UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

STRATEGICKÉ TURNAJE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2020 Bc. Anna NEVAJDA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

STRATEGICKÉ TURNAJE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.

Bratislava 2020 **Bc. Anna NEVAJDA**

55229539

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Bc. Anna Nevajda
Študijný program:	ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor:	aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	diplomová
Jazyk záverečnej práce:	slovenský
Sekundárny jazyk:	anglický

Názov: Strategické turnaje
Strategic Tournaments

Anotácia: Práca sa zaoberá špeciálnym typom hry zvaným turnaj. Turnaj je simultánna hra s n hráčmi, vystavaná na symetrickej simultánnej hre s dvomi hráčmi. Turnaj má niekoľko interpretácií ako evolučný model, ako model sociálnej interakcie a ako model konkurencie medzi firmami s procesne racionálnymi spotrebiteľmi. Práca sa zaoberá konštrukciou takýchto hier pre niektoré typové simultánne hry, nájdením a analýzou ich ekvilibrií.

Vedúci:	doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.
Katedra:	FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry:	prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Dátum zadania:	08.01.2019

Dátum schválenia: 08.01.2019 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Poďakovanie Týmto by som chcela vyjadriť poďakovanie najmä svojmu vedúcemu práce doc. RNDr. Jánovi Pekárovi, PhD. za veľkú ochotu pri vyprácovavní tejto diplomovej práce a najmä za jeho pomoc pri akýchkoľvek otázkach, ktoré sa počas obdobia písania práce vyskytli.

Ďalšie ďakujem patrí všetkým, ktorí ma pri písaní podporili a vydržali to so mnou až do konca, najmä Lucka.

Najväčšie ďakujem však patrí mamine, bez ktorej by som tu nebola ani ja a ani táto práca a bola mojim hlavným hnacím motorom pri písaní.

Abstrakt v štátnom jazyku

NEVAJDA, Anna: Strategické turnaje [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD., Bratislava, 2020, 66 s.

Naša diplomová práca sa z väčšej časti zaoberá špeciálnym typom hry nazývaným strategický turnaj. Turnaj je vo všeobecnosti simultánna hra s n hráčmi, no v tejto práci sme sa rozhodli pre lepšiu čitateľnosť usporiadať turnaj len s dvomi hráčmi. Uvádzame čitateľa do kontextu evolúcie kooperácie, ktorá, ako v práci zistíme, súvisí s hrou zvanou Väzňova dilema. Keďže turnaj je typ hry, kedy sa hra opakuje viackrát, je dôležité uviesť aj teoretické poznatky o opakovaných hrách - konečných aj nekončených. V druhej polovici práce sa venujeme už samotnému zostrojeniu strategického turnaja pre nami vybranú už spomínanú hru Väzňova dilema. Vybrali sme 20 rôznorodých stratégií, ktoré spolu hrajú proti sebe a hľadáme také z nich, ktoré z daného turnaja výjdu ako najúspešnejšie. Celý tento turnaj sme naprogramovali v programe Matlab. Neskôr analyzujeme, či tieto úspešné stratégie majú nejaké spoločné vlastnosti, kvôli ktorým tento úspech dosahujú a spravíme aj menšie obmeny v tomto turnaji. Nakoniec si uvedieme aj iné aplikácie, pomocou ktorých sa strategický turnaj dá vystavať. Hlavným cieľom tejto práce je teda usporiadať strategický turnaj pre nami zvolenú simultánnu hru a analyzovať jej výsledky.

Kľúčové slová: strategické turnaje, Väzňova dilema, opakované hry, evolúcia kooperácie, konkurencia

Abstract

NEVAJDA, Anna: Strategic Tournaments [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD., Bratislava, 2020, 66p.

Our master thesis is, for the most part, dedicated to a special type of game called strategic tournament. Generally, tournament is a simultaneous game with n players; however, for better readability, we decided to only build tournaments with two players in this thesis. Firstly, we introduce our reader to the context of evolution of cooperation, which, as we learn later on in the thesis, is linked to a game called Prisoner's dilemma. Since a tournament is a type of a game that is played repeatedly, it is crucial to also state some theoretical knowledge of repeated games, both finite and infinite. In the second half of this thesis we focus on building a strategic tournament for the aforementioned Prisoner's dilemma game. We selected 20 different strategies to compete against one another in order to identify the most successful ones. The whole tournament was programmed using Matlab. Later we analyse whether these successful strategies have any common attributes that help them achieve such success, also making slight adjustments to the tournament. Finally, we mention other applications that can be used to simulate strategic tournaments. The aim of this thesis is to build a strategic tournament for the chosen simultaneous game and analyse the results.

Keywords: Strategic Tournaments, Prisoner's Dilemma, Repeated Games, Evolution of Cooperation, Competititon

Obsah

Úvod

V bežnom živote sa na každodennej báze stretávame s rozhodnutiami. Uhnem sa tomu oprotiidúcemu alebo nie? Kúpim si lístok do kina alebo do divadla? Pôjdem spať už o desiatej alebo zase neskôr? Každýkrát, keď robíme rozhodnutia, chceme, aby nám dôsledok tohto rozhodnutia priniesol čo najväčší úžitok. Povedzme, že po istom čase si vytvoríme akési stratégie, ktoré si myslíme, že nám pomôžu dosahovať čo najlepšie výsledky. Ale sú tieto stratégie naozaj tie najlepšie alebo sa nájdu aj lepšie? Na túto otázku nám vie odpovedať odvetvie aplikovanej matematiky - teória hier.

Začiatkom osemdesiatych rokov si kládol podobné otázky aj Robert Axelrod, ktorý sám usporiadal strategický turnaj hry Väzňovej dilemy [2]. Do turnaja prispeli svojími stratégiami herní teoretici z rôznych odvetví. Turnaj vyhrala stratégia s názvom Oko za oko, ktorej princíp je, že zahrá to, čo zahral jej oponent v ťahu predtým.

No vyhrala by táto stratégia vždy? Ak áno, prečo? Ak nie, tak prečo vyhrala práve u Roberta Axelroda? V našej práci bude hlavnou úlohou zrekonštruovať Axelrodov strategický turnaj, no zapojiť do turnaja aj iné stratégie. Samozrejme, Väzňova dilema je iba jeden z typov simultánnej hry a nájdu sa aj viaceré, s ktorými by sa dal takýto turnaj usporiadať.

Cieľom tejto diplomovej práce je uviesť čitateľa do problematiky strategických turnajov a skonštruovať funkčný program turnaja pre nami vybranú hru. V neposlednom rade je zmyslom tejto práce analyzovať výsledky nájdené v priebehu skúmania tohto turnaja.

Prácu sme rozčlenili na štyri kapitoly, z ktorých prvé dve sú teoretické a druhé dve sa už venujú turnajom a aplikáciám. Prvá kapitola sa zaoberá problematikou evolúcie kooperácie a teda, ako sa spoločnosť, ktorá je prirodzene nekooperatívna, vyvinula na spoločnosť, ktorá je za niektorých podmienok ochotná spolupracovať [2, 3]. Opisuje aj úzky vzťah medzi touto evolúciou a hrou Väzňova dilema, ktorej sa venujeme ďalej v práci. Druhá kapitola je teória opakovaných hier, ktoré sa v turnajoch, pochopiteľne, využívajú. Poznáme dva typy opakovaných hier - konečne a nekonečne opakované hry, ktorých základy sú opísané v spomínanej kapitole obohatené o pár príkladov. Tretia kapitola sa už venuje gru tejto práce a to samotnému usporiadaniu turnaja. Celý turnaj sme naprogramovali v programe Matlab, ktorého ukážky sa nachádzajú skrz kapitolou. Vybrali sme 20 stratégií, ktoré proti sebe bojujú a našim cielom je analyzovať, ktoré stratégie vyšli z turnaja najúspešnejšie a čo tkvie za týmto úspechom. Okrem základného turnaja sme spravili aj pár obmien v tomto turnaji a ešte hlbšie sa pozeráme na to, aké atribúty stratégií sa javia ako víťazné. Na záver, v poslednej kapitole, si uvedieme ešte pár iných aplikácií, pomocou ktorých by sa dal strategický turnaj usporiadať. V prílohe A sa navyše nachádza celý matlabovský kód turnaja.

1 Evolúcia kooperácie

1.1 Úvod do evolúcie kooperácie

Evolúcia kooperácie, ktorou sa budeme zaoberať v tejto kapitole, úzko súvisí s evolučnou teóriou. Evolučná teória je založená v prvom rade na boji o prežitie v prírode a prežití práve tých najsilnejších jedincov z pomedzi všetkých.

Vo všeobecnosti sa kooperácia vyskytuje najmä medzi jednotlivcami rovnakého druhu, avšak nájdu sa v prírode aj iné prípady, kedy kooperujú medzi sebou aj jedinci iných druhov, väčšinou za nejakým účelom.

Kooperácia ako taká bola vždy vnímaná ako adaptívna. To znamená, že sa vždy vie prispôsobiť danej situácii a okolitému prostrediu.

Kooperácia a súvisiace správanie sa určitých skupín, ako je napríklad altruizmus - nezištné správanie sa voči ostatným aj s možnosťou uškodenia sebe samému [8], alebo zdržanie sa v súťaži - neochota súťažiť s inými, viedlo k rozšíreniu evolučnej teórie dvomi smermi:

1. Teória genetického príbuzenstva

2. Recipročná teória

Mnoho vedeckých prác podporuje viac teóriu genetického príbuzenstva a to z dôvodu sily génov. Okrem ľudskej rasy sa takmer u každého iného druhu objavili znaky altruizmu a následná kooperácia len vtedy, ak boli subjekty v príbuzenskom vzťahu a to najmä pri najbližších členoch rodiny (rodičia, súrodenci, starí rodičia).

Pri nízkom alebo žiadnom príbuzenstve dochádza taktiež ku kooperácii, no obeta vychádzajúca zo spomínaného altruizmu sa nevyskytuje pri žiadnej z týchto možností.

Ako príklad si môžeme uviesť spoluprácu medzi mravcami a akáciou. Akácia poskytuje mravcom úkryt a potravu, na oplátku mravce poskytujú stromu ochranu. Spolupracujú spolu, no obe strany to robia len pre svoje dobro a nie pre dobro toho druhého. Chýba teda altruizmus, obeta. V takejto spolupráci môže skôr či neskôr dôjsť k antagonizmu, akémusi nepriateľstvu. Práve takýmto symbiózam sa venuje skôr druhá evolučná teória – teória reciprocity. [3]

Kooperáciu vieme charakterizovať nasledujúcou schémou (pre jednoduchosť uvádzame len dva subjekty):

DARCA Zaplatí náklad C	$\longrightarrow$	PRÍJEMCA Dostane príjem P

Kooperácia je teda akási vzájomná spolupráca, ktorá sa dá ďalej charakterizovať v zmysle teórie hier. Máme darcu a príjemcu. Darca vloží do kooperácie náklad C a príjemca z tejto spolupráce dostane príjem vo výške P. Náklad C a príjem P sú merané v zmysle schopnosti, sily. Túto schému vieme ďalej rozšíriť na koncept hry Väzňova dilema. [9]

1.2 Súvis evolúcie kooperácie a Väzňovej dilemy

Práve Väzňova dilema je tou hrou, ktorá vie najlepšie odzrkadliť vzájomnú kooperáciu medzi subjektami. Opäť si pre jednoduchosť vezmime príklad len s dvomi subjektami - hráčmi.

Vo Väzňovej dileme máme teda dvoch hráčov. Nazvime ich hráč A a hráč B. Obaja z týchto hráčov majú na výber z dvoch akcií – spolupracovať alebo zradiť.

Jedna z foriem Väzňovej dilemy je zobrazená v Tabuľke 1 (s konkrétnymi číslami):

		Hráč B			
		Spolupráca		Zrada	
Hráč A	Spolupráca	3	3	0	5
	Zrada	5	0	1	1

Tabuľka 1: Príklad bimatice výplat hry Väzňovej dilemy.

Vidíme, že nezáleží na tom, čo zahrá hráč A, hráčovi B sa vždy vyplatí zradiť. Ak si hráč A vyberie spoluprácu, hráčovi B sa vyplatí zradiť, lebo $3 < 5$. Ak si hráč A vyberie zradu, opäť sa hráčovi B oplatí zradiť, lebo $0 < 1$. Dilema spočíva v tom, že ak obaja hráči A a B zradia, obaja budú mať horšie výplaty (1,1), než keby obaja spolupracovali (3,3).

Rovnako vieme vytvoriť všeobecnú bimaticu výplat pre hru Väzňovej dilemy:

		Hráč B			
		Spolupráca		Zrada	
Hráč A	Spolupráca	X	X	Z	W
	Zrada	W	Z	Y	Y

Tabuľka 2: Všeobecná bimatica výplat hry Väzňovej dilemy.

kde W > X > Y > Z [3, 11].

Ďalej je dôležité uviesť aj základné definície pojmov, ktoré sa budú v tejto práci často vyskytovať.

Definícia 1.1 (Nashovo ekvilibrium)**.** *Profil akcií a^* je Nashovým ekvilibriom hry G v čistých stratégiách, ak pre každého hráča i a pre všetky $a_i \in S$ platí:*

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*), \tag{1}$$

kde u_i je funkcia výplat hráča i [11].

Použitím Definície 1.1 a predpokladaním racionality oboch hráčov dostaneme jediné Nashovo ekvilibrium (zrada, zrada) s výplatami Y,Y.

Neracionálne uvažujúci hráči by si však vybrali možnosť kooperácie, pretože obaja by získali výplatu X (X > Y). Zrada nie je ekvilibriom iba v zmysle teórie hier, no nachádza sa aj v biológii. Pokiaľ sa stretnutie subjektov, hráčov neopakuje a je úplne náhodné, tak ktorákoľvek populácia sa vyvinie tak, že všetci volia možnosť zrady - zo všetkých sa stanú zradcovia. Žiadna iná stratégia totiž neposkytuje lepšiu výplatu pre jednotlivca. Môžeme teda povedať, že zradiť je v zmysle najvyššej možnej výplaty evolučne stabilné.

Definícia 1.2 (Evolučne stabilná stratégia)**.** *Hovoríme, že stratégia je evolučne stabilná, ak nemôže byť napadnutá žiadnou inou stratégiou. Navyše stratégia S je evolučne stabilná* *stratégia, ak pre každé $T \neq S$ platí*

$$u(S,S) \geq u(T,S) \quad a \tag{2}$$

$$u(S,T) > u(T,T) \tag{3}$$

[5].

To, že evolučne stabilná stratégia nemôže byť napadnutá inou stratégiou znamená, že ak je stratégia využívaná väčšinou populácie, žiadna iná, nová stratégia sa nemôže objaviť taká, žeby mala vyššiu výplatu alebo by bola úspešnejšia.

Evolučne stabilná stratégia je vlastne Nashovo ekvilibrium, ktoré je evolučne stabilné - prirodzený výber zabráni inej stratégii evolučne stabilnú stratégiu "poraziť"[4].

V prípade Väzňovej dilemy, ktorá sa hrá len raz, nevieme nájsť žiadnu lepšiu stratégiu, než je (zrada, zrada). Pri jednotlivých zradách neexistuje vyššia výplata pre jednotlivca než výplata Y. V prípade jednej hry Väzňovej dilemy je vždy (zrada, zrada) evolučne najstabilnejšia.

