupov a výstupov	11
1.1.1 Malmquistov index produktivity	14
1.1.2 Window Analysis	14
1.2 Viacstupňový výrobný proces s medzičasovou závislosťou vstupov a výstupov	15
2 Prehľad DDEA prístupov v literatúre	17
2.1 Koncept zásob v DDEA modeloch	17
2.2 Koncept kapitálu v DDEA modeloch	19
2.3 Koncept nákladov na úpravu v DDEA modeloch	21
2.3.1 Nákladový NG model	22
2.3.2 FG model výstupnej efektivity	24
2.3.3 Nemerateľné dynamické faktory	24
2.4 Obmeny konceptov v DDEA	25
2.5 Aplikácie a využitie	26
2.5.1 Energetické spoločnosti	26
2.5.2 Bankový sektor	26
2.5.3 Poľnohospodárstvo	27
3 Modifikácie modelov a numerické experimenty	29
3.1 Dáta na testovanie modelov	29
3.2 Model založený na minimalizácii nákladov	31
3.3 Model maximalizácie zisku	32
3.4 Model maximalizácie výnosov	33
3.5 Model založený na optimalizácii technickej efektivity	34
3.6 Obmeny	36
3.6.1 Voľný počiatočný stav medziproduktov	36
3.6.2 Multiplikatívny tvar modelu maximalizácie zisku	36
3.6.3 Medziprodukty v účelovej funkcii a ich ceny	39

Záver	42
Zoznam použitej literatúry	44
Príloha A	48
Príloha B	54
Príloha C	61
Príloha D	67
Príloha E	74

Úvod

Obálková analýza dát DEA je metódou merania relatívnej efektivity súboru rozhodovacích jednotiek *DMU*, ktoré využívajú viac vstupov na vytvorenie viacerých výstupov v určitom časovom období. Od uverejnenia priekopníckej práce Charnesa, Coopra a Rhodesa v roku 1978 boli publikované početné štúdie, ktoré diskutovali o metodológii a uplatňovaní DEA. Nielen neziskové organizácie, ale aj ziskové spoločnosti považujú túto techniku za efektívnu pri identifikácii neefektívnych *DMU*, ako aj faktorov, ktoré spôsobujú neefektivitu.

Klasické metódy DEA boli navrhnuté na meranie výkonu *DMU* v určenom jednom časovom období statickým spôsobom. Ak sa pri výrobnom procese vyskytujú viaceré časové obdobia, ktoré sú navzájom poprepájané, celková efektivita sa musí merať dynamicky, berúc do úvahy vzájomný vzťah medzi po sebe idúcimi obdobiami. Pokiaľ by sa na hodnotenie takéhoto prípadu použil iba statický rámec, výsledné merania efektivity by boli zavádzajúce. Medzičasové prepojenia totiž majú vplyv na meranie efektivity. Skúmaniu tohto vplyvu sa venuje veľa prác a článkov.

Termín „dynamické DEA“ označuje používanie modelov DEA na opísanie vzájomných vzťahov medzi jednotlivými časovými obdobiami a použitie pridružených metód riešenia na výpočet relatívnej efektivity súboru rozhodovacích jednotiek *DMU*, ktoré pracujú v priebehu viacerých časových periód. Vzájomné prepojenia medzi časovými obdobiami môžu mať rôzne formy. Vo väčšine prípadov sú však dvomi hlavnými príčinami dynamiky kapitálové vstupy a tzv. náklady na úpravu (adjustment cost). Napríklad Sengupta (1994) použil prístup nákladov na úpravu pri analýze vplyvu averzie rizika a výkyvov výstupov na dynamickú produkčnú hranicu, keď sa na produkciu výstupov používajú ako súčasné, tak aj kapitálové vstupy. Tieto prvotné modely však rátajú s iba jedným výstupom. Färe a Grosskopf v [8] zaviedli dynamické aspekty výroby do konvenčného DEA modelu s viacerými výstupmi. Vypracovali niekoľko prístupov na modelovanie produkcie s prepojeniami časových období, ktoré sa stali základom mnohých neskorších štúdií dynamickej DEA. Sengupta v [30] rozšíril svoju pôvodnú myšlienku tak, aby zahŕňala neistotu o budúcich cenách vstupov. Nemoto a Goto v prácach [26] a [25] pri meraní efektivity produktivity rozdelili vstupy na variabilné vstupy a kvázi-fixné vstupy. Von Geymueller zase v článku [15] ich model upravil tak, aby sa vedel vyhnúť informáciám o cenách. Silva a Stefanou v [34] odvodili hranice pre merania efektivity v kontexte technológie nákladov

na úpravu a minimalizácie nákladov cez všetky časové obdobia. Chen a van Dalen vo svojej práci [22] vytvorili model, ktorý zohľadňuje oneskorené efekty produktivity pri meraní efektivity. Tone a Tsutsui popísali v [36] model založený na slackoch, ktorý meria celkovú a periódovú efektivitu, keď sú dve po sebe nasledujúce obdobia spojené prenosom medziproduktu.

V našej práci najprv stručne uvedieme dva prístupy, ktoré pracujú s prechodom v čase, ale v skutočnosti nezahŕňajú dynamiku. Jedným z nich je window analysis a druhým Malmquistov index produktivity. V ďalšej časti sa venujeme prehľadu rôznych teórií a aplikácií dynamického DEA v literatúre. Z modelov uvedených v tejto časti, potom v poslednej kapitole odvádzame vlastné formulácie, ktoré aplikujeme na vygenerované dáta z článku [36].

1 Modely bez dynamiky

V klasických DEA modeloch sa neuvažuje dynamika. Zvyčajne sa v nich analyzuje správanie N útvarov, tzv. rozhodovacích jednotiek (decision making units), ktoré sa označujú ako DMU_n , $n = 1, \dots, N$, v jednom časovom období. V tomto období všetky jednotky vykonávajú rovnakú činnosť, ktorá je charakterizovaná I vstupmi a J výstupmi. Hovorí sa, že sa riadia tou istou technológiou. Hodnoty vstupov n -tej jednotky sa označujú x_n a výstupov y_n . To znamená, že x_n je I -rozmerný vektor vstupov n -teho útvaru a y_n je jeho J -rozmerný vektor výstupov. Zložky týchto vektorov označujeme x_{in} , $i = 1, \dots, I$, a y_{jn} , $j = 1, \dots, J$. To znamená, že

$$x_n = (x_{1n}, \dots, x_{in}, \dots, x_{In})^\top \quad \text{a} \quad y_n = (y_{1n}, \dots, y_{jn}, \dots, y_{Jn})^\top.$$

Vektory vstupov a výstupov sa zvyknú zoskupovať do matíc vstupov a výstupov nasledovne

$$X = (x_1, \dots, x_N) \quad \text{a} \quad Y = (y_1, \dots, y_N),$$

z čoho vyplýva, že X je matica typu $I \times N$ a Y je matica typu $J \times N$. Zvyčajne sa v DEA predpokladá, že dáta sú nezáporné a $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$, pre všetky n .

Pomocou týchto dát sa definuje aproximácia P technologickej množiny, ktorá je najmenšou množinou obsahujúcou tieto dáta a zároveň spĺňa axiómy [17]

1. konvexnosť

$$(x_1, y_1) \in P, (x_2, y_2) \in P \implies \forall \lambda \in [0, 1] : (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \in P,$$

2. free disposability - voľná disponovateľnosť

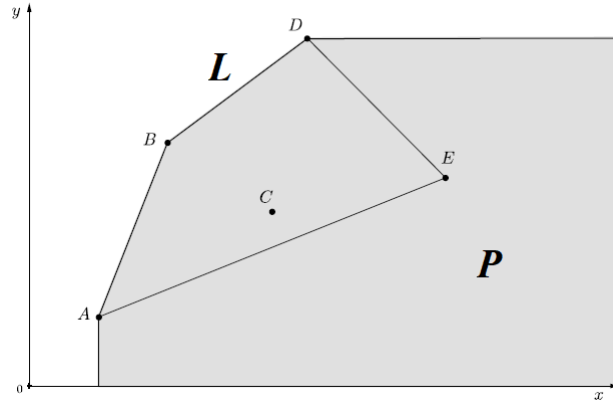
$$(x_1, y_1) \in P \implies \forall x \geq x_1 : (x, y_1) \in P,$$

$$(x_1, y_1) \in P \implies \forall y \leq y_1 : (x_1, y) \in P.$$

Analyticky takúto množinu môžeme zapísať nasledovne:

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^I \times \mathbb{R}_+^J \mid X\lambda \leq x, Y\lambda \geq y, \mathbf{1}^\top \lambda = 1\}. \quad (1)$$

Na obrázku 1 je zakreslená technologicá množina generovaná útvarmi $A - E$ v prípade jednorozmerného vstupu a jednorozmerného výstupu. V DEA modeloch sa využíva, že



Obr. 1: Množina produkčných možností. [17, Obr. 5.4]

množina P je v smeroch zmenšujúcich sa x a zväčšujúcich sa y ohraničená. Časť jej hranice L , ktorá zodpovedá Pareto optimálnym bodom, sa označuje ako efektívna hranica. Jednotlivé DEA modely pre každé DMU_n , $n = 1, \dots, N$, hľadajú na hranici dominujúci bod, vzhľadom na ktorý vyhodnocujú efektivitu daného útvaru. Najbežnejším spôsobom je radiálne skracovanie vstupov, prípadne radiálne predlžovanie výstupov. Tieto prístupy aplikované nad technologickou množinou P odpovedajúcou varabilným výnosom vedú na tzv. BCC modely - radiálne vstupne, prípadne výstupne orientované modely, ktoré môžeme zapísať nasledovne:

- vstupný model: $\min\{\theta \mid (\theta x_0, y_0) \in P\}, \quad (2)$

- výstupný model: $\max\{\psi \mid (x_0, \psi y_0) \in P\}. \quad (3)$

Okrem analýz takýchto klasických statických DEA modelov sa veľmi skoro objavili štúdie, ktoré uvažujú dané výrobné činnosti v časových reláciách.

1.1 Viacstupňový výrobný proces bez medzičasovej závislosti vstupov a výstupov

Tento typ výrobného procesu má časový rozmer, výroba trvá dlhšie ako jedno časové obdobie. Rovnaká ako pri modeloch bez dynamiky však ostáva závislosť vstupov a výstupov, ktorých úrovne korešpondujú stále iba v jednom časovom období. To znamená, že v tomto prípade sa technológia P skladá z postupnosti technológií $P_1, \dots, P_T$, ktoré nie sú nijako previazané. A každá technológia má svoje vlastné vstupy x_t a výstupy y_t . Ak poznáme

hodnoty vstupov a výstupov pre N útvarov v jednotlivých časových obdobiach, môžeme definovať technológiu generovanú takýmito dátami ako karteziánsky súčin technológií v jednotlivých časoch. K tomu však potrebujeme modifikovať symboliku a zaviesť časový index t do popisu vstupov a výstupov jednotlivých DMU . Teda $x_{t,n}$ bude značiť vektor vstupov n -teho DMU , $n = 1, \dots, N$, v čase t , $t = 1, \dots, T$, a podobne $y_{t,n}$ bude značiť jeho vektor výstupov. Z nich vytvorené matice vstupov a výstupov budú vyzeráť nasledovne:

$$X_t = (x_{t,1}, \dots, x_{t,n}, \dots, x_{t,N}) \quad \text{a} \quad Y_t = (y_{t,1}, \dots, y_{t,n}, \dots, y_{t,N}).$$

Aproximácia P technologickej množiny bude mať takýto tvar:

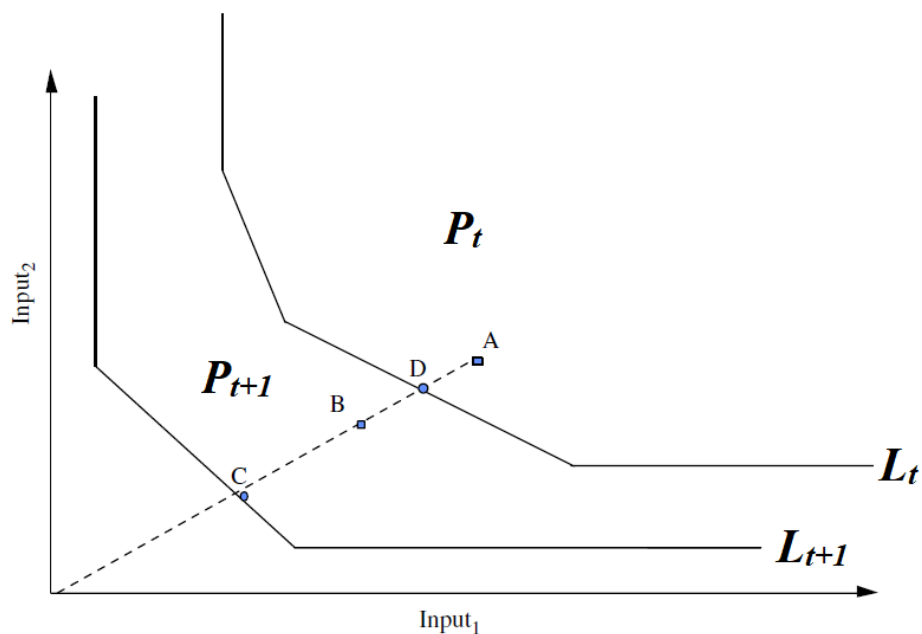
$$P = \{(x_t, y_t)_{t=1, \dots, T} \mid (x_t, y_t) \in P_t, t = 1, \dots, T\} = P_1 \times \dots \times P_T,$$

kde P_t je technológia v čase t . Analyticky možno túto množinu zapísať nasledovne:

$$P = \{(x_t, y_t) \in \mathbb{R}_+^I \times \mathbb{R}_+^J, t = 1, \dots, T \mid X_t \lambda_t \leq x_t, Y_t \lambda_t \geq y_t, \mathbf{1}^\top \lambda_t = 1, t = 1, \dots, T\}. \quad (4)$$

Na meranie výkonnosti výrobných jednotiek sa v tomto prípade vieme pozrieť z dvoch pohľadov. Ak by sme mali sadu DMU pozorovaných v časových obdobiach $t = 1, 2, \dots, T$ a chceli by sme hodnotiť efektívnosť týchto výrobných jednotiek, môžeme tak robiť buď v každom časovom období zvlášť, alebo celkovo v čase, teda v priebehu viacerých období. Podľa toho je v [5] rozlíšená prierezová (cross-sectional) a vývinová (diachronic) efektívnosť.

Prierezová efektívnosť DMU sa vzťahuje na jediné časové obdobie t a je hodnotená vzhľadom na najlepšiu pozorovanú prax v danom časovom období t vzhľadom na hranicu L_t . Na odhad prierezovej efektivity v každom časovom období t teda môžeme použiť štandardné modely DEA alebo ich rozšírenia. Prierezová efektívnosť nám poskytne prehľad o výkonnosti výrobnej jednotky v jednom časovom období, čo však celkovo pri dlhšie trvajúcom výrobnom procese nemusí mať dostatočnú výpovednú hodnotu. V [5] je uvedený nasledovný príklad, kedy hodnotenie podľa prierezovej efektivity navádza na nesprávne celkové ohodnotenie efektivity výrobnej jednotky v čase. Na obrázku 2 sú znázornené hranice efektívnosti L_t a L_{t+1} výroby jednej jednotky výstupu z dvoch vstupov v obdobiach t a $t + 1$. Predpokladajme, že výrobná jednotka sa v čase t nachádza v bode A a v čase $t + 1$ v bode B . DMU je jednoznačne efektívnejšie v časovom období $t + 1$, keďže zabezpečuje jednotku výstupu s oveľa nižšou úrovňou vstupov. Prierezová efektívnosť v

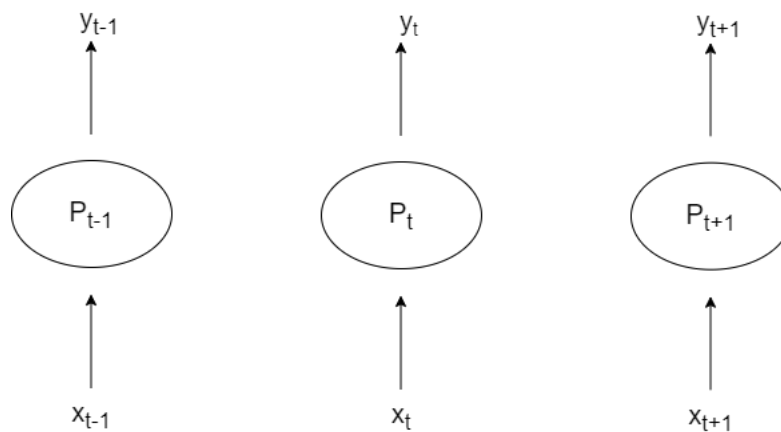


Obr. 2: Prierezová efektivita neodrkadľuje zmeny vo výrobe v priebehu času. [5, Fig. 1]

časovom období t je $\frac{|OD|}{|OA|}$ a v časovom období $t+1$ je $\frac{|OC|}{|OB|}$. Porovnaním $\frac{|OC|}{|OB|} < \frac{|OD|}{|OA|}$ vzniká nesprávny dojem, že výkon výrobnej jednotky sa v priebehu času zhoršuje.

