

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



OCENENIE GARANCIÍ DÔCHODKOVEJ SPRÁVCOVSKEJ
SPOLOČNOSTI

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**OCENENIE GARANCIÍ DÔCHODKOVEJ SPRÁVCOVSKEJ
SPOLOČNOSTI**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Nikoleta Podstrelená
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Ocenenie garancií dôchodkovej správcovskej spoločnosti
Valuation of pension fund management company guarantees

Anotácia: Dôchodkové správcovské spoločnosti v súčasnosti poskytujú záruky hodnoty jednotky fondu v definovanom čase. Toto znižuje hodnotu spoločnosti. V práci pôjde o ocenenie tejto záruky.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Dátum zadania: 08.01.2019

Dátum schválenia: 08.01.2019
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Podakovanie Na tomto mieste by som sa rada poďakovala vedúcemu diplomovej práce doc. Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD. za jeho odbornú pomoc, podnetné nápady a usmerenie pri písaní tejto práce.

Abstrakt v štátnom jazyku

PODSTRELENÁ, Nikoleta: Ocenenie garancií dôchodkovej správcovskej spoločnosti [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2020, 47 s.

V diplomovej práci sa zaoberáme dlhopisovým garantovaným fondom a jeho fungovaním. V prvej časti stručne popíšeme dôchodkový systém na Slovensku so zameraním sa na dlhopisový garantovaný fond a jeho obmedzenia v zákone. Jedným z obmedzení je práve slovo „garantovaný“, ktoré hovorí o povinnosti dôchodkovej správcovskej spoločnosti doplniť majetok do fondu, v prípade, že jeho hodnota v sledovanom období poklesne. Cieľom našej práce je oceniť túto garanciu. Odvodíme časovú štruktúru úrokových mier a pomocou nej budeme simulovať fungovanie dlhopisového garantovaného fondu a sledovať prípadnú výšku doplatku, ktorý musí dôchodková správcovska spoločnosť doplniť do fondu.

Kľúčové slová: II. pilier, dlhopisový garantovaný fond, Vašíčkov model, časová štruktúra úrokových mier, simulácie úrokových mier, durácia

Abstract

PODSTRELENÁ, Nikoleta: Valuation of pension fund management company guarantees [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2020, 47 p.

In this thesis we deal with guaranteed bond pension fund and its operating. In the first part we describe the pension system in Slovakia, focusing on the bond guaranteed fund and its limitations in law. One of the limitations is the term „guaranteed“, which refers to the duty of a pension fund management company to add assets into the fund if its value decrease in the reference period. The aim of our thesis is to value this guarantee. We will derive the term structure of interest rates and use it to simulate the performance of the bond guaranteed fund and to monitor the amount of the supplement that the pension fund management company has to add to the fund.

Keywords: second pillar, bond pension fund, Vasicek model, term structure of interest rate, duration

Obsah

Úvod	8
1 Dôchodkový systém na Slovensku	10
1.1 Charakteristika dôchodkového systému	10
1.2 Dlhopisový garantovaný fond	11
1.2.1 Terminológia	12
1.2.2 Odplata dôchodkovej správcovskej spoločnosti	14
2 Dlhopisy	15
2.1 Druhy dlhopisov	15
2.2 Oceňovanie dlhopisov	16
2.2.1 Majetok v dlhopisovom garantovanom fonde	16
2.3 Durácia	18
3 Modelovanie úrokových mier	20
3.1 Modely okamžitej úrokovej miery	20
3.2 Odvodenie časovej štruktúry úrokových mier	22
3.3 Kalibrácia Vašíčkovho modelu	25
4 Ocenenie garancie	31
4.1 Opis modelu	31
4.1.1 Začiatočné predpoklady	31
4.1.2 Zloženie fondu	32
4.1.3 Simulácia fungovania fondu	32
4.2 Hodnota doplácania	34
5 Výsledky simulácie	36
Záver	43
Zoznam použitej literatúry	46

Úvod

V roku 2015 nastala v dôchodkovom sporení nová etapa, kedy sa začali vyplácať starobné dôchodky prvým sporiteľom. Kombinované dôchodky zo súkromného a štátneho systému sú však nižšie ako v prípadoch, kde si ľudia II. pilier nezaviedli. Dôvodom je predovšetkým nízke zhodnotenie majetku vo fondoch, ale tiež relatívne drahé anuity. Podľa Inštitútu finančnej politiky [6] stojí sa nízkym zhodnotením majetku viacero faktorov, hlavne zavedenie a následné sprísnenie garancií, ale aj presun majetku sporiteľov z ne-garantovaných fondov (najmä akciových) do garantovaných dlhopisových fondov v roku 2013. Výsledkom toho je, že väčšina sporiteľov si dnes v II. pilieri sporí príliš konzervatívne a zhodnotenie ich úspor je nižšie ako je potenciál pri dlhodobom investovaní. Viac ako 70% majetku je investovaných do nízko výnosných dlhopisových fondov.

Dlhopisové garantované fondy sú zákonom prísne obmedzované. Jedným z obmedzení je práve garancia fondu. Znamená to, že ak v dôchodkovom fonde počas sledovaného obdobia klesne hodnota majetku, dôchodková správcovská spoločnosť je povinná doplniť majetok do fondu z vlastných zdrojov. Sledovaným obdobím sa do roku 2012 myslelo 6 kalendárnych mesiacov, od apríla 2012 sa zmenilo na 5 rokov a od januára 2013 sa sledované obdobie predĺžilo na 10 rokov. To robí z investovania v dlhopisovom garantovanom fonde prakticky investovanie s nulovým rizikom, čo môže byť lákadlom pre sporiteľov, no nízko rizikový dlhopisový fond je, samozrejme, spojený aj s nízkymi výnosmi.

V júni 2014 Európska centrálna banka prvýkrát znížila sadzbu jednoduchových sterilizačných operácií (sadzba, ktorou sa úročia vklady bánk v centrálnej banke) na zápornú hodnotu [4]. V súčasnosti sa negatívne úrokové miery stali akýmsi novým normálom a s negatívnymi výnosmi sú vydávané aj niektoré dlhopisy. V roku 2019 bol emitovaný prvý dlhopis so záporným výnosom aj bankou na Slovensku. Ak by sa trend dlhopisov so zápornými sadzbami rozšíril, môže táto skutočnosť vo veľkej miere ovplyvniť výnosy dlhopisových garantovaných fondov. Môže to teda spôsobiť pokles hodnoty finančných prostriedkov v dlhopisovom fonde, s čím je spojená spomínaná povinnosť dôchodkovej správcovskej spoločnosti doplniť majetok do fondu.

Cieľom našej práce je oceniť túto záruku. Počas stanoveného obdobia budeme simulovať fungovanie dlhopisového garantovaného fondu a sledovať, v ktorých prípadoch nastane vo fonde pokles majetku a v akej výške by bol prípadný doplatok, ktorý musí dôchodková

správcovská spoločnosť do fondu doplniť.

Práca je členená do piatich kapitol. V prvej kapitole stručne charakterizujeme dôchodkový systém na Slovensku a popíšeme hlavnú terminológiu týkajúcu sa dlhopisových garantovaných fondov.

V druhej kapitole viac približujeme pojem dlhopis, uvádzame druhy dlhopisov, ktoré môžu byť súčasťou dlhopisového garantovaného fondu a vysvetlíme, ako sa dané dlhopisy oceňujú.

Tretia kapitola je venovaná úrokovým mieram. Dôležitým faktorom, ktorý vplýva na dlhopisy v dlhopisovom fonde je výnosová krivka. V tejto kapitole uvedieme niektoré modely, ktorými možno simulovať okamžitú úrokovú mieru a následne z okamžitej úrokovej miery odvodíme vzťah pre časovú štruktúru úrokových mier.

V záverečných kapitolách vytvoríme svoj dlhopisový fond a predstavíme model, na základe ktorého budeme fungovanie fondu simulovať. Veľkým množstvom simulácií dostaneme strednú hodnotu doplatku, ktorý by bola dôchodková správcovská spoločnosť povinná do fondu doplatiť.

1 Dôchodkový systém na Slovensku

1.1 Charakteristika dôchodkového systému

Dôchodkový systém na Slovensku funguje od roku 2004 na báze troch pilierov:

- I. pilier - povinné dôchodkové poistenie,
- II. pilier - starobné dôchodkové sporenie,
- III. pilier - doplnkové dôchodkové sporenie.

Povinné dôchodkové poistenie je priebežne financované poistenie so stanovenými dávkami spravované Sociálnou poisťovňou. Aktuálna výška odvodov je stanovená na 18% z vymeriavacieho základu. Sociálna poisťovňa poskytuje z dôchodkového poistenia dôchodkové dávky, ktoré sú vyplácané za podmienok ustanovených Zákonom č. 461/2003 Z. z. o sociálnom poistení v znení neskorších predpisov [17]. Jednoduchšie povedané, ekonomicky aktívni občania prispievajú do systému povinnými, zákonom stanovenými odvodmi, ktoré sú (prakticky okamžite) rozdelené súčasným poberateľom dôchodkových dávok.