1.3 Súvis evolúcie kooperácie a opakovanej Väzňovej dilemy

V prírode môže nastať situácia, že sa dva subjekty stretnú znova. V takom prípade je možné, že si subjekty pamätajú výsledok ich poslednej hry. Preto sa z tejto novej situácie stane takzvaná opakovaná Väzňova dilema, ktorá prináša viaceré možnosti.

Označme n počet opakovaní hry Väzňovej dilemy.

V prípade, že je n známe, a teda vieme koľkokrát sa bude hra hrať, (zrada, zrada) bude vždy evolučne stabilná možnosť. Dôvodom je, že (zrada, zrada) by bola ekvilibriom poslednej hry a teda aj predposlednej, a tak ďalej až k prvej hre.

V prípade, že n je neznáme, nie je dopredu dané, majme pravdepodobnosť p, že po súčasnom stretnutí sa dva subjekty stretnú znova. Do pravdepodobnosti p sa zahŕňajú okolnosti ako priemerná dĺžka života, mobilita a zdravie subjektov.

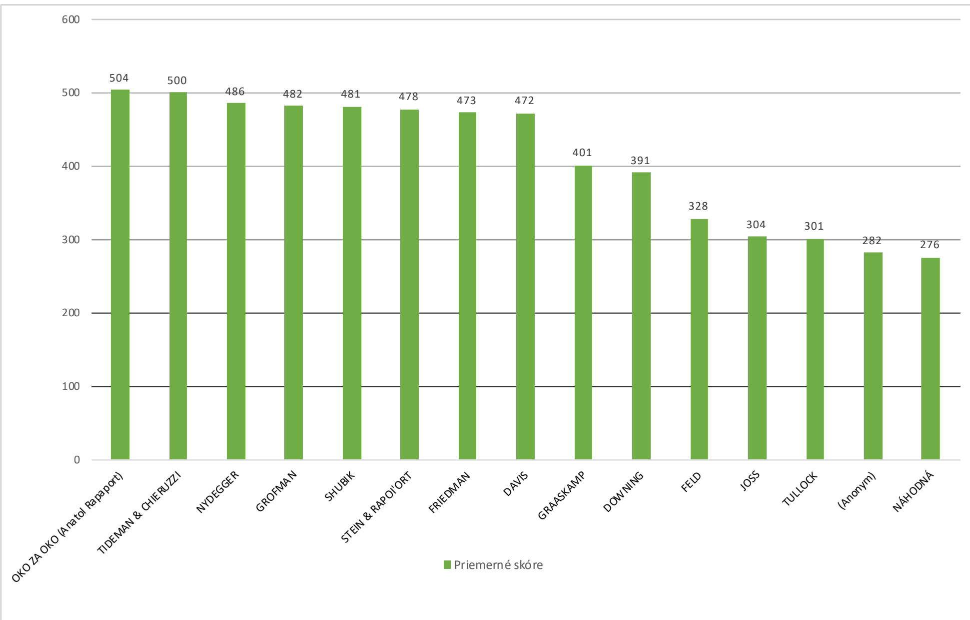
Pre každú hodnotu pravdepodobnosti p je stratégia nekonečnej zrady - (zrada, zrada) evolučne stabilná. Avšak, aj iné stratégie môžu byť v tomto prípade evolučne stabilné. V tejto podkapitole sa budeme navyše zaoberať len simultánnym rozhodovaním, aj keď sekvenčné rozhodovanie by spôsobilo len veľmi malý rozdiel vo výsledku.

Teóriu evolúcie kooperácie vieme rozčleniť na tri hlavné body:

1. Robustnosť – akému typu stratégie sa bude dariť v prostredí, v ktorom sa už teraz používajú skôr sofistikované stratégie?
2. Stabilita – pod akými podmienkami vie táto stratégia prežiť útok inej, zmutovanej stratégie?
3. Počiatočná životaschopnosť – ak aj je stratégia robustná a stabilná, ako sa môže takáto stratégia uchytiť v spoločnosti, ktorá je prevažne nekooperatívna? [3]

Vo výskume Roberta Axelroda z roku 1980 bol spravený počítačový turnaj Väzňovej dilemy. Hry sa zúčastnili rôzni herní teoretici z oblasti ekonómie, sociológie, politiky a matematiky. Bimatica výplat bola rovnaká ako v Tabuľke 1, dĺžka hry bola n = 200 ťahov. Do hry bolo v prvom kole celkovo vložených 14 stratégií a hralo sa princípom, že každá stratégia bola spárená s každou stratégiou [2].

Na Obrázku 1 uvádzame priemerné skóre stratégii, ktoré boli súčasťou turnaja:



Obr. 1: Výsledky počítačového turnaja Roberta Axelroda - 1. kolo.

Najvyššie priemerné skóre získala najjednoduchšia stratégia s názvom TIT FOR TAT

- Oko za oko, pridaná herným teoretikom Anatolom Rapaportom. Oko za oko je stratégia, ktorá vždy začína hru s kooperáciou a v ďalšom ťahu kopíruje to, čo spravil druhý hráč v predošlom ťahu.

Oko za oko	S	Z	Z	S	S
Náhodná	Z	Z	S	S	Z

Obr. 2: Princíp stratégie Oko za oko.

V druhom kole bolo pridaných až 62 stratégii a opäť vyhrala stratégia Oko za oko.

Vďaka takej vysokej úspešnosti stratégie sa neskôr analýzou preukázala **robustnosť** tejto stratégie. Tá tkvie v troch veciach: Oko za oko nikdy nie je prvé, ktoré zradí. Ak druhý hráč zradí, stratégia Oko za oko sa odplatí taktiež zradou. Už po jednej zrade a odplate stratégia Oko za oko odpustila a vedela hrať opäť kooperatívne.

V prípade stability je treba dokázať, že žiadna iná stratégia nedokáže napadnúť stratégiu Oko za oko.

Chceme ukázať, že za dostatočne veľkej pravdepodobnosti p opätovného stretnutia nedokáže žiadna iná stratégia napadnúť Oko za oko. Uvedomme si, že Oko za oko si pamätá iba posledný ťah. Jedna kooperácia je dostatočná, aby sa hra zresetovala na takú, aká bola na začiatku. Podobne jedna zrada zase nastaví situáciu tak, aká bola v druhom kole po tom, čo v prvom bola zahratá zrada. Keďže máme danú pravdepodobnosť p opätovného stretu (a teda je to aj pravdepodobnosť, že hra sa daným ťahom nekončí), stratégia nemôže byť maximálna v hre proti stratégii Oko za oko, pokiaľ neurobí rovnakú vec pri výskyte daného stavu, ako aj pri opätovnom objavení sa tohto stavu.

Preto, ak je pravidlo maximálne a začína sa s kooperáciou, v druhom kole máme rovnaký stav ako v prvom a teda maximálne pravidlo bude pokračovať s kooperáciou a teda až dokonca bude kooperovať s Okom za oko. Toto ale stále nebude lepšie, ako keby iné Oko za oko hralo s Okom za oko a preto nemôže Oko za oko napadnúť (bude to rovnaké).

Ak by pravidlo začínalo so zradou, tak Oko za oko zmení v svojom ťahu kooperáciu za zradu a potom máme dve možnosti na pokračovanie, ktoré by mohli byť maximálne:

- Ak sa znova zahrá zrada, potom Oko za oko dá znova zradu a vždy bude maximálne, ak sa na zradu odpovie zradou. Potom sa však táto stratégia rovná stratégii zrád.
- Ak sa zahrá kooperácia, potom máme rovnaký prípad ako na začiatku, takže aby to bolo maximálne, musíme už dokonca opakovať zradu-kooperáciu.

Takže, ak ani všetky zrady a ani zrada-kooperácia nevedia napadnúť Oko za oko, potom už žiadna stratégia takéto niečo nevie.

Aby sme zistili, kedy môžu tieto stratégie napadnúť Oko za oko, pripomíname, že pravdepodobnosť, že nastane n-tá interakcia je $p^{(n-1)}$. Celková výplata je potom sumou všetkých výplat s váhami 1, p, p^2, ...

Ak Oko za oko hrá s iným Okom za oko, každý ťah dostane výplatu X, celková výplata je potom

$$1X + pX + p^2X + \cdots = \frac{X}{(1-p)}. \tag{4}$$

Ak zrady hrajú proti Oku za oko, prvý ťah dostane W a zvyšok Y. Takže, aby neporazil Oko za oko, musí platiť:

$$\frac{X}{(1-p)} >= W + \frac{pY}{1-p}. \tag{5}$$

Podobne, ak zrada-kooperácia hrajú proti stratégii Oko za oko a začína zradou, prvou odpoveďou je kooperácia, ktorá sa potom strieda so zradou. Výplata je potom

$$1W + pZ + Wp^2 + \cdots = \frac{W + PZ}{1-p^2}. \tag{6}$$

Vyjadrením si p z nerovníc dostaneme:

$$p \geq \frac{W-X}{W-Y} \tag{7}$$

$$p \geq \frac{W-X}{W-S}. \tag{8}$$

Z dôkazu vyplýva, že Oko za oko je **evolučne stabilná** stratégia, ak pravdepodobnosť p spĺňa predchádzajúce nerovnosti (5), (6).

Poslednou otázkou na rozobratie nám ostáva **počiatočná životaschopnosť** stratégie Oko za oko.

Oko za oko nie je jedinou evolučne stabilnou stratégiou. Stratégia všetky zrady je tiež evolučne stabilná a dokonca nezáleží na tom, akú hodnotu má pravdepodobnosť p. Pozrime sa na to, prečo vôbec začal trend v kooperácii, keď vidíme, že pre každú pravdepodobnosť p máme evolučne stabilnú vždy stratégiu Zrady.

Dôvodom je genetické príbuzenstvo. To dáva priestor vyniknúť pravému altruizmu. Môžeme povedať, že nezradiť je v jednoťahovej hre Väzňovej dilemy typ altruizmu – hráč sa dobrovoľne vzdáva nejakej výplaty, ktorú mohol získať. Z tohto sa môže kooperácia iba vyvinúť ďalej, najmä ak sú hráči v príbuzenstve. Keď už kooperačné gény existujú, prirodzený výber sa bude snažiť pretlačiť stratégie, ktoré sú založené na kooperácii. Keď sa zahrá kooperácia, jednou z narážok príbuzenstva je už fakt vzájomnej kooperácie. V prípade zrady druhou osobou existujú modifikátory pri nízkej príbuznosti alebo pri pochybnostiach o príbuzenstve. Podmienenosť je teda nadobudnutá a kooperácia sa vie rozšíriť na podmienky s menšou príbuznosťou. Ak teda budeme mať dostatočne vysokú pravdepodobnosť p opätovného stretnutia, kooperácia založená na vzájomnosti môže byť evolučne stabilná aj v prípade nulovej príbuznosti.

Ďalšou možnosťou zrodenia kooperácie ako takej je zoskupovanie. Povedzme, že malá skupina hráčov využíva stratégiu Oko za oko. Nejaká časť hier medzi hráčmi, označme ju w, sú s ostatnými hráčmi zoskupenia. Potom priemerná výplata členov zoskupenia pri hraní Oko za oko je:

$$w(\frac{X}{1-p}) + (1-w)(Z + \frac{pY}{1-p}) \tag{9}$$

Pokiaľ členovia zoskupenia tvoria iba malú časť interakcií s ostatnými, potom stratégia všetky zrady má stále výplatu $\frac{Y}{1-p}$. Pokiaľ sú p a w dostatočne veľké, potom Oko za oko vie byť počiatočne životaschopné v prostredí samých zrád. Takže vidíme, že pokiaľ je zoskupenie Oko za oko, tak vie napadnúť prostredie samých zrád a to z dôvodu toho, že toto zoskupenie dáva každému členovi zoskupenia netriviálnu pravdepodobnosť, že sa stretne s hráčom, ktorý bude vzájomne spolupracovať. [3]

2 Opakované hry

Teória opakovaných hier sa zaoberá hrou, ktorá sa hrá v rovnakej forme opakovane, a teda viac, než jedenkrát. V tejto kapitole bude priebeh hry známy všetkým hráčom, teda je to typ hry s dokonalou informáciou. Po každom kole sa odhalí, čo každý z hráčov zahral a aký je výsledok. V takom prípade, že sa hra hrá viac ako jedenkrát, sa hráči môžu správať úplne odlišne, než keď sa hra hrá práve raz, keďže vedia ovplyvniť svoje nasledujúce ťahy na základe prechádzajúcich. Ako príklad si môžeme uviesť zákazníka, ktorý si kúpi časopis iba raz verzus zákazníka, ktorý si kupuje časopis pravidelne každé dva týždne.

Definícia 2.1 (Fázová hra)**.** *Stavebná jednotka opakovanej hry sa nazýva fázová hra. Je to tá jedna hra, ktorá sa opakuje. [13]*

Definícia 2.2 (Opakovaná hra)**.** *Majme fázovú hru G, kde označujeme:*

- *množinu hráčov $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, ktorí si simultánne volia ťahy,*
- *množiny akcií A_i, kde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$,*
- *profil akcií $a^t = (a_1^t, \ldots, a_n^t)$, pre $t = 0, 1, \ldots, T-1$,*
- *výplatné funkcie $u_i : A \to R$, kde $A = A_1 \times \cdots \times A_i$ a $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.*

Postupnosť takejto hry G sa nazýva opakovaná hra.

Opakovaná hra sa hrá v časoch $t = 0, 1, 2, \ldots, T-1$ (T-krát), kde T je buď konečný časový údaj alebo nekonečno. Navyše, pri opakovaných hrách využívame históriu $H^t = \{a^0, \ldots, a^{t-1}\}$, pre $t \geq 1$, $H^0 = \emptyset$, ktorá uchováva v pamäti ťahy hráčov v predošlých časoch.

Opakovanú hru budeme značiť G^T. [10]

Opakované hry sa rozdeľujú na dve skupiny podľa počtu hier na:

1. Konečne opakované hry
2. Nekončene opakované hry

2.1 Konečne opakované hry

Konečne opakovaná hra je taká, ktorá má dopredu určený počet, koľkokrát sa bude hrať. Napríklad, ak T=20, hra sa bude hrať 20-krát po sebe.

V prípade takejto hry je výplata g_i celej hry hráča i iba súčet jednotlivých výplat u_i fázových hier (bez diskontovania) [13]:

$$g_i(a) = \sum_{t=0}^{T-1} u_i(a_i^t, a_{-i}^t) \tag{10}$$

Pri diskontovaní bude výplata g_i celej hry hráča i vyzerať trochu odlišne. Celková výplata g_i bude suma diskontovaných výplat u_i jednolivých hier. Diskontáciu zahŕňame do celkovej výplaty preto, lebo budúce výplaty sú menej hodnotné. Napríklad, peniaze teraz sú cennejšie, než peniaze v budúcnosti kvôli pozitívnym úrokom.

Zadefinujme si diskontný faktor $\delta \in (0, 1)$, pričom budúce výplaty budú diskontované exponenciálne. Diskontný faktor δ vypočítame ako nasledovný podiel:

$$\delta = \frac{1}{1+r}, \tag{11}$$

kde r je úrok.

Výplata g_i celej hry hráča i s diskontáciou potom bude:

$$g_i(a) = \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t u_i(a_i^t, a_{-i}^t) \tag{12}$$

T-krát opakovanú hru G s diskontným faktorom δ budeme označovať $G^T(\delta)$.