Podobným zavádzajúcim výsledkom vieme predísť použitím vývinovej efektivity. Tento prístup spočíva v meraní zmien produktivity v priebehu času.

Obrázok 3 predstavuje statickú štruktúru výroby, ktorú prezentovali Färe a Grosskopf v [8]. Táto štruktúra predpokladá, že vstupy aj technológia v ktoromkoľvek období t sú exogénne, ale v priebehu času môže prísť k technickej zmene.



Obr. 3: Schematický proces bez medzičasovej závislosti.

1.1.1 Malmquistov index produktivity

Na meranie zmeny produktivity v priebehu času sa často používa prístup, ktorý využíva Malmquistov index. Malmquistov index produktivity (MPI) bol podľa [6] prvýkrát zavedený v práci [2] a definuje mieru zmeny produktivity medzi po sebe nasledujúcimi obdobiami ako pomer vzdialenostných funkcií. Vzdialenostné funkcie merajú, ako môžu byť výstupy (vstupy) výrobnej jednotky preškálované tak, aby sa výrobná jednotka dostala na hranicu množiny produkčných možností. Zmenu produktivity v susediacich časových obdobiach môžeme merať buď pomocou indexu produktivity založeného na vstupoch (vytvoreného pomocou vstupných vzdialenostných funkcií), alebo indexu produktivity založeného na výstupoch (zostaveného pomocou výstupných vzdialenostných funkcií).

Podľa [5] je často využívaným prístupom, založeným na Malmquistovom indexe, prístup vyvinutý v [9]. Mieru celkovej zmeny efektivity výrobnej jednotky tu rozložili na hodnotu zodpovedajúcu posunu na hranici efektívnosti medzi obdobiami t a $t+1$ a na hodnotu „dobe-
behu“ efektivity firmy. Faktor „dobe-
behu“ odzrkadľuje zmenu prierezovej efektivity výrobnej jednotky pri prechode z časového obdobia t do $t+1$. Faktor posunu hranice znázorňuje pohyb v hranici efektívnosti z časového obdobia t do $t+1$ v zmysle o koľko viac (alebo menej) vstupov je potrebných na zabezpečenie danej úrovne výstupu pri zachovaní efektívnej prevádzky.

Prístup cez MPI je však podľa [27] je správny len vtedy, ak je technológia inverzne homogénna a vykazuje konštantné výnosy z rozsahu. Ak tieto podmienky neplatia, potom MPI predstavuje systematicky vychýlenú mieru zmeny produktivity.

1.1.2 Window Analysis

Medzi štúdiami, ktoré používajú statický rámec na zachytenie „zmeny technickej efektivity“, je v DEA tzv. analýza okien (window analysis), ktorú podľa [6] pôvodne navrhli v práci [20]. Analýza okien považuje každú firmu v každom období za inú výrobnú jednotku. Definovaním veľkosti okna W sa výrobné jednotky v prvých W časových obdobiach vyhodnotia pomocou DEA. Ďalej sa k oknu pridá nové obdobie, najstaršie obdobie vypadne a DEA sa znova spustí pre novú sadu výrobných jednotiek. Proces sa opakuje až do konca plánovacieho horizontu. Na určenie veľkosti okna však neexistuje žiadne teoretické zdôvodnenie.

Prístupy, ktoré sme uviedli v tejto časti, sa zameriavajú na kvantifikáciu zmeny meraní výkonnosti získaných nezávisle v rôznych časových obdobiach bez toho, aby sa predpokladala časová závislosť medzi úrovňami vstupov a výstupov v rôznych časových obdobiach. Tieto modely predpokladajú, že vstupy môžu byť okamžite upravené na požadovanú úroveň. Môže sa však stať, že úroveň vstupov v nejakých časoch bude ovplyvňovaná exogénnymi faktormi, a teda predpoklad, že vstupy sú okamžite nastaviteľné, už nebude platiť. O takýchto vstupoch sa v literatúre hovorí ako o kvázi-fixných. Konvenčné statické meranie efektivity bude v takomto prípade vychýlené. V dôsledku toho by vhodné merania efektivity mali zohľadňovať rozdiel medzi kvázi-fixnými a variabilnými vstupmi a predpokladať, že kvázi-fixné vstupy sú fixované v analyzovanom časovom horizonte.

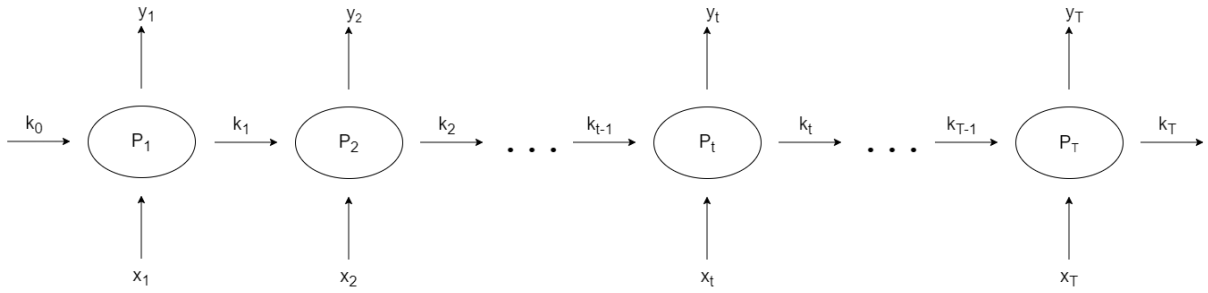
1.2 Viacstupňový výrobný proces s medzičasovou závislosťou vstupov a výstupov

Pri ďalšom type výrobného procesu výrobné jednotky opäť fungujú v priebehu nepretržitej postupnosti časových období, ale úrovňam vstupov už nevieme v jednom časovom období priradiť priamo z nich vyrábané úrovne výstupov. Súčasný vstup totiž ovplyvní nielen súčasný, ale aj budúci výstup a súčasný výstup závisí okrem súčasného aj od vstupov z predošlých časových období. Teda nejaká časť vstupov, po ich začlenení do výrobného procesu, pretrvá v pôvodnej alebo upravenej forme niekoľko období, kým sa prejaví na finálnych výstupoch. V literatúre bývajú tieto vstupy označované ako kvázi-fixné, my ich budeme nazývať medziprodukty.

K zavedenému značeniu x_t - vstupy v čase t a y_t - výstupy v čase t budeme uvažovať aj medziprodukty k_t , kde k_{t-1} je vstupom do produkcie v čase t a k_t je výstupom z produkcie v čase t . Budeme predpokladať, že k_t , $t = 0, \dots, T$, je L -rozmerný vektor. Symbolom $k_{t,ln}$ označujeme l -ty medziprodukt n -teho útvaru, ktorý je výstupom z t -tej produkcie a vstupom do $t+1$. Na základe dát N útvarov v časoch t definujeme maticu medziproduktov K_t , $t = 0, \dots, T$, ktorá pozostáva zo stĺpcov medziproduktov pozorovaných N útvarov v čase t . Technológia dynamického DEA je znázornená schematicky na obrázku 4. Analyticky ju

môžeme zapísať nasledovne

$$P = \left\{ (x_t, y_t, k_t) \in \mathbb{R}_+^I \times \mathbb{R}_+^J \times \mathbb{R}_+^L, t = 1, \dots, T \left| \begin{array}{l} X_t \lambda_t \leq x_t, Y_t \lambda_t \geq y_t, \\ K_{t-1} \lambda_t \leq k_{t-1}, K_t \lambda_t \geq k_t, \quad t = 1, \dots, T \\ \mathbf{1}^\top \lambda_t = 1, \lambda_t \geq 0, \end{array} \right. \right\}. \quad (5)$$



Obr. 4: Technológia dynamického DEA.

Takáto technológia teda predstavuje špeciálny typ tzv. network DEA, nad ktorým dynamické DEA formuluje širokú škálu rozličných modelov. V ďalšom budeme používať skratku DDEA na označovanie dynamického DEA.

2 Prehľad DDEA prístupov v literatúre

Pri snahe zakomponovať dynamické správanie produkcie do DEA modelov sa v rôznych článkoch vychádza z rôznych ekonomických konceptov.

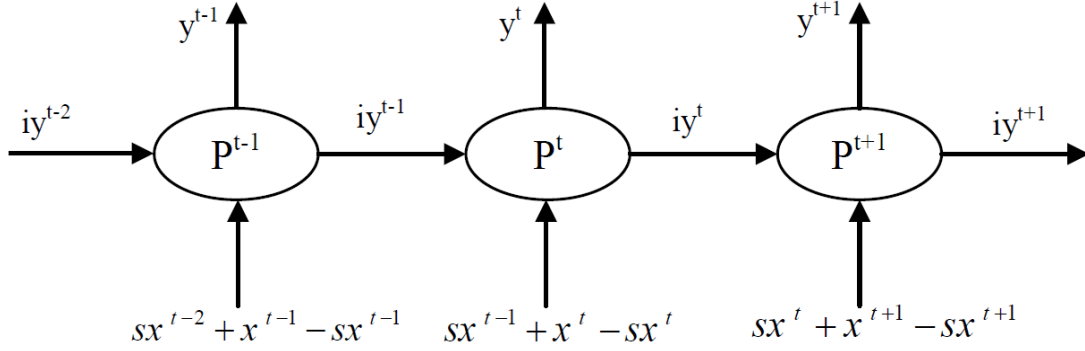
2.1 Koncept zásob v DDEA modeloch

Firmy často uskladňujú hotové produkty za účelom vykrytia neskoršieho dopytu, ktorý by mohol prekračovať výrobnú kapacitu. Zásoby si však vytvárajú aj z iných tovarov, napríklad nedokončených produktov alebo surovín, ktoré ešte budú vstupovať do výroby. Teda časové obdobie, v ktorom sa zaeviduje vstup tovaru do výrobného procesu, sa môže líšiť od obdobia jeho použitia. Toto priamo vedie k dynamickému charakteru produkcie, keďže zásoby sa presúvajú v čase.

V článku [16] autor na modelovanie produkcie vyvinul prístup založený na kombinácii network analýzy a dynamickej produkčnej funkcie. Výrobný proces definuje ako sieť vzájomne súvisiacich výrobných činností, ktoré sa spoločne podieľajú na produkcii konečných výstupov. Výrobné činnosti využívajú exogénne vstupy, neskladovateľné aj skladovateľné, a medziprodukty vstupujúce do nich z iných výrobných činností. Každá výrobná činnosť zodpovedá dynamickú produkčnú funkciu, ktorá opisuje transformáciu vstupov na výstupy a berie do úvahy, že ich hodnoty sa v čase menia. Výrobná jednotka môže uskladňovať exogénne vstupy, medziprodukty aj konečné výstupy. Kapitál nie je explicitne modelovaný ako výrobný faktor, ale predpokladá sa, že je fixný v priebehu analyzovaného plánovacieho horizontu. Predpokladom tohto modelu je, že každá výrobná činnosť produkuje iba jeden konečný výstup.

V súlade s týmto konceptom sú modely network DEA (NDEA), ktoré prezentovali Färe a Grosskopf v [8]. Tieto explicitne zahŕňajú sieť výrobných činností a medziproduktov do výrobného procesu. NDEA umožňuje každému uzlu reprezentovať tú istú výrobnú jednotku v rôznych časových obdobiach, takže môže byť použitá aj na modelovanie produkcie, ktorá prechádza viacerými časovými obdobiami. Takéto tzv. dynamické NDEA modely považujú každé obdobie za činnosť s vlastnou technológiou a s časovo špecifickými vstupmi a výstupmi. Niektoré výstupy v období t sa prenášajú do obdobia $t+1$ ako zásoby hotových výrobkov. Obrázok 5 znázorňuje dynamický NDEA model s prepojením medzi

po sebe idúcimi obdobiami. Celkový výstup v ktoromkoľvek období t je tvorený konečným výstupom y_t a zásobou hotových výrobkov iy_t . Vstupmi sú priame vstupy x_t a zásoby surovín sx_t .



Obr. 5: Dynamický NDEA model s uskladniteľnými vstupmi. [6, Figure 2]

Podľa [6] v práci [8] uvažovali štruktúru zobrazenú na Obr. 5 a pri výstupne orientovanej optimalizácii produkcie výrobnej jednotky DMU_o navrhli ako jej dynamickú efektivitu dostať riešením nasledovného optimalizačného problému:

$$\begin{aligned} \max_{\{\theta_{\tau,o}, \lambda_{\tau}, iy_{\tau,o}, sx_{\tau,o}\}} \sum_{\tau=t-1}^{t+1} \theta_{\tau,o} \quad (6) \\ (Y_{\tau} + iY_{\tau})\lambda_{\tau} \geq \theta_{\tau,o}y_{\tau,o} + iy_{\tau,o}, \quad \tau = t-1, t, t+1 \\ (sX_{\tau-1} + X_{\tau} - sX_{\tau})\lambda_{\tau} \leq sx_{\tau-1,o} + x_{\tau,o} - sx_{\tau,o}, \quad \tau = t-1, t, t+1 \\ iY_{\tau}\lambda_{\tau} \leq iy_{\tau,o}, \quad \tau = t-1, t, t+1 \\ \lambda_{\tau} \geq \mathbf{0}, \quad \tau = t-1, t, t+1, \end{aligned}$$

kde Y_{τ} je matica, ktorej stĺpcami sú vektory konečných výstupov jednotlivých DMU , X_{τ} je matica, ktorej stĺpcami sú vektory vstupov, iY_{τ} je matica zásob hotových výrobkov a sX_{τ} je matica uskladnených surovín a symbol $\mathbf{0}$ predstavuje nulový vektor prislúchajúceho rozmeru.

Tento model maximalizuje výstupnú efektivitu výrobnej jednotky v priebehu času výpočtom skladovateľného výstupu iy_{τ} a skladovateľných vstupov sx_{τ} endogénne. Tým, že dynamické NDEA modely povoľujú rôzne technológie v rôznych obdobiach, poskytujú možnosť zmeny technológie v priebehu analyzovaného plánovacieho horizontu.

Färe a Grosskopf v [8] analyzujú iba jednoduchý výrobný proces, ktorého prepojenia

v čase vychádzajú z využívania skladovateľných vstupov a výstupov. Ich model navyše neumožňuje zahrnúť znehodnocovanie uskladnených vstupov a výstupov v priebehu času.

Zložitejší výrobný proces je popísaný v [21]. Autor používa širší koncept siete, kde sa výrobný proces v každom čase skladá z čiastkových výrobných procesov. Do nich vstupujú medziprodukty a exogénne vstupy, z ktorých produkujú finálne výstupy alebo ďalšie medziprodukty, ktoré následne využívajú ďalšie čiastkové výrobné procesy. Vyrobené medziprodukty môžu byť uložené na použitie v neskorších časoch a berie sa do úvahy aj ich znehodnocovanie. Hodnotenie efektivity rozhodovacej jednotky začína na úrovni čiastkových výrobných procesov, ktoré sú porovnávané s podobnými čiastkovými výrobnými procesmi ostatných rozhodovacích jednotiek v tom istom časovom období. Z týchto mier efektivity je pre každý čiastkový výrobný proces vytvorená dynamická miera efektivity, ktorá berie do úvahy štruktúru siete a medzičasové vplyvy. Poslednú autor definuje dynamickú technickú efektivitu každého čiastkového výrobného procesu ako pomer minimálneho vstupu k reálne spotrebovanému vstupu, ktorý daný čiastkový proces použil v priebehu celého hodnoteného obdobia. A dynamická technická efektivita rozhodovacej jednotky je definovaná ako súčin jej čiastkových výrobných procesov.

2.2 Koncept kapitálu v DDEA modeloch

Kapitálové aktíva sú podľa [6] ďalším faktorom zodpovedným za dynamický charakter výroby, keďže sa prenášajú v čase. Doba životnosti, počas ktorej sú kapitálové zásoby produktívne, vo všeobecnosti pozostáva z veľa časových jednotiek, ktoré sú bežne používané na zaznamenávanie zodpovedajúcich údajov o vstupoch a výstupoch. Medzičasová závislosť úrovni vstupov a výstupov je spôsobená zmenami úrovni základného kapitálu, napríklad z dôvodu investícií do nového kapitálu.