Starobné dôchodkové sporenie predstavuje kapitalizačný, príspevkovo definovaný pilier dôchodkového systému. II. pilier je definovaný Zákonom č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov [16] a reprezentujú ho dôchodkové správcovské spoločnosti (DSS). Sporiteľ, zapojený do II. piliera, je povinný odvádzať 18% zo svojho osobného vymeriavacieho základu do Sociálnej poisťovne, pričom časť z týchto 18% je Sociálnou poisťovňou postúpená do sporiteľom vybranej DSS na osobný dôchodkový účet sporiteľa. Táto časť reprezentuje povinné príspevky na starobné dôchodkové sporenie. V roku 2020 predstavujú povinné príspevky 5% z osobného vymeriavacieho základu. Príspevky sa budú medziročne zvyšovať o 0,25% až do roku 2024, kedy sa výška povinných príspevkov ustáli na 6%. Okrem dôchodkovej správcovskej spoločnosti má sporiteľ možnosť vybrať si aj dôchodkové fondy, v ktorých budú jeho príspevky zhodnocované. Sporiteľ, zúčastnený v II. pilieri, bude poberať dôchodkové dávky z dvoch zdrojov - krátený dôchodok z I. piliera a dôchodok z II. piliera. Starobný dôchodok z II. piliera môže byť vyplácaný formou:

- doživotného dôchodku,

- dočasného dôchodku,
- programového výberu.

Výška dôchodku poberaného z II. piliera značne závisí od miery zhodnotenia sporiteľovho majetku, výšky zaplatených príspevkov, dĺžky sporenia, veku odchodu do dôchodku a formy, ktorou sa sporiteľ rozhodne dôchodok poberať.

Kým I. pilier je citlivý na demografické riziká ako dĺžka dožitia či pôrodnosť, II. pilier nesie v sebe najmä riziko výkyvov na svetových finančných trhoch.

Doplňkové dôchodkové sporenie, tzv. III. pilier, je dobrovoľný pilier dôchodkového systému, ktorý je spravovaný doplnkovými dôchodkovými spoločnosťami (DDS). Do III. piliera sa môžu účastníci zapojiť nezávisle na účasti v II. pilieri. Právne je stanovený Zákonom č. 650/2004 Z. z. o doplnkovom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov [19]. Príspevky na doplnkové dôchodkové sporenie platia účastníci sporenia, prípadne zamestnávateľia účastníkov. Účastníci môžu svoje príspevky zhodnocovať v jednom alebo viacerých dôchodkových fondoch. Po ukončení sporenia môžu byť účastníkom vyplácané nasledovné dávky:

- doplnkový starobný dôchodok (formou doživotného alebo dočasného dôchodku),
- doplnkový výsluhový dôchodok (formou doživotného alebo dočasného dôchodku),
- jednorazové vyrovnanie,
- odstupné.

1.2 Dlhopisový garantovaný fond

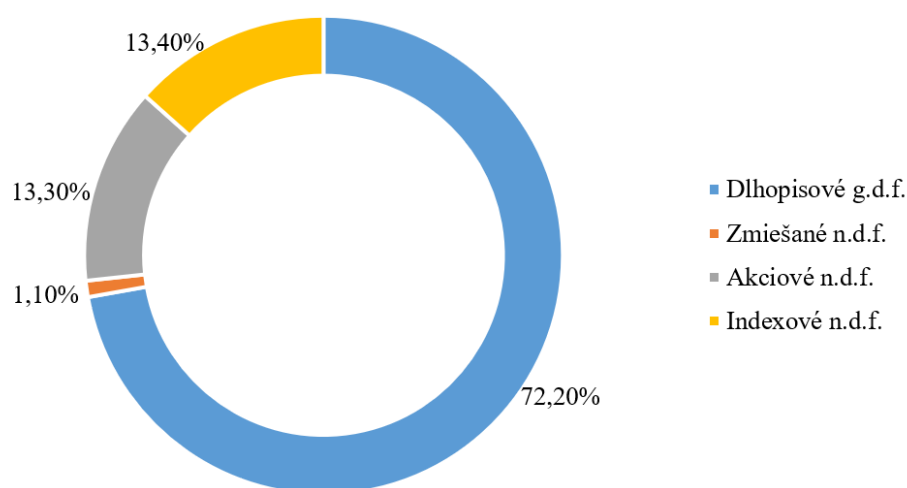
Ako bolo uvedené v podkapitole 1.1, finančné prostriedky sporiteľov v II. pilieri sú spravované dôchodkovými správcovskými spoločnosťami. Každá DSS na Slovensku je podľa zákona [16] povinná vytvárať a spravovať minimálne dva dôchodkové fondy:

- akciový negarantovaný dôchodkový fond,
- dlhopisový garantovaný dôchodkový fond.

Akciový negarantovaný dôchodkový fond, ako napovedá názov, tvoria akciové investície. Fond má potenciál vyšších výnosov, ale zároveň aj vyššie riziko straty. Slovo „negarantovaný“ znamená, že v prípade poklesu hodnoty fondu prídu o časť svojich vkladov klienti, nie DSS.

Inak je tomu v prípade dlhopisového garantovaného dôchodkového fondu. Jeho finančné zdroje sú zastúpené v konzervatívnych dlhopisových a peňažných investíciách. Slovo „garantovaný“ znamená, že DSS garantuje, že prípadný pokles hodnoty majetku doplní do dôchodkového fondu z vlastných zdrojov.

Na Obrázku 1 je zobrazené rozdelenie majetku v dôchodkových fondoch k 31.12.2019. Vidíme, že viac ako 70% majetku je spravovaného v konzervatívnych dlhopisových fondoch.



Obr. 1: Prehľad spravovaného majetku v dôchodkových fondoch k 31.12.2019 (celková výška spravovaného majetku je približne 9 324 mil. eur). Zdroj dát: [9]

1.2.1 Terminológia

Vychádzajúc z [16] objasníme základné pojmy súvisiace s dôchodkovými fondmi.

Majetok v dôchodkovom fonde nie je súčasťou majetku DSS. Majetok v dôchodkovom fonde je spoločným majetkom sporiteľov. Tvoria ho podiely sporiteľov na tomto majetku, pričom podiel sporiteľa na tomto majetku je vyjadrený ako pomer dôchodkových

jednotiek na osobnom dôchodkovom účte sporiteľa ku všetkým dôchodkovým jednotkám v tomto dôchodkovom fonde.

Dôchodková jednotka je podiel na majetku v dôchodkovom fonde. Aktuálnu hodnotu dôchodkovej jednotky je DSS povinná vypočítať každý pracovný deň. Hodnota dôchodkovej jednotky sa vyjadruje v eurách a určuje sa s presnosťou na šesť desatinných miest. Aktuálna hodnota dôchodkovej jednotky v deň výpočtu t , ozn. $AHDJ_t$, sa určí ako podiel čistej hodnoty majetku v dôchodkovom fonde, ozn. NAV_t a počtu všetkých dôchodkových jednotiek evidovaných na osobných dôchodkových účtoch všetkých sporiteľov dôchodkového fondu v deň výpočtu t .

$$AHDJ_t = \frac{NAV_t}{\#podielov}$$

Povinnosť DSS doplniť majetok do garantovaného dôchodkového fondu je stanovená zákonom [16]. Ak v dlhopisovom garantovanom dôchodkovom fonde v sledovanom období poklesne hodnota dôchodkovej jednotky, DSS je povinná doplniť hodnotu majetku vo fonde z vlastného majetku. Sledovaným obdobím sa rozumie 10 po sebe nasledujúcich kalendárnych rokov. Nové sledované obdobie začína plynúť 1. januára každého kalendárneho roka, pričom už začaté sledované obdobia plynú súbežne.¹

Pokles hodnoty dôchodkovej jednotky je záporný výsledok pomeru aritmetického priemeru aktuálnych hodnôt dôchodkových jednotiek za posledný kalendárny mesiac sledovaného obdobia a aritmetického priemeru aktuálnych hodnôt dôchodkových jednotiek za prvý kalendárny mesiac sledovaného obdobia znížený o hodnotu 1.

$$Pokles hodnoty DJ = \min \left(0, \frac{\frac{\sum_{t \in lastmonth} AHDJ_t}{\sum_{t \in lastmonth} 1}}{\frac{\sum_{t \in firstmonth} AHDJ_t}{\sum_{t \in firstmonth} 1}} - 1 \right)$$

Pokles hodnoty majetku v dôchodkovom fonde, teda čiastka, ktorú musí DSS doplniť do dôchodkového fondu, sa vypočíta ako absolútna hodnota súčinu poklesu hod-

¹V roku 2020 je aktívnych osem sledovaných období, prvé 1.1.2013 – 31.12.2022, druhé 1.1.2014 – 31.12.2023, až ôsme 1.1.2020 – 31.12.2029. To znamená, že najbližšie porovnanie hodnôt dôchodkovej jednotky sa bude realizovať k 31.12.2022. Porovnávať sa bude priemerná hodnota dôchodkovej jednotky za december 2022 voči priemernej hodnote dôchodkovej jednotky za január 2013.

noty dôchodkovej jednotky a priemernej čistej hodnoty majetku v dlhopisovom garantovanom dôchodkovom fonde za sledované obdobie.