Veta 2.3. *Ak má fázová hra G práve jedno Nashovo ekvilibrium a^*, potom pre všetky konečné T má opakovaná hra G^T práve jedno vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium a^t, pre všetky $t = 0, 1, 2, \ldots, T-1$. Navyše, $a^* = a^t$ pre všetky $t = 0, 1, 2, \ldots, T-1$, nezáležiac na histórii. Nashovo ekvilibrium a^* hry G sa hrá v každej fáze hry G^T.*

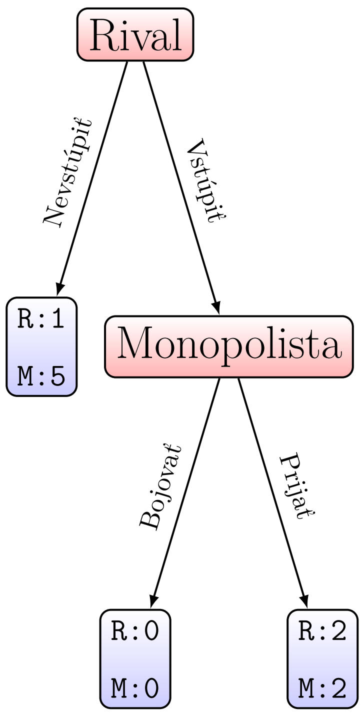
Dôkaz. Na dôkaz použijeme spätnú indukciu. V čase t=T-1 hráme jednu fázovú hru. Hráči vedia, že to je posledná fázová hra vrámci opakovanej hry a preto si vyberú ich dominantnú stratégiu. Vieme, že ekvilibrium tejto hry je a^*. Dokonalé Nashovo ekvilibrium tejto podhry je teda $a^{T-1} = a^*$. Vo fáze v čase t=T-2 bude opäť Nashovo ekvilibrium a^*. Je jedno, čo hráči zahrajú v čase t=T-2, výsledok poslednej fázovej hry v čase t=T-1 to neovplyvní.

Pokračujúc takto až k prvej hre v čase t=0 zistíme, že aj táto hra má Nashovo ekvilibrium a^*. Teda Nashovo ekvilibrium a^* je zahrané v každej fáze opakovanej hry G^T [10].

□

Uveďme si príklad pre lepšie pochopenie Vety 2.3:

Príklad: Uvažujme hru s názvom Rival-Monopolista s herným stromom na Obrázku 3.



Obr. 3: Herný strom hry Rival-Monopolista.

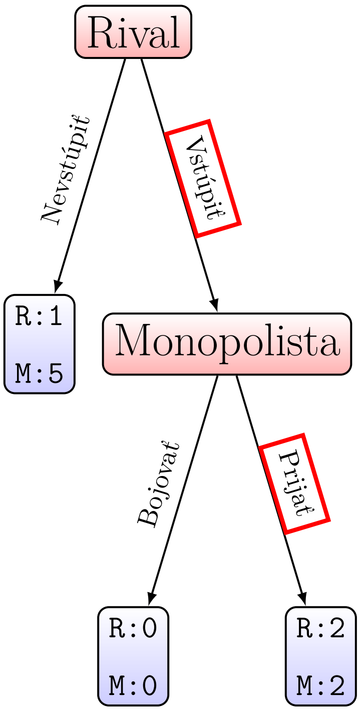
V hre Rival-Monopolista máme na trhu monopolistu, ktorý má svoje firmy v 10 rôznych mestách.

V každom meste však prichádza na trh rival, ktorý sa rozhoduje, či vstúpi alebo nevstúpi na trh v meste, v ktorom vie, že sa nachádza firma monopolistu.

Keďže máme 10 rôznych miest, hra sa bude hrať 10-krát a teda T=10.

Hráči hrajú sekvenčne, teda najprv sa rival rozhodne, či vstúpi alebo nevstúpi na trh, potom sa monopolista rozhodne, či bude bojovať proti rivalovi alebo sa rozhodne jeho firmu na trhu prijať.

Pokiaľ sa táto hra hrá práve jedenkrát a teda sa neskôr stane fázovou hrou v našej opakovanej hre, tak Nashovo ekvilibrium bude:



Obr. 4: Hľadanie Nashovho ekvilibria hry Rival-Monopolista.

Nashovo ekvilibrium takej hry je teda (Vstúpiť, Prijať), čo znamená, že rival vstúpi na trh a monopolista ho príjme.

Zmení sa toto ekvilibrium, pokiaľ budeme hrať hru 10-krát?

Poďme sa na to pozrieť od konca. V poslednom, desiatom, meste monopolista vie, že nezíska absolútne nič tým, že bude bojovať proti rivalovi. Vyberie si teda prijatie rivala. Rival sa následne rozhodne, že na trh vstúpi.

Keďže sa monopolista v meste 10 rozhodol, že príjme rivala, opäť nezíska nič tým, že by v meste 9 proti rivalovi bojoval. Opäť si teda vyberie prijatie rivala a rival si vyberie, že na trh vstúpi. Takto by to pokračovalo až k prvému mestu.

Vidíme teda, že v každej fázovej hre máme vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium (Vstúpiť, Prijať). [7] □

Avšak, pokiaľ má fázová hra viac, než práve jedno Nashovo ekvilibrium, situácia sa mení. Môžu sa objaviť viaceré vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibriá.

Uveďme si opäť príklad:

Príklad: Game of Chicken.

Majme dve protiidúce autá v jednom jazdnom pruhu. Každý z vodičov sa musí rozhodnúť, či pôjde naďalej rovno alebo sa uhne. Ak sa obe uhnú, obaja sú zbabelci. Ak obe pôjdu stále rovno, narazia do seba.

Uvažujme nasledovnú bimaticu výplat:

		Auto 2			
		Uhne		Ide rovno	
Auto 1	Uhne	2	2	1	3
	Ide rovno	3	1	0	0

Tabuľka 3: Bimatica výplat hry Game of Chicken.

Ak by sa hrala hra iba jedenkrát, potom máme dve Nashove ekvilibriá v čistých stratégiách a to (Ide rovno, Uhne) a (Uhne, Ide rovno).

Vezmime si teraz, že hra sa bude hrať štyrikrát, teda T=4.

Niektoré možnosti vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibriá:

1. (Ide rovno, Uhne), (Ide rovno, Uhne), (Ide rovno, Uhne), (Ide rovno, Uhne)

2. (Uhne, Ide rovno), (Uhne, Ide rovno), (Uhne, Ide rovno), (Uhne, Ide rovno)

3. (Ide rovno, Uhne), (Uhne, Ide rovno), (Ide rovno, Uhne), (Uhne, Ide rovno)

Uveďme si príklady stratégií, ktoré korešpondujú s výslednými Nashovými ekvilibriami podhry.

1. (Ide rovno, Uhne), (Ide rovno, Uhne), (Ide rovno, Uhne), (Ide rovno, Uhne).

   Auto 1 si v prvom ťahu vyberie možnosť Ide rovno. V každom ďalšom ťahu (nezáležiac na histórií) si opäť vyberie možnosť Ide rovno.

   Auto 2 si v prvom ťahu vyberie možnosť Uhne. V Každom ďalšom ťahu (nezáležiac na histórii) si opäť vyberie možnosť Uhne.

2. (Uhne, Ide rovno), (Uhne, Ide rovno), (Uhne, Ide rovno), (Uhne, Ide rovno).

   Auto 1 si v prvom ťahu vyberie možnosť Uhne. V každom ďalšom ťahu (nezáležiac na histórií) si opäť vyberie možnosť Uhne.

   Auto 2 si v prvom ťahu vyberie možnosť Ide rovno. V Každom ďalšom ťahu (nezáležiac na histórii) si opäť vyberie možnosť Ide rovno.

3. (Ide rovno, Uhne), (Uhne, Ide rovno), (Ide rovno, Uhne), (Uhne, Ide rovno).

   Auto 1 si v prvom ťahu vyberie možnosť Ide rovno.

   V párnom ťahu si vyberie možnosť Uhne.

   V nepárnom ťahu si vyberie možnosť Ide rovno.

   Auto 2 si v prvom ťahu vyberie možnosť Uhne.

   V párnom ťahu si vyberie možnosť Ide rovno.

   V nepárnom ťahu si vyberie možnosť Uhne. [6, 7]

Z tohto príkladu môžeme spísať nasledovné tvrdenie:

Tvrdenie 2.4. *Fázová hra s viacerými čistými Nashovými ekvilibriami hraná konečne veľakrát má viacero vzhľadom na podhry dokonalých ekvilibrií. [7]*

2.2 Nekonečne opakované hry

V bežnom svete sa málokedy stretneme so situáciou, že vieme, kedy sa hra, ktorú hráme, skončí. V takom prípade prichádzajú na rad takzvané nekonečne opakované hry.

Ak aj hra G má práve jedno Nashovo ekvilibrium, môžu existovať vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibriá v nekonečne opakovanej hre, pri ktorých výsledok fázovej hry nie je Nashovým ekvilibriom hry G.

Označme hru, ktorá sa opakuje nekonečne veľakrát a má diskontný faktor $\delta \in (0, 1)$ definovaný podľa (9) ako $G^\infty(\delta)$.

Výplata celej hry hráča i potom je:

$$g_i(a) = (1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u_i(a_i^t, a_{-i}^t) \tag{13}$$

[10].

Oproti výplate pri konečne opakovaných hrách (10) máme pár odlišností. V prvom rade si všimnime, že sa sumuje až do nekonečna, čo je teda prirodzená zmena, keďže sa v tomto prípade jedná o nekonečne opakovanú hru. Druhou zmenou je faktor (1-δ) pred sumou. Ten je pridaný ako normalizácia na meranie výplat fázovej a opakovanej hry v rovnakých jednotkách.

Vezmime si, že platí:

$$\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1} = 1 + \delta\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1} = \sum_{t=0}^{\infty}\delta^t \tag{14}$$

A z toho platí:

$$\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1} = \frac{1}{1-\delta} = \sum_{t=0}^{\infty}\delta^t \tag{15}$$

Ak teda v každom kole zahrajú hráči rovnakú stratégiu, tak výplata fázovej a opakovanej hry sa zhodujú. Z tohto vyplýva faktor (1-δ) [1, 10].

V predošlej podkapitole sme ukázali, že vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v konečne opakovanej hre Väzňova dilema je vždy (Zrada, Zrada). Teraz však ukážeme, že v prípade, že máme nekončne opakovanú hru Väzňova dilema, situácia je úplne odlišná.

Zadefinujme si takzvané Trigger Strategies. To sú také stratégie, ktoré nejakým spôsobom trestajú oponenta za nezahranie vopred dohodnutej stratégie.

Uveďme si pár príkladov takýchto stratégií:

- **Tit for Tat (Oko za oko)** - Hráč hrá v prvom kole kooperáciu a následne kopíruje to, čo dal druhý hráč. Ak dal druhý hráč kooperáciu, on dá kooperáciu. Ak dal druhý hráč zradu, aj on dá zradu (a tým ho potrestá).

- **Tit for two Tats (Oko za dve oká)** - Veľmi podobné hre Oko za oko, no v tomto prípade hráč odpustí prvú zradu tak, že aj keď druhý hráč zahral zradu, on dá aj tak kooperáciu. Ak však druhý hráč zahrá dvakrát za sebou zradu, prvý hráč už neodpustí a potrestá ho zradou.

- **Grim Trigger** - stratégia, kedy prvý hráč hrá kooperáciu až dovtedy, kým druhý hráč nezahrá zradu. Ak druhý hráč zahrá zradu, prvý hráč hrá zradu až do konca hry.

Príklad: Nekonečne opakovaná Väzňova dilema.

Vezmime si hru Väzňova dilema s takouto bimaticou výplat:

		Hráč B			
		Spolupráca		Zrada	
Hráč A	Spolupráca	1	1	-1	2
	Zrada	2	-1	0	0

Predpokladajme, že sa hra bude hrať nekonečne veľa krát.

Ďalej predpokladajme, že obaja hráči hrajú stratégiu Grim Trigger.

Teraz chceme ukázať, že táto hra má aj iné vzhľadom na podhry dokonalé Nashovo ekvilibrium, než stratégiu samých zrád.

- Predpokladajme, že v hre zatiaľ nebola zahraná zrada. Potom, keďže hráč B hrá Grim Trigger stratégiu (a teda zahral spoluprácu), výplata spolupráce a zrady sú nasledovné:

  Výplata zo spolupráce: $(1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t * 1 = (1-\delta)\frac{1}{1-\delta} = 1$

  Výplata zo zrady: $(1-\delta)(2+0+0+\dots) = 2(1-\delta)$

  Z tohto vyplýva, že sa hráčovi A oplatí spolupracovať, ak $1 \geq 2(1-\delta)$. Z tejto nerovnosti vypočítame, že pre $\delta \geq \frac{1}{2}$ sa neoplatí hrať hráčovi A zrada, ale lepšia bude spolupráca.

- Predpokladajme, že v hre už nastala zrada. To znamená, že hráč B už navždy bude hrať zradu. Na zradu je najlepšou odpoveďou zrada.

Toto je pravda vo všetkých podhrách. Preto je Grim Trigger vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium pre $\delta \geq \frac{1}{2}$.

Výsledok korešpondujúci stratégii Grim Trigger, ktorú hrajú obaja hráči je nekonečná súslednosť (Spolupráca, Spolupráca), keďže (Spolupráca, Zrada) a (Zrada, Zrada) nemôžu ani nastať. [10]

Tvrdenie 2.5. *Majme hru Väzňova dilema a označme ju $GV^{\infty}(\delta)$. Potom pre všetky $\delta \in [\frac{1}{2}, 1)$ tzv. Trigger stratégie tvoria Nashovo ekvilibrium $GV^{\infty}(\delta)$. [1]*

Tvrdenie 2.5 je len akýmsi prípadom väčšieho a silnejšieho tvrdenia, ktoré si o chvíľu ukážeme.

Ľudia už dlhšie verili, že kooperácia sa vyskytuje pri opakovaných Väzňových dilemách a iných hrách, pokiaľ bol diskontný faktor dostatočne vysoký.

Vezmime si fázovu hru $G = \langle I, (A_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I} \rangle$ a nekonečne opakovanú hru $G^{\infty}(\delta)$.

Zadefinujme si množinu prípustných výplat.

Definícia 2.6 (Množina prípustných výplat)**.** *Množina prípustných výplat je množina, ktorú označujeme V a pre ktorú platí:*

$$V = Conv\{v \in R^l | \exists a \in A, g(a) = v\} \tag{16}$$

To znamená, že V je konvexný obal všetkých l-rozmerných vektorov, ktoré sa môžu stať výplatami použitím nejakého profilu akcií.

Definícia 2.7 (Minmax výplata)**.** *Minmax výplata hráča i je najnižšia výplata, ktorá je garantovaná pre hráča i, pokiaľ dokonale predpokladá, aké stratégie jeho oponenti zahrajú. Minmax je definovaný ako*

$$\underline{v_i} = \min_{a_{-i}}[\max_{a_i} u_i(a_i, a_{-i})]. \tag{17}$$

Tvrdenie 2.8. *Nech γ (β) je Nashovo ekvilibrium hry G ($G^{\infty}(\delta)$) a $u_i(\gamma)$ ($u_i(\beta)$) je výplata hráča i v ekvilibriu γ (β). Potom platí:*

$$u_i(\gamma) \geq \underline{v_i} \tag{18}$$

$$(g_i(\beta) \geq \underline{v_i}) \tag{19}$$

Definícia 2.9 (Striktná racionalita)**.** *Vektor výplat $v \in R^l$ je striktne individuálne racionálny, ak pre všetky i platí*

$$v_i > \underline{v_i} \tag{20}$$

Po uvedení všetkých predošlých tvrdení a definícii môžme sformulovať zovšeobecnenie Tvrdenia 2.5:

Veta 2.10 (Veta prostého ľudu)**.** *Ak* $(v_1, \ldots, v_l)$ *je prípustné a striktne individuálne racionálne, potom* $\exists$ *taká* $\underline{\delta} < 1$*, že pre všetky* $\delta > \underline{\delta}$ $\exists$ *vzhľadom na podhry dokonalé Nashovo ekvilibrium hry* $G^{\infty}(\delta)$ *s výplatami* $(v_1, \ldots, v_l)$*.*

Predošlá veta nesie názov Veta prostého ľudu, pretože znenie tejto vety bolo známe medzi hernými teoretikmi ešte skôr, než bola formálne spísaná na papier a do kníh.