Kapitálové aktíva môžeme rozlišovať podľa časových období, v ktorých boli zavedené. Podľa toho im pridáme ročník (vintage). Podľa [6] bol tento prístup prvýkrát použitý v práci [23]. Inštalácia nového a odstavenie starého kapitálu predstavuje zdroj tzv. vstavaných technických zmien. Po zabudovaní kapitálu do výrobného procesu už nie je možné nahrádzať tento kapitál variabilnými vstupmi. Prípadné preloženie zavedenia tohto kapitálu do iného obdobia sa dá označiť ako optimalizačný problém v priebehu času, kde najlepšie rozhodnutie vyžaduje informácie ohľadom budúcich očakávaných cien, dopytu a

d'alších faktorov.

Niekoľko štúdií (napr. [37]) analyzuje dynamické aspekty efektivity, keď firmy vlastnia niekoľko ročníkov kapitálového vybavenia. Dve charakteristiky týchto štúdií spočívajú v tom, že kapitálové vybavenie je potrebné na výrobu a že technológia je zakotvená v kapitálovom vybavení. Investovanie do nového kapitálu a likvidácia starého kapitálu prispieva k dynamickému rozvoju firmy a následne ovplyvňuje výrobný proces. V takýchto prípadoch môže ročníkový prístup vysvetliť rozdiely v efektivite [6].

V prípade ročníkových modelov sa možnosti nahradenia kapitálu variabilnými vstupmi pred investovaním (produkčná funkcia *ex ante*) líšia od možností nahradenia po investícii (produkčná funkcia *ex post*) [11]. V čase investovania sa firma na základe svojej *ex ante* produkčnej funkcie rozhodne znásobiť svoj kapitál. Zvolenému kapitálu sa určí fixný objem, takže nie je možné nahradenie kapitálu variabilnými vstupmi. Skutočnú produkciu po investíciách do kapitálu zachytáva produkčná funkcia *ex post*, kde je fixne stanovená výška kapitálu, ale je povolené nahrádzanie variabilnými vstupmi.

Na koncepte *ex ante* a *ex post* produkčných funkcií boli vyvinuté optimalizačné formulácie, ktoré stanovujú počiatočnú úroveň kapitálu (investičné rozhodnutie) a počiatočnú úroveň variabilných vstupov, pričom maximalizujú súčasnú hodnotu čistého zisku počas ekonomickej životnosti počiatočného kapitálu. Firma urobí v čase t počiatočné rozhodnutie o výške investície do kapitálu a o úrovni variabilných vstupov, založené na *ex ante* produkčnej funkcii. Potom vymedzí skutočný výstup počas plánovacieho horizontu T na základe *ex post* produkčnej funkcie. Takéto modely tiež odhadujú optimálnu ekonomickú životnosť kapitálu, pričom stroj sa vyradí, keď variabilné náklady na jeho prevádzku prevýšia cenu tovarov, ktoré vyrába.

Färe a Grosskopf v [8] rozšírili NDEA tak, aby vedeli vyhodnotiť technickú efektivitu firmy, ktorá má kapitálové vybavenie z rôznych ročníkov. Každý ročník modelujú ako uzol, ktorý z prijatého variabilného vstupu vyprodukuje výstup. Celkový výkon výrobné jednotky definujú ako súčet výstupov zo všetkých ročníkov. Ich model NDEA rozhoduje o rozdeľovaní variabilných vstupov medzi jednotlivé ročníky, čím poskytuje možnosť v konkrétnom časovom období t zaviesť nové ročníky a vyradiť staré (tým, že do týchto uzlov nepriradí žiadne variabilné vstupy).

Otázke zoskupovania kapitálu z rôznych ročníkov sa venuje pozornosť v ekonomickej

literatúre o produkcii. Harper (2007) považoval za hlavný problém ročníkových modelov fakt, že nezohľadňujú zastaranosť a technologický pokrok. Zavádzanie nových ročníkov by totiž do istej miery malo vnášať do modelu prínosy technologického pokroku. Preto vytvoril model, v ktorom sa časť kúpeného kapitálu po jeho zavedení do výrobného procesu nemôže predať v nasledujúcich obdobiach. To umožňuje podrobnejšie sledovanie kapitálových aktív a činností s nimi súvisiacich, ako napríklad vyradenie kapitálových prostriedkov, keď ich hraničné náklady na výrobu prevyšujú prínos z vyrábaných výrobkov.

Ak sa vplyv nejakého kapitálového výstupu týka viacerých hodnotiacich období, skresľuje to korešpondenciu úrovní vstupov a výstupov v rámci daného hodnotiaceho obdobia. Sengupta v [31] rieši medzičasovú závislosť úrovní vstupov a výstupov, zaoberá sa však iba obmedzeným prípadom dvojperiódového výrobného procesu, v ktorom kapitálové vstupy majú vplyv na výstup v inom čase. Prístup vyvinutý v dokumente [5] berie do úvahy medzičasové závislosti vstupov a výstupov vo všeobecnom viacperiódovom prípade.

Navýšenie kapitálu vo všeobecnosti nevedie k okamžitému zvýšeniu produktivity. Na začiatku môže dokonca viesť k jej poklesu, čo je spôsobené procesmi ktoré sú všeobecne spojené s nadobúdaním aktív. Výrobné jednotky sa musia naučiť používať nové získané aktíva, teda musia prejsť procesom prispôbovania sa. Nadobúdanie aktív môže tiež spôsobiť narušenie alebo až prerušenie výroby, pokiaľ je potrebné poprepájať nové aktíva s už existujúcimi. Teda plynule prechádzame k úpravovým nákladom (adjustment costs), ktoré sú ďalším faktorom dynamiky výroby.

2.3 Koncept nákladov na úpravu v DDEA modeloch

Podľa [6] sa za úpravové náklady zvyčajne pokladajú ušlé výstupy výrobnej jednotky, o ktoré firma prišla v dôsledku investovania do nového kapitálu (napr. inštalácia nového stroja bežne spôsobí oneskorenie produkcie, nutnosť preškolenia pracovníkov...). Je tu viditeľné jasné prepojenie medzi súčasnou produkciou a expanziou budúcej produkcie. Na zachytenie týchto nákladov v modeli je teda nutný plánovací horizont prechádzajúci cez viaceré časové obdobia.

Färe a Grosskopf v [7] a Nemoto a Goto v [26] a [25] využívajú na zachytenie úpravových nákladov ako ušlého výstupu kvôli investovaniu do kapitálu dynamickú štruktúru NDEA. A to tak, že každé časové obdobie považujú za činnosť s vlastným výrobným procesom

(technológiou). Investovanie do kapitálu v období t je modelované ako endogénne rozhodnutie a ovplyvní stav kapitálu na konci obdobia. Následne potom v období $t + 1$ sa kapitál považuje za medzivstup a ovplyvňuje výrobné možnosti v budúcich obdobiach.

Podľa [32] keď firma získa informácie o zdrojoch svojej technickej neefektívnosti, väčšinou sa ich snaží využiť čo najskôr, nečaká, kým nastane prechod do ďalšieho obdobia. Teda sa môže stať, že firma bude upravovať a meniť výrobnú technológiu v priebehu jedného časového obdobia. Takýmito úpravami môžu byť napríklad rozvoj lepších praktík riadenia výroby, zmeny vo výrobnom procese, ktoré sa opierajú o skúsenosti z minulosti, zdokonaľovanie vychádzajúce z „learning by doing“, teda učenia sa prácou, alebo iné nevstavané technické zmeny.

2.3.1 Nákladový NG model

Nemoto a Goto v práci [25] uvádzajú model, ktorý v ďalšom označujeme ako *Nákladový NG model*. V tomto modeli počítajú nasledovnú hranicu nákladov:

$$\min_{\{x_t, k_t, \lambda_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^T \gamma^t (u_t^\top x_t + w_t^\top k_{t-1}) \quad (7)$$

$$Y_t \lambda_t \geq y_{t,o}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (8)$$

$$X_t \lambda_t \leq x_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (9)$$

$$K_t \lambda_t \geq k_t, \quad t = 1, 2, \dots, T - 1 \quad (10)$$

$$K_{t-1} \lambda_t \leq k_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (11)$$

$$k_0 = \bar{k}_0, \quad (12)$$

$$\mathbf{1}^\top \lambda_t = 1, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (13)$$

$$x_t \geq \mathbf{0}, k_t \geq \mathbf{0}, \lambda_t \geq \mathbf{0}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (14)$$

kde γ je konštantný diskontný faktor, u_t je I -rozmerný vektor cien vstupov v čase t , w_t je L -rozmerný vektor cien medziproduktov v čase t a $\bar{k}_0$ je daný vektor počiatkových hodnôt medziproduktov. Dynamika spojená so zmenou medziproduktov je zachytená ohraňeniami (10) a (11). Podľa [25], ak považujeme medziprodukty za výstupy spojené s obdobím t , čo znázorňuje ohraňenie (10), firmy sa musia vzdať určitého množstva

svojich bežných výstupov y_t , aby si vedeli udržať viac medziproduktov v tomto období. Držanie väčšieho množstva medziproduktov však spôsobuje prenos súčasnej produkcie do budúcich období, keďže na začiatku týchto období dôjde k nárastu medziproduktov (ohraničenie (11)). Podľa [25], model nachádza optimálne rozloženie variabilných vstupov a medziproduktov rozhodovacej jednotky DMU_o v horizonte plánovania T . Mieru celkovej efektivity výrobnnej jednotky určuje tak, že porovnáva minimálne náklady získané z účelovej funkcie s diskontovaným súčtom skutočných nákladov od obdobia 1 do obdobia T . Ďalej sa v práci [25] rieši rozklad celkovej efektivity. Medziprodukty sú držané na ich pozorovanej úrovni a identifikuje sa statická a dynamická miera efektivity. Definovaním a izoláciou statickej miery efektivity a jej odstránením z celkového merania efektivity možno identifikovať čistú mieru dynamickej efektivity, pričom za zdroje neefektivity je považované nákladovo neefektívne rozloženie medziproduktov.

Tento model je zároveň jedným z DDEA modelov, ktoré sa dajú naformulovať ako úlohy optimálneho riadenia a riešiť metódou dynamického programovania. V článku [25] to demonštrujú nasledovným spôsobom. Pri vymedzovaní podmienok pre dynamickú optimalitu uvádzajú duálny model. Z podmienok komplementarity, ktoré platia pre optimálne riešenia primárnej a duálnej úlohy, odvodzujú rovnicu, ktorá môže byť chápaná ako Bellmanova rovnica v teórii dynamického programovania. Pôvodná úloha lineárneho programovania totiž môže byť zapísaná v rekurzívnom tvare, aký vystupuje v dynamickom programovaní, a teda k nej vieme sformulovať Bellmanovu rovnicu. V tejto keď zameníme optimálne hodnoty účelovej funkcie primárnej úlohy optimálnymi hodnotami účelovej funkcie duálnej úlohy, čo môžeme spraviť vďaka tzv. silnej vete o dualite [17, str. 171], dostaneme rovnakú rovnicu, ako odvodenú z podmienok komplementarity. Tento prístup však v kontexte tejto práce považujeme za samoučelný, keďže všetky testované modely sú úlohami lineárneho programovania, a tie vieme riešiť priamo a efektívne.

Odlišný prístup pri konštrukcii modelu založeného na úpravových nákladoch predstavili Silva a Stefanou v [34], ktorý zahrnuli aj opotrebovávanie kapitálových aktív.

2.3.2 FG model výstupnej efektivity

Iný postup zvolili Färe a Grosskopf v modeli dynamického NDEA, ktorý budeme nazývať *FG model výstupnej efektivity*. Tento model bol podľa [6] publikovaný v práci [7] a modeluje výstupne orientovanú mieru technickej efektivity. Uvádzame model podľa [6]:

$$\min_{\{\theta_{t,o}, \lambda_t, k_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^T \theta_{t,o} \quad (15)$$

$$Y_t \lambda_t \geq \theta_{t,o} y_{t,o}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (16)$$

$$X_t \lambda_t \leq x_{t,o}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (17)$$

$$K_t \lambda_t \geq k_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (18)$$

$$K_{t-1} \lambda_t \leq k_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (19)$$

$$k_0 = \bar{k}_0, \quad (20)$$

$$\lambda_t \geq \mathbf{0}, \quad k_t \geq \mathbf{0}, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (21)$$

Spoločnou črtou tohto modelu s nákladovým NG modelom je, že dynamika v oboch modeloch vyplýva z endogénnych medzivstupov, ktoré prevádzujú po sebe idúce obdobia. Oba modely počítajú optimálne časové rozloženie endogénnych premenných. Avšak majú rôzne reprezentácie miery dynamickej efektivity.

2.3.3 Nemerateľné dynamické faktory

Podľa [5] pri určitých výrobných procesoch je možné vytvoriť medzivýstupy alebo kapitálové výstupy, ktoré nie sú priamo merateľné, ale môžu zvýšiť produktivitu v nasledujúcich obdobiach, napríklad výskumná činnosť. Výstupy výskumu, ak zanedbáme otázku ich kvality, sa zvyčajne merajú počtom publikovaných vedeckých prác alebo správ, získaných výskumných grantov a pod. Výskumný tím však môže vytvárať priebežné výstupy vo forme myšlienok a predbežných výsledkov výskumu, ktoré zatiaľ nie je možné publikovať, kvôli ich neúplnosti. Bežné meradlá výstupov výskumu takéto priebežné výstupy nevedia zachytiť. Tieto medzivýstupy však môžu mať dôležité dôsledky pre produktivitu výskumného tímu v nasledujúcich obdobiach.

2.4 Obmeny konceptov v DDEA

K modelu (7)-(14) bolo v závere práce [25] navrhnutých niekoľko možných rozšírení. Prvý návrh sa týka základného predpokladu modelu. Ak tento zmeníme z minimalizácie nákladov na maximalizáciu zisku, dostaneme úlohu lineárneho programovania, v ktorej je diskontovaný súčet čistého peňažného toku maximalizovaný za rovnakých podmienok. Na rozdiel od modelu minimalizovania nákladov sa však aj výstupy stávajú premennými a model ich upravuje na úrovne, pri ktorých dosahuje optimalitu. Na podobnom princípe sme vytvorili model maximalizácie zisku, ktorému sa budeme bližšie venovať v nasledujúcej kapitole.

Ďalší návrh sa týkal predpokladu, že všetky investície sa okamžite zapoja do produkcie. Tento predpoklad možno podľa [25] odstrániť tak, že budeme rozlišovať produktívne (aktívne) medziprodukty od tých, ktoré sú ešte len v štádiu zapájania do výrobného procesu. To sa dá napríklad zo vzťahu medzi aktívnymi medziproduktmi k_t a všetkými medziproduktmi $\tilde{k}_t$ za obdobie t . Tento vzťah závisí od vzoru, schémy, časového oneskorenia pri inštalovaní medziproduktov. Ak sa napríklad niektoré medziprodukty stanú aktívnymi s jednoperiódovým oneskorením a ostatné sa stanú aktívnymi okamžite, máme podľa [25] tento vzťah daný rovnicou $k_t = \pi(\tilde{k}_t - \tilde{k}_{t-1}) + \tilde{k}_{t-1}$, pokiaľ $\tilde{k}_t \geq \tilde{k}_{t-1}$, kde π je diagonálna matica, ktorej prvky predstavujú čiastky medziproduktov, ktoré sa okamžite stanú aktívnymi. Pridaním takéhoto ohraničenia do úlohy lineárneho programovania, môžeme zachytiť účinky oneskorenia v investovaní do medziproduktov, ktoré sú spôsobené kvôli času potrebnému na inštaláciu [25].

Jedným z najviac problémových je predpoklad dokonalého predpovedania budúcich premenných. Ako je uvedené v [25], tento problém možno obísť najmenej dvoma spôsobmi. Prvá možnosť je, že pokiaľ predpoklad dokonalej predpovede nie je realistický, výsledné skóre neefektivity by malo zahŕňať chyby tejto prognózy. Na vyhodnotenie čistej neefektivity potom stačí z týchto skóre odstrániť komponenty chýb predpovede. Druhý spôsob spočíva v tom, že pri odhadovaní podmienených očakávaných hodnôt budúceho dopytu a cien vstupov sa použijú techniky modelovania časových radov.

2.5 Aplikácie a využitie

Na podporu dôležitosti zavedenia dynamického pohľadu na výrobný proces uvádzame zopár reálnych aplikácií, ktoré

2.5.1 Energetické spoločnosti

V článku [15] aplikujú na dáta siedmich európskych spoločností distribuujúcich energie z rokov 1999-2005 dynamický model inšpirovaný modelom z [26]. Porovnávajú statický a dynamický rámec a poukazujú na to, že pri produkcii s veľkými kapitálovými medziproduktmi sú výsledky statického konceptu nedostatočné až zavádzajúce. Neefektívnosti pri statickom modeli často plynú z iných dôvodov ako pri dynamickom, a prevažne sú tieto dôvody neuspokojivé až nesprávne. Za hlavný problém je však považovaný fakt, že model ignoruje nutnosť krátkodobej fixácie úrovni medziproduktov a nevidí ich priaznivý vplyv v dlhodobom horizonte, kvôli čomu ich úrovne príliš skoro znižuje.