1.2.2 Odplata dôchodkovej správcovskej spoločnosti

Čistá hodnota majetku v dôchodkovom fonde predstavuje hodnotu majetku očistenú o všetky záväzky fondu, resp. o odplatu dôchodkovej správcovskej spoločnosti. V zmysle zákona [16] má DSS právo na

- odplatu za vedenie osobného dôchodkového účtu - výšku si taktiež určuje DSS, nesmie však presiahnuť hodnotu 1% zo sumy príspevkov sporiteľov,
- odplatu za správu dôchodkového fondu - výšku si určuje DSS sama, nesmie však presiahnuť hodnotu 0,3% priemernej ročnej predbežnej čistej hodnoty majetku v dôchodkovom fonde²,
- odplatu za zhodnotenie majetku v dôchodkovom fonde - DSS si ju účtuje iba v prípade, ak fond vykáže zisk. Určuje sa každý pracovný deň podľa vzorca

$$O_t = K * NAV_t * \left(\frac{AHDJ_t}{maxAHDJ_{t-1}} - 1 \right),$$

kde O_t je výška odplaty za zhodnotenie majetku v dôchodkovom fonde pre deň t , NAV_t je druhá predbežná čistá hodnota majetku³ v dôchodkovom fonde platná pre deň t , $AHDJ_t$ je aktuálna hodnota dôchodkovej jednotky platná pre deň t , $maxAHDJ_{t-1}$ je maximálna aktuálna hodnota dôchodkovej jednotky dosiahnutá za tri roky predchádzajúce dňu t a K je koeficient na určenie výšky odplaty za zhodnotenie majetku v dôchodkovom fonde, ktorý môže byť maximálne vo výške 0,1. To znamená, že hodnota odplaty z dosiahnutého zhodnotenia majetku vo fonde môže byť najviac 10% nárastu jeho čistej hodnoty.

²Predbežná čistá hodnota majetku je hodnota majetku očistená o odplatu za vedenie osobného dôchodkového účtu.

³Druhá predbežná čistá hodnota predstavuje predbežnú čistú hodnotu zníženú o odplatu za správu dôchodkového fondu.

2 Dlhopisy

Dlhopisy patria medzi najdôležitejšie cenné papiere kapitálového trhu. Zákon o dlhopi-soch [18] definuje dlhopis ako cenný papier, s ktorým je spojené právo majiteľa požadovať splácanie dlžnej sumy a vyplácanie výnosov z nej k určitému dátumu a povinnosť emi-tenta dlhopisu tieto záväzky splniť. Jednoduchšie povedané, dlhopis je zmluva, na základe ktorej sa dlžník zaväzuje, že v stanovených obdobiach bude majiteľovi dlhopisu vyplácať pravidelný úrok (tzv. kupón) a v deň splatnosti dlhopisu bude platba zahŕňať okrem kupónu aj jeho nominálnu hodnotu. Typickými emitentami dlhopisov sú štáty, ale tiež banky alebo veľké firmy. Typickými investormi do dlhopisov sú dôchodkové a podielové fondy, poisťovne, banky, ale aj obyvateľstvo.

V tejto kapitole uvedieme základné druhy dlhopisov, zameriame sa na tie, ktoré môžu byť súčasťou garantovaného dlhopisového fondu. Ďalej popíšeme, ako sa dané dlhopisy oceňujú a vysvetlíme pojem durácia, čo je dôležitý ukazovateľ dlhopisového portfólia.

2.1 Druhy dlhopisov

Na finančnom trhu existuje niekoľko typov dlhopisov, ktoré možno deliť podľa viace-rých kritérií. Napríklad v zdroji [2] sa uvádza delenie:

- Podľa typu výnosu (kupónu):
 - s fixným kupónom - kupón je daný pri emisii dlhopisu a je rovnaký až do splatnosti,
 - s variabilným kupónom - výnos je závislý na referenčnej sadzbe,
 - bez kupónu - tzv. *zero coupon bonds*.
- Podľa emitenta:
 - štátne dlhopisy - emitentom je ministerstvo financií, ktoré zastupuje štát,
 - komunálne dlhopisy (obligácie) - emitujú ich miestne správne celky, najčastejšie obce,
 - bankové dlhopisy - emitentom sú komerčné banky,

- podnikové (korporátne) dlhopisy - vydávajú ich súkromné podniky ako alternatívu úveru.
- Podľa zabezpečenia:
 - nekryté, nezabezpečené (*uncovered bonds*),
 - kryté (*covered bonds*) - kryté napr. hypotékami (niekedy nazývané aj hypotekárne záložné listy).

2.2 Oceňovanie dlhopisov

Na určenie ceny dlhopisu potrebujeme poznať jeho základné parametre, konkrétne nominálnu hodnotu F , dobu splatnosti dlhopisu (tzv. maturitu) T , výšku kupónu C a interval jeho vyplácania δ (ak napr. $\delta = 1$, kupóny sú vyplácané ročne) a tiež časovú štruktúru úrokových mier $R(t, T)$. V prípade spojitého úročenia cenu kupónového dlhopisu vypočítame podľa vzťahu

$$P(T_0, T) = \sum_{i=1}^n C\delta e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)} + F e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)}, \quad (1)$$

kde čas $T_i = T_0 + i\delta$.

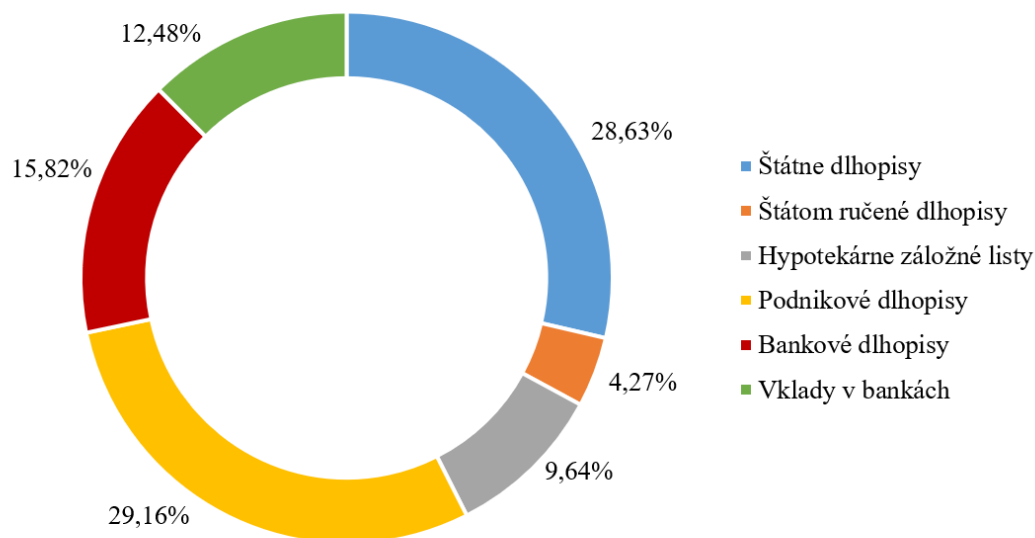
V praxi sa niekedy používa špeciálny druh dlhopisu, nazývaný *par bond*, pre ktorý platí, že jeho cena je rovná jeho nominálnej hodnote, teda $P = F$. Pre kupón takéhoto dlhopisu potom platí

$$C = \frac{F(1 - e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)})}{\delta \sum_{i=1}^n e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)}}. \quad (2)$$

2.2.1 Majetok v dlhopisovom garantovanom fonde

Podľa zákona [16] môže byť majetok v dlhopisovom garantovanom dôchodkovom fonde tvorený len dlhopisovými a peňažnými investíciami a obchodmi určenými na obmedzenie devízového a úrokového rizika. Na Obrázku 2 je zobrazený príklad zloženia majetku v dlhopisovom garantovanom fonde.

Pri nákupe finančného nástroja do dôchodkového fondu je DSS povinná rozhodnúť o metóde, ktorou sa bude určovať jeho hodnota. Toto rozhodnutie je pre ňu záväzné a nemožno ho zmeniť.