Jednoducho povedané, veta prostého ľudu hovorí o tom, že ak vektor $(v_1, \ldots, v_l)$ spĺňa dané podmienky, potom pre všetky dostatočne veľké δ existuje vzhľadom na podhry dokonalé Nashovo ekvilibrium [10].

3 Model sociálnej interakcie - strategické turnaje v hre Väzňova dilema

V treťej podkapitole prvej kapitoly sme uviedli priebeh a výsledky vôbec prvého skonštruovaného strategického turnaja, ktorého usporiadateľom bol v osemdesiatych rokoch dvadsiateho storočia už niekoľkokrát spomínaný Robert Axelrod. Tento turnaj bol usporiadaný hneď dvakrát a to prvýkrát so vstupujúcimi 14 stratégiami a druhýkrát až so 62 stratégiami.

Keďže jedným z hlavných cieľov tejto práce je aj rekonštrukcia tohto turnaja, bude sa touto úlohou zaoberať práve Kapitola 3, čím prechádzame k praktickej časti našej diplomovej práce.

Pripomeňme si, že v oboch verziách turnaja Roberta Axelroda vyhrala stratégia s názvom Oko za oko (Tit for Tat).

V našom zrekonštruovanom turnaji budeme chcieť využiť najmä stratégie s rôznymi vlastnosťami, ktoré zahrnú čo najviac typov stratégií a zachová sa pritom rôznorodosť škály použitých taktík.

Zároveň však chceme zapojiť kvôli vysokej úpešnosti v turnaji Roberta Axelroda aj stratégiu Oko za oko ako takú bez zmeny a navyše aj nejaké jej obmeny, aby sme zistili, či má vlastnosť opakovania po spoluhráčovi tendenciu k úspechu.

Po starostlivom uvážení mnohých stratégií sme nakoniec vybrali okrúhlych 20 stratégií. S takýmto počtom stratégií sme boli schopní zachytiť postačujúcu rôznorodosť medzi stratégiami.

Detailné popisy vybraných dvadsiatich stratégií uvádzame nižšie.

Abecedný zoznam použitých stratégií, s ktorými budeme pracovať v tejto kapitole (zaužívané medzinárodné názvy sme ponechali v anglickom jazyku):

1. **Forgiving Grim Trigger** - stratégia, ktorá spolupracuje až dovtedy, kým oponent nedá zradu. Potom k kôl zrádza a následne sa vráti opäť k spolupráci. V našom programe sme použili $k = 3$.

2. **Forgiving Tit for Tat** - stratégia, ktorá začína spoluprácou a pokračuje spoluprácou, až kým jeho oponent nedá dvakrát po sebe zradu. Vtedy sa zmení na zradu a potom pokračuje v spolupráci.

3. **Generous Tit for Tat** - stratégia, ktorá je takmer rovnaká ako Tit for Tat, no ak oponent zradí, tak Generous Tit for Tat zahrá spoluprácu s 10% pravdepodobnosťou.

4. **Grim Trigger** - stratégia, ktorá spolupracuje až dovtedy, kým oponent nedá zradu. Od toho momentu až do konca zrádza nezáležiac už na tom, čo hrá oponent.

5. **Hard Majority** - stratégia, ktorá na začiatku zradí a zrádza dovtedy, kým počet zrád oponenta je väčší alebo rovný počtu oponentových spoluprác. Inak spolupracuje.

6. **Hard Tit for Tat** - stratégia, ktorá kooperuje v prvom ťahu a zradí len vtedy, ak jeden z predošlých troch ťahov oponenta je zrada.

7. **Joss** - stratégia veľmi podobná stratégii Tit for Tat. Jediný rozdiel je v tom, že Joss občasne vyskúša zaradiť zradu, aj keď jeho oponent v predošlom ťahu zradu nedal. Inak opakuje rovnako po oponentovi ako Tit for Tat. Pravdepodobnosť zrady sme v našom programe stanovili na 10%.

8. **Náhodná stratégia** - stratégia, ktorá s pravdepodobnosťou 50% vyberie kooperáciu a s pravdepodobnosťou 50% vyberie zradu. Vôbec nezávisí od oponentových ťahov.

9. **Reverse Tit for Tat** - stratégia, ktorá začína zradou a v ďalších kolách dá presný opak toho, čo zahral jeho oponent v predošlom ťahu.

10. **Soft Majority** - stratégia, ktorá na začiatku spolupracuje a spolupracuje až dovtedy, kým počet spoluprác oponenta je väčší alebo rovný počtu oponentových zrád. Inak zradí.

11. **Spolupráce** - stratégia, ktorá vo všetkých kolách spolupracuje.

12. **Spolupráca, zrada (SZ)** - stratégia, ktorá začína spoluprácou, pokračuje zradou a následne strieda spoluprácu a zradu. Vôbec nezávisí od oponentových ťahov.

13. **Spolupráca, spolupráca, zrada (SSZ)** - periodicky sa opakuje spolupráca, spolupráca, zrada. Vôbec nezávisí od oponentových ťahov.

14. **Suspicious Tit for Tat** - stratégia, ktorá začína v prvom kole zradou a v ďalších kolách dáva to, čo dal v predošlom kole oponent.

15. **Tester** - stratégia, ktorá v prvom ťahu zahrá zradu (čím testuje, ako zareaguje druhý hráč). Ak druhý hráč zradí, tester sa ospravedlní spoluprácou a ďalej hrá ako Tit for Tat. Dovtedy dáva spoluprácu a zradu tak, aby pomer zrád k všetkým hrám bol menší ako 0,5, pričom nerátame prvý ťah. Preto hrá zradu v prvom ťahu, štvrtom, šiestom, a tak ďalej.

16. **Tit for Tat** - stratégia, ktorá začína v prvom kole spoluprácou a v ďalších kolách dáva to, čo dal v predošlom kole oponent.

17. **Win-Stay, Lose-Shift** - stratégia, ktorá začne spoluprácou a pokračuje v spolupráci, kým dosahuje jednu z dvoch najvyšších možných výplat (Win-Stay). Ak však získa jednu z dvoch najnižších možných výplat, Win-Stay, Lose-Shift zmení stratégiu na zradu (Lose-Shift), a tak stratégia pokračuje. Jednoducho povedané, ak získava vysoké výplaty, ponecháva stratégiu, ak nízke, stratégiu zamení.

18. **Zrady** - stratégia, ktorá vo všetkých kolách zrádza. Vôbec nezávisí od oponentových ťahov.

19. **Zrada, spolupráca (ZS)** - stratégia, ktorá začína zradou, pokračuje spoluprácou a následne strieda zradu a spoluprácu. Vôbec nezávisí od oponentových ťahov.

20. **Zrada, zrada, spolupráca (ZZS)** - periodicky sa opakuje zrada, zrada, spolupráca. Vôbec nezávisí od oponentových ťahov.

Vzhľadom na to, že sme vyberali také stratégie, aby pokryli široké spektrum taktík, si ešte uvedieme malé rozdelenie našich vybraných stratégií. Tak uvidíme, nakoľko rôznorodý náš výber je.

Zadefinujme si najprv takzvané "milé” a "nemilé” stratégie. Milá stratégia je taká, ktorá nikdy svojho oponenta nezradí ako prvá. Naopak, nemilá stratégia je taká, ktorá svojho oponenta ako prvá zradiť môže.

Z našich uvedených stratégii je 40% takzavných "milých"stratégií - napríklad Tit for Tat, Forgiving Tit for Tat, Grim Trigger. Zvyšných 60% stratégií je teda "nemilých". Ako príklad si môžme uviesť Hard Majority, Reverse Tit for Tat alebo Zrady.

Pre lepšiu viditeľnosť rôznorodosti stratégií si ešte uvedieme, že len 4 z 20 stratégií sú rovnaké ako v turnaji Roberta Axelroda. 7 z 20 stratégií nie je závislých na predošlých ťahoch spoluhráča a až 8 stratégii z 20 má v sebe nejakým spôsobom zakomponovaný princíp stratégie Tit for Tat. Jej princíp sme zaradili najmä kvôli jej vysokej úspešnosti v turnajoch Roberta Axelroda. Samozrejme, tieto skupiny nie sú disjunktné a niektoré stratégie môžu mať aj viac ako jednu z týchto spomínaných vlastností.

Keď už máme zadefinované všetky stratégie pre náš turnaj, tak druhým krokom k usporiadaniu takéhoto turnaja je, prirodzene, jeho naprogramovanie pre efektívnu a rýchlu prácu v ďalších krokoch. Vybrali sme si na tento účel program Matlab.

Naprogramovanie celého turnaja sme rozdelili do troch častí.

Časť prvá - Stratégie

V programe Stratégie sa nachádza zadefinovanie všetkých dvadsiatich stratégií. Je to naprogramované pomocou funkcie **strategie**, do ktorej vstupujú tri premenné - *player, opp, strategy.* Táto funkcia teda berie do úvahy ťahy hráča *player*, ťahy hráča *opp* (*opp* od anglického slova opponent) a stratégiu, ktorú sa hráč player rozhodol hrať. Výsledkom funkcie je hodnota x, ktorá vyhodnocuje, či hráč *player* zahrá 0 - zradu alebo 1 - kooperáciu.

Každá zo stratégii, ktorú sme vybrali do nášho turnaja má priradené svoje číslo - rovnaké ako v zozname, ktorý sme uviedli vyššie. Premenná *strategy*, ktorá teda vstupuje do funkcie **strategie** je vyjadrená pomocou čísla, ktoré prislúcha tej-ktorej stratégii.

Player a *opp* sú na začiatku prázdne vektory, ktoré sa postupne napĺňajú a ukladajú sa do nich 0 a 1 podľa toho, čo hráči vo svojich ťahoch zahrali.

Kvôli dĺžke tohto kódu teraz uvádzame iba jeho ukážku. Celý kód sa nachádza v Prílohe A.

Kód 1: Opakovaná Väzňova dilema.

```
function x=strategie2(player,opp,strategy)
if(strategy==1) %Forgiving Grim pre k=3
    if(length(opp)==0)
        x=1;
    elseif(length(opp)==1)
        if(opp(length(opp))==0)
            x=0;
        else
            x=1;
        end

    elseif(length(opp)==2)
        if(opp(length(opp))==0 || opp(length(opp)-1)==0)
            x=0;
        else
            x=1;
        end

    else
        if(opp(length(opp))==0 || opp(length(opp)-1)==0 || opp(
            length(opp)-2)==0)
            x=0;
        else
            x=1;
        end

    end

elseif(strategy==2) %Forgiving Tit for Tat
    if(length(opp)==0)
```

```
            x=1;
        elseif(length(opp)==1)
            x=1;
        elseif(opp(length(opp)) == 0 && opp(length(opp)-1)==0)
            x=0;
        else
            x=1;
        end
```

Časť druhá - Opakovaná Väzňova dilema

V tomto programe je zadefinovaná opakovaná hra Väzňovej dilemy. Opäť je zadefinovaná pomocou funkcie, ktorú sme nazvali **opakvd**. Do nej vstupujú štyri premenné - *r, strat1, strat2, matica.* Z toho *r* je počet opakovaní Väzňovej dilemy, *strat1* je číslo stratégie, ktorú hrá prvý hráč, *strat2* je číslo stratégie, ktorú hrá druhý hráč a nakoniec *matica* je matica výplat.

Výsledkom takejto funkcie je potom vektor *H1* a vektor *H2*, čo sú vektory naplnené 0 a 1 podľa toho, čo hráči v každom ťahu zahrali. Ďalšie dva výsledky tejto funkcie sú hodnoty *H1vypl* a *H2vypl*, ktoré označujú súčet jednotlivých výplat získaných v každom kole. Sú to teda výsledné dosiahnuté skóre každého z hráčov. Táto funkcia využíva funkciu **strategie**.

Kód 2: Opakovaná Väzňova dilema.

```
%Opakovana vaznova dilema
%pocet kol - r
%strategia prveho hraca je - strat1, druheho - strat1
%matica vyplat je matica
function [H1,H2,H1vypl,H2vypl]=opakvd(r,strat1,strat2,matica)
koop=matica(1,1); %obaja kooperujeme
zrada=matica(2,2); %obaja zradime
zradakoop=matica(2,1); %ja zradim, druhy hrac kooperuje
koopzrada=matica(1,2); %opacne
H1=[];
```

```
H2=[];
H1vypl=0;
H2vypl=0;

for i=1:r
    novyH1=strategie(H1,H2,strat1);
    novyH2=strategie(H2,H1,strat2);
    H1=[H1,novyH1];
    H2=[H2,novyH2];
    if(novyH1==0)
        if(novyH2==0)
            H1vypl=H1vypl+zrada;
            H2vypl=H2vypl+zrada;
        else
            H1vypl=H1vypl+zradakoop;
            H2vypl=H2vypl+koopzrada;
        end
    else
        if(novyH2==0)
            H1vypl=H1vypl+koopzrada;
            H2vypl=H2vypl+zradakoop;
        else
            H1vypl=H1vypl+koop;
            H2vypl=H2vypl+koop;
        end
    end
end
```

Časť tretia - Strategický turnaj Väzňovej dilemy

Posledná časť **Strategický turnaj Väzňovej dilemy** je už naprogramovanie samotného turnaja. Tento program už nie je vytvorený ako funkcia, no využíva funkciu **opakvd**.

Na začiatku programu zadávame už konkrétne hodnoty počtu kôl R, vektor S, ktorý obsahuje všetky možné stratégie, ktoré sa môžu v turnaji zahrať, konkrétnu *maticu* výplat a nakoniec počet turnajov d, ktorý sa bude priemerovať.

Keďže turnaj znamená, že každá stratégia bude hrať s každou stratégiou, tak si zadefinujeme aj číslo n ako dĺžku vektora S a navyše si vytvoríme maticu *Vysl* s rozmerom $n \times n$. Matica *Vysl* bude naplnená výslednými výplatami každého súboja.

Potom vypočítame maticu *PriemPriem*, ktorá každej stratégii vypočíta jej priemerné skóre v každom turnaji a to pomocou matice *Vysl*.

Nakoniec ešte vyrátame priemerné skóre stratégií dokopy za všetkých d turnajov, ktoré bude uchované v matici *VyslPriem*.