Ďalší článok, kde dynamický model dáva uspokojivé výsledky a dokazuje užitočnosť tohto prístupu je [25]. Zaoberajú sa tu dvomi rozkladmi efektivity, jedným je rozklad celkovej efektivity na jej statickú a dynamickú zložku, druhým priradenie neefektivity konkrétnym faktorom, ktoré ju spôsobujú. Model je aplikovaný na dáta z japonských elektrární z rokov 1981-1995. Výsledky naznačujú, že elektrárne sú efektívne vo využívaní vstupov, a teda zdrojom ich neefektivity je zlé nastavenie úrovni medziproduktov.

2.5.2 Bankový sektor

V článku [14] použili dynamický dvojfázový network model na odhadovanie výkonnosti japonských komerčných bánk v rokoch 2006 - 2010. Ako uvádzajú, autori rozširujú dynamický prístup DEA z článkov [8] a [10] a vychádzajú z network modelov uvedených v [1], [13] a [12]. V poslednom z týchto článkov autori vyvinuli dvojfázový network model a použili ho na meranie efektívnosti japonských družstevných bánk s jedným medziproduktom. V [14] rozšírili tento svoj prístup na komerčné banky a povolili viaceré medziprodukty. V prvej fáze výroby banky transformujú nežiaduce vstupy, generované v predchádzajúcom období, a tri exogénne vstupy - prácu, fyzický kapitál a vlastný kapitál - na dva medziprodukty - vklady a iné fondy. V druhej fáze potom využívajú medzi-

produkty prvej fázy na „produkciu“ žiaducích výstupov - úverov a investícií do cenných papierov. Banky sa okrem toho môžu rozhodnúť preniesť niektoré aktíva do budúceho obdobia namiesto použitia týchto aktív na výrobu konečných výstupov v súčasnom období. Tieto prenášané aktíva sú potom vstupmi do druhej fázy výroby v nasledujúcom období. Nežiaducim výstupom druhej fázy sú nesplácané úvery poskytnuté v súčasnom období, ktoré následne ovplyvnia prvú fázu v ďalšom období. Väčšie množstvo zlyhaných úverov poskytnutých v jednom období totiž obmedzuje výrobné možnosti banky v budúcich obdobiach. Dynamický rámec umožňuje, aby sa maximalizovala produkcia požadovaných výstupov a súčasne minimalizovala výroba nežiaducích výstupov. Do modelu sú navyše zahrnuté finančné regulačné obmedzenia, ktoré vyžadujú minimálny pomer vlastného kapitálu k aktívam. Tiež navrhli metódu, ktorá určuje optimálne množstvo medziproduktov a produktov na prenos. Okrem toho v článku uvádzajú duálnu reprezentáciu dynamického network LP modelu z [12].

Odhadovaniu efektivity jedenástich českých komerčných bánk v rokoch 2001-2011 sa venujú v práci [29]. Autorka vychádza z modelu navrhnutého v [33] alebo [36] a [35]. Pri rozdeľovaní faktorov na vstupy a výstupy vychádza z predpokladu, že hlavným cieľom banky je transformovať vklady na úvery. Model má dva vstupy, prácu a vklady, a dva výstupy, úvery a čistý výnos z úrokov.

Svoj prístup v [28] rozširuje na komerčné banky Višehradskej štvorky v rokoch 2009-2013.

2.5.3 Poľnohospodárstvo

V článku [3] pracujú s dynamickým konceptom nákladov na úpravu spojených s investovaním. Model vyvinutý v [4] a [24] aplikovali na empirické dáta pochádzajúce z francúzskych fariem s dojnými kravami v období rokov 1978-2014. Za neželaný výstup sú brané emisie skleníkových plynov. V práci odhadujú vstupne a výstupne špecifické skóre technickej neefektivity v dynamickom kontexte a porovnávajú ich s mierami efektivity z konvenčného statického kontextu. Výsledky odhaľujú signifikantné rozdiely medzi skóre neefektív odvođených zo statického a dynamického rámca. Autori prízvukujú, že pri odhade neefektívnosti súvisiacej s reguláciou znečisťovania je dôležité brať do úvahy náklady

na úpravu.

Článok [19] porovnáva pestovateľov granátových jablák v juhozápadnom Iráne v rokoch 2009-2015. Zameriava sa na znížovanie emisií skleníkových plynov pri zmene organizácie výroby a používaných technológií.

3 Modifikácie modelov a numerické experimenty

V tejto kapitole sa budeme bližšie zaoberať nákladovým NG modelom a FG modelom optimalizácie výstupnej efektivity, ktorých zadanie upresníme, prípadne modifikujeme. Modely budeme testovať na príklade, ktorého dáta predstavíme v nasledovnej podkapitole.

3.1 Dáta na testovanie modelov

Základom pre naše experimenty budú dáta z článku [36], ktoré teraz popíšeme a uvedieme, ako ich bude treba doplniť.

Dáta uvažujú osem výrobných jednotiek A až H v štyroch časových obdobiach T1 až T4. Každá rozhodovacia jednotka má v každom z týchto časových období jeden vstup, jeden výstup a jeden medziprodukt. Konkrétne hodnoty sú uvedené v nasledovnej tabuľke:

Tabuľka 1: Vygenerované dáta. [36, Tab. 1]

DMU	Vstup				Výstup				Medziprodukt			
	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4
A	10	11	12	13	50	50	50	50	10	10	10	10
B	30	33	36	39	150	150	150	150	20	25	30	35
C	20	22	24	26	50	100	150	180	30	30	30	30
D	30	33	36	39	100	120	150	180	15	20	25	30
E	30	33	36	39	150	135	120	105	20	25	30	35
F	10	11	12	13	100	90	40	35	10	10	10	10
G	30	33	36	39	100	180	95	200	20	30	40	50
H	20	22	24	26	100	40	150	100	10	10	10	10

Z Tabuľky 1 vidieť, že vstupné množstvá sa počas pozorovaného časového horizontu zvyšujú pre všetky *DMU*, zatiaľ čo výstupné množstvá môžeme podľa ich vývoja v priebehu času rozdeliť na štyri typy: stabilné (A a B), zvyšujúce sa (C a D), klesajúce (E a F) a volatilné (G a H). Hodnoty medziproduktov sú v priebehu času buď stabilné (A, C, F a H), alebo zvyšujúce sa (B, D, E a G).

Dáta uvedené v Tab.1 budeme chcieť aplikovať na viacero modelov, ktoré budú fungovať nad technológiou *P* popísanou v časti 1.2 a schematicky znázornenou na Obr. 4.

K popisu takejto technológie potrebujeme vytvoriť matice vstupov X_t , výstupov Y_t a medziproduktov K_t zostavené z pozorovaných dát v každom čase t . Keďže máme osem rozhodovacích jednotiek a ku každej jeden vstup, jeden výstup a jeden medziprodukt, rozmery všetkých týchto matíc budú 1×8 . Všimnime si, že v uvedenej tabuľke chýbajú hodnoty K_0 , ktoré doplníme napr. zduplikovaním mierne upravených hodnôt v čase T1. Dostávame tak Tabuľku 2, kde stĺpce predstavujú jednotlivé matice v transponovanom tvare. Naše základné dáta teda vyzerajú takto:

Tabuľka 2: Dáta.

DMU	Vstup				Výstup				Medziprodukt				
	$X_1^\top$	$X_2^\top$	$X_3^\top$	$X_4^\top$	$Y_1^\top$	$Y_2^\top$	$Y_3^\top$	$Y_4^\top$	$K_0^\top$	$K_1^\top$	$K_2^\top$	$K_3^\top$	$K_4^\top$
A	10	11	12	13	50	50	50	50	10	10	10	10	10
B	30	33	36	39	150	150	150	150	15	20	25	30	35
C	20	22	24	26	50	100	150	180	30	30	30	30	30
D	30	33	36	39	100	120	150	180	10	15	20	25	30
E	30	33	36	39	150	135	120	105	15	20	25	30	35
F	10	11	12	13	100	90	40	35	10	10	10	10	10
G	30	33	36	39	100	180	95	200	10	20	30	40	50
H	20	22	24	26	100	40	150	100	10	10	10	10	10

Pri výpočte nákladov alebo zisku potrebujeme okrem množstiev poznať aj ceny produktov. Budeme používať nasledovné značenie: u_t je cena vstupu, v_t cena výstupu a w_t cena medziproduktu v čase t . Konkrétne hodnoty uvádzame v nasledovnej tabuľke:

Tabuľka 3: Ceny.

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
u_t	-	3	2	4	5
v_t	-	5	3	4	2
w_t	6	4	3	1	2

3.2 Model založený na minimalizácii nákladov

Pri tomto modeli vychádzame z nákladového NG modelu (7)-(14), ale robíme v ňom zopár úprav. Prvou je neuvažovanie diskontného faktoru. Pri reálnej aplikácii by mal zmysel, ale keďže nám ide iba o popísanie, čo model robí, tak ho pre jednoduchosť nebudeme uvažovať. Druhou zmenou je nacenenie medziproduktov k_t aktuálnou cenou w_t , a teda počítanie aj konečného stavu k_T . Touto úpravou sa viac zaoberáme v podkapitole 3.6.3.

Za počiatočný stav $\bar{k}_0$ sme zvolili časovo prislúchajúcu hodnotu medziproduktov skúmaného DMU_o z dát. To môže znázorňovať situáciu, keď firma ešte pred začatím výroby disponuje nejakým kapitálom, ktorý musí alebo by chcela vo výrobnom procese zužitkovať. Tiež je logické očakávať, že každá firma má iné počiatočné úrovne tejto premennej, preto ju nastavujeme vždy na hodnoty skúmaného DMU_o , nie na jednu rovnakú hodnotu pre všetky rozhodovacie jednotky.

Model teda vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}
 \min_{\{\lambda_t, x_t, k_t\}_{t=1}^T} \quad & \sum_{t=1}^T (u_t^\top x_t + w_t^\top k_t) + w_0^\top k_0 \\
 Y_t \lambda_t \geq y_{t,o}, & \quad t = 1, 2, \dots, T \\
 X_t \lambda_t \leq x_t, & \quad t = 1, 2, \dots, T \\
 K_t \lambda_t \geq k_t, & \quad t = 1, 2, \dots, T \\
 K_{t-1} \lambda_t \leq k_{t-1}, & \quad t = 1, 2, \dots, T \\
 k_0 = k_{0,o}, & \\
 \mathbf{1}^\top \lambda_t = 1, & \quad t = 1, 2, \dots, T \\
 \lambda_t \geq \mathbf{0}, x_t \geq \mathbf{0}, k_t \geq \mathbf{0}, & \quad t = 1, 2, \dots, T.
 \end{aligned}$$

Model sa snaží optimálne rozložiť vstupy a medziprodukty pri daných hodnotách výstupov vzhľadom na technológiu P , určenú dátami z Tab. 2, tak, aby minimalizoval celkové náklady, teda čo rozhodovacia jednotka minie za suroviny a investuje do medziproduktov, počas plánovacieho horizontu T .

Model sme aplikovali na dáta z Tab. 2 a Tab. 3. Optimálne hodnoty účelovej funkcie sú uvedené ako minimálne náklady v Tabuľke 4. Keď tieto podelíme skutočnými nákladmi, vidíme, nakoľko efektívne sa firmy správajú. Napríklad firma A má náklady zbytočne vyššie iba o necelých 7%, zatiaľčo firma B by svoje náklady vedela zredukovať až o takmer

30%. Výslednú mieru efektivity sme dostali po znormovaní podelením najefektívnejšou z týchto hodnôt.

Tabuľka 4: Výsledky modelu minimalizácie nákladov bez diskontácie.

	A	B	C	D	E	F	G	H
min. náklady	305	613	717	639	531.95	305	765	418
reálne náklady	325	840	810	760	840	325	865	490
podiel	0.9385	0.7298	0.8852	0.8408	0.6333	0.9385	0.8844	0.8531
efektivita	1	0.7776	0.9432	0.8959	0.6748	1	0.9424	0.9090

Vidíme, že model označil za najviac efektívne dve rozhodovacie jednotky, konkrétne A a F. Najhoršie vyhodnocuje správanie *DMU* E. Kód programu aj s kompletnými výsledkami sa nachádza v Prílohe A.

3.3 Model maximalizácie zisku

Druhým testovaným je nami navrhnutý model vychádzajúci z predošlého modelu. Rozdielna je účelová funkcia, ktorá v tomto prípade reprezentuje zisk z výrobnnej činnosti, teda rozdiel výnosov a nákladov. Úloha sa teda zameriava na maximalizáciu tejto hodnoty. Ako voľné premenné máme okrem vstupov a medziproduktov aj výstupy, fixovaná je iba hodnota počiatočného stavu medziproduktov.

$$\max_{\{\lambda_t, x_t, y_t, k_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^T (v_t^\top y_t - u_t^\top x_t) - w_0^\top k_0 + w_T^\top k_T \quad (22)$$

$$Y_t \lambda_t \geq y_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (23)$$

$$X_t \lambda_t \leq x_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (24)$$

$$K_t \lambda_t \geq k_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (25)$$

$$K_{t-1} \lambda_t \leq k_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (26)$$

$$k_0 = k_{0,o}, \quad (27)$$

$$\mathbf{1}^\top \lambda_t = 1, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (28)$$

$$\lambda_t \geq \mathbf{0}, x_t \geq \mathbf{0}, y_t \geq \mathbf{0}, k_t \geq \mathbf{0}, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (29)$$

Aj tento model aplikujeme na naše jednorozmerné dáta. Naprogramovaný kód aj ucelené výstupy z neho sú v Prílohe B. Hlavné z nich sme vypísali v Tabuľke 5.

Tabuľka 5: Výsledky modelu maximalizácie zisku bez diskontácie.

	A	B	C	D	E	F	G	H
max. zisk	1618	1838	1748	1618	1838	1618	1618	1618
reálny zisk	495	1585	1060	1325	1330	795	1365	1050
podiel	0.3059	0.8624	0.6064	0.8189	0.7236	0.4913	0.8436	0.6489
efektivita	0.3548	1	0.7032	0.9496	0.8391	0.5698	0.9783	0.7525

Prvý riadok predstavuje optimálne hodnoty účelových funkcií, teda maximálne možné zisky jednotlivých *DMU*. Keď k nim dáme do pomeru reálne zisky, dostávame prehľad efektívnosti týchto *DMU*. Vidíme napríklad, že firma A by mohla mať zisky vyššie až o takmer 70%, pričom firma B iba o niečo vyše 13%. Výslednú mieru efektivity dostaneme opäť normalizáciou týchto hodnôt tak, že ich dáme do pomeru s najefektívnejšou z nich.

Za najefektívnejšiu je modelom vyhodnotená rozhodovacia jednotka B. Najhoršie model vyhodnotil správanie už tiež spomenutej firmy A.

Keď tieto výsledky porovnávame s výsledkami predošlého modelu, vidíme, že modely v podstate väčšinu *DMU* vyhodnotili presne opačne (viď Tabuľka 7), teda je dosť rozdiel či sa firma v danom súbore rozhodovacích jednotiek zameria na minimalizáciu nákladov alebo na maximalizáciu zisku, keďže pri jednom z týchto kritérií sa oproti ostatným rozhodovacím jednotkám už nemá veľmi ako zlepšiť, zatiaľ čo pri druhom je vyhodnotená ako najmenej efektívna.

3.4 Model maximalizácie výnosov

K modelu minimalizácie nákladov môžeme analogicky odvodiť model maximalizácie výnosov. Vychádzame z daných hodnôt vstupov a voľnou premennou, ktorú má model nastaviť na optimálnu úroveň, sú v tomto prípade, okrem medziproduktov, výstupy. Opäť predpokladáme fixnú počiatočnú hodnotu medziproduktov. Model vyzerá nasledovne:

$$\max_{\{\lambda_t, y_t, k_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^T (v_t^\top y_t + w_t^\top k_t) \quad (30)$$

$$Y_t \lambda_t \geq y_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (31)$$

$$X_t \lambda_t \leq x_{t,o}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (32)$$

$$K_t \lambda_t \geq k_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (33)$$

$$K_{t-1} \lambda_t \leq k_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (34)$$

$$k_0 = k_{0,o}, \quad (35)$$

$$\mathbf{1}^\top \lambda_t = 1, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (36)$$

$$\lambda_t \geq \mathbf{0}, \quad y_t \geq \mathbf{0}, \quad k_t \geq \mathbf{0}, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (37)$$

Výsledné hodnoty teoretických maximálnych výnosov, reálnych výnosov, ktoré firma dosiahne pri doterajšom nastavení, ich pomeru a z toho odvodennej efektivity uvádzame v nasledovnej tabuľke:

Tabuľka 6: Výsledky modelu maximalizácie výnosov.