Obr. 2: Príklad zloženia majetku v dlhopisovom garantovanom dôchodkovom fonde (GARANT dlhopisový g. d. f., Allianz - Slovenská d.s.s., a.s. k 31.12.2019). Zdroj dát: [1]

V dlhopisovom garantovanom dôchodkovom fonde sa hodnota dlhopisov môže určovať **metódou reálnej hodnoty** alebo **metódou umorovanej hodnoty**. Na základe toho ich možno deliť na dva typy:

- AFS dlhopisy (*Available for sale*) - sú oceňované metódou reálnej hodnoty, resp. trhovo a možno ich predáť v ľubovoľnom čase od ich zakúpenia. Hodnotu takýchto dlhopisov vypočítame pomocou vzťahu (1).
- HTM dlhopisy (*Held to maturity*) - ich hodnota je určovaná metódou umorovanej hodnoty a DSS je povinná ich držať v portfóliu do konca splatnosti. Tieto dlhopisy sa oceňujú pomocou výnosu do splatnosti y , čo je spoločný konštantný úrok, pri ktorom je zachovaná nákupná cena dlhopisu. Hodnotu HTM dlhopisov vypočítame ako

$$P(T_0, T) = \sum_{i=1}^n C \delta e^{-y(T_i - T_0)} + F e^{-y(T_n - T_0)}.$$

2.3 Durácia

Durácia, často mylne zamieňaná s dobou splatnosti dlhopisu, vyjadruje dobu, za ktorú sa (pri zohľadnení časovej hodnoty peňazí) investorovi vráti späť jeho investovaný kapitál. Ak vezmeme dva dlhopisy s rovnakou dobou splatnosti, jeden kupónový a jeden bezkupónový, je zrejmé, že v prípade kupónového dlhopisu sa investovaný kapitál vráti skôr ako v prípade bezkupónového dlhopisu. Okrem toho má durácia ešte jednu zaujímavú vlastnosť - meria citlivosť trhovej ceny dlhopisu na pohyb úrokovej miery.

V prípade spojitého úročenia často hovoríme o tzv. **Fisher-Weilovej durácii**. Jej definíciu môžeme nájsť napríklad v knihe [8]. Označme postupnosť platieb $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$. Súčasná hodnota peňažného toku je

$$PV = \sum_{i=1}^n X_{t_i} e^{-r_{t_i} t_i}. \quad (3)$$

Fisher-Weilovu duráciu potom definujeme ako

$$D_{FW} = \frac{1}{PV} \sum_{i=1}^n t_i X_{t_i} e^{-r_{t_i} t_i}. \quad (4)$$

Zamyslime sa ešte nad citlivosťou ceny dlhopisu na zmenu úrokovej miery. Predpokladajme, že krivka úrokových mier r_t sa paralelne posunie o hodnotu λ . Súčasná hodnota peňažného toku bude potom

$$PV(\lambda) = \sum_{i=1}^n X_{t_i} e^{-(r_{t_i} + \lambda) t_i}. \quad (5)$$

Derivovaním rovnice (5) podľa λ zistíme trend zmeny

$$\left. \frac{dPV(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = - \sum_{i=1}^n t_i X_{t_i} e^{-r_{t_i} t_i} = -PV \cdot D_{FW}. \quad (6)$$

Použitím aproximácie $\frac{dPV}{d\lambda} \sim \frac{\Delta PV}{\Delta \lambda}$ a rovnice (6) potom dostávame

$$\Delta PV \sim -PV \cdot D_{FW} \cdot \Delta \lambda, \quad (7)$$

teda vzťah pre zmenu súčasnej hodnoty peňažného toku pri malom paralelnom posune krivky úrokových mier. Vidíme, že pri raste úrokových mier hodnota peňažného toku klesá a naopak. Preto dlhopisy s vyššou duráciou sú citlivejšie na posun úrokových mier ako

dlhopisy z nižšou duráciou. Okrem dlhopisov môžeme určiť duráciu aj pre celé dlhopisové portfólio. Durácia portfólia bude rovná váženému priemeru durácií jednotlivých dlhopisov:

$$D_{FW_{portf}} = \sum_{i=1}^n w_i D_{FW_i}. \quad (8)$$

Poznamenajme ešte, že v prípade HTM dlhopisov, ktoré sú oceňované pomocou výnosu do splatnosti, zmena úrokových mier nemá vplyv na súčasnú hodnotu dlhopisu, a preto v zmysle rovnice (7) majú HTM dlhopisy duráciu 0.

3 Modelovanie úrokových mier

Okamžité úrokové miery (*spot rates*) predstavujú poplatok za používanie peňažných prostriedkov od súčasnosti ($t = 0$) do času t . Sú to základné úrokové miery, ktoré definujú tzv. časovú štruktúru úrokových mier.

Časová štruktúra úrokových mier (*term structure of interest rates*) vyjadruje závislosť úrokovej miery od maturity dlhopisu. Je to teda úroková miera s rôznymi splatnosťami, ktorej grafické vyjadrenie nazývame aj výnosová krivka (*yield curve*). Typicky má výnosová krivka rastúci priebeh - úrokové sadzby na krátke splatnosti sú nižšie ako na dlhé splatnosti, no nie je to pravidlom. Časová štruktúra úrokových mier je dôležitým vstupom pri oceňovaní mnohých finančných nástrojov.

V nasledujúcej kapitole sa budeme zaoberať modelmi okamžitej úrokovej miery a odvodíme časovú štruktúru úrokových mier. Vychádzať budeme hlavne z [8] a [13].

3.1 Modely okamžitej úrokovej miery

Modely okamžitej úrokovej miery (*short rate models*) sú populárnymi nástrojmi na trhu úrokových mier. Okamžitou (alebo aj krátkodobou) úrokovou mierou sa myslí úroková miera na nekonečne krátky čas.

Predpokladajme, že proces okamžitej úrokovej miery, ozn. r_t , sa v rizikovo neutrálnom svete riadi podľa stochastickej diferenciálnej rovnice. Ak má rovnica len jeden zdroj náhodnosti, budeme hovoriť o jednofaktorových modeloch.⁴ V jednofaktorových modeloch sa predpokladá, že okamžitá úroková miera r_t je charakterizovaná riešením stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dr_t = \mu_t dt + \omega_t dW_t, \quad (9)$$

kde μ_t určuje trend (alebo drift) vo vývoji úrokovej miery a volatilita ω_t určuje charakter náhodných fluktuácií úrokovej miery okolo jej driftovej zložky. V závislosti od tvaru koeficientov rovnice (9) budeme rozlišovať rôzne typy modelov úrokovej miery.

Znáмым príkladom jednofaktorového modelu je **Vašíčkov model**. Vašíčkov model môžeme zaradiť medzi historicky prvé a najjednoduchšie modely okamžitej úrokovej miery.

⁴Viacfaktorovými modelmi sa v tejto práci zaoberať nebudeme.

Okamžitú úrokovú mieru pri rizikovo neutrálnej miere Q vo Vašíčkovom modeli modelujeme stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr_t = (\theta - \alpha r_t)dt + \sigma dW_t, \quad (10)$$

kde σ , θ , α sú kladné konštanty. Vašíčkov model má tzv. vlastnosť *mean reversion* - približovanie sa k dlhodobu rovnovážnej hodnote. To znamená, že drift $(\theta - \alpha r_t)$ priťahuje proces r_t k priemernej hodnote danej výrazom θ/α . Výraz θ/α môžeme nazvať limitnou úrokovou mierou a parameter α rýchlosťou reverzie, t. j. rýchlosťou návratu k limitnej úrokovej miere. Procesy s uvedenou vlastnosťou sa zvyknú označovať aj ako **Orstein-Uhlenbeckov mean reversion procesy**.

Z rovnice (10) môžeme vyvodiť ďalšiu charakteristickú vlastnosť pre Vašíčkov model, a to, že pripúšťa záporné úrokové miery. V minulosti sa táto skutočnosť javila ako jedna z hlavných nevýhod modelu. Naopak dnes, kedy záporné úrokové miery nie sú na trhu ničím výnimočným, môžeme túto vlastnosť považovať za jeho výhodu. Ďalšou nevýhodou je, že volatilita nezávisí od hodnoty r_t .

Ako ďalší príklad modelu môžeme uviesť **Cox-Ingersoll-Ross model** (skrátene CIR model), ktorý popisuje stochastická diferenciálna rovnica

$$dr_t = (\theta - \alpha r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t. \quad (11)$$

Z rovnice (11) môžeme vidieť, že model má vlastnosť mean reversion, no volatilita, na rozdiel od Vašíčkovho modelu, nie je konštantná, ale je úmerná odmocnine z r_t . Stochastickému procesu pre vývoj náhodnej veličiny, v ktorom je stochastický člen násobený odmocninou danej veličiny, hovoríme aj **Basselov odmocninový proces**. V [13] autor vysvetľuje, že v CIR modeli je pri malých hodnotách úrokových mier r_t volatilita malá a ak by r_t dosiahla nulovú hodnotu, volatilita by mala tiež nulovú hodnotu. Ďalší vývoj r_t je potom deterministický a je určený driftom, ktorý je pre $r_t = 0$ kladný. To znamená, že úroková miera znovu nadobudne kladnú hodnotu. Navyše, dá sa ukázať, že ak pre koeficienty CIR modelu platí nerovnosť $2\theta \geq \sigma^2$, dosiahnutie hodnoty $r_t = 0$ má nulovú pravdepodobnosť. V prípade CIR modelu teda nie je možné, aby r_t nadobúdalo záporné hodnoty.