Kód 3: Strategický turnaj Väzňovej dilemy.

```
%turnaj opakovanej vaznovej dilemy
%R pocet kol, S vektor vsetkych moznych strategii
%matica je matica vyplat
%n je pocet vyplat
%d pocet opakovani turnaja
%PriemPriem - matica priemernych skore ku kazdemu turnaju
%VyslPriem - matica priemerneho skore za vsetky turnaje
R=100;
S=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20];
matica=[3,0;5,1];
n=length(S);
Vysl=zeros(n,n);
d = 10;

for k = 1:d
    for i=1:n
        for j=1:n
            [H1,H2,H1vypl,H2vypl]=opakvd(R,S(i),S(j),matica);
          Vysl(i,j)=H1vypl;
        end
```

```
    end
    Vysl;

    for i=1:n
        PriemPriem(1,i) = i;
        PriemPriem(k+1,i) =  sum(Vysl(i,:))/length(S);
    end

end
PriemPriem
for i = 1:20
    VyslPriem(1,i) = i;
    VyslPriem(2,i) = sum(PriemPriem(2:d+1, i))/d;
end

VyslPriem
```

3.1 Základný strategický turnaj

Hneď na úvod celého strategického turnaja sme sa rozhodli spraviť akýsi základný strategický turnaj, od ktorého sa budeme neskôr odvíjať. Určíme si všetky parametre, ktorými je možno hýbať a tie nami vybrané hodnoty budú tvoriť základ pre ďalšiu prácu.

Vezmime si teda turnaj, ktorý sa bude hrať systémom každý s každým, pričom každý hráč bude mať okrúhlych 100 ťahov. Stratégie Forgiving Grim Trigger a Joss necháme v takom tvare, v akom sme ich zadefinovali vyššie. Ich parametre meniť nebudeme.

Navyše, turnaj spustíme päťkrát, aby sme mali o čosi lepší prehľad výsledkov, keďže máme medzi stratégiami aj také, ktorých ťahy sú náhodné alebo závisia od oponentových minulých ťahov. Samozrejme, niektoré súboje budú mať vždy rovnaký výsledok (napríklad súboj Zrady proti Spoluprácam, keďže ťahy sa pri týchto stratégiach vôbec nemenia). Zaujíma nás aj to, či sa stratégiám darí vo všeobecnosti, nie len v jednom jedinom turnaji, keďže kvôli náhodnosti niektorých stratégií môže uspieť stratégia, ktorá je inak slabá.

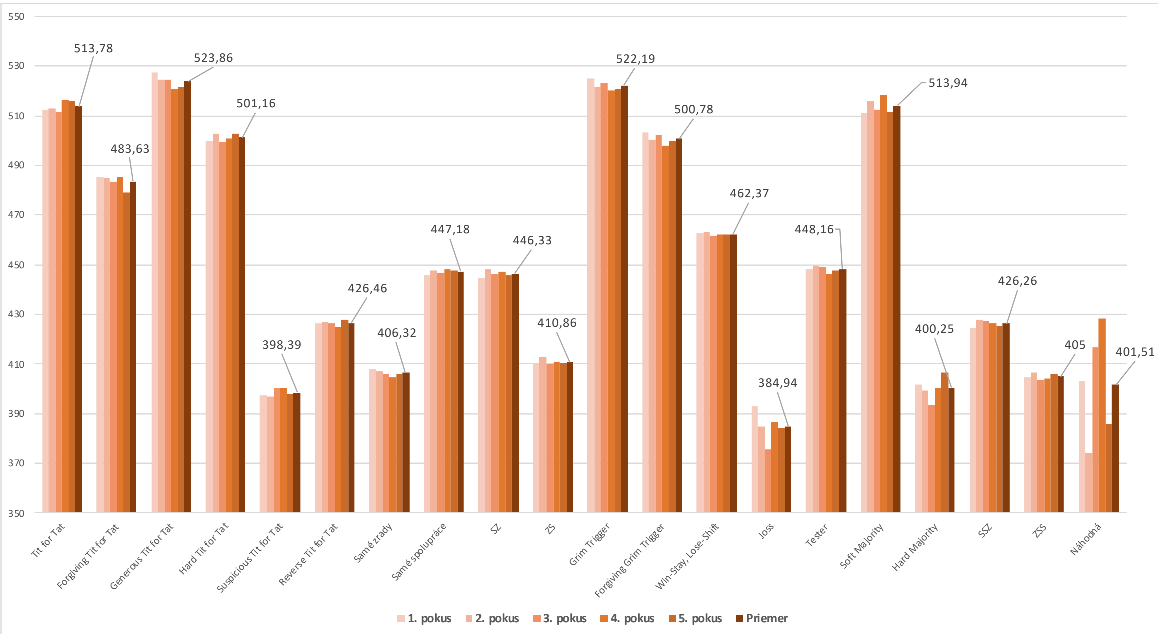
Maticu, s ktorou budeme hrať turnaj, sa nachádza v Tabuľke 4.

		Hráč B			
		Spolupráca		Zrada	
Hráč A	Spolupráca	**3**	3	**0**	5
	Zrada	**5**	0	**1**	1

Tabuľka 4: Bimatica výplat použitá v strategickom turnaji Väzňovej dilemy.

V programovom kóde však využívame iba výplaty hráča A - hrubo vyznačené v Tabuľke 4, nakoľko sa celková výplata ráta vždy len z pohľadu prvého hráča.

Výsledky týchto piatich turnajov uvádzame prehľadne na Obrázku 5:



Obr. 5: Výsledky strategického turnaja hry Väzňovej dilemy, päťkrát spustený turnaj.

Okrem grafu uvádzame aj tabuľku so všetkými výsledkami pre neskoršie porovnania. Údaje sa nachádzajú v Tabuľke 5.

V tejto tabuľke sú zelenou farbou vyznačené tie stratégie, ktoré dosiahli najvyššie skóre v tom-danom turnaji. Naopak, červenou sú vyznačené tie, ktoré získali najmenšie skóre.

	Turnaj1	**Turnaj2**	**Turnaj3**	**Turnaj4**	**Turnaj5**	**Priemer**
1	252,25	250,95	252,00	250,20	248,85	250,85
2	242,15	241,95	242,15	241,90	242,40	242,11
3	**263,05**	260,55	**262,20**	**261,85**	258,85	**261,30**
4	262,35	260,05	261,35	259,75	**261,25**	260,95
5	202,85	201,40	202,05	**198,40**	**196,10**	**200,16**
6	249,90	251,40	252,05	250,25	250,50	250,82
7	**200,45**	**197,60**	205,10	200,20	197,55	200,18
8	211,10	207,35	209,00	223,30	207,55	211,66
9	213,45	213,15	210,95	211,75	209,90	211,84
10	259,75	260,00	259,00	254,75	256,20	257,94
11	221,70	223,50	223,20	224,40	224,25	223,41
12	222,05	223,25	223,15	224,05	223,75	223,25
13	215,15	213,40	213,85	213,60	213,85	213,97
14	202,40	199,55	**199,50**	198,75	202,65	200,57
15	226,85	223,80	226,60	230,95	225,30	226,70
16	258,40	**261,35**	256,55	257,95	257,05	258,26
17	231,55	234,90	232,45	231,10	231,00	232,20
18	202,80	203,80	201,40	204,20	203,40	203,12
19	205,05	203,10	205,60	203,50	205,70	204,59
20	201,70	203,25	203,30	203,50	201,85	202,72

Tabuľka 5: Priemerné výsledky stratégií v jednotlivých turnajoch spolu s priemerným výsledkom stratégií za všetkých päť turnajov.

Tabuľka 5 potvrdzuje naše tvrdenie, že je vhodnejšie usporiadať viacero turnajov a spraviť z nich priemer. Ak sa pozrieme na výsledky Turnaj2, vidíme, že najvyššie skóre dosiahla v tomto turnaji stratégia číslo 16 (Tit for Tat). Výsledok tohoto turnaja je však zavádzajúci, keďže stratégia číslo 3 (Generous Tit for Tat) vyhrala až v troch turnajoch a aj priemerný výsledok za všetkých päť turnajov mala najlepší stratégia číslo 3.

Ak by sme teda usporiadali len jeden turnaj, vidíme, že to môže viesť k nesprávnym výsledkom. Usporiadaním viacerých sme sa vyhli veľkej chybovosti.

Na prvých priečkach sa v jednotlivých turnajoch vyskytli stratégie 3, 16 a 4, v poradí Generous Tit for Tat, Tit for Tat a Grim Trigger. Naopak, na poslednom mieste boli stratégie číslo 7, 14 a 5, respektíve Joss, Suspicious Tit for Tat a Hard Majority. Čo majú tieto stratégie spoločné? V prípade výherných stratégií ide v každom prípade o stratégiu, ktorá nikdy nezradí ako prvá. Ide o už spomínané "milé" stratégie. V prípade posledných priečok máme presný opak - ide o stratégie, ktoré ako prvé zrádzajú. Môžme sa teda nazdávať, že byť zradcom ako prvý sa v turnajoch nevypláca.

Zoradením si priemerných výsledkov turnajov od najväčšieho po najmenší zistíme, že najvyššie priemerné skóre má stratégia číslo 3 (Generous Tit for Tat) s výsledným skóre 261,30. Za ňou sa umiestnili stratégie 4, 16 a 10, respektíve Grim Trigger, Tit for Tat a Soft Majority. Ich skóre boli v poradí 260,95; 258,26 a 257,94. Opäť všetky tieto štyri stratégie majú spoločnú vlastnosť a to tú, že nikdy nezradia ako prvé. Ak im to situácia umožňuje, vždy radšej zahrajú spoluprácu.

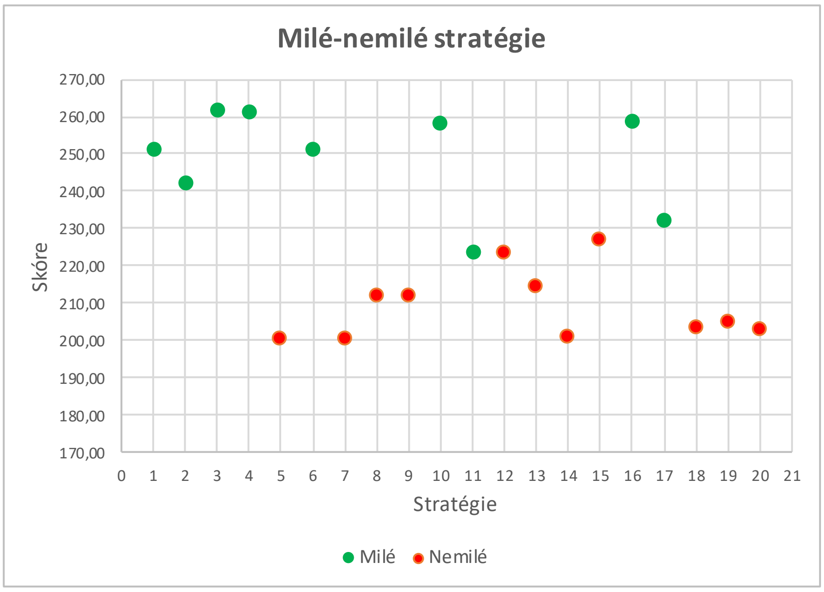
Pozrime sa teraz na opačný koniec. Na úplne poslednom mieste sa umiestnila stratégia číslo 5 (Hard Majority) s výsledným skóre 200,16. Tesne pred touto stratégiou sa umiestnili stratégie číslo 7, 14, 20, v poradí Joss, Suspicious Tit for Tat a ZZS. Ich priemerné výsledky boli v poradí 200,18; 200,57 a 202,72. Všetky z týchto štyroch stratégií vedia zahrať zradu ako prvé a niektoré z nich aj začínajú hru práve zradou.

Všimnime si, že stratégia Joss sa umiestnila na posledných priečkach, pričom jej veľmi podobná stratégia Tit for Tat skončila na treťom mieste. Jediný rozdiel medzi týmtito dvomi stratégiami je, že Joss s 10% pravdepodobnosťou zaradí zradu aj bez toho, aby jeho oponent dal zradu v predošlom ťahu. Vidíme, že už ani 10% pravdepodobnosť zbytočnej zrady sa absolútne nevyplatí a vedie k enormnému poklesu výplaty.

Uveďme si ešte, že najvyššie možné dosiahnuté priemerné skóre za všetkých 5 turnajov mohlo byť pri počte 100 ťahov 500 (v prípade samých spoluprác) a minimálne skóre 0 (v prípade samých zrád). V našich piatich turnajoch sa priemerné skóre vyšplhalo maximálne na 261,30 a minimálne na 200,16.

Vzhľadom na to, že sme do turnaja zahrnuli rôznorodé stratégie, je vhodné ešte uviesť, ktorým stratégiám a s akými vlastnosťami sa darilo najviac.

Ukážme si najprv závislosť úspechu stratégie od toho, či patrí do kategórie "milých" stratégií alebo "nemilých" stratégií. Graf, týkajúci sa tohto rozdelenia, sa nachádza na Obrázku 6.



Obr. 6: Skóre v závislosti od toho, či je stratégia "milá" alebo "nemilá".

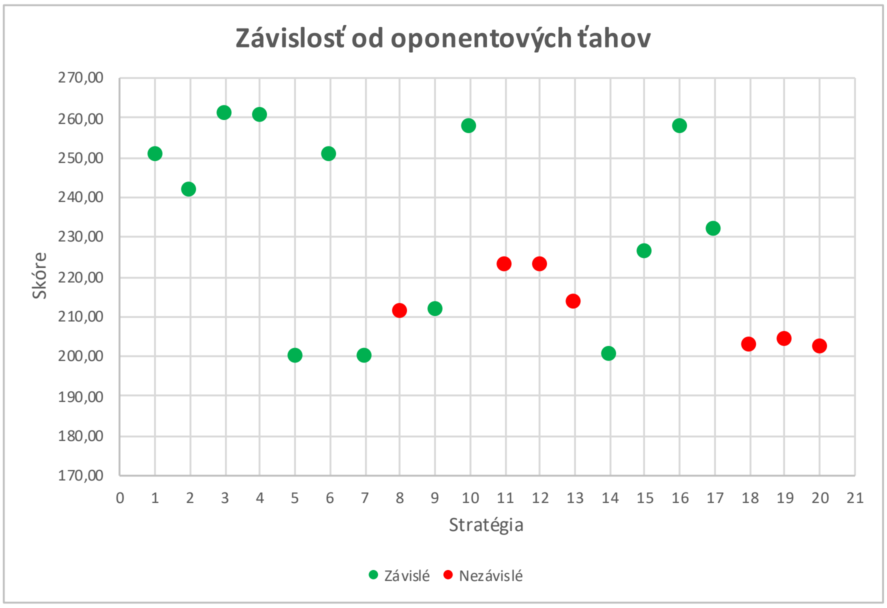
Každú stratégiu sme si označili, či je "milá" - body označené zelenou farbou alebo "nemilá" - body červenou farbou. Z grafu je jasne vidieť, že stratégie označené zelenou farbou majú výrazne vyššie skóre, než stratégie označené červenou farbou.

Graf teda naznačuje, že hrať "milú" stratégiu sa vyplatí. Jediná "milá" stratégia, ktorá dosiahla nižšie skóre ako niektorá z "nemilých" stratégií bola stratégia číslo 11 (Spolupráce). Lepšie skóre než stratégia 11 získali "nemilé" stratégie 15 a 17, respektíve Tester a Win-Stay, Lose-Shift. Ich výplata však nebola výrazne vyššia od stratégie 11. Avšak, pripomeňme si, že stratégia 11 je jediná z "milých" stratégií, ktorá zároveň nie je závislá od ťahov oponenta.

Neskôr uvidíme, či vplýva aj táto vlastnosť na úspešnosť stratégie.

Opäť sme si teda rozdelili stratégie, no tentoraz bolo rozdelenie založené na tom, či dané stratégie závisia od predošlých ťahov oponenta.

Výsledný graf ukazujúci výšku skóre vzhľadom na túto závislosť sa nachádza na Obrázku 7.