	A	B	C	D	E	F	G	H
max.výnosy	1170	2536.7	2090	2286.7	2536.7	1170	2286.7	1965
reálne výnosy	800	2355	1810	2025	2100	1100	2130	1520
podiel	0.6838	0.9284	0.8660	0.8856	0.8279	0.9402	0.9315	0.7735
efektivita	0.7273	0.9875	0.9211	0.9419	0.8805	1	0.9908	0.8228

Pri porovnaní s výsledkami modelu minimalizácie nákladov nám tu vznikla zaujímavá situácia. Oba modely vyhodnocujú za najviac efektívne *DMU* F. Pri *DMU* A sú však v úplnom rozpore, keďže tento model danú rozhodovaciu jednotku vyhodnocuje ako najmenej efektívnu v danom súbore *DMU*, zatiaľ čo pri minimalizácii nákladov je vyhodnotená za rovnako efektívnu ako najlepšia F.

Ucelený výstup aj s naprogramovaným modelom je v Prílohe C.

3.5 Model založený na optimalizácii technickej efektivity

Pod technickou efektivitou sa rozumie efektivita meraná štandardnými DEA modelmi. Doteraz sme v modeloch počítali s cenami jednotlivých premenných. V tejto kapitole sa

budeme venovať modelu, v ktorom ceny nevystupujú, vychádzať pri tom budeme z FG modelu (15)-(21). Tento model optimalizuje mieru rastu výstupov v priebehu plánovacieho horizontu, z čoho usudzujeme, že by malo ísť o maximalizáciu. Premennou nastaviteľnou na dosiahnutie optimality sú v danom modeli iba medziprodukty. My sme použili úpravu, kedy sme medziprodukty nenechali voľné, ale nastavili sme ich na úroveň pozorovaných dát. Pri voľných medziproduktoch totiž model nedával dobré výsledky, keďže maximalizoval hodnoty θ , a tým maximalizoval ich neefektivitu. Teda model vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} \max_{\{\theta_{t,o}, \lambda_t\}_{t=1}^T} \quad & \sum_{t=1}^T \theta_{t,o} \\ Y_t \lambda_t \geq \theta_{t,o} y_{t,o}, \quad & t = 1, 2, \dots, T \\ X_t \lambda_t \leq x_{t,o}, \quad & t = 1, 2, \dots, T \\ K_t \lambda_t \geq k_{t,o}, \quad & t = 1, 2, \dots, T \\ K_{t-1} \lambda_t \leq k_{t-1,o}, \quad & t = 1, 2, \dots, T \\ \lambda_t \geq \mathbf{0}, \quad & t = 1, 2, \dots, T. \end{aligned}$$

Keďže jedinými neznámymi sú θ a λ a všetko ostatné je fixne dané, tak tento model nespadá do DDEA, ale do NDEA, a teda sa mu viac nebudeme venovať.

Na záver sa dostávame k prehľadu všetkých testovaných modelov. V Tabuľke 7 sú jednotlivé rozhodovacie jednotky uvedené v poradí, ako ich ohodnotili tieto modely.

Tabuľka 7: Sumárne výsledky jednotlivých producentov pri jednotlivých modeloch.

	min. náklady	max. zisk	max. výnosy
1.	A, F	B	F
2.	C	G	G
3.	G	D	B
4.	H	E	D
5.	D	H	C
6.	B	C	E
7.	E	F	B
8.		A	A

3.6 Obmeny

3.6.1 Voľný počiatkový stav medziproduktov

Pri všetkých modeloch môžeme uvažovať situáciu, kedy firma ide akoby od nuly, teda nemá žiadne počiatkové vybavenie, ktoré by vo výrobnom procese chcela využiť. Teda na optimálnu úroveň nastavuje úplne všetky vstupy, výstupy a medziprodukty, vrátane počiatkového stavu.

Predpoklad, že k_0 nemáme zadané, začleníme do modelu maximalizácie zisku. Výsledná optimálna hodnota účelovej funkcie je v tomto prípade rovnaká pre všetky *DMU*. V Tabuľke 8 uvádzame aj skutočne nadobudnuté zisky firiem a opäť ich daním do pomeru s maximálnym možným ziskom a následným znormovaním dostaneme mieru efektivity jednotlivých *DMU*. Za najefektívnejšie je rovnako ako pri modeli so zadaným k_0 označené *DMU* B a celkovo sú rozhodovacie jednotky vyhodnotené za efektívne približne v rovnakom poradí ako pri modeli s fixovaným počiatkovým stavom medziproduktov. Hodnoty ostatných výstupov modelu a jeho kód je v Prílohe D.

Tabuľka 8: Výsledky modelu maximalizácie zisku s voľným počiatkovým stavom k_0 .

	A	B	C	D	E	F	G	H
max. zisk	1838	1838	1838	1838	1838	1838	1838	1838
reálny zisk	495	1585	1060	1325	1330	795	1365	1050
podiel	0.2693	0.8624	0.5767	0.7209	0.7236	0.4325	0.7427	0.5713
efektivita	0.3123	1	0.6688	0.8360	0.8391	0.5016	0.8612	0.6625

Túto modifikáciu modelu použijeme aj v ďalšej podkapitole.

3.6.2 Multiplikatívny tvar modelu maximalizácie zisku

V lineárnom programovaní, a teda aj v DEA modeloch je niekedy zaujímavé riešenie duálnej úlohy. K navrhnutému modelu maximalizácie zisku (22)-(29), ale s voľným počiatkovým stavom medziproduktov, odvodíme duálny model podľa P-D schémy z [17, str. 170].

Model najprv upravíme do takého tvaru, aby všetky premenné boli na ľavej strane a všetky nerovnosti boli rovnako otočené ako v schéme. Každému ohraničeniu priradíme novú premennú. Premenné prislúchajúce ohraničeniam v tvare nerovností budú mať pod-

mienku nezápornosti, premenné prislúchajúce ohraničeniam v tvare rovnosti sú voľné. Symbol $\mathbf{I}$ predstavuje maticu identity rozmeru prislúchajúceho k vektoru, ktorý sa ňou násobí.

$$\begin{aligned}
& \max_{\{\lambda_t, x_t, y_t, k_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^T (v_t^\top y_t - u_t^\top x_t) - w_0^\top k_0 + w_T^\top k_T \\
& -Y_t \lambda_t + \mathbf{I} y_t \leq \mathbf{0}, \quad | \quad \alpha_t \geq \mathbf{0} \quad t = 1, 2, \dots, T \\
& X_t \lambda_t - \mathbf{I} x_t \leq \mathbf{0}, \quad | \quad \beta_t \geq \mathbf{0} \quad t = 1, 2, \dots, T \\
& -K_t \lambda_t + \mathbf{I} k_t \leq \mathbf{0}, \quad | \quad \gamma_t \geq \mathbf{0} \quad t = 1, 2, \dots, T \\
& K_{t-1} \lambda_t - \mathbf{I} k_{t-1} \leq \mathbf{0}, \quad | \quad \delta_t \geq \mathbf{0} \quad t = 1, 2, \dots, T \\
& \mathbf{1}^\top \lambda_t = 1, \quad | \quad \psi_t \quad t = 1, 2, \dots, T \\
& \lambda_t \geq \mathbf{0}, \quad x_t \geq \mathbf{0}, \quad y_t \geq \mathbf{0}, \quad t = 1, 2, \dots, T \\
& k_t \geq \mathbf{0}, \quad t = 0, 1, \dots, T.
\end{aligned}$$

Teda premenné v duálnom modeli budú $\alpha_t \geq 0$ rozmeru $J \times 1$, $\beta_t \geq 0$ rozmeru $I \times 1$, $\gamma_t \geq 0$ rozmeru $L \times 1$, $\delta_t \geq 0$ rozmeru $L \times 1$ a jednorozmerná voľná premenná ψ_t v každom čase $t = 1, \dots, T$. Keď sčítame ľavé a pravé strany týchto ohraničení, dostaneme nasledovnú nerovnosť:

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^T (-\alpha_t^\top Y_t + \beta_t^\top X_t - \gamma_t^\top K_t + \delta_t^\top K_{t-1} + \psi_t \mathbf{1}^\top) \lambda_t + \alpha_t^\top \mathbf{I} y_t + -\beta_t^\top \mathbf{I} x_t + \\
& -\delta_1^\top \mathbf{I} k_0 + (\gamma_t^\top \mathbf{I} - \delta_t^\top \mathbf{I}) k_t + \gamma_T^\top \mathbf{I} k_T \leq \sum_{t=1}^T \psi_t,
\end{aligned}$$

na ktorú aplikujeme tzv. slabú vetu o dualite, a síce že hodnota účelovej funkcie maximalizačnej úlohy je menšia alebo rovná ako hodnota účelovej funkcie k nej duálnej minimalizačnej úlohy [17, str. 171]. Pravá strana nerovnosti bude teda účelovou funkciou duálnej úlohy. Ľavá strana nerovnosti vyzerá ako účelová funkcia primárneho modelu, ktorú keďže chceme maximalizovať a vieme, že všetky premenné sú nezáporné, tak koeficienty pri premenných v nerovnosti budú isto väčšie alebo rovné ako koeficienty z účelovej

funkcie. Tak dostaneme podmienky pre duálny model, ktorý bude vyzerat' nasledovne:

$$\begin{aligned}
& \min_{\{\alpha_t, \beta_t, \gamma_t, \delta_t, \psi_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^T \psi_t \\
& -Y_t^\top \alpha_t + X_t^\top \beta_t - K_t^\top \gamma_t + K_{t-1}^\top \delta_t + \mathbf{1}\psi_t \geq \mathbf{0}, & t = 1, \dots, T \\
& \mathbf{I}^{J^\top} \alpha_t \geq v_t, & t = 1, \dots, T \\
& -\mathbf{I}^{I^\top} \beta_t \geq -u_t, & t = 1, \dots, T \\
& -\mathbf{I}^{L^\top} \delta_1 \geq -w_0 \\
& \mathbf{I}^{L^\top} (\gamma_{t-1} - \delta_t) \geq \mathbf{0}, & t = 2, \dots, T \\
& \mathbf{I}^{L^\top} \gamma_T \geq w_T, \\
& \alpha_t \geq \mathbf{0}, \beta_t \geq \mathbf{0}, \gamma_t \geq \mathbf{0}, \delta_t \geq \mathbf{0}, & t = 1, \dots, T.
\end{aligned}$$

Tento model už iba upravíme do prehľadnejšieho tvaru:

$$\min_{\{\alpha_t, \beta_t, \gamma_t, \delta_t, \psi_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^T \psi_t \tag{38}$$

$$Y_t^\top \alpha_t - X_t^\top \beta_t + K_t^\top \gamma_t - K_{t-1}^\top \delta_t \leq \psi_t \mathbf{1}, \tag{39}$$

$$\alpha_t \geq v_t, \tag{40}$$

$$\beta_t \leq u_t, \tag{41}$$

$$\delta_1 \leq w_0, \tag{42}$$

$$\gamma_{t-1} \leq \delta_t, \tag{43}$$

$$\gamma_T \geq w_T \tag{44}$$

$$\alpha_t \geq \mathbf{0}, \beta_t \geq \mathbf{0}, \gamma_t \geq \mathbf{0}, \delta_t \geq \mathbf{0}, \tag{45}$$

Naprogramovaný kód v Matlabe je v Prílohe E. Optimálnu hodnotu účelovej funkcie dostávame rovnakú ako bola hodnota účelovej funkcie primárneho modelu, teda 1838.

Podľa [18] sa optimálne hodnoty $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t, \delta_t$ dajú interpretovať ako tieňové ceny a optimálna hodnota ψ_t ako tieňový profit v tieňových cenách. Duálna úloha teda minimalizuje súčet tieňových profitov pri podmienkach, že tieňová cena výstupov je väčšia alebo rovná ako ich reálna cena a tieňová cena vstupov je menšia alebo rovná ako ich reálna cena.

Kedže v účelovej funkcii sa minimalizuje súčet ψ , tak sa dá očakávať, že aspoň jedna z nerovností (39) bude v optimálnom riešení splnená ako rovnosť, a teda že sa minima-

lizuje súčet hodnôt na ľavej strane. Táto rovnosť predstavuje určitú opornú nadrovinu k technologickej množine definovanej analogicky ako v (5), len pre dve susediace časové obdobia.

3.6.3 Medziprodukty v účelovej funkcii a ich ceny

S konceptom medziproduktov vznikajú otázky ohľadom naceňovania v účelových funkciách pri počítaní nákladov a výnosov. Zamýšľame sa nad tromi možnosťami.

Prvou je úplné vynechanie týchto premenných z účelových funkcií. Sú to síce nejaké vnútorné procesy firmy, ktoré majú vplyv na jej výsledný zisk, ale v jednotlivých obdobiach sa nedajú nejako jasne naceniť ako náklady alebo výnosy, čo je viditeľné napríklad pri koncepte zásob. Pri nákupe sú suroviny hodnotené ako regulérne vstupy, keďže sa očakáva, že sa v danom čase aspoň časť z nich spotrebuje. Až ak sa nevyužijú, tak sa na konci daného obdobia vykážu ako medziprodukty. V ďalších obdobiach nijako priamo nevystupujú v nákladoch ani vo výnosoch. Výnimkou sú suroviny, ktoré ostanú nepoužité na konci celého časového horizontu a ktoré firma už nemá ako využiť. Tie môže odpredať, čo sa odzrkadlí v jej výnosoch. Do nákladov zase potrebuje zaradiť počiatočné suroviny, ktoré vlastnila ešte pred začatím výrobného procesu. Teda nás zaujíma len cena medziproduktov na začiatku (pri nákladovom a ziskovom modeli) a na konci (pri výnosovom a ziskovom modeli).

V ostatných časoch by sa medziprodukty dali ohodnotiť faktorom znehodnocovania, prípadne nejakými interne nastavenými váhami firmy. Dalo by sa potom uvažovať o modeloch, kedy je v cieľoch zahrnuté minimálne znehodnocovanie uskladnených zásob.

Naceňovanie medziproduktov a ich prítomnosť v účelovej funkcii by boli odôvodnené v prípade, kedy by hodnotený výrobný faktor bol evidovaný iba ako medziprodukt a nikdy nie ako vstup alebo výstup. Napríklad pri strojoch očakávame, že ich budeme používať počas viacerých období, a teda ich od začiatku zaradíme do medziproduktov, aby sa nemiešali s jednoperiodovými vstupmi. Potom ale do nákladov potrebujeme započítať aj ich kúpnu cenu, pričom nový stroj môžem dokúpiť teoreticky v hociktorom časovom období. Zvyšné dve možnosti sa teda venujú prípadu, kedy medziprodukty vystupujú v účelovej funkcii.

Druhou možnosťou je nacenenie všetkých medziproduktov, vstupov aj výstupov, cenou

z aktuálneho časového obdobia, ako je to v nákladovom NG modeli (7)-(14). Medziprodukt k_{t-1} je ohodnotený cenou w_t . Tento prístup vychádza z konceptu, že k_{t-1} je vstupom v t -tom období, teda nákladom, a teda ho „kúpime“ za súčasnú cenu v tomto období. Z tohto konceptu, že vstup sa naceňuje ako náklad a výstup ako výnos v každom jednom období, dostávame nasledovné účelové funkcie jednotlivých typov modelov:

$$\begin{aligned} \text{náklady} & \min_{\{\lambda_t, x_t, k_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^T (u_t^\top x_t + w_t^\top k_{t-1}), \\ \text{výnosy} & \max_{\{\lambda_t, y_t, k_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^T (v_t^\top y_t + w_t^\top k_t), \\ \text{zisk} & \max_{\{\lambda_t, x_t, y_t, k_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^T (v_t^\top y_t - u_t^\top x_t + w_t^\top (k_t - k_{t-1})) - w_0^\top k_0 + w_T^\top k_T. \end{aligned}$$

Tento koncept nedáva úplne zmysel z dôvodu, že množstvá medziproduktov na konci jedného časového obdobia prechádzajú do druhého nezmenené a stále sú vlastnené firmou. Teda kategorizácia na náklady a výnosy vyznieva ako že firma sama od seba odkúpi všetky svoje medziprodukty z predošlého obdobia. Predá ich však za cenu w_{t-1} a kúpi za cenu w_t .

Iný koncept, ktorý sa ponúka pri naceňovaní súčasnou cenou, je rozdelenie na náklady a výnosy podľa porovnávania úrovni medziproduktov v dvoch po sebe idúcich časoch. Tento má však pravdepodobne uplatnenie iba pri kapitálových medziproduktoch, ako sú stroje, určite sa nedá použiť pri zásobách surovín. Súčasnou cenou sa ohodnotí rozdiel v stave medziproduktov na začiatku a na konci tohto časového obdobia, teda $w_t^\top (k_{t-1} - k_t)$. Ak je tento výraz kladný, teda $k_{t-1} \geq k_t$, znamená to, že v období t firma stroje predala, teda je to výnos. Pokiaľ je daný výraz záporný, firma počet strojov navýšila, teda ich musela nakúpiť, a preto je to náklad.