Ďalším príkladom je **Black-Karasinski model**, ktorý na zabezpečenie kladných hod-

nôť úrokových mier využíva exponenciálne funkcie. Predpokladajme, že proces X_t sa riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dX_t = \sigma_t dW_t + (\theta_t - \alpha_t X_t) dt,$$

kde θ_t , α_t , σ_t sú deterministické funkcie času. Okamžitá úroková miera r_t je definovaná ako

$$r_t = \exp(X_t).$$

Kvôli jednoduchosti modelu a prípustnosti záporných hodnôt úrokových mier budeme v našej práci okamžitú úrokovú mieru modelovať pomocou Vašíčkovho modelu.

3.2 Odvodenie časovej štruktúry úrokových mier

Odvodenie časovej štruktúry úrokových mier v tejto podkapitole sleduje výpočty v knihe [8] a práci [11]. Časová štruktúra úrokových mier predstavuje závislosť úrokovej miery od maturity dlhopisu. Označme symbolom T_0 dnešný dátum a T čas vypršania dlhopisu. Symbolom $R(t, T)$ označme úrokovú mieru s maturitou T v čase t . Potom cenu bezkupónového dlhopisu P s nominálnou hodnotou F vieme pri spojitom úročení vypočítať ako

$$P = F e^{-R(T_0, T)(T - T_0)}.$$

V prípade diskontného dlhopisu (bezkupónový dlhopis s nominálnou hodnotou $F = 1$) potom platí vzťah

$$P(T_0, T) = e^{-R(T_0, T)(T - T_0)},$$

z ktorého môžeme vyjadriť úrokovú mieru $R(T_0, T)$:

$$R(T_0, T) = -\frac{1}{T - T_0} \ln P(T_0, T). \quad (12)$$

Pojem peňažný dlhopis B_t reprezentuje 1 euro úročené spojitým úrokom r . V prípade, že úroková miera r je konštantná, pre hodnotu peňažného dlhopisu platí $B_t = e^{rt}$. My

uvažujeme, že úroková miera nie je konštantná a v čase t má hodnotu r_t . Zmenu hodnoty peňažného dlhopisu môžeme potom vyjadriť ako

$$dB_t = r_t B_t dt. \quad (13)$$

Riešením rovnice (13) je

$$B_t = \exp \left(\int_0^t r_s ds \right). \quad (14)$$

Diskontný dlhopis má v čase splatnosti T hodnotu 1. Pre jeho cenu v čase $t < T$ potom platí vzťah

$$P(t, T) = E_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \right]. \quad (15)$$

Predpokladáme, že proces okamžitej úrokovej miery r_t sa riadi Vašíčkovým modelom, resp. rovnicou (10). Pomocou Itôvej lemy sa dá ukázať, že riešenie rovnice (10) pri počiatkovej hodnote okamžitej úrokovej miery r_0 má tvar

$$r_t = \frac{\theta}{\alpha} + e^{-\alpha t} \left(r_0 - \frac{\theta}{\alpha} \right) + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s. \quad (16)$$

Ak označíme

$$\int_0^t e^{\alpha s} dW_s = Z \sim N \left(0, \int_0^t e^{2\alpha s} ds \right) = N \left(0, \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha} \right),$$

môžeme rovnicu (16) prepísať ako

$$r_t = \frac{\theta}{\alpha} + e^{-\alpha t} \left(r_0 - \frac{\theta}{\alpha} \right) + \sigma e^{-\alpha t} Z. \quad (17)$$

Potom pre rozdelenie r_t platí:

$$r_t \sim N \left(\frac{\theta}{\alpha} + e^{-\alpha t} \left(r_0 - \frac{\theta}{\alpha} \right), \frac{\sigma^2}{2\alpha} (-e^{-2\alpha t}) \right).$$

Spojením rovnice (12) a rovnice (15) dostávame vzťah pre $R(t, T)$, kde r_t štartuje v bode x :

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln E_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) | r_t = x \right] \quad (18)$$

Proces r_t je Markovovský, teda nezávisí od minulosti, iba od súčasného stavu. Preto, ak proces šartuje v r_t , časový interval od t do s je ekvivalentný k intervalu od 0 do $s - t$. Pre r_s potom platí:

$$r_s = \frac{\theta}{\alpha} + e^{-\alpha(s-t)} \left(x - \frac{\theta}{\alpha} \right) + \sigma e^{-\alpha(s-t)} \int_0^{s-t} e^{\alpha u} dW_u. \quad (19)$$

Po zintegrování rovnice (19) dostávame:

$$\begin{aligned} \int_t^T r_s ds &= \frac{\theta}{\alpha}(T-t) + \left(x - \frac{\theta}{\alpha} \right) \int_t^T e^{-\alpha(s-t)} ds + \int_t^T \left(\sigma e^{-\alpha(s-t)} \int_0^{s-t} e^{\alpha u} dW_u \right) ds \\ &= \frac{\theta}{\alpha}(T-t) + \frac{1}{\alpha} \left(x - \frac{\theta}{\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha(T-t)}) + \int_t^T \left(\sigma e^{-\alpha(s-t)} \int_0^{s-t} e^{\alpha u} dW_u \right) ds \end{aligned} \quad (20)$$

Najskôr vypočítajme integrál

$$\int_t^T \left(\sigma e^{-\alpha(s-t)} \int_0^{s-t} e^{\alpha u} dW_u \right) ds.$$

Keďže pre integrál platí $t \leq s \leq T$ a $0 \leq u \leq s - t$, dostávame $t + u \leq s \leq T$. Potom

$$\begin{aligned} \int_t^T \left(\sigma e^{-\alpha(s-t)} \int_0^{s-t} e^{\alpha u} dW_u \right) ds &= \int_0^{T-t} \left(\int_{t+u}^T \sigma e^{-\alpha(s-t)} ds \right) e^{\alpha u} dW_u \\ &= \int_0^{T-t} \left(\frac{\sigma}{\alpha} (e^{-\alpha u} - e^{-\alpha(T-t)}) e^{\alpha u} \right) dW_u \\ &= \int_0^{T-t} \frac{\sigma}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(T-t-u)}) dW_u. \end{aligned} \quad (21)$$

Integrál (21) predstavuje normálne rozdelenú náhodnú veličinu. Pre jeho disperziu platí:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\int_0^{T-t} \frac{\sigma}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(T-t-u)}) dW_u \right] &= \int_0^{T-t} \frac{\sigma^2}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha(T-t-u)})^2 du \\ &= \int_0^{T-t} \frac{\sigma^2}{\alpha^2} (1 - 2e^{-\alpha(T-t-u)} + e^{-2\alpha(T-t-u)}) du \\ &= \frac{\sigma^2}{\alpha^2} (T-t) - \frac{2\sigma^2}{\alpha^3} (1 - e^{-\alpha(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^3} (1 - e^{-2\alpha(T-t)}) \\ &= \hat{\sigma}^2(t, T). \end{aligned} \quad (22)$$

Integrál (20) potom môžeme zapísať ako

$$\int_t^T r_s ds = \frac{\theta}{\alpha}(T-t) + \frac{1}{\alpha} \left(x - \frac{\theta}{\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha(T-t)}) + Z, \quad (23)$$

kde $Z \sim N(0, \hat{\sigma}^2(t, T))$. Dosadením (23) do rovnice (18) dostávame

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{1}{T-t} \ln E_Q \left[\exp \left(-\int_t^T r_s ds \right) | r_t = x \right] \\ &= -\frac{1}{T-t} \ln E_Q \left[\exp \left(-\left(\frac{\theta}{\alpha}(T-t) + \frac{1}{\alpha} \left(x - \frac{\theta}{\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha(T-t)}) + Z \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{T-t} \left(\frac{\theta}{\alpha}(T-t) + \frac{1}{\alpha} \left(x - \frac{\theta}{\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha(T-t)}) - \ln E_Q[\exp(-Z)] \right) \\ &= \frac{1}{T-t} \left(\frac{\theta}{\alpha}(T-t) + \frac{1}{\alpha} \left(x - \frac{\theta}{\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha(T-t)}) \right) \\ &\quad - \frac{1}{T-t} \ln E_Q \left[\exp \left(-Z - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2(t, T) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2(t, T) \right) \right] \\ &= \frac{\theta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(T-t)} \left(x - \frac{\theta}{\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha(T-t)}) - \frac{1}{2(T-t)} \hat{\sigma}^2(t, T). \end{aligned} \quad (24)$$

Pre časovú štruktúru úrokových mier $R(t, T)$, ktorej proces začína v r_t teda platí:

$$\begin{aligned} R(t, T) &= \frac{\theta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(T-t)} \left(r_t - \frac{\theta}{\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha(T-t)}) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} + \frac{\sigma^2}{\alpha^3(T-t)} (1 - e^{-\alpha(T-t)}) \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{4\alpha^3(T-t)} (1 - e^{-2\alpha(T-t)}) \end{aligned} \quad (25)$$

3.3 Kalibrácia Vašíčkovho modelu

Cieľom tejto podkapitoly je odhadnúť vstupné parametre do Vašíčkovho modelu, teda aj do rovnice (25) tak, aby model čo najlepšie popisoval skutočný priebeh úrokovej miery. Existuje viacero spôsobov kalibrácie, my sme sa rozhodli pre metódu, ktorá je založená na **minimalizácii rozdielu medzi reálnymi výnosovými krivkami a teoreticky určenými výnosovými krivkami**. Táto metóda je popísaná napríklad v článku [5] alebo v práci [14].