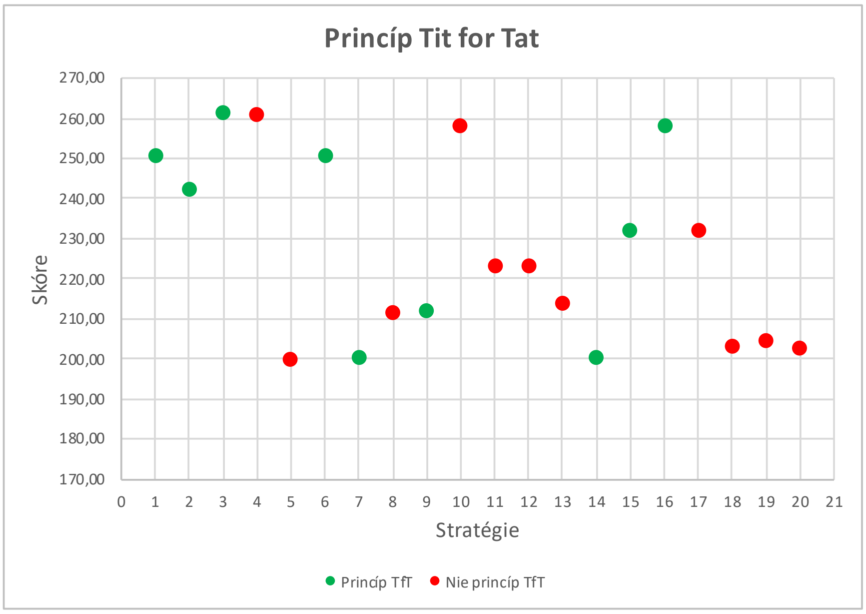
Obr. 7: Skóre v závislosti od toho, či je stratégia závislá od oponentových predošlých ťahov alebo nie.

Zelené body ukazujú stratégie, ktoré závisia od oponentových predošlých ťahov a naopak, červené body ukazujú také stratégie, ktoré od nich nezávisia. Opäť vidíme, že väčšina stratégií, ktoré závisia na oponentových ťahoch majú vo všeobecnosti väčšie skóre ako tie, ktoré od nich nezávisia. Iba štyri závislé stratégie majú menšie skóre od nejakej stratégie, ktorá od oponenta nezávisí. Tými sú stratégie číslo 5, 7, 9 a 14, respektíve Hard Majority, Joss, Reverse Tit for Tat a Suspicious Tit for Tat. Opäť však uvádzame, že všetky tieto štyri stratégie patria zároveň do kategórie "nemilých" stratégií. Všetky závislé stratégie nad 240 bodov sú však zároveň aj "milými" stratégiami.

To, či kombinácia vlastností "milosti" a závislostí od oponentových ťahov podporuje vyššie výsledné skóre, si ukážeme neskôr.

Posledná vlastnosť, ktorú budeme skúmať, je tá, či má v sebe stratégia zakomponovaný princíp Tit-for-Tat a či to vplýva na výsledné skóre stratégií. Túto vlastnosť sme sa rozhodli vybrať a skúmať kvôli vysokej úspešnosti stratégie Tit for Tat v turnajoch Roberta Axelroda. Aj vďaka tomu sa v našom turnaji nachádza veľký počet takýchto stratégií.

Výsledný graf znázorňujúci takúto závislosť sa nachádza na Obrázku 8.



Obr. 8: Skóre v závislosti od toho, či je stratégia založená na princípe Tit for Tat alebo nie.

Na prvý pohľad sa môže zdať, že vlastnosť princípu Tit for Tat nemá žiaden dopad na výsledné skóre. Graf vyzerá byť pomyselne rozdelený na dve časti hranicou skóre 240. Všimnime si, že až 5 z 9 stratégii s princípom Tit for Tat je nad touto hranicou. To predstavuje $55,\overline{5}\%$.

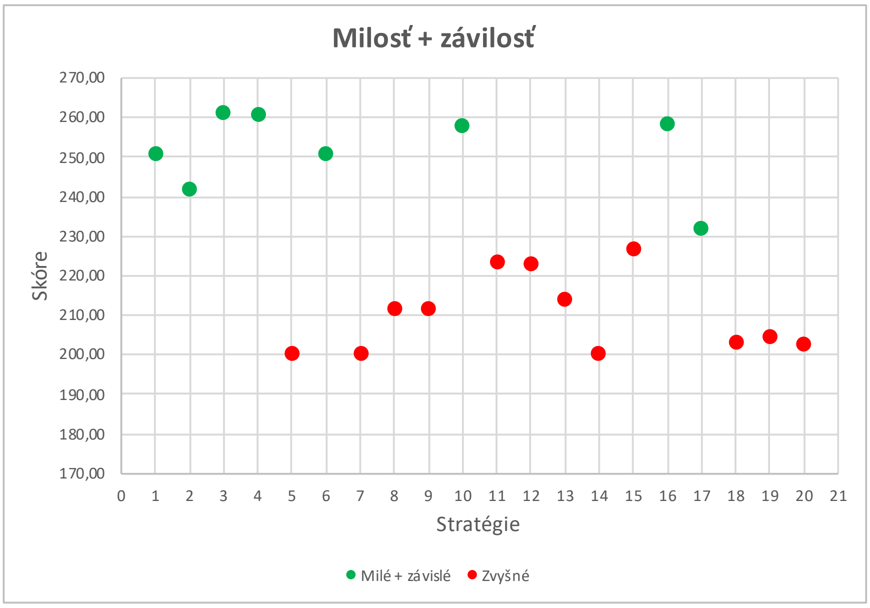
Naopak, zo stratégii, ktoré princíp Tit for Tat nemajú, sú nad touto hranicou len 2 stratégie z 11, čo je $18,\overline{18}\%$.

Avšak z grafu jasne vidieť, že táto vlastnosť má omnoho menší vplyv na výsledok než predošlé dve vlastnosti.

Z predošlých grafov, ktoré vidíme na Obrázku 6 a Obrázku 7, je jasne vidieť, že obe tieto vlastnosti majú pozitívny vplyv na výsledné skóre stratégií. Avšak aj medzi týmito stratégiami sa našli také, ktoré povyskočili mimo predpokladanej úspešnosti. Zistili sme, že také stratégie zas nemajú druhú zo spomínaných vlastností.

Pozrime sa teraz na to, či stratégie, ktoré majú aj prívlastok ”milé” a zároveň závisia od oponentových ťahov, majú tendenciu k vyššiemu celkovému skóre. Proti takýmto stratégiám sa postavia všetky ostatné stratégie, a to tie, ktoré majú len jednu zo spomínaných vlastností, poprípade majú v sebe princíp Tit for Tat alebo sú úplne iné.

Takúto závislosť zobrazuje graf na Obrázku 9.



Obr. 9: Skóre v závislosti od toho, či je stratégia ”milá” a zároveň závislá od oponentových ťahov.

Zelenými bodmi sme označili tie stratégie, ktoré majú obe zo zmienených vlastností - sú ”milé” a zároveň ich ťahy závisia od oponentových ťahov. Graf dokazuje, že presne tieto stratégie dosiahli najvyššiu výplatu a všetky sú nad pomyselnou hranicou 230.

V nasledujúcej podkapitole sa pozrieme, či naozaj táto kombinácia vlastností prináša vyššie skóre aj pri vyššom počte ťahov.

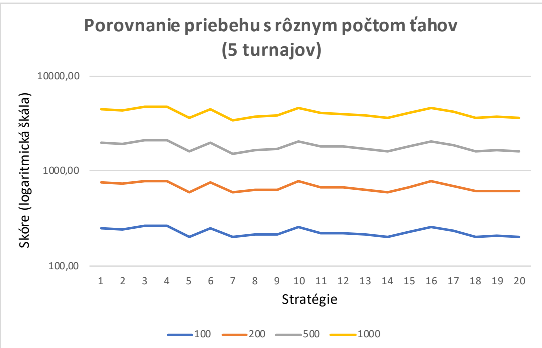
3.2 Obmeny strategického turnaja v zmysle počtu ťahov a počtu turnajov

V našom základnom strategickom turnaji sme si zvolili počet ťahov každého hráča na 100 a počet spriemerovaných turnajov na 5. Táto podkapitola sa bude venovať meneniu týchto parametrov. Zvolíme si niekoľko ďalších hodnôt a budeme sledovať, či tieto parametre nejakým spôsobom vplývajú na výsledok celkového turnaja. Pozrieme sa, či stratégie, ktoré sa umiestnili na prvých miestach v našom základnom turnaji boli úspešné aj v turnaji, kde majú hráči viac ťahov. Preveríme aj to, ako sa bude dariť slabým stratégiám zo základného turnaja v turnajoch s obmenami.

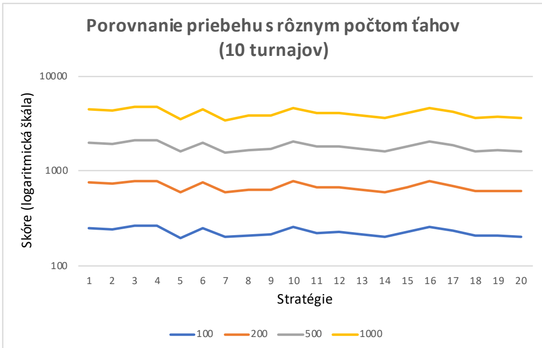
Pozrime sa na začiatok na to, či počet spriemerovaných turnajov nejako ovplyvňuje konečný výsledok - teda či mení úspešnosť stratégií.

V základnom turnaji sme spriemerovali 5 turnajov. Už vtedy sme videli, že usporiadať viac turnajov má zmysel, keďže môže nastať taká situácia, že iba v jednom usporiadanom turnaji vyhrá stratégia iba kvôli náhode. Videli sme, že pri spriemerovaní piatich turnajov došlo k akémusi ustáleniu a výsledok bol stabilnejší a lepšie odzrkadľujúci realitu.

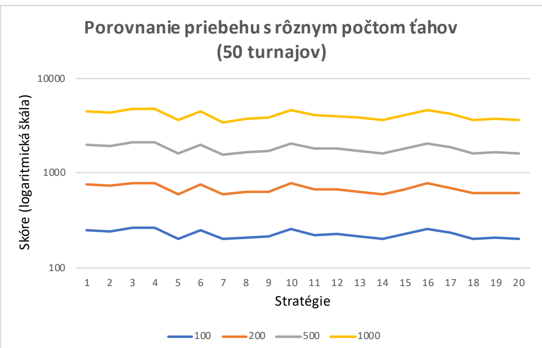
Aby sme zistili, či má zmysel priemerovať aj väčší počet turnajov, vytvorili sme také turnaje, ktoré priemerovali 5, 10, 50 a 100 turnajov. Tieto priebehy sme vykreslili do štyroch rôznych grafov, pričom mierku skóre sme upravili do logaritmickej škály so základom 10, aby bol priebeh lepšie viditeľný. Na výsledkoch to absolútne nič nemení. Priebeh stratégií je navyše spojitý a to len kvôli tomu, aby bolo lepšie vidieť rozdiely medzi rôznym počtom ťahov v rámci jedného grafu. Stále však platí, že ku každej stratégii prislúcha jedna hodnota skóre, ktorú dosiahla a hodnoty medzi stratégiami reálne neexistujú.



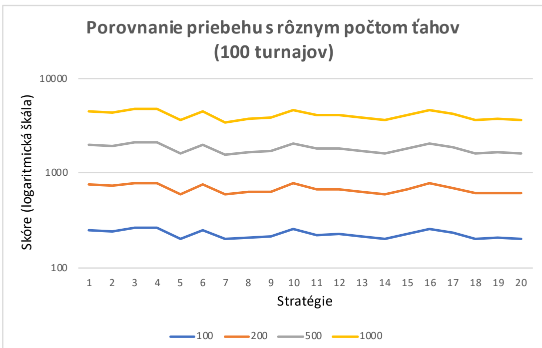
(a) 5 turnajov



(b) 10 turnajov



(c) 50 turnajov



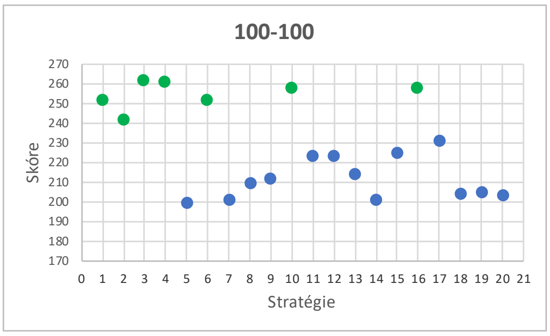
(d) 100 turnajov

Obr. 10: Porovnanie priebehu výsledného skóre pri všetkých možnostiach počtu ťahov a rôznych počtoch spriemerovaných usporiadaných turnajov.

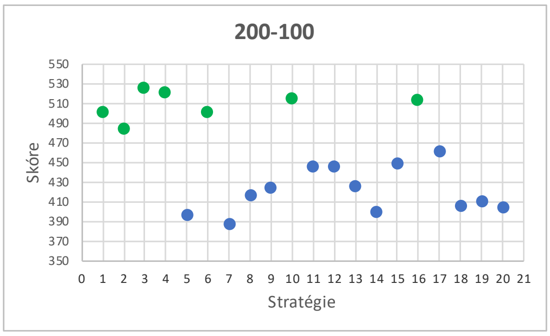
Zo všetkých štyroch grafov je jasne vidieť, že priemerovaním stále väčšieho počtu turnajov sa výsledok nemení. Ak si porovnáme všetky štyri grafy (a)-(d) vidíme, že tvar krivky tvoriaci priebeh jednotlivých turnajov je na všetkých grafoch takmer totožný. Avšak, stále trváme na tom, že usporiadať len jeden jediný turnaj nie je vhodný spôsob, dôvody sme už uvádzali v podkapitolách predtým.

Navyše, zo všetkých grafov sa zdá, že ani počet ťahov neovplyvňuje úspešnosť stratégií, nakoľko všetky štyri krivky opisujú rovnakú dráhu. To, či tie ťahy naozaj neovplyvňujú konečný výsledok si pozrieme nižšie.

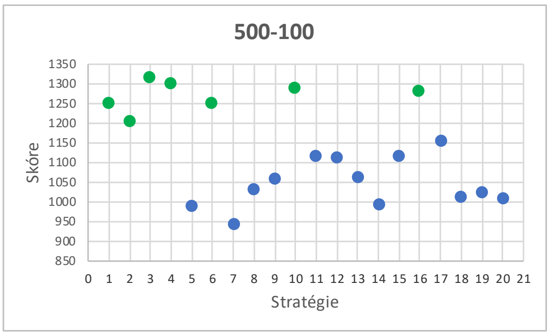
Teraz nám ostáva pozrieť sa na grafy, ktoré zobrazujú výsledné skóre pri rôznom počte ťahov. Pri všetkých počtoch ťahov sme sa rozhodli spriemerovať 100 turnajov, nie je treba to robiť opäť pre viacero možností, ako sme si ukázali vyššie. Vybrali sme si 100 náhodne, no stačilo by pokojne aj menej. Takže opäť vykreslujeme grafy pre rôzny počet ťahov - 100, 200, 500 a 1000. Tieto grafy sa nachádzajú na Obrázku 11.