Tretou možnosťou naceňovania medziproduktov v účelovej funkcii je ich ohodnotenie iba cenou z časového obdobia, v ktorom pôsobia ako výstup. Opäť to vychádza z konceptu, že vstup sa pokladá za náklad a výstup za výnos. Keďže množstvo k_{t-1} už firma vlastní z predchádzajúceho obdobia, tak na toto nemá žiadne nové výdavky, iba tie z predošlého obdobia, teda za cenu w_{t-1} . Ak firma robí nejaké zmeny v medziproduktoch v čase t , bude to za cenu w_t a bude to mať vplyv iba na výstupnú hodnotu k_t , nijako to neovplyvní vstupnú hodnotu k_{t-1} . Teda v účelových funkciách bude vystupovať dvojica $w_t^\top k_t$ rovnako v nákladoch aj vo výnosoch, len s opačným znamienkom, pričom pri nákladoch pôjde súčet

cez časy $t = 0, 1, \dots, T - 1$ a pri výnosoch cez $t = 1, \dots, T$.

Zrejme však v tomto prípade neexistuje jediné správne riešenie, keďže sa dá povedať, že pri každom type medziproduktov nám vznikol iný pohľad na situáciu. Celé to teda závisí hlavne od konkrétnej interpretácie všetkých premenných v modeli, teda vstupov, medziproduktov aj výstupov.

Záver

V tejto diplomovej práci sme sa zaoberali modelmi na meranie dynamickej efektivity, ktoré zohľadňujú časovú závislosť medzi spotrebou vstupov a realizáciou výstupov výrobných jednotiek v priebehu niekoľkých časových období. V prvej kapitole sme na zachytenie „prenašaných“ vstupov zaviedli koncept medziproduktov, ktoré vyjdú ako výstup z predošlého obdobia a ako vstup vchádzajú do nasledujúceho. Potreba dynamického prístupu je dostatočne markantná, keď sú v roli medziproduktov kapitál alebo úpravové náklady. Statický rámec ignoruje dlhodobý výnosný efekt takýchto vstupov, čím zamedzuje zefektívnenie činnosti firmy v dlhodobom horizonte. Túto teóriu podporujú aj reálne aplikácie publikované v rôznych článkoch, napríklad [19], [15], ktoré sme rozpísali v kapitole 2.5 a ktoré potvrdzujú opodstatnenosť používania dynamického konceptu.

V kapitole 2 sme uviedli prehľad niekoľkých rôznych prístupov k dynamickému konceptu DEA, ktoré sa doteraz objavili v literatúre. Bližšie sme sa venovali hlavne modelu minimalizácie nákladov a modelu optimalizácie technickej efektivity, ktoré sme nazvali nákladový NG model a FG model výstupnej efektivity. Vysvetlili sme, že nákladový NG model pracuje okrem premenných aj s ich cenami, ktoré teda treba pri jeho použití poznať pre každé časové obdobie výrobného horizontu. Informácia o cenách nie je potrebná pri FG modeli výstupnej efektivity, ktorý sa zaoberá radiálnym predlžovaním výstupov, teda vyzerá ako dynamický ekvivalent štandardného BCC výstupného modelu. Oba tieto modely sme modifikované použili v kapitole 3 pri experimentovaní s dátami z článku [36].

DEA modely sú úlohami lineárneho programovania, v ktorom má dôležitú úlohu teória duality. Okrem odlišnej interpretácie úlohy môže byť využitá napríklad pri odvodzovaní Bellmanovej rovnice dynamického programovania, ako sme spomenuli v kapitole 2.3.1. Niektoré DDEA modely sa dajú naformulovať ako úlohy optimálneho riadenia a riešiť metódou dynamického programovania. V tomto prípade to však nepovažujeme za vhodné, keďže skúmané modely vieme efektívne vyriešiť lineárnym programovaním.

Všetky testované modely sme konštruovali nad príslušnou obmenou technologickej množiny (5). Ďalej sme vo všetkých modeloch mali predpoklad, že počiatočná hodnota medziproduktov je daná, konkrétne rovná časovo prislúchajúcej hodnote medziproduktov jednotlivých *DMU* z dát. Ako sme spomenuli, tento predpoklad odzrkadľuje situáciu, kedy firma disponuje nejakým kapitálom ešte pred začatím výroby a chcela by ho v tomto

processe zužitkovať.

Najprv sme sa viac zamerali na modely vyhodnocujúce efektivitu na základe nákladov a výnosov rozhodovacích jednotiek. K mierne upravenému nákladovému NG modelu z kapitoly 2.3.1, sme vytvorili model maximalizácie zisku (22)-(29) a model maximalizácie výnosov (30)-(37). Výnosový model sme navrhli iba ako analógiu k nákladovému, teda v účelovej funkcii sú výstupy, ktoré model nastavuje na optimálnu úroveň a fixované sú hodnoty vstupov.

Pri návrhu modelu maximalizácie zisku sme vychádzali z konceptu nákladov a výnosov, do ktorých sme však nezarátavali medziprodukty, ktoré chápeme ako nejaké vnútorné procesy v rámci firmy. Výnimkou je počiatočný stav medziproduktov, ktorý sme zarátali ako náklad a konečný stav medziproduktov, ktorý pre prípad predaja figuruje ako výnos. Inak je tomu v kapitole 3.6.1, kde sme k modelu maximalizácie zisku uvažovali alternatívu s voľným počiatočným stavom medziproduktov, teda model sme nechali, aby ho nastavil na optimálnu úroveň. K tejto modifikácii s voľným počiatočným stavom sme ďalej v kapitole 3.6.2 odvodili duálny model, ktorého premenné sa dajú interpretovať ako tieňové ceny a hodnota účelovej funkcie ako tieňový profit v týchto cenách.

Upravený model optimalizácie technickej efektivity nedával dobré výsledky kvôli voľným medziproduktom. Avšak jeho výrazná modifikácia, kde sme medziprodukty nastavili na úroveň hodnôt z dát, už nezachytávala žiadnu dynamiku. Teda sme sa dostali k nedynamičkému network DEA modelu, ktorým sme sa ďalej nezaoberali.

Pri experimentovaní s modelmi nám vyvstali otázky ohľadom zaradenia medziproduktov do nákladov a výnosov, kvôli ich naceňovaniu. Ohľadom naceňovania sme dospeli k názoru, že keďže sa pri prechode do nasledujúceho obdobia úroveň medziproduktov nijako nemení, má zmysel priradiť im cenu z obdobia, kedy figurujú ako výstup. Na reprezentáciu nákladov a výnosov nám ako najrozumnejšia prišla možnosť nacenit' súčasnou cenou zmenu úrovne medziproduktov, teda rozdiel výstupnej a vstupnej úrovne, čiže $w_t^\top(k_{t-1} - k_t)$. Tento výraz podľa nás najlepšie reprezentuje reálne náklady prípadne výnosy z medziproduktov v danom časovom období t . Všetko to však závisí hlavne od konkrétnej interpretácie premenných v modeli.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Akhter S., Fukuyama H., Weber W. L.: *Estimating two-stage network slacks-based inefficiency: an application to Bangladesh banking*, Omega 41 (2013), 88-96
- [2] Caves D. W., Christensen L. R., Diewert W. E.: *The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output and Productivity*, Econometrica 50 (1982), 1393-1414
- [3] Dakpo K. H., Lansink A. O.: *Dynamic pollution-adjusted inefficiency under the by-production of bad outputs*, European Journal of Operational Research 276 (2019), 202-211
- [4] Dakpo K. H.: *On modeling pollution-generating technologies: a new formulation of the by-production approach*, Working Paper N 16-06, 2016, SMART-LERECO, Rennes
- [5] Emrouznejad A., Thanassoulis E.: *A mathematical model for dynamic efficiency using data envelopment analysis*, Applied Mathematics and Computation 160 (2005), 363-378
- [6] Fallah-Fini S., Triantis K., Johnson A. L.: *Reviewing the Literature on Non-parametric Dynamic Efficiency Measurement: State of the Art*, Journal of Productivity Analysis 41 (2014), 51-67
- [7] Färe R., Grosskopf S.: *Efficiency and Productivity in Rich and Poor Countries*, In: Jensen B. S., Wong K. Y. (ed): *Dynamics, economic growth, and international trade*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 243-263
- [8] Färe R., Grosskopf S.: *Intertemporal Production Frontiers: With Dynamic DEA*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996
- [9] Färe R., Grosskopf S., Lindgren B., Roos P.: *Productivity changes in Swedish pharmacies 1980–1989: A non-parametric Malmquist approach*, Journal of Productivity Analysis 3 (1992), 85–101

- [10] Färe R., Grosskopf S., Margaritis D., Weber W. L.: *Technological change and timing the reduction of greenhouse gas emissions*, Journal of Productivity Analysis 37 (2012), 205-216
- [11] Forsund F. R., Jansen E. S.: *Technical Progress and Structural Change in the Norwegian Primary Aluminum Industry*, 1984, 13-26
- [12] Fukuyama H., Weber W. L.: *A dynamic network DEA model with an application to Japanese cooperative Shinkin banks*, Wiley, London, Chapter 9
- [13] Fukuyama H., Weber W. L.: *Estimating two-stage network technology inefficiency: an application to cooperative Shinkin banks in Japan*, International Journal of Operations Research and Information Systems 3 (2012), 1-22
- [14] Fukuyama H., Weber W. L.: *Measuring Japanese bank performance: a dynamic network DEA Approach*, Journal of Productivity Analysis 44 (2015), 249-264
- [15] Geymüller P. von: *The efficiency of European transmission system operators. An application of dynamic DEA*, Working Papers / Research Institute for Regulatory Economics, 2007, WU Vienna University of Economics and Business, Vienna
- [16] Hackman S. T.: *An axiomatic framework of dynamic production*, The Journal of Productivity Analysis 1 (1990), 309-324
- [17] Halická M.: *DEA modely*, učebné texty, FMFI UK Bratislava, 2015
- [18] Halická M., osobná konzultácia
- [19] Houshyar E., Mahmoodi-Eshkaftaki M., Azadi H.: *Impacts of technological change on energy use efficiency and GHG mitigation of pomegranate: Application of dynamic data envelopment analysis models*, Journal of Cleaner Production 162 (2017), 1180-1191
- [20] Charnes A., Clark C. T., Cooper W. W., Golany B.: *A developmental study of data envelopment analysis in measuring the efficiency of maintenance units in U.S. Air Forces*, Annals of Operational Research 2 (1984), 95-112

- [21] Chen Ch.-M.: *A network-DEA model with new efficiency measures to incorporate the dynamic effect in production networks*, European Journal of Operational Research 194 (2009), 687-699
- [22] Chen Ch.-M., Dalen J. van: *Measuring dynamic efficiency: Theories and an integrated methodology*, European Journal of Operational Research 203 (2010), 749–760
- [23] Johansen L.: *Production functions*, North Holland Publication Co., Amsterdam, 1972
- [24] Murty S., Russell R. R., Levkoff S. B.: *On modeling pollution-generating technologies*, Journal of Environmental Economics and Management 64 (2012), 117–135
- [25] Nemoto J., Goto M.: *Measurement of Dynamic Efficiency in Production: An Application of Data Envelopment Analysis to Japanese Electric Utilities*, Journal of Productivity Analysis 19 (2003), 191-210
- [26] Nemoto J., Goto M.: *Dynamic data envelopment analysis: modeling intertemporal behavior of a firm in the presence of productive inefficiencies*, Economics Letters 64 (1999), 51-56
- [27] O'Donnell C.: *An aggregate quantity-price framework for measuring and decomposing productivity and profitability change*, Working Papers WP07/2008, School of Economics, University of Queensland, Australia, 2008
- [28] Palečková I.: *Banking Efficiency in Visegrad Countries: A Dynamic Data Envelopment Analysis*, Acta Universitatis Agriculturae et Silviculturae Mendelianae Brunensis 63 (2015), 2085-2091
- [29] Řepková I.: *Estimation of Banking Efficiency in the Czech Republic: Dynamic Data Envelopment Analysis*, DANUBE: Law and Economics Review 4 (2013), 261-275
- [30] Sengupta J. K.: *A dynamic efficiency model using data envelopment analysis*, International Journal of Production Economics 62 (1999), 209-218
- [31] Sengupta J. K.: *Dynamic aspects of data envelopment analysis*, Economic Notes 25 (1996), 143-164

- [32] Sengupta J. K.: *Evaluating dynamic efficiency by optimal control*, International Journal of Systems Science 25 (1994), 1337-1353
- [33] Sengupta J. K.: *Systematic measures of dynamic Farrell Efficiency*, Applied Economics Letters 3 (1996), 91-94
- [34] Silva E., Stefanou S. E.: *Dynamic efficiency measurement: Theory and application*, American Journal of Agricultural Economics 89 (2007), 398-419
- [35] Tone K.: *A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research 130 (2001), 498-509
- [36] Tone K., Tsutsui M.: *Dynamic DEA: A slacks-based measure approach*, Omega 38 (2010), 145-156
- [37] Wibe S.: *Efficiency: A dynamic approach*, International Journal of Production Economics 115 (2008), 86-91

Príloha A

Model minimalizácie nákladov

```
% vstupy
X1=[10 30 20 30 30 10 30 20]; % I x N
X2=[11 33 22 33 33 11 33 22];
X3=[12 36 24 36 36 12 36 24];
X4=[13 39 26 39 39 13 39 26];

% vystupy
Y1=[50 150 50 100 150 100 100 100]; % J x N
Y2=[50 150 100 120 135 90 180 40];
Y3=[50 150 150 150 120 40 95 150];
Y4=[50 150 180 180 105 35 200 100];

% medziprodukty
K0=[10 15 30 10 15 10 10 10]; % vymysleny pociatocny stav
K1=[10 20 30 15 20 10 20 10]; % L x N
K2=[10 25 30 20 25 10 30 10];
K3=[10 30 30 25 30 10 40 10];
K4=[10 35 30 30 35 10 50 10];

% vymyslene ceny vstupov
u1=[3]; % 1 x I
u2=[2];
u3=[4];
u4=[5];

% vymyslene ceny medziproduktov
w0=[6];
w1=[4]; % 1 x L
w2=[3];
w3=[1];
w4=[2];
```

```

T = 4; % pocet casovych obdobi
N = length(X1(1,:)); % pocet DMU
I = length(X1(:,1)); % pocet vstupov
J = length(Y1(:,1)); % pocet vystupov
L = length(K1(:,1)); % pocet medziproduktov

% 1 x (N+I+L)*T ucelova funkcia
f = [zeros(1,N),u1,w1,...
      zeros(1,N),u2,w2,...
      zeros(1,N),u3,w3,...
      zeros(1,N),u4,w4];

% ohranicenie sucet lambda = 1
blok = [ones(1,N),zeros(1,I),zeros(1,L)];
Aeq = blkdiag(blok,blok,blok,blok);
beq = [ones(T,1)];

% ohranicenie lambda >= 0, x >= 0, k >= 0
lb = repmat(0,(N+I+L)*T,1);

for o = 1:N
k0 = K0(:,o); % L x 1
% t=1
A1 = [-Y1,zeros(J,I),zeros(J,L);
      X1,-eye(I),zeros(I,L);
      -K1,zeros(L,I),eye(L);
      K0,zeros(L,I),zeros(L,L)];
b1 = [-Y1(:,o);zeros(I,1);zeros(L,1);k0]; % k_0 na pravej strane
% t=2
A2 = [-Y2,zeros(J,I),zeros(J,L);
      X2,-eye(I),zeros(I,L);
      -K2,zeros(L,I),eye(L);
      K1,zeros(L,I),zeros(L,L)];

```

```

b2 = [-Y2(:,o);zeros(I,1);zeros(L,1);zeros(L,1)];
% t=3
A3 = [-Y3,zeros(J,I),zeros(J,L);
      X3,-eye(I),zeros(I,L);
      -K3,zeros(L,I),eye(L);
      K2,zeros(L,I),zeros(L,L)];
b3 = [-Y3(:,o);zeros(I,1);zeros(L,1);zeros(L,1)];
% t=4
A4 = [-Y4,zeros(J,I),zeros(J,L);
      X4,-eye(I),zeros(I,L);
      -K4,zeros(L,I),eye(L);
      K3,zeros(L,I),zeros(L,L)];
b4 = [-Y4(:,o);zeros(I,1);zeros(L,1);zeros(L,1)];
% (J+I+L+L)*T x (N+I+L)*T
A = blkdiag(A1,A2,A3,A4);
riadky_t = length(A2(:,1)); % J+I+L+L
stlpce_t = length(A2(1,:)); % N+I+L
% doplnenie k_t-1 okrem casu 1, kde je dane k0 a je na pravej strane
for t = 2:T
A((riadky_t*(t-1)+J+I+L+1):(riadky_t*(t-1)+J+I+L+L),
 (stlpce_t*(t-2)+N+I+1):(stlpce_t*(t-2)+N+I+L)) = -eye(L);
end
b = [b1;b2;b3;b4];
[x,fval] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,[],[],[]);
ucelovka(o) = fval + w0*k0;
skutocne_naklady(o) = f*[zeros(N,1);X1(:,o);K1(:,o);...
                        zeros(N,1);X2(:,o);K2(:,o);...
                        zeros(N,1);X3(:,o);K3(:,o);...
                        zeros(N,1);X4(:,o);K4(:,o)] + w0*k0;
celex(:,o) = x;
lambda(:,o) = [x(1:N);...