Modely úrokových mier možno formulovať buď pri rizikovo neutrálnej alebo pri reálnej pravdepodobnostnej miere. V súvislosti s prácou na reálnych dátach sa používa reálna pravdepodobnostná miera P . Pri oceňovaní finančných derivátov, aby sme sa vyhli možnosti arbitráže, sa používa rizikovo neutrálna úroková miera Q . Keďže trhové dáta sú

zaznamenávané v „reálnom svete“ a modely úrokových mier sú odvodzované v „rizikovo neutrálnom svete“, skôr ako prejdeme ku kalibrácii, je potrebné aspoň v krátkosti vysvetliť problém **zmeny miery**. Naším cieľom je prepísať stochastický proces pri pravdepodobnostnej miere P na stochastický proces pri pravdepodobnostnej miere Q . To zabezpečíme pomocou obrátenej **Girsanovovej vety**, podľa ktorej platí, že ak miery P a Q sú ekvivalentné a $\tilde{W}_t$ je Brownov pohyb pri pravdepodobnostnej miere P , potom existuje proces λ_t taký, že

$$W_t = \tilde{W}_t + \int_0^t \lambda_s ds$$

je Brownov pohyb pri pravdepodobnostnej miere Q . Celé znenie Girsanovovej vety a podrobnejšie informácie o zmene miery nájde čitateľ v [8].

V praxi sa najčastejšie stretneme s prípadom $\lambda_t = \lambda = \text{const}$. To platí aj v prípade Vašíčkovho modelu. Potom

$$\tilde{W}_t = W_t - \lambda t. \quad (26)$$

Ak vzťah (26) zapíšeme v diferenciálnom tvare

$$d\tilde{W}_t = dW_t - \lambda dt,$$

stochastický proces vieme prepisovať z jednej miery do druhej.

Predpokladajme, že okamžitá úroková miera sa pri reálnej miere P riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr_t = (\tilde{\theta} - \tilde{\alpha}r_t)dt + \tilde{\sigma}d\tilde{W}_t. \quad (27)$$

Po prechode z reálnej miery P do rizikovo neutrálnej miery Q dostáva rovnica (27) podobu

$$dr_t = (\tilde{\theta} - \lambda\tilde{\sigma} - \tilde{\alpha}r_t)dt + \tilde{\sigma}dW_t. \quad (28)$$

Okrem parametrov $\tilde{\theta}$, $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\sigma}$ budeme odhadovať aj parameter λ , ktorý nazývame trhovú cenu rizika. Definujme rizikovo neutrálne parametre $a = \tilde{\theta} - \lambda\tilde{\sigma}$, $b = -\tilde{\alpha}$, $\sigma = \tilde{\sigma}$. Rovnicu (28) potom môžeme zapísať v tvare

$$dr_t = (a + br_t)dt + \sigma dW_t. \quad (29)$$

Naším cieľom je odhadnúť parametre a , b , σ pomocou metódy minimalizujúcej vzdialenosti pozorovaných úrokových mier a úrokových mier vypočítaných pomocou Vašíčkovho modelu. Označme symbolom R_{ij} úrokovú mieru s maturitou τ_j pozorovanú v i -ty deň a $R(\tau_j, r_i)$ úrokovú mieru s maturitou τ_j vypočítanú pomocou rovnice (25), ktorej proces začína v r_i , čo je okamžitá úroková miera prislúchajúca i -temu dňu. Minimalizovať budeme účelovú funkciu

$$F = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} (R(\tau_j, r_i) - R_{ij})^2, \quad (30)$$

kde n je počet dní, m je počet maturít pozorovaných každý deň a w_{ij} je váha prislúchajúca konkrétnemu rozdielu medzi teoretickou a pozorovanou úrokovou mierou so splatnosťou τ_j v i -ty deň. Rovnako ako v [5] budeme za váhy dosadzovať $w_{ij} = \tau_j^2$.

Okamžitá úroková miera r_t , ktorá predstavuje začiatok časovej štruktúry úrokových mier, je teoretická hodnota, ktorá nie je pozorovateľná na trhu. V praxi sa dá aproximovať úrokovými mierami s krátkou splatnosťou, napríklad cez overnight sadzby. Tie však môžu byť ovplyvnené špekuláciami na trhu, preto budeme okamžitú úrokovú mieru považovať za neznámu premennú a budeme ju odhadovať spolu s ostatnými parametrami modelu.

V článku [5] je ukázané, že logaritmus ceny dlhopisu vo Vašíčkovom modeli sa dá zapísať ako lineárna funkcia parametrov a a σ^2 a okamžitej úrokovej miery r_i :

$$\ln P(\tau_j, r_i) = c_0(\tau_j)r_i + c_1(\tau_j, r_i)a + c_2(\tau_j)\sigma^2,$$

kde

$$c_0(\tau_j) = \frac{1 - e^{b\tau_j}}{b}, \quad c_1(\tau_j, r_i) = \frac{1}{b} \left[\frac{1 - e^{b\tau_j}}{b} + r_i \right], \quad c_2(\tau_j) = \frac{1}{2b^2} \left[\frac{1 - e^{b\tau_j}}{b} + \tau_j + \frac{(1 - e^{b\tau_j})^2}{2b} \right].$$

Potom účelová funkcia (30) je kvadratická v a , σ^2 a r_i :

$$F = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} (R(\tau_j, r_i) - R_{ij})^2 = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (\ln P(\tau_j, r_i) + \tau_j R_{ij})^2. \quad (31)$$

Pre daný interval hodnôt b vieme optimálne hodnoty parametrov získať z podmienok prvého rádu, ktoré formujú $n + 2$ lineárnych rovníc:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_1^2 & \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_1 c_2 \\ \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_1 c_2 & \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_2^2 \end{bmatrix}, \\ B = C^T &= \begin{bmatrix} \sum_j \frac{w_{1j}}{\tau_j^2} c_1 c_0 & \sum_j \frac{w_{2j}}{\tau_j^2} c_1 c_0 & \cdots & \sum_j \frac{w_{nj}}{\tau_j^2} c_1 c_0 \\ \sum_j \frac{w_{1j}}{\tau_j^2} c_2 c_0 & \sum_j \frac{w_{2j}}{\tau_j^2} c_2 c_0 & \cdots & \sum_j \frac{w_{nj}}{\tau_j^2} c_2 c_0 \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} \sum_j \frac{w_{1j}}{\tau_j^2} c_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_j \frac{w_{2j}}{\tau_j^2} c_0^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_j \frac{w_{nj}}{\tau_j^2} c_0^2 \end{bmatrix}, \\ x^T &= [a, \sigma^2], \\ y^T &= [r_1, r_2, \dots, r_n], \\ u^T &= \left[-\sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j} R_{ij} c_1, \quad -\sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j} R_{ij} c_2 \right], \\ v^T &= \left[-\sum_j \frac{w_{1j}}{\tau_j} R_{1j} c_0, \quad -\sum_j \frac{w_{2j}}{\tau_j} R_{2j} c_0, \quad \dots, \quad -\sum_j \frac{w_{nj}}{\tau_j} R_{nj} c_0 \right]. \end{aligned}$$

Takto nájdeme optimálne hodnoty parametrov a a σ a vektor $r_1, r_2, \dots, r_n$ pre každú z daných hodnôt b . Následne jednorozmernou minimalizáciou nájdeme optimálnu hodnotu parametra b .