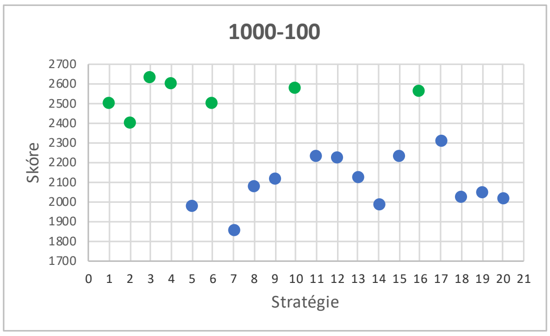
(a) 100 ťahov, 100 turnajov



(b) 200 ťahov, 100 turnajov



(c) 500 ťahov, 100 turnajov



(d) 1000 ťahov, 100 turnajov

Obr. 11: Porovnanie úspešnosti stratégií pri rôznom počte ťahov a rovnakom počte usporiadaných spriemerovaných turnajov.

Opäť, všetky štyri grafy sú si veľmi podobné. Ak sa však lepšie zahľadíme, prvý graf je mierne odlišný od ostatných štyroch. Na prvom grafe vidieť, že stratégia 5 má menšie skóre, než stratégia 7. Na ostatných troch grafoch však jasne vidíme, že stratégia 5 má vyššie skóre ako stratégia 7.

Táto skutočnosť nás teda donútila lepšie zhodnotiť výsledky z týchto turnajov. Všetky výsledky pre každý turnaj s príslušným počtom ťahov sme si zoradili od najúspešnejšej stratégie po najmenej úspešnú. Navyše sme zbehli programový kód ešte raz, tentokrát až pre 5000 ťahov.

Pozrime sa, ako sa poradie jednotlivých stratégií líši pre rôzne počty ťahov.

Ťahy	**100**		**200**		**500**		**1000**		**5000.**
Str.	**Prie.**	**Str.**	**Prie.**	**Str.**	**Prie.**	**Str.**	**Prie.**	**Str.**	**Prie.**
3	261,706	3	524,8815	3	1314,4385	3	2630,167	3	13152,239
4	260,759	4	520,409	4	1300,525	4	2600,843	4	13001,013
10	257,795	10	515,171	10	1288,4625	10	2577,075	10	12899,5915
16	257,6355	16	513,6055	16	1280,9605	16	2560,224	16	12794,4615
6	251,354	1	500,8	6	1250,196	6	2500,196	1	12495,4445
1	251,214	6	500,596	1	1249,8895	1	2499,1395	6	12495,298
2	241,8625	2	483,3785	2	1203,3395	2	2396,3045	2	11793,071
17	231,344	17	462,084	17	1154,352	17	2307,926	17	11538,3595
15	224,9395	15	448,56	15	1117,9945	15	2235,066	11	11174,6535
12	223,6315	11	446,6385	11	1117,1115	11	2235,0195	15	11168,328
11	223,1925	12	446,043	12	1112,3935	12	2223,963	12	11113,168
13	213,716	13	425,9175	13	1063,984	13	2128,036	13	10634,5845
9	211,851	9	424,184	9	1058,6365	9	2115,0485	9	10576,9155
8	209,1915	8	416,6745	8	1030,992	8	2082,9295	8	10362,4875
19	205,206	19	409,7425	19	1024,3975	19	2048,3505	19	10237,336
18	203,83	18	405,81	18	1011,33	18	2021,614	18	10102,072
20	203,166	20	404,365	20	1008,7215	20	2014,3955	20	10069,177
7	200,8765	14	398,842	14	993,8565	14	1985,793	14	9919,5405
14	200,7525	5	396,225	5	989,7495	5	1977,8675	5	9861,5405
5	199,7025	7	386,656	7	943,452	7	1855,11	7	9000,4875

Tabuľka 6: Tabuľka výsledkov pre rôzne počty ťahov.

Riadky vyznačené zelenou farbou sú také, ktorých stratégia si zachovala rovnaké miesto v turnaji pre každý počet ťahov. Zvyšným stratégiám sa výsledné miesto menilo so zmenou počtu ťahov. Všimnime si však, že tieto zmeny sa diali vrámci jedného, maximálne dvoch (v prípade stratégie 7) miest. Navyše, niektoré z týchto stratégií sa neskôr ustálili. Sú to stratégie 12, 14, 5 a dokonca 7. Tie si udržali svoje miesto vo všetkých pokusoch okrem prvého, kde mali hráči 100 ťahov.

Čo sa týka zvyšných stratégií, tak napríklad stratégie 1 a 6 si menia svoje pozície často. Všimnime si však, že ich skóre sa líši vo všetkých prípadoch len v desatinných miestach - sú si veľmi podobné.

Je na mieste uzavrieť, že víťazmi našich turnajov (aj so zarátaním nášho základného turnaja) sú stratégie 3, 4, 10 a 16, respektíve Generous Tit for Tat, Grim Trigger, Soft Majority a Tit for Tat. V základom turnaji bolo poradie 3, 4, 16 a 10. Opačný koniec obsadili stratégie 7, 5, 14 a 20, v poradí Joss, Hard Majority, Suspicious Tit for Tat a ZZS. V základnom turnaji to bolo 5, 7, 14 a 20.

Turnaje teda dopadli veľmi podobne, no po zvážení údajov z Tabuľky 7 považujeme za víťazné a porazené tie stratégie, ktoré obsadili dané miesta najčastejšie. A teda výsledky z Tabuľky 7 považujeme za smerodajné.

Opäť raz platí, že víťazné stratégie sú všetky s vlastnosťami "milé" a závisia od ťahov oponenta. Opačne, porazené stratégie sú také, ktoré môžu a aj zrádzajú ako prvé.

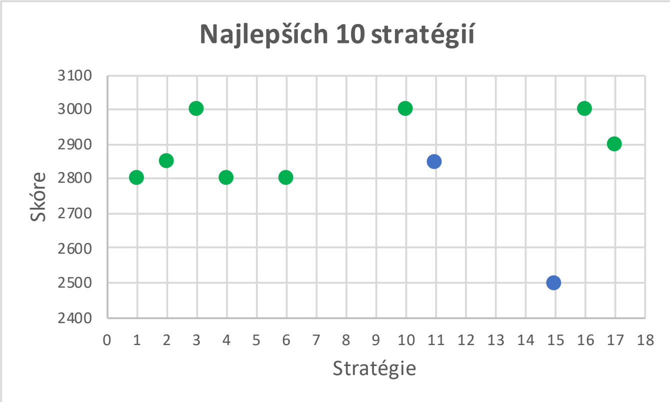
3.3 Strategický turnaj s najúspešnejšími stratégiami

Táto podkapitola sa bližšie pozrie na to, ako medzi sebou budú súťažiť stratégie, ktoré sa v predchádzajúcich dvoch kapitolách umiestnili na prvých priečkach. Keďže pôjdu proti sebe zdanlivo najlepšie stratégie, zistíme, či sa im bude dariť aj po eliminácii slabých stratégií, aj vďaka ktorým mali tieto úspešné stratégie veľké skóre.

Na základe výsledného poradia sme vybrali stratégie do tejto kapitoly - 1, 2, 3, 4, 6, 10, 11, 15, 16 a 17. Okrem stratégie 11 a 15 sú všetky v kategórii "milé" + závislé od oponentových ťahov. Stratégia 11 je "milá", ale nezávislá od oponenta a stratégia 15 je, naopak, "nemilá", ale závislá od oponenta.

Turnaj sme spustili iba jedenkrát, nakoľko sa medzi týmito stratégiami nevyskytuje žiadna s náhodnými ťahmi a preto vždy výsledok takéhoto turnaja bude rovnaký. Netreba preto priemerovať viaceré turnaje. Navyše, počet ťahov hráčov sme ponechali na 1000.

Výsledok tohto upraveného turnaja sa nachádza na Obrázku 12 a v Tabuľke 7.



Obr. 12: Výsledok turnaja so stratégiami, ktoré sa umiestnili na prvých 10 miestach v predošlej kapitole.

1	**2**	**3**	**4**	**6**	**10**	**11**	**15**	**16**	**17**
2800,7	2850	2999,87	2800,7	2800,7	2999,9	2850	2499,918	2999,9	2900,3

Tabuľka 7: Číselné výsledky turnaja s 10 najlepšími stratégiami.

V tomto turnaji si prvé miesto delia až dve stratégie so skóre 2999,9 - 10 a 16, respektíve Soft Majority a Tit for Tat. Tesne za nimi stratégia číslo 3 - Generous Tit for Tat so skóre 2999,87 - v podstate by sme mohli povedať, že všetky tieto tri stratégie sú rovnako na prvom mieste.

Naopak, na poslednom mieste sa umiestnila jediná stratégia z kategórie "nemilých", ktoré v tomto turnaji máme. Je to stratégia 15 (Tester) so skóre 2499,918 a teda výrazne zaostáva za zvyšnými stratégiami. Predposledná stratégia 6 totiž dosiahla až 2800,7, čo je o 300,082 bodu viac.

Celkovo však tieto stratégie dosiahli slušné skóre. V predošlej kapitole v Tabuľke 7 si môžme pozrieť výsledky turnaja so všetkými 20 stratégiami. V stĺpci, ktorý ukazuje výsledok pre 1000 ťahov (toľko, koľko sme zvolili aj v tomto turnaji s 10 najlepšími stratégiami) vidíme, že najlepšia stratégia (3) dosiahala skóre 2630,167 a najhoršia stratégia (7) získala 1855,11. Rozdiel medzi prvou a poslednou stratégiou je teda až 775,057 bodu. V našom turnaji však prvé miesto získalo 2999,9 bodov a posledné 2499,918. Rozdiel je teda len 499,982 bodu.

Opäť však aj tento turnaj ukazuje, že "milé" stratégie sú jednoznačne najúspešnejšie

- dokazuje to fakt, že jediná ”nemilá” stratégia skončila posledná. Zároveň sa potvrdil aj fakt, že kombinácia ”milá” a závislá od oponenta prináša vysoké skóre, keďže na prvých piatich miestach sa nachádzajú stratégie presne s takouto kombináciou vlastností.

3.4 Vplyv turnaja Roberta Axelroda na náš turnaj

Keďže náš turnaj v prvom rade vychádza z turnaja Roberta Axelroda, považujeme za vhodné uviesť porovnanie nášho a jeho turnaja. Uvedieme si rýchly prehľad toho, ako sa líšia naše najsilnejšie a najslabšie stratégie a v čom spočívajú nájdené odlišnosti, poprípade podobnosti.

V prvom rade si treba zopakovať, že víťaznou stratégiou v turnaji Roberta Axelroda bola stratégia Oko za oko. Práve vďaka tejto stratégii sme my do nášho turnaja zaradili viaceré stratégie, ktoré majú princíp tejto stratégie v sebe nejakým spôsobom zakomponovaný. Ukázalo sa však, že princíp tejto stratégie nie je to, čo zaručuje úspešnosť stratégie. Ukazuje to graf na Obrázku 8.

Avšak, čo má spoločné Axelrodove Tit for Tat a aj minimálne ďalšie dve najúspešnejšie stratégie v turnaji Roberta Axelroda (Tideman and Chieruzzi a Nydegger) s našimi? [2] Všetky tri totiž majú vlastnosti, o ktorých sme zistili, že majú vysokú úspešnosť v strategických turnajoch (Podkapitola 3.1, 3.2 a 3.3).

Naopak, na úplnom chvoste Axelrodovho turnaja bola stratégia Náhodná. Takáto stratégia nie je ani ”milá” (s 50% pravdepodobnosťou zradí ako prvá) a ani nezávisí od ťahov oponenta. Opäť sa teda potvrdzuje, že kombinácia vlastností ”milá” + závislosť od oponentových ťahov alebo minimálne vlastnosť ”milá” má zá následok vysokú úspešnosť stratégie.

Samozrejme, na koniec je dôležité poznamenať, že celkové výsledky budú vždy závisieť od toho, aké zoskupenie stratégií máme. Je samozrejmé, že ak zoskupíme len stratégie s vlastnosťou ”milé” + závislé od oponenta, tak vyhrá stratégia s vlastnosťou ”milá” + závislá. Opačne, ak by sme usporiadali turnaj iba so stratégiami, ktoré by boli ”nemilé” + nezávislé, tak by to vyhrala stratégia s takou vlastnosťou.

Ak si však spomenieme, že aj v turnaji Roberta Axelroda, aj v našom základnom turnaji (Podkapitola 3.1) a aj v rozšíreniach, ktoré sme na tomto turnaji urobili (Podkapitoly 3.2 a 3.3), vo všetkých pokusoch vyšli ako víťazné stratégie s už spomínanými vlastnosťami. Taktiež, ak si pripomenieme súboj len medzi úspešnými stratégiami (Obrázok 12), vidíme, že tieto úspešné stratégie dosahovali veľmi vysoké skóre, dokonca vyššie, než v našom základnom rozšírenom turnaji (Tabuľka 6). Dalo by sa preto očakávať, že ak by spolu súperili len menej úspešné stratégie, aj ich konečné skóre by bolo omnoho nižšie.

4 Iné interpretácie stratégického turnaja

V tretej kapitole našej diplomovej práce sme sa zaoberali modelom sociálnej interakcie. Usporiadali sme takzvaný strategický turnaj - turnaj, ktorý sa hrá spôsobom každý s každým. Každá nami vybraná stratégia súperila so všetkými ostatnými a cena víťaza bola udelená tej stratégií, ktorá získala najvyššie celkové skóre. Turnaj sme usporiadali pre hru Väzňova dilema, preto Kapitola 3 má názov *Model sociálnej interakcie*. Väzňova dilema veľmi dobre odzrkadľuje spôsob správania medzi subjektami.

Samozrejme, strategický turnaj sa môže usporiadať aj pre iné typové simultánne hry. Pre hlbšiu analýzu sme si vybrali v Kapitole 3 už spomínanú sociálnu interakciu. Teraz si však uvedieme ďalšie hry, modely, pomocou ktorých sa strategický turnaj dá usporiadať.

4.1 Evolučný model

Tento model sa hlbšie zaoberá stratégiami, ktoré majú potenciál byť evolučne stabilné. Uveďme si hneď na úvod príklad.

Majme dvoch levov a jednu levicu. Tieto dva levy budú medzi sebou bojovať o levicu. Levica si, samozrejme, na reprodukciu vyberie toho leva, ktorý zvíťazí. Oba tieto levy využijú nejakú stratégiu na to, aby zvýšili svoju šancu na výhru. Každý z levov však už má nejakú genetickú predispozíciu a vlastnosti, s ktorými pracuje. Navyše, takéto dva levy sa stretnú úplne náhodne. Evolúcia si však vyberie leva s takými vlastnosťami (vrodenými génmi), ktoré majú najvyššie úspechy a vedia sa zbaviť ostatných levov. Ktoré stratégie to však sú?

Touto problematikou sa zaoberá napríklad aj kniha od známeho matematika a biológa Johna Maynarda Smitha - Evolution and the Theory of Games [12].

4.2 Model konkurencie medzi firmami s procesne racionálnymi spotrebiteľmi

Ďalšou možnosťou na strategický turnaj je boj medzi firmami. Zdravá konkurencia je to, čo ekonomika potrebuje a vtedy dochádza medzi firmami k nepriamemu súboju. Zákazník si vyberá z množstva veľmi podobných produktov. Povedzme, že dve firmy majú na výber po jednom modeli mobilného telefónu. Zákazník si dôkladne zváži ich pre a proti. Matica výplat by v takomto prípade mohla byť naplnená bodmi, ktoré by označovali počet vlastností, ktoré má jeden model navyše oproti druhému. Druhá možnosť matice výplat by mohla byť naplnená počtom vlastností, v ktorých je daný mobil lepší než mobil od druhej firmy. Opäť by sa dali vybrať stratégie, ktoré by firmy hrali v takomto súboji a turnaj by sa usporiadal veľmi podobne ako sme ho usporiadali my v Kapitole 3.