```

```

        x((1+stlpce_t*1):(N+stlpce_t*1));...
        x((1+stlpce_t*2):(N+stlpce_t*2));...
        x((1+stlpce_t*3):(N+stlpce_t*3))];
vstup(:,o) = [x((N+1):(N+I));...
        x((N+1+stlpce_t*1):(N+I+stlpce_t*1));...
        x((N+1+stlpce_t*2):(N+I+stlpce_t*2));...
        x((N+1+stlpce_t*3):(N+I+stlpce_t*3))];
medziprodukt(:,o) = [x((N+I+1):stlpce_t);...
        x((stlpce_t+N+I+1):(stlpce_t*2));...
        x((stlpce_t*2+N+I+1):(stlpce_t*3));...
        x((stlpce_t*3+N+I+1):(stlpce_t*4))];

end

%celex % (N+I+L)*T x N
lambda % N*T x N
vstup % I*T x N
medziprodukt % L*T x N
min_naklady = ucelovka % 1 x N cez cas scitane naklady pre jednotlivu DMU
skutocne_naklady
pomer = min_naklady./skutocne_naklady
efektivita = (min_naklady./skutocne_naklady)./max(min_naklady./skutocne_naklady)

```

Výsledky

```

lambda =
0.3776    0.0000    0.1271    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.5000    0.0000    0.0000    0.5000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.5000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.5000    0.0000    0.0000    0.5000    0.0000    0.0000    0.0000
0.6224    0.0000    0.3729    0.2500    0.0000    1.0000    0.0000    1.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.7500    0.0000    0.0000    1.0000    0.0000

```

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2872	0.0000	0.0000	0.1658	0.0000	0.0000	0.0000	0.3497
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.7128	0.3333	0.0000	0.0842	0.5000	1.0000	0.0000	0.6503
0.0000	0.6667	1.0000	0.7500	0.5000	0.0000	1.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3000	0.6867	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.6667	1.0000	0.0000	0.4231	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3133	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.2769	0.0000	0.0000	1.0000
1.0000	0.0667	0.0000	0.0000	0.5769	0.5996	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.6667	1.0000	1.0000	0.4231	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4004	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
0.0000	0.2667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

vstup =

10.0000	30.0000	15.0000	25.0000	30.0000	10.0000	30.0000	10.0000
11.0000	25.6667	33.0000	27.5000	22.0000	11.0000	33.0000	11.0000
12.0000	24.0000	24.0000	36.0000	20.4000	12.0000	36.0000	24.0000
13.0000	25.1333	26.0000	26.0000	18.5000	13.0000	39.0000	26.0000

medziprodukt =

10.0000	16.6667	20.0000	17.5000	15.0000	10.0000	20.0000	10.0000
10.0000	23.3333	30.0000	25.0000	18.4615	10.0000	30.0000	10.0000
10.0000	23.3333	30.0000	30.0000	18.4615	10.0000	40.0000	10.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

min_naklady =

305.0000	613.0000	717.0000	639.0000	531.9462	305.0000	765.0000	418.0000
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

skutocne_naklady =

325	840	810	760	840	325	865	490
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

pomer =

0.9385	0.7298	0.8852	0.8408	0.6333	0.9385	0.8844	0.8531
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

efektivita =

1.0000	0.7776	0.9432	0.8959	0.6748	1.0000	0.9424	0.9090
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Príloha B

Model maximalizácie zisku

```
% vstupy
X1=[10 30 20 30 30 10 30 20]; % I x N
X2=[11 33 22 33 33 11 33 22];
X3=[12 36 24 36 36 12 36 24];
X4=[13 39 26 39 39 13 39 26];

% vystupy
Y1=[50 150 50 100 150 100 100 100]; % J x N
Y2=[50 150 100 120 135 90 180 40];
Y3=[50 150 150 150 120 40 95 150];
Y4=[50 150 180 180 105 35 200 100];

% medziprodukty
K0=[10 15 30 10 15 10 10 10]; % vymysleny pociatocny stav
K1=[10 20 30 15 20 10 20 10]; % L x N
K2=[10 25 30 20 25 10 30 10];
K3=[10 30 30 25 30 10 40 10];
K4=[10 35 30 30 35 10 50 10];

% vymyslene ceny vstupov
u1=[3]; % 1 x I
u2=[2];
u3=[4];
u4=[5];

% vymyslene ceny vystupov
v1=[5]; % 1 x J
v2=[3];
v3=[4];
v4=[2];

% vymyslene ceny medziproduktov
w0=[6];
```

```

w1=[4]; % 1 x L
w2=[3];
w3=[1];
w4=[2];

T = 4; % pocet casovych obdobi
N = length(X1(1,:)); % pocet DMU
I = length(X1(:,1)); % pocet vstupov
J = length(Y1(:,1)); % pocet vystupov
L = length(K1(:,1)); % pocet medziproduktov

% 1 x (N+J+I+L)*T ucelova funkcia
f = [zeros(1,N),v1,-u1,zeros(1,L),...
     zeros(1,N),v2,-u2,zeros(1,L),...
     zeros(1,N),v3,-u3,zeros(1,L),...
     zeros(1,N),v4,-u4,w4];

% ohranicenie sucet lambda = 1
blok = [ones(1,N),zeros(1,J),zeros(1,I),zeros(1,L)];
Aeq = blkdiag(blok,blok,blok,blok);
beq = [ones(T,1)];

% ohranicenie lambda >= 0, y >= 0, x >= 0, k >= 0
lb = repmat(0,(N+J+I+L)*T,1);

for o = 1:N
k0 = K0(:,o); % L x 1
% t=1
A1 = [-Y1,eye(J),zeros(J,I),zeros(J,L);
      X1,zeros(I,J),-eye(I),zeros(I,L);
      -K1,zeros(L,J),zeros(L,I),eye(L);
      K0,zeros(L,J),zeros(L,I),zeros(L,L)];
b1 = [zeros(J,1);zeros(I,1);zeros(L,1);k0];

```



```

% t=2
A2 = [-Y2,eye(J),zeros(J,I),zeros(J,L);
      X2,zeros(I,J),-eye(I),zeros(I,L);
      -K2,zeros(L,J),zeros(L,I),eye(L);
      K1,zeros(L,J),zeros(L,I),zeros(L,L)];
b2 = [zeros(J,1);zeros(I,1);zeros(L,1);zeros(L,1)];
% t=3
A3 = [-Y3,eye(J),zeros(J,I),zeros(J,L);
      X3,zeros(I,J),-eye(I),zeros(I,L);
      -K3,zeros(L,J),zeros(L,I),eye(L);
      K2,zeros(L,J),zeros(L,I),zeros(L,L)];
b3 = [zeros(J,1);zeros(I,1);zeros(L,1);zeros(L,1)];
% t=4
A4 = [-Y4,eye(J),zeros(J,I),zeros(J,L);
      X4,zeros(I,J),-eye(I),zeros(I,L);
      -K4,zeros(L,J),zeros(L,I),eye(L);
      K3,zeros(L,J),zeros(L,I),zeros(L,L)];
b4 = [zeros(J,1);zeros(I,1);zeros(L,1);zeros(L,1)];
% (J+I+L+L)*T x (N+J+I+L)*T
A = blkdiag(A1,A2,A3,A4);
riadky_t = length(A2(:,1)); % J+I+L+L
stlpce_t = length(A2(1,:)); % N+J+I+L
for t = 2:T % doplnenie k_t-1
A((riadky_t*(t-1)+J+I+L+1):(riadky_t*(t-1)+J+I+L+L),
  (stlpce_t*(t-2)+N+J+I+1):(stlpce_t*(t-2)+N+J+I+L)) = -eye(L);
end
b = [b1;b2;b3;b4];
[x,fval] = linprog(-f,A,b,Aeq,beq,lb,[],[],[]);
ucelovka(o) = -fval - w0*k0;
skutocny_zisk(o) = f*[zeros(N,1);Y1(:,o);X1(:,o);zeros(L,1);...
                    zeros(N,1);Y2(:,o);X2(:,o);zeros(L,1);...

```

```

        zeros(N,1);Y3(:,o);X3(:,o);zeros(L,1);...
        zeros(N,1);Y4(:,o);X4(:,o);K4(:,o)] - w0*k0;

celex(:,o) = x;
lambda(:,o) = [x(1:N);...
               x((1+stlpce_t*1):(N+stlpce_t*1));...
               x((1+stlpce_t*2):(N+stlpce_t*2));...
               x((1+stlpce_t*3):(N+stlpce_t*3))];
vystup(:,o) = [x((N+1):(N+J));...
               x((N+1+stlpce_t*1):(N+J+stlpce_t*1));...
               x((N+1+stlpce_t*2):(N+J+stlpce_t*2));...
               x((N+1+stlpce_t*3):(N+J+stlpce_t*3))];
vstup(:,o) = [x((N+J+1):(N+J+I));...
               x((N+J+1+stlpce_t*1):(N+J+I+stlpce_t*1));...
               x((N+J+1+stlpce_t*2):(N+J+I+stlpce_t*2));...
               x((N+J+1+stlpce_t*3):(N+J+I+stlpce_t*3))];
medziprodukt(:,o) = [x((N+J+I+1):stlpce_t);...
                     x((stlpce_t*1+N+J+I+1):(stlpce_t*2));...
                     x((stlpce_t*2+N+J+I+1):(stlpce_t*3));...
                     x((stlpce_t*3+N+J+I+1):(stlpce_t*4))];

end

%celex % (N+J+I+L)*T x N
lambda % N*T x N
vystup % J*T x N
vstup % I*T x N
medziprodukt % L*T x N
max_zisk = ucelovka % 1 x N cez cas scitany optimalny zisk pre jednotlivé DMU
skutocny_zisk % 1 x N cez cas scitany realny zisk pre jednotlivé DMU
pomer = skutocny_zisk./max_zisk
efektivita = (skutocny_zisk./max_zisk)./max(skutocny_zisk./max_zisk)

```

Výsledky

$$\lambda =$$
[illegible]

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

vystup =

100.0000	150.0000	150.0000	100.0000	150.0000	100.0000	100.0000	100.0000
180.0000	180.0000	180.0000	180.0000	180.0000	180.0000	180.0000	180.0000
150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000
180.0000	180.0000	180.0000	180.0000	180.0000	180.0000	180.0000	180.0000

vstup =

30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
33.0000	33.0000	33.0000	33.0000	33.0000	33.0000	33.0000	33.0000
24.0000	24.0000	24.0000	24.0000	24.0000	24.0000	24.0000	24.0000
26.0000	26.0000	26.0000	26.0000	26.0000	26.0000	26.0000	26.0000

medziprodukt =

20.0000	20.0000	20.0000	20.0000	20.0000	20.0000	20.0000	20.0000
30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000

max_zisk =

1.0e+03 *

1.6180	1.8380	1.7480	1.6180	1.8380	1.6180	1.6180	1.6180
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

skutocny_zisk =

495	1585	1060	1325	1330	795	1365	
-----	------	------	------	------	-----	------	--

pomer =

0.3059	0.8624	0.6064	0.8189	0.7236	0.4913	0.8436	0.6489
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

efektivita =

0.3548	1.0000	0.7032	0.9496	0.8391	0.5698	0.9783	0.7525
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Príloha C

Model maximalizácie výnosov

```
% vstupy
X1=[10 30 20 30 30 10 30 20]; % I x N
X2=[11 33 22 33 33 11 33 22];
X3=[12 36 24 36 36 12 36 24];
X4=[13 39 26 39 39 13 39 26];

% vystupy
Y1=[50 150 50 100 150 100 100 100]; % J x N
Y2=[50 150 100 120 135 90 180 40];
Y3=[50 150 150 150 120 40 95 150];
Y4=[50 150 180 180 105 35 200 100];

% medziprodukty
K0=[10 15 30 10 15 10 10 10]; % vymysleny pociatocny stav
K1=[10 20 30 15 20 10 20 10]; % L x N
K2=[10 25 30 20 25 10 30 10];
K3=[10 30 30 25 30 10 40 10];
K4=[10 35 30 30 35 10 50 10];

% vymyslene ceny vystupov
v1=[5]; % 1 x J
v2=[3];
v3=[4];
v4=[2];

% vymyslene ceny medziproduktov
w0=[6];
w1=[4]; % 1 x L
w2=[3];
w3=[1];
w4=[2];
```

```

T = 4; % pocet casovych obdobi
N = length(X1(1,:)); % pocet DMU
I = length(X1(:,1)); % pocet vstupov
J = length(Y1(:,1)); % pocet vystupov
L = length(K1(:,1)); % pocet medziproduktov

% 1 x (N+J+L)*T ucelova funkcia
f = [zeros(1,N),v1,w1,...
      zeros(1,N),v2,w2,...
      zeros(1,N),v3,w3,...
      zeros(1,N),v4,w4];

% ohranicenie sucet lambda = 1
blok = [ones(1,N),zeros(1,J),zeros(1,L)];
Aeq = blkdiag(blok,blok,blok,blok);
beq = [ones(T,1)];

% ohranicenie lambda >= 0, y >= 0, k >= 0
lb = repmat(0,(N+J+L)*T,1);

for o = 1:N
k0 = K0(:,o); % L x 1
% t=1
A1 = [-Y1,eye(J),zeros(J,L);
       X1,zeros(I,J),zeros(I,L);
       -K1,zeros(L,J),eye(L);
       K0,zeros(L,J),zeros(L,L)];
b1 = [zeros(J,1);X1(:,o);zeros(L,1);k0]; % k_0 na pravej strane
% t=2
A2 = [-Y2,eye(J),zeros(J,L);
       X2,zeros(I,J),zeros(I,L);
       -K2,zeros(L,J),eye(L);
       K1,zeros(L,J),zeros(L,L)];

```

```

b2 = [zeros(J,1);X2(:,o);zeros(L,1);zeros(L,1)];
% t=3
A3 = [-Y3,eye(J),zeros(J,L);
      X3,zeros(I,J),zeros(I,L);
      -K3,zeros(L,J),eye(L);
      K2,zeros(L,J),zeros(L,L)];
b3 = [zeros(J,1);X3(:,o);zeros(L,1);zeros(L,1)];
% t=4
A4 = [-Y4,eye(J),zeros(J,L);
      X4,zeros(I,J),zeros(I,L);
      -K4,zeros(L,J),eye(L);
      K3,zeros(L,J),zeros(L,L)];
b4 = [zeros(J,1);X4(:,o);zeros(L,1);zeros(L,1)];
% (J+I+L+L)*T x (N+J+L)*T
A = blkdiag(A1,A2,A3,A4);
riadky_t = length(A2(:,1)); % J+I+L+L
stlpce_t = length(A2(1,:)); % N+J+L
for t = 2:T % doplnenie k_t-1 okrem casu 1, kde je dane k0 a je na pravej strane
    A((riadky_t*(t-1)+J+I+L+1):(riadky_t*(t-1)+J+I+L+L),
      (stlpce_t*(t-2)+N+J+1):(stlpce_t*(t-2)+N+J+L)) = -eye(L);
end
b = [b1;b2;b3;b4];
[x,fval] = linprog(-f,A,b,Aeq,beq,lb,[],[],[]);
ucelovka(o) = -fval;
skutocne_vynosy(o) = f*[zeros(N,1);Y1(:,o);K1(:,o);...
                        zeros(N,1);Y2(:,o);K2(:,o);...
                        zeros(N,1);Y3(:,o);K3(:,o);...
                        zeros(N,1);Y4(:,o);K4(:,o)];
celex(:,o) = x;
lambda(:,o) = [x(1:N);...
               x((1+stlpce_t*1):(N+stlpce_t*1))];...