Ako pozorované hodnoty úrokových mier sme zvolili výnosy do splatnosti vybraných slovenských vládnych dlhopisov, konkrétne mesačné priemery výnosov dlhopisov so splatnosťou 2, 5 a 10 rokov za obdobie od januára 2003 do decembra 2017, zverejnené na stránke Národnej banky Slovenska [10]. Výsledky kalibrácie sme získali pomocou vlastných kódov programovaných v softvéri Matlab. Po vložení vstupných dát dostávame odhadnuté parametre:

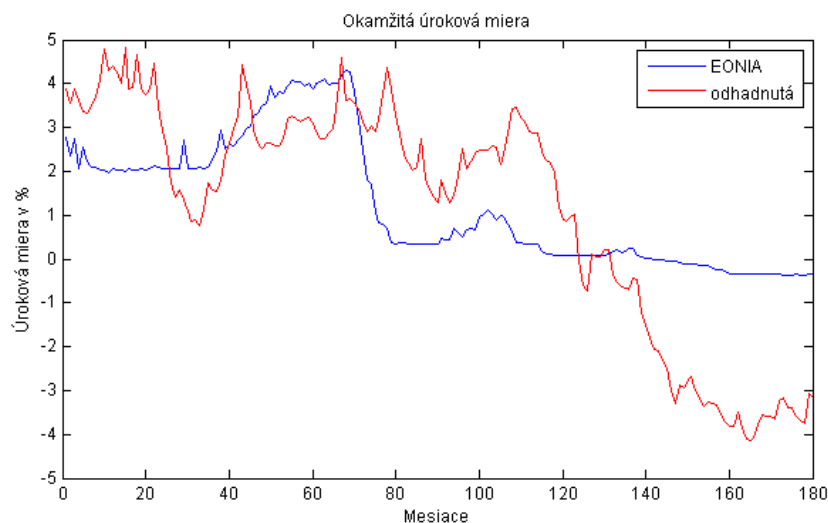
$$a = 0,0095$$

$$b = -0,1118$$

$$\sigma = 0,0263$$

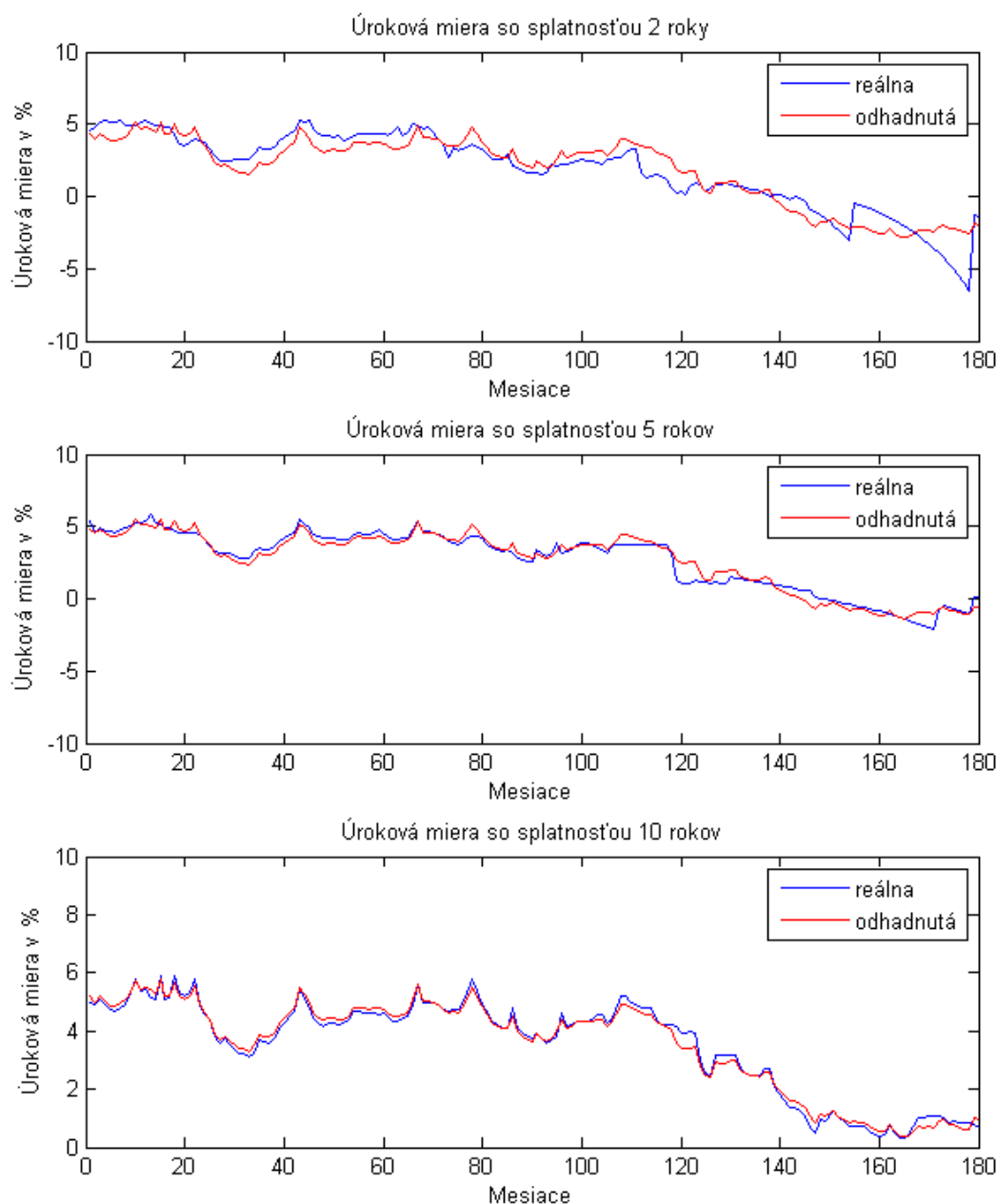
Po transformácii na parametre z pôvodnej rovnice pre r_t pri rizikovo neutrálnej miere (10) dostávame $\theta = a$, $\alpha = -b$. Dosadením odhadnutých parametrov a začiatočnej hodnoty okamžitej úrokovej miery r_0 do rovnice (16) vieme generovať krivky okamžitých úrokových mier a následne pomocou rovnice (25) celé časové štruktúry úrokových mier.

Na Obrázku 3 je zobrazené porovnanie aproximácií okamžitej úrokovej miery. Modrá krivka zobrazuje mesačné priemery overnight sadzieb EONIA, červená krivka zobrazuje hodnoty okamžitej úrokovej miery odhadnuté z výnosov do splatnosti vybraných slovenských vládnych dlhopisov. Z grafu vidíme značné odchýlky medzi priebehmi kriviek, čo nám potvrdzuje, že na modelovanie časovej štruktúry úrokových mier naozaj nie je vhodné použiť ako okamžitú úrokovú mieru sadzbu EONIA, ale je potrebné ju odhadnúť zo vstupných dát.



Obr. 3: Porovnanie overnight sadzby EONIA a okamžitej úrokovej miery odhadnutej z výnosov do splatnosti slovenských vládnych dlhopisov za obdobie január 2003 - december 2017. Zdroj dát: [3]

Na Obrázku 4 sú zobrazené grafy s porovnaním reálnych výnosov daných vládnych dlhopisov a výnosových kriviek, modelovaných pomocou odhadnutých parametrov.



Obr. 4: Porovnanie krivky výnosov do splatnosti slovenských vládnych dlhopisov a odhadnutých výnosových kriviek za obdobie január 2003 - december 2017. Zdroj dát: [10]

4 Ocenenie garancie

Ako bolo uvedené v kapitole 1.2, zo zákona [16] vyplýva pre DSS povinnosť doplniť majetok do dlhopisového garantovaného fondu v prípade, ak počas sledovaného 10-ročného obdobia poklesne hodnota majetku vo fonde. V tejto kapitole vytvoríme svoj dlhopisový fond a počas zvoleného obdobia budeme sledovať vývoj jeho hodnoty. V prípade poklesu hodnoty majetku zaznamenáme čiastku, ktorú DSS garantuje doplatiť do fondu a na záver zostavíme formulkou na vyčíslenie celkovej hodnoty doplatku, ktorý by vznikol za nami zvolené obdobie.

4.1 Opis modelu

4.1.1 Začiatkové predpoklady

Cieľom našej práce je vyčíslieť hodnotu doplatku, ktorý DSS garantuje doplniť do dlhopisového garantovaného fondu v prípade poklesu hodnoty majetku vo fonde, resp. v prípade poklesu aktuálnej hodnoty dôchodkovej jednotky.

Dôležité je uvedomiť si, že viac než počet sporiteľov, či prichádzajúce a odchádzajúce platby, ovplyvňuje hodnotu dôchodkovej jednotky vývoj úrokovej miery, ktorej sme sa podrobne venovali v kapitole 3 a zloženie dôchodkového fondu. Prvým predpokladom nášho modelu preto bude zanedbanie prichádzajúcich platieb (príspevkov sporiteľov) a odchádzajúcich platieb (vyplácaných dôchodkov, odplaty DSS). Ďalším dôvodom, prečo sa musíme uspokojiť s týmto predpokladom, sú chýbajúce dáta. Prichádzajúce príspevky by sme mohli hrubo odhadnúť z priemerného počtu sporiteľov a priemernej hrubej mzdy, no odhad odchádzajúcich platieb (aj po zohľadnení demografického vývoja obyvateľstva) je zložitejší, pretože čas odchodu do dôchodku a formu vyplácania dávok si sporiteľ volí sám. Počet dôchodkových jednotiek vo fonde bude preto celé pozorované obdobie konštantný.

Ďalším predpokladom je nulová odplata dôchodkovej správcovskej spoločnosti a nulové transakčné náklady.