4.3 Ďalšie simultánne hry

Okrem vyššie spomenutých by sa dal strategický turnaj usporiadať naozaj vo veľa ďalších odvetviach. Môže to byť napríklad pri športových turnajoch, kedy športovec použije, napríklad, jednu konkrétnu stratégiu (povedzme, že si vyberie niečo, v čom je najlepší) a tú hrá po celú hru. Napríklad, majme futbalistov. Hráč si vyberie takú pozíciu, ktorá prinesie jemu a jeho tímu najlepšie výsledky. Napríklad, vyberie si pozíciu obrancu a tak hrá až do konca hry.

Ďalšie využitie vidíme v hazardných hrách ako napríklad Poker, Black Jack alebo mnohé ďalšie.

Tieto hry slúžia len ako príklad z množstva simultánnych hier, ktoré by mohli byť súčasťou strategického turnaja. Nakoľko by robenie všetkých spomenutých hier prekročilo rozsah tejto diplomovej práce, nechávame priestor otvorený ako námet na ďalšiu prácu alebo na čitateľa samotného.

Záver

Hlavným cieľom našej diplomovej práce bolo usporiadenie strategického turnaja pre niektorú nami vybranú simultánnu hru. Na to, aby sme vôbec niečo také mohli urobiť, bolo vhodné na začiatku práce uviesť teoretické poznatky, ktoré by sa neskôr v práci mohli využívať a ktoré by pomohli hlbšiemu pochopeniu problémov riešiacich sa neskôr v našej práci.

Prvé dve kapitoly sme preto v ich plnom rozsahu venovali najmä teórii.

Prvú kapitolu sme vyhradili na úvod do problematiky kooperácie. Zistili sme, že v počiatkoch sveta bola každá spoločnosť viac-menej taká, že zrádzala svoje okolité prostredie. Keďže však usporiadenie strategického turnaja by nemalo zmysel, pokiaľ by všetci volili iba stratégiu zrádzania, bolo vhodné rozobrať, ako sa naša spoločnosť evolučne vyvinula tak, že je ochotná spolupracovať. Uviedli sme, že evolúcia kooperácie úzko súvisí aj s evolučnou teóriou, ukázali sme si názorne na schéme, čo to vlastne tá kooperácia znamená a neskôr v kapitole sme vysvetlili súvis evolúcie kooperácie s hrou Väzňova dilema, pokiaľ je hraná jedenkrát a následne aj viackrát. Koniec kapitoly je podčiarknutý malou analýzou turnaja Roberta Axelroda, ktorého kniha bola jedným z hlavných zdrojov tejto diplomovej práce [2].

Ako sme už spomenuli, evolúcia kooperácie mala úzky vzťah s hrou Väzňova dilema, hranou jedenkrát a aj opakovane. Keďže aj náš strategický turnaj je simultánna hra opakovaná viackrát, uviedli sme teoretické poznatky týkajúce sa aj konečne opakovaných hier a aj nekonečne opakovaných hier. V oboch podkapitolách (Podkapitola 2.1 a Podkapitola 2.2) sme spísali základné vety a tvrdenia potrebné na pochopenie problematiky. Obe kapitoly sme podčiarkli názorným príkladom, aby bolo čitateľovi úplne jasné, o čom tieto spomínané podkapitoly hovoria.

Po teoretickej časti našej diplomovej práce a po nabraní potrebných znalostí sme sa mohli presunúť na písanie cieľovej časti. Keďže hlavným grom tejto práce bolo usporiadať strategický turnaj a analyzovať jeho výsledky, venuje sa mu práve Kapitola 3. Hneď na úvod sme si vybrali 20 stratégií, ktoré do turnaja vstúpili. Snažili sme sa vybrať také stratégie, ktoré pokrývali široké spektrum vlastností. Vybrali sme stratégie "milé", "nemilé" (vysvetlenie na strane 30), závislé aj nezávislé od oponentových ťahov, niekoľko rovnakých ako v turnaji Roberta Axelroda a na záver ešte aj také, ktoré mali v sebe zakomponovaný princíp stratégie Tit for Tat. Poslednú zmienenú vlastnosť sme vybrali kvôli jej vysokej úspešnosti v oboch turnajoch Axelroda.

Po úspešnom vybraní našich stratégií sme využili naše poznatky v programe Matlab a naprogramovali celý turnaj v troch častiach. Detailne sú popísané na stranách 31-36.

Keďže sme už mali všetky potrebné náležitosti na turnaj, mohli sme ho spustiť. V prvej časti sme sa rozhodli usporiadať len základný turnaj, od ktorého sme sa neskôr odvíjali. Porovnávali sme, ktoré stratégie vyšli najúspešnejšie a ktoré najmenej úspešne, ďalej sme analyzovali, aké vlastnosti stratégií sú tie, ktoré dopomáhajú stratégiám k víťazstvu. Všetky závislosti, ktoré sme sledovali sú na obrázkoch 6-9. Jednoznačná vlastnosť, ktorá sa ukázala ako najúspešnejšia bola kombinácia vlastností "milá" a závislá od predošlých ťahov oponenta (Obrázok 9). Všetky stratégie, ktoré mali uvedenú kombináciu vlastností skončili na prvých priečkach.

V Podkapitole 3.2 sme urobili aj menšie obmeny nášho základného turnaja a pozreli sme sa na to, či zmena počtu ťahov hráčov a priemerovanie viacerých turnajov má nejaký vplyv na výsledné skóre. Zistili sme, že priemerovanie príliš veľa turnajov nemá na výsledné skóre už žiadny vplyv. Skúšali sme priemerovať 5, 10, 50 a 100 turnajov, priebeh bol už totožný. Stále si však stojíme za tvrdením, že minimálne 5 turnajov je potrebné spriemerovať kvôli náhodnosti niektorých stratégií. Dokazuje to aj Tabuľka 5. Tabuľka 6 zas dokazuje, že čím viac ťahov hráči majú, tým viac sa výsledky ustália, poprípade zostanú rovnaké.

Absolútnym víťazom nášho turnaja sa stala stratégia s názvom Generous Tit for Tat a absolútnym porazeným stratégia Joss. Za víťazov a porazených však nepokladáme uvedené stratégie, ako skôr spomínanú kombináciu vlastností.

Ku koncu kapitoly sme sa rozhodli spraviť strategický turnaj iba s desiatimi najúspešnejšími stratégiami. Zistili sme, že získavajú naozaj vysoké skóre (Obrázok 12 a Tabuľka 7) a opäť sa potvrdila aj úspešnosť vlastnosti "milá" a závislá od predošlých ťahov oponenta. Jediná stratégia, ktorá bola "nemilá", skončila ako posledná (Obrázok 12).

Poslednú kapitolu sme venovali spomenutiu iných simultánnych hier, ktoré môžu vstúpiť ako subjekt do strategického turnaja. Je takých hier mnoho, no medzi hlavné aplikácie sme vybrali evolučný model a model konkurencie medzi firmami, kde sme uviedli aj názorný príklad.

Počas celej diplomovej práce sme preukázali vhodnú prácu so zdrojmi, spísanie prehľadnej teórie potrebnej k ďalšej práci, ukázali sme advekvátne príklady využívajúce tieto teórie. Neskôr v práci sme ukázali aj znalosť práce v programe Matlab a zanalyzovanie všetkých výsledkov vyplývajúcich z usporiadeného strategického turnaja. Na záver sme otvorili cestu na budúce usporiadenie ďalších strategických turnajov pre iné typové simultánne hry, než sme vytvorili my.

Zoznam použitej literatúry

[1] Apt, K. R.: *Repeated Games*, slajdy, dostupné na internete (12.11.2019): https://homepages.cwi.nl/~apt/stra/ch8.pdf

[2] Axelrod, R.: *The Evolution of Cooperation*, Basic Books, Inc., Publishers, New York, 1984

[3] Axelrod, R., Hamilton, W. D.: *The Evolution of Cooperation*, Science 211 (1981), 1390-1396, dostupné na internete (26.10.2019): https://www.jstor.org/stable/1685895?origin=JSTOR-pdf&seq=1#page_scan_tab_contents

[4] Brown, J. L., Choe, J. C. : *Behavioral Ecology and Sociobiology*, dostupné na internete (17.3.2020): https://doi.org/10.1016/B978-0-12-809633-8.20838-8

[5] Cornell University: Evolutionarily Stable Strategies, dostupné na internete (26.10.2019): http://hoylab.cornell.edu/ess.html

[6] Chicken, dostupné na internete (12.11.2019): https://cs.stanford.edu/people/eroberts/courses/soco/projects/1998-99/game-theory/chicken.html

[7] Garratt, R.: *Repeated Games*, UCSB, Santa Barbara, dostupné na internete (12.11.2019): http://econ.ucsb.edu/~garratt/Econ171/Lect012_Slides.pdf

[8] Hamilton, W. D.: *The Evolution of Altruistic Behavior* The American Naturalist 97 (1963), 354-356, dostupné na internete (17.3.2020): https://www.journals.uchicago.edu/doi/pdfplus/10.1086/497114

[9] Nowak, M.: *Evolution of Cooperation*, slajdy z prednášky, Harvard University, dostupné na internete (26.10.2019): http://web.mit.edu/9.s915/www/classes/slides_nowak.pdf

[10] Ozdaglar, A.: *Game Theory with Engineering Applications, Lecture 15: Repeated Games*, MIT, Cambridge, 2010, dostupné na internete (12.11.2019): https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-254-game-theory-with-engineering-applications-spring-2010/lecture-notes/MIT6_254S10_lec15.pdf

[11] Pekár, J.: *Úvod do teórie hier*, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2017

[12] Smith, J. M.: *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982

[13] Yasuda, Y.: *Theory of Repeated Games*, slajdy z prednášok, Osaka University, Osaka, 2015, dostupné na internete (12.11.2019): `https://www.slideshare.net/YosukeYasuda1/theory-of-repeated-games`

Príloha A

Kód 4: Stratégie.

```
%Zadefinovanie strategii
% 0 - zrada, 1 - kooperacia

function x=strategie(player,opp,strategy)
if(strategy==1) %Forgiving Grim pre k=3
    if(length(opp)==0)
        x=1;
    elseif(length(opp)==1)
        if(opp(length(opp))==0)
            x=0;
        else
            x=1;
        end

    elseif(length(opp)==2)
        if(opp(length(opp))==0 || opp(length(opp)-1)==0)
            x=0;
        else
            x=1;
        end

    else
        if(opp(length(opp))==0 || opp(length(opp)-1)==0 || opp(
            length(opp)-2)==0)
            x=0;
        else
            x=1;
        end
```

```
    end

elseif(strategy==2) %Forgiving Tit for Tat
    if(length(opp)==0)
        x=1;
    elseif(length(opp)==1)
        x=1;
    elseif(opp(length(opp)) == 0 && opp(length(opp)-1)==0)
        x=0;
    else
        x=1;
    end

elseif(strategy==3) %Generous Tit for Tat
    if(length(opp)==0)
        x=1;
    else
        if(opp(length(opp))==0)
            s=rand;
            if(s<0.1)
            x=1;
            else
            x=0;
            end
        else
            x=1;
        end
    end

elseif(strategy==4) %Grim Trigger
```

```
        if(length(opp)==0)
            x=1;
        else
            if(sum(opp)<length(opp))
                x=0;
            else
                x=1;
            end
        end

elseif(strategy==5) %Hard Majority
        if(length(opp)==0)
            x=0;
        else
            if(sum(opp)<=length(opp)-sum(opp))
                x = 0;
            else
                x = 1;
            end
        end

elseif(strategy==6) %Hard Tit for Tat
        if(length(opp)==0)
            x=1;
        elseif(length(opp)==1)
            if(opp(length(opp)) == 0)
                x=0;
            else
                x=1;
            end
        elseif(length(opp)==2)
```

```
        if((opp(length(opp))) == 0 || (opp(length(opp)-1) == 0))
            x=0;
        else
            x=1;
        end
    elseif(length(opp)>=3)
        if((opp(length(opp)) == 0) || (opp(length(opp)-1) == 0) || (opp(length(opp)-2)==0))
            x=0;
        else
            x=1;
        end
    end

elseif(strategy==7) %Joss s 10%pp, ze po spolupraci da zradu
    if(length(opp)==0)
        x=1;
    else
        if(opp(length(opp))==0)
            x = 0;
        else
            n=rand;
            if(n<0.1)
                x=0;
            else
                x=1;
            end
        end
    end

elseif(strategy==8) %Nahodna strategia
```

```
    s=randn;
    if(s<0)
        x=0;
    else
        x=1;
    end

elseif(strategy==9) %Reverse Tit for Tat
    if(length(opp)==0)
        x=0;
    elseif(opp(length(opp))==0)
        x=1;
    else
        x=0;
    end

elseif(strategy==10) %Soft Majority
    if(length(opp)==0)
        x=1;
    else
        if(sum(opp)>=length(opp)-sum(opp))
            x = 1;
        else
            x=0;
        end
    end

elseif(strategy==11) %Spoluprace
    x=1;

elseif(strategy==12) %Spolupraca, zrada (SZ)
```

```
    if(mod(length(opp),2) == 0)
    x=1;
    else
    x=0;
    end

elseif(strategy==13) %Spolupraca, spolupraca, zrada (SSZ)
    if(length(opp) == 0)
        x = 1;
    elseif(length(opp) == 1)
        x = 1;
    elseif(length(opp) == 2)
        x = 0;
    else
        if(player(length(opp))==0)
            x = 1;
        elseif(player(length(opp))==1)
            if(player(length(opp)-1)==1)
                x = 0;
            else
                x = 1;
            end
        end
    end

elseif(strategy==14) %Suspicious Tit for Tat
    if(length(opp)==0)
        x=0;
    else
        x=opp(length(opp));
    end
```

```
elseif(strategy==15) %Tester
    if(length(opp) == 0)
        x = 0;
    else
        if(sum(opp)==length(opp))
            if(length(opp) == 1)
                x=1;
            else
                if(mod(length(opp),2) == 0)
                    x=1;
                else
                    x=0;
                end
            end
        elseif(sum(opp)==length(opp)-1)
            x=1;
        else
            x=opp(length(opp));
        end
    end

elseif(strategy==16) %Tit for Tat
    if(length(opp)==0)
        x=1;
    else
        x=opp(length(opp));
    end

elseif(strategy==17) %Win-Stay, Lose-Shift
    if(length(opp)==0)
```

```
            x=1;
        else
            if( ( player(length(player)) == 1 && opp(length(opp)) == 1 ) || ( player(length(player)) == 0 && opp(length(opp)) == 1 ) )
                x = player(length(player));
            else
                x = abs(player(length(player)) - 1);
            end
        end

elseif(strategy==18) %Zrady
        x=0;

elseif(strategy==19) %Zrada, spolupraca (ZS)
        if(mod(length(opp),2) == 0)
        x=0;
        else
        x=1;
        end

else %Zrada, zrada, spolupraca (ZZS)
        if(length(opp) == 0)
            x = 0;
        elseif(length(opp) == 1)
            x = 0;
        elseif(length(opp) == 2)
            x = 1;
        else
            if(player(length(opp))==1)
                x = 0;
```

```
            elseif(player(length(opp))==0)
                if(player(length(opp)-1)==0)
                    x = 1;
                else
                    x = 0;
                end
            end
        end

end
```