```



```

        x((1+stlpce_t*2):(N+stlpce_t*2));...
        x((1+stlpce_t*3):(N+stlpce_t*3))];
vystup(:,o) = [x((N+1):(N+J));...
        x((N+1+stlpce_t*1):(N+J+stlpce_t*1));...
        x((N+1+stlpce_t*2):(N+J+stlpce_t*2));...
        x((N+1+stlpce_t*3):(N+J+stlpce_t*3))];
medziprodukt(:,o) = [x((N+J+1):stlpce_t);...
        x((stlpce_t+N+J+1):(stlpce_t*2));...
        x((stlpce_t*2+N+J+1):(stlpce_t*3));...
        x((stlpce_t*3+N+J+1):(stlpce_t*4))];

end

%celex % (N+J+L)*T x N
lambda % N*T x N
vystup % J*T x N
medziprodukt % L*T x N
max_vynosy = ucelovka % 1 x N cez cas scitane vynosy pre jednotlivé DMU
skutocne_vynosy
pomer = skutocne_vynosy./max_vynosy
efektivita = (skutocne_vynosy./max_vynosy)./max(skutocne_vynosy./max_vynosy)

```

Výsledky

```

lambda =
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.5000    0.2500    0.0000    0.5000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.5000    0.2500    0.0000    0.5000    0.0000    0.0000    0.0000
1.0000    0.0000    0.5000    0.0000    0.0000    1.0000    0.0000    0.5000
0.0000    0.0000    0.0000    1.0000    0.0000    0.0000    1.0000    0.5000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000

```

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.0000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.5000
0.0000	1.0000	0.5000	1.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.5000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.4466	0.0000	0.4288	0.4466	0.0000	0.4288	0.0000
0.0000	0.5534	0.5000	0.5712	0.5534	0.0000	0.5712	0.5000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000
0.0000	0.6667	0.0000	0.6667	0.6667	0.0000	0.6667	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.3333	0.0000	0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000
0.0000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000

vystup =

100.0000	150.0000	125.0000	100.0000	150.0000	100.0000	100.0000	100.0000
90.0000	180.0000	135.0000	180.0000	180.0000	90.0000	180.0000	135.0000
50.0000	150.0000	150.0000	150.0000	150.0000	50.0000	150.0000	150.0000
50.0000	186.6667	140.0000	186.6667	186.6667	50.0000	186.6667	140.0000

medziprodukt =

10.0000	20.0000	15.0000	20.0000	20.0000	10.0000	20.0000	15.0000
10.0000	30.0000	20.0000	30.0000	30.0000	10.0000	30.0000	20.0000
10.0000	30.0000	20.0000	30.0000	30.0000	10.0000	30.0000	20.0000
10.0000	36.6667	20.0000	36.6667	36.6667	10.0000	36.6667	20.0000

max_vynosy =

1.0e+03 *

1.1700	2.5367	2.0900	2.2867	2.5367	1.1700	2.2867	1.9650
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

skutocne_vynosy =

800	2355	1810	2025	2100	1100	2130	1520
-----	------	------	------	------	------	------	------

pomer =

0.6838	0.9284	0.8660	0.8856	0.8279	0.9402	0.9315	0.7735
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

efektivita =

0.7273	0.9875	0.9211	0.9419	0.8805	1.0000	0.9908	0.8228
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Príloha D

Model maximalizácie zisku s voľným počiatočným stavom

```
% vstupy
X1=[10 30 20 30 30 10 30 20]; % I x N
X2=[11 33 22 33 33 11 33 22];
X3=[12 36 24 36 36 12 36 24];
X4=[13 39 26 39 39 13 39 26];

% vystupy
Y1=[50 150 50 100 150 100 100 100]; % J x N
Y2=[50 150 100 120 135 90 180 40];
Y3=[50 150 150 150 120 40 95 150];
Y4=[50 150 180 180 105 35 200 100];

% medziprodukty
K0=[10 15 30 10 15 10 10 10]; % vymysleny pociatocny stav
K1=[10 20 30 15 20 10 20 10]; % L x N
K2=[10 25 30 20 25 10 30 10];
K3=[10 30 30 25 30 10 40 10];
K4=[10 35 30 30 35 10 50 10];

% vymyslene ceny vstupov
u1=[3]; % 1 x I
u2=[2];
u3=[4];
u4=[5];

% vymyslene ceny vystupov
v1=[5]; % 1 x J
v2=[3];
v3=[4];
v4=[2];

% vymyslene ceny medziproduktov
w0=[6];
```

```

w1=[4]; % 1 x L
w2=[3];
w3=[1];
w4=[2];

T = 4; % pocet casovych obdobi
N = length(X1(1,:)); % pocet DMU
I = length(X1(:,1)); % pocet vstupov
J = length(Y1(:,1)); % pocet vystupov
L = length(K1(:,1)); % pocet medziproduktov

% 1 x L+(N+J+I+L)*T ucelova funkcia
f = [-w0,zeros(1,N),v1,-u1,zeros(1,L),...
      zeros(1,N),v2,-u2,zeros(1,L),...
      zeros(1,N),v3,-u3,zeros(1,L),...
      zeros(1,N),v4,-u4,w4];

% ohranenie sucet lambda = 1
blok1 = [zeros(1,L),ones(1,N),zeros(1,J),zeros(1,I),zeros(1,L)];
blok = [ones(1,N),zeros(1,J),zeros(1,I),zeros(1,L)];
Aeq = blkdiag(blok1,blok,blok,blok);
beq = [ones(T,1)];

% ohranenie lambda >= 0, y >= 0, x >= 0, k >= 0
lb = repmat(0,L+(N+J+I+L)*T,1);

% t=1
A1 = [zeros(J,L),-Y1,eye(J),zeros(J,I),zeros(J,L);
      zeros(I,L), X1,zeros(I,J),-eye(I),zeros(I,L);
      zeros(L,L),-K1,zeros(L,J),zeros(L,I),eye(L);
      -eye(L), K0,zeros(L,J),zeros(L,I),zeros(L,L)];

% t=2
A2 = [-Y2,eye(J),zeros(J,I),zeros(J,L);

```

```

        X2,zeros(I,J),-eye(I),zeros(I,L);
        -K2,zeros(L,J),zeros(L,I),eye(L);
        K1,zeros(L,J),zeros(L,I),zeros(L,L)];
% t=3
A3 = [-Y3,eye(J),zeros(J,I),zeros(J,L);
        X3,zeros(I,J),-eye(I),zeros(I,L);
        -K3,zeros(L,J),zeros(L,I),eye(L);
        K2,zeros(L,J),zeros(L,I),zeros(L,L)];
% t=4
A4 = [-Y4,eye(J),zeros(J,I),zeros(J,L);
        X4,zeros(I,J),-eye(I),zeros(I,L);
        -K4,zeros(L,J),zeros(L,I),eye(L);
        K3,zeros(L,J),zeros(L,I),zeros(L,L)];
% (J+I+L+L)*T x L+(N+J+I+L)*T
A = blkdiag(A1,A2,A3,A4);
riadky_t = length(A2(:,1)); % J+I+L+L
stlpce_t = length(A2(1,:)); % N+J+I+L
for t = 2:T % doplnenie k_t-1
    A((riadky_t*(t-1)+J+I+L+1):(riadky_t*(t-1)+J+I+L+L),
        (L+stlpce_t*(t-2)+N+J+I+1):(L+stlpce_t*(t-2)+N+J+I+L)) = -eye(L);
end
b_t = zeros(J+I+L+L,1);
b = repmat(b_t,T,1);
[x,fval] = linprog(-f,A,b,Aeq,beq,lb,[],[],[]);
ucelovka = -fval;
for o=1:N
    skutocny_zisk(o) = f*[K0(:,o);zeros(N,1);Y1(:,o);X1(:,o);zeros(L,1);...
        zeros(N,1);Y2(:,o);X2(:,o);zeros(L,1);...
        zeros(N,1);Y3(:,o);X3(:,o);zeros(L,1);...
        zeros(N,1);Y4(:,o);X4(:,o);K4(:,o)];
end

```

```

celex = x;
lambda = [x((L+1):(L+N));...
          x(((L+1)+stlpce_t*1):((L+N)+stlpce_t*1));...
          x(((L+1)+stlpce_t*2):((L+N)+stlpce_t*2));...
          x(((L+1)+stlpce_t*3):((L+N)+stlpce_t*3))];
vystup = [x((L+N+1):(L+N+J));...
          x((L+N+1+stlpce_t*1):(L+N+J+stlpce_t*1));...
          x((L+N+1+stlpce_t*2):(L+N+J+stlpce_t*2));...
          x((L+N+1+stlpce_t*3):(L+N+J+stlpce_t*3))];
vstup = [x((L+N+J+1):(L+N+J+I));...
          x((L+N+J+1+stlpce_t*1):(L+N+J+I+stlpce_t*1));...
          x((L+N+J+1+stlpce_t*2):(L+N+J+I+stlpce_t*2));...
          x((L+N+J+1+stlpce_t*3):(L+N+J+I+stlpce_t*3))];
medziprodukt = [x(1:L);...
                x((1+stlpce_t*1):(L+stlpce_t*1));...
                x((1+stlpce_t*2):(L+stlpce_t*2));...
                x((1+stlpce_t*3):(L+stlpce_t*3));...
                x((1+stlpce_t*4):(L+stlpce_t*4))];

%celex % L+(N+J+I+L) x N
lambda % N x N
vystup % J x N
vstup % I x N
medziprodukt % L x N
max_zisk = ucelovka % 1 x N cez cas scitany optimalny zisk pre DMU
skutocny_zisk % 1 x N cez cas scitany realny zisk pre jednotlivu DMU
pomer = skutocny_zisk/max_zisk
efektivita = (skutocny_zisk/max_zisk)/max(skutocny_zisk/max_zisk)

```

Výsledky

lambda =

0.0000
0.5000
0.0000
0.0000
0.5000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
1.0000
0.0000
0.0000
0.0000
1.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
1.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000

0.0000

vystup =

150.0000

180.0000

150.0000

180.0000

vstup =

30.0000

33.0000

24.0000

26.0000

medziprodukt =

15.0000

20.0000

30.0000

30.0000

30.0000

max_zisk =

1.8380e+03

skutocny_zisk =

495	1585	1060	1325	1330	795	1365	1050
-----	------	------	------	------	-----	------	------

pomer =

0.2693	0.8624	0.5767	0.7209	0.7236	0.4325	0.7427	0.5713
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

efektivita =

0.3123	1.0000	0.6688	0.8360	0.8391	0.5016	0.8612	0.6625
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Príloha E

Duálny model k modelu maximalizácie zisku s voľným počiatočným stavom

```
% vstupy
X1=[10 30 20 30 30 10 30 20]; % I x N
X2=[11 33 22 33 33 11 33 22];
X3=[12 36 24 36 36 12 36 24];
X4=[13 39 26 39 39 13 39 26];

% vystupy
Y1=[50 150 50 100 150 100 100 100]; % J x N
Y2=[50 150 100 120 135 90 180 40];
Y3=[50 150 150 150 120 40 95 150];
Y4=[50 150 180 180 105 35 200 100];

% medziprodukty
K0=[10 15 30 10 15 10 10 10]; % vymysleny pociatocny stav
K1=[10 20 30 15 20 10 20 10]; % L x N
K2=[10 25 30 20 25 10 30 10];
K3=[10 30 30 25 30 10 40 10];
K4=[10 35 30 30 35 10 50 10];

% vymyslene ceny vstupov
u1=[3]; % 1 x I
u2=[2];
u3=[4];
u4=[5];

% vymyslene ceny vystupov
v1=[5]; % 1 x J
v2=[3];
v3=[4];
v4=[2];

% vymyslene ceny medziproduktov
w0=[6];
```

```

w1=[4]; % 1 x L
w2=[3];
w3=[1];
w4=[2];

T = 4; % pocet casovych obdobi
N = length(X1(1,:)); % pocet DMU
I = length(X1(:,1)); % pocet vstupov
J = length(Y1(:,1)); % pocet vystupov
L = length(K1(:,1)); % pocet medziproduktov

% 1 x (J+I+L+L+1)*T ucelova funkcia
f = [zeros(1,J),zeros(1,I),zeros(1,L),zeros(1,L),ones(1,1),...
     zeros(1,J),zeros(1,I),zeros(1,L),zeros(1,L),ones(1,1),...
     zeros(1,J),zeros(1,I),zeros(1,L),zeros(1,L),ones(1,1),...
     zeros(1,J),zeros(1,I),zeros(1,L),zeros(1,L),ones(1,1)];
% ohranicenie alpha >= 0, beta >= 0, gamma >= 0, delta >= 0, psi volne
lb = repmat([zeros(J+I+L+L,1);-Inf],T,1);

% t=1
A1 = [Y1.',-X1.',K1.',-K0.',-ones(N,1);
      -eye(J),zeros(J,I),zeros(J,L),zeros(J,L),zeros(J,1);
      zeros(I,J),eye(I),zeros(I,L),zeros(I,L),zeros(I,1);
      zeros(L,J),zeros(L,I),zeros(L,L),eye(L,L),zeros(L,1); % w0
      zeros(L,J),zeros(L,I),-eye(L),zeros(L,L),zeros(L,1)];
b1 = [zeros(N,1);-v1;u1;w0;zeros(L,1)];
% t=2
A2 = [Y2.',-X2.',K2.',-K1.',-ones(N,1);
      -eye(J),zeros(J,I),zeros(J,L),zeros(J,L),zeros(J,1);
      zeros(I,J),eye(I),zeros(I,L),zeros(I,L),zeros(I,1);
      zeros(L,J),zeros(L,I),-eye(L),zeros(L,L),zeros(L,1)];

```

```

b2 = [zeros(N,1);-v2;u2;zeros(L,1)];
% t=3
A3 = [Y3.',-X3.',K3.',-K2.',-ones(N,1);
      -eye(J),zeros(J,I),zeros(J,L),zeros(J,L),zeros(J,1);
      zeros(I,J),eye(I),zeros(I,L),zeros(I,L),zeros(I,1);
      zeros(L,J),zeros(L,I),-eye(L),zeros(L,L),zeros(L,1)];
b3 = [zeros(N,1);-v3;u3;zeros(L,1)];
% t=4
A4 = [Y4.',-X4.',K4.',-K3.',-ones(N,1);
      -eye(J),zeros(J,I),zeros(J,L),zeros(J,L),zeros(J,1);
      zeros(I,J),eye(I),zeros(I,L),zeros(I,L),zeros(I,1);
      zeros(L,J),zeros(L,I),-eye(L),zeros(L,L),zeros(L,1)];
b4 = [zeros(N,1);-v4;u4;-w4];
% L+(N+J+I+L)*T x (J+I+L+L+1)*T
A = blkdiag(A1,A2,A3,A4);
stlpce_t = length(A2(1,:)); % J+I+L+L+1
riadky_t = length(A2(:,1)); % N+J+I+L
for t = 2:T % doplnenie delta_t+1
A((riadky_t*(t-1)+1):(riadky_t*(t-1)+L),
  (stlpce_t*(t-1)+J+I+L+1):(stlpce_t*(t-1)+J+I+L+L)) = eye(L);
end
b = [b1;b2;b3;b4];
[x,fval] = linprog(f,A,b,[],[],lb,[],[],[]);
ucelovka = fval;
celex = x;
alpha = [x(1:J);...
         x((1+stlpce_t*1):(J+stlpce_t*1));...
         x((1+stlpce_t*2):(J+stlpce_t*2));...
         x((1+stlpce_t*3):(J+stlpce_t*3))];
beta = [x((J+1):(J+I));...
        x((J+1+stlpce_t*1):(J+I+stlpce_t*1));...

```

```

        x((J+1+stlpce_t*2):(J+I+stlpce_t*2));...
        x((J+1+stlpce_t*3):(J+I+stlpce_t*3))];
gamma = [x((J+I+1):(J+I+L));...
        x((J+I+1+stlpce_t*1):(J+I+L+stlpce_t*1));...
        x((J+I+1+stlpce_t*2):(J+I+L+stlpce_t*2));...
        x((J+I+1+stlpce_t*3):(J+I+L+stlpce_t*3))];
delta = [x((J+I+L+1):(J+I+L+L));...
        x((stlpce_t*1+J+I+L+1):(J+I+L+L+stlpce_t*1));...
        x((stlpce_t*2+J+I+L+1):(J+I+L+L+stlpce_t*2));...
        x((stlpce_t*3+J+I+L+1):(J+I+L+L+stlpce_t*3))];
psi = [x(stlpce_t*1);...
        x(stlpce_t*2);...
        x(stlpce_t*3);...
        x(stlpce_t*4)];

%celex % (J+I+L+L+1)*T x N
alpha % J*T x N
beta % I*T x N
gamma % L*T x N
delta % L*T x N
psi % 1*T x N
ucelovka

```

Výsledky

```

alpha =
5.0000
3.0000
4.0000
2.0000

beta =

```

3.0000

2.0000

4.0000

5.0000

gamma =

23.2895

5.2956

9.3690

2.0000

delta =

6.0000

23.2895

5.2956

9.3690

psi =

1.0e+03 *

1.0358

0.1671

0.6262

0.0089

ucelovka =

1.8380e+03