Na začiatku simulácie je potrebné nastaviť začiatočnú hodnotu fondu, resp. hodnotu kapitálu, za ktorý vytvoríme dlhopisový fond. Začiatočný kapitál taktiež neovplyvňuje hodnotu dôchodkovej jednotky, ale je potrebné ho poznať kvôli vyčísleniu doplatku. Ďalším parametrom, ktorý volíme na začiatku simulácie, je cieľová durácia portfólia, ktorou

ohraničíme riziko zmeny hodnoty portfólia pri zmene úrokových sadzieb. Na záver ešte ostáva zvoliť dĺžku simulácie a počet simulácií.

4.1.2 Zloženie fondu

Portfólio, na ktorom budeme simulovať vývoj dôchodkového fondu, bude zložené výlučne z par bond dlhopisov, t. j. dlhopisov, ktorých cena je rovná nominálnej hodnote. Pre zvolenú cenu a maturitu dlhopisu podľa rovnice (2) ľahko dopočítame jeho kupón. Do portfólia budeme vyberať dlhopisy s maturitami 1, 3, 5 a 10 rokov. Naším cieľom je maximalizovať výnos fondu, preto budeme nakupovať dlhopisy s čo najvyššími kupónmi. Vo väčšine prípadov platí, že čím má dlhopis dlhšiu maturitu, tým je jeho kupón vyšší. Na druhej strane, dlhopisy s dlhou maturitou majú vyššiu duráciu, to znamená, že aj pri malej zmene úrokovej miery nastane veľká zmena v ich hodnote. Riziko veľkej zmeny hodnoty fondu ohraničíme cieľovou duráciou. Objemy investícií do dlhopisov s jednotlivými maturitami určíme pomocou úlohy lineárneho programovania, kde maximalizujeme výšku vyplatených kupónov pri podmienke zachovania cieľovej durácie:

$$\begin{aligned}
& \max \quad \sum_{j=1}^m w_j C_j \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^m w_j D_{FW_j} \leq D_{ciel} \\
& \quad \sum_{j=1}^m w_j = 1 \\
& \quad w_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, m,
\end{aligned} \tag{32}$$

kde C_j označuje kupón dlhopisu s j -tou maturitou, D_{FW_j} je durácia dlhopisu s j -tou maturitou, D_{ciel} je zvolená cieľová durácia a w_j je váha finančných prostriedkov, ktoré investujeme do dlhopisu s j -tou maturitou.

Nakúpené dlhopisy budeme oceňovať metódou reálnej hodnoty, no v portfóliu ich budeme držať do splatnosti.

4.1.3 Simulácia fungovania fondu

V prvom kroku, na začiatku simulácie, zvolíme začiatočný kapitál, začiatočnú AHDJ a do dôchodkového fondu nakúpime dlhopisy tak, ako bolo popísané v predchádzajúcej

časti v úlohe (32). Po uplynutí prvého roku a následne v každom ďalšom roku až do konca nami zvoleného pozorovaného obdobia zopakujeme nasledovné kroky:

- Spočítame vyplatené kupóny a nominálne hodnoty zmaturovaných dlhopisov.
- Posunieme sa na novú krivku časovej štruktúry úrokových mier.
- Vypočítame súčasnú hodnotu a duráciu všetkých aktuálne držaných dlhopisov a následne duráciu celého aktuálneho portfólia.
- Určíme aktuálnu hodnotu dôchodkovej jednotky a prípadný pokles dôchodkovej jednotky. Ak nastal pokles DJ, vyčíslime sumu, ktorú je potrebné doplatiť do fondu a doplatok pripočítame k hotovosti.
- Za hotovosť z vyplatených kupónov, zmaturovaných dlhopisov a prípadného doplatku dokúpime do portfólia nové dlhopisy. Objemy investícií do jednotlivých dlhopisov určíme pomocou úlohy lineárneho programovania, ktorá bude oproti začiatkovej úlohe (32) mierne pozmenená:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{j=1}^m w_j C_j \\
 \text{s.t.} \quad & W D_{portf} + (1 - W) \sum_{j=1}^m w_j D_{FW_j} \leq D_{ciel} \\
 & \sum_{j=1}^m w_j = 1 \\
 & w_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Symbol D_{portf} označuje duráciu aktuálne držaných dlhopisov, W je podiel aktuálne držaných dlhopisov a $(1 - W)$ je podiel nových nakúpených dlhopisov.

Ukazuje sa, že pre správne fungovanie algoritmu potrebujeme ešte zabezpečiť, aby sme v každom roku mali k dispozícii dostatok hotovosti na nákup nových dlhopisov. Prvým dôvodom je, že ak nemáme dostatok hotovosti, nemáme za čo nakúpiť dlhopisy, aby bola dodržaná cieľová durácia portfólia. Druhým dôvodom je, že pri niektorých scenároch úrokovej miery môže nastať situácia, že dlhopis „vypláca“ záporné kupóny. V rokoch, v ktorých nezmaturuje žiaden dlhopis a „vyplatia“ sa záporné kupóny, sa hotovosť môže

dostať do záporných hodnôt. Tieto problémy odstránime tak, že zabezpečíme, aby v portfóliu bol každý rok určitý objem dlhopisov, ktoré majú splatnosť o jeden rok. Určíme si, aký minimálny podiel celkového portfólia (aktuálne držané a nové nakúpené dlhopisy) majú tvoriť dlhopisy so splatnosťou o jeden rok, ozn. W_{1Y} :

$$W_{1Y} \leq \frac{w_1 cash + PV_{1Y}}{cash + PV_{portf}},$$

$cash$ označuje hotovosť, za ktorú nakupujeme nové dlhopisy, PV_{1Y} je súčasná hodnota aktuálne držaných dlhopisov so splatnosťou o jeden rok, PV_{portf} je súčasná hodnota všetkých aktuálne držaných dlhopisov a toto obmedzenie zahrnieme do podmienky na minimálnu váhu nakúpených dlhopisov so splatnosťou jeden rok w_1 v úlohe (33):

$$w_1 \geq \max \left(0, \frac{W_{1Y}(cash + PV_{portf}) - PV_{1Y}}{cash} \right)$$

V poslednom roku simulácie spočítame doplatky, ktoré vznikli v jednotlivých rokoch a vyčíslíme celkovú hodnotu doplatku za pozorované obdobie.

4.2 Hodnota doplácania

Pri zostavovaní formuly na ocenenie celkovej hodnoty garantovaného doplatku je kľúčové uvedomiť si, že doplatok do fondu má správanie derivátu, ktorý v prípade, že počas 10-ročného sledovaného obdobia poklesne AHDJ, má hodnotu dlžnej čiastky a v prípade, že AHDJ nepoklesne, má nulovú hodnotu. Našou úlohou je stanoviť súčasnú hodnotu takéhoto derivátu. Tu nám pomôže oceňovacia formulka odvodená v knihe [8] :

$$V_t = B_t E_Q(B_T^{-1} V_T | \mathcal{F}_t^W),$$

kde $B_t = \exp \left(\int_0^t r_u du \right)$ je peňažný dlhopis, V_t je hodnota derivátu v čase t , Q je rizikovo neutrálna miera a $\mathcal{F}_t^W$ je filtrácia generovaná Brownovým pohybom. Súčasná hodnota derivátu, teda hodnota v čase 0, bude potom:

$$V_0 = E_Q \left(\exp \left(- \int_0^T r_u du \right) V_T \right).$$

Označme symbolom $D(t)$ doplatok, ktorý vznikol v roku t a symbolom $H_D(t)$ súčasnú hodnotu tohto doplatku. Celková hodnota doplatku, ozn. H_D , je súčet doplatkov v jednotlivých rokoch počas pozorovaného obdobia dlhého S rokov:

$$H_D = \sum_{t=10}^S H_D(t) = \sum_{t=10}^S E_Q \left(\exp \left(- \int_0^t r_u du \right) D(t) \right). \quad (34)$$

Sumu v rovnici (34) počítame od $t = 10$, pretože prvé porovnanie AHDJ sa realizuje na konci 10-ročného sledovaného obdobia. K hodnote $H_D(t)$ sa dostaneme prostredníctvom Monte-Carlo simulácií, kde pre každú simuláciu vyčíslime konkrétny doplatok $D(t, i)$ a výslednú hodnotu $H_D(t)$ odhadneme ako priemer diskontovaných hodnôt $D(t, i)$ cez všetky simulácie i . Počet simulácií označíme PS . Súčasná hodnota celkového doplatku do fondu potom bude:

$$H_D = \frac{1}{PS} \sum_{t=10}^S \sum_{i=1}^{PS} \exp \left(- \int_0^t r_u^i du \right) D(t, i). \quad (35)$$

V praxi integrál v rovnici (35) diskretizujeme a hodnotu celkového doplatku do fondu vypočítame ako

$$H_D = \frac{1}{PS} \sum_{t=10}^S \sum_{i=1}^{PS} \exp \left(- \sum_0^t r_t^i \Delta t \right) D(t, i),$$

kde Δt je 1 rok a r_t^i je okamžitá úroková miera v roku t pre i -tu simuláciu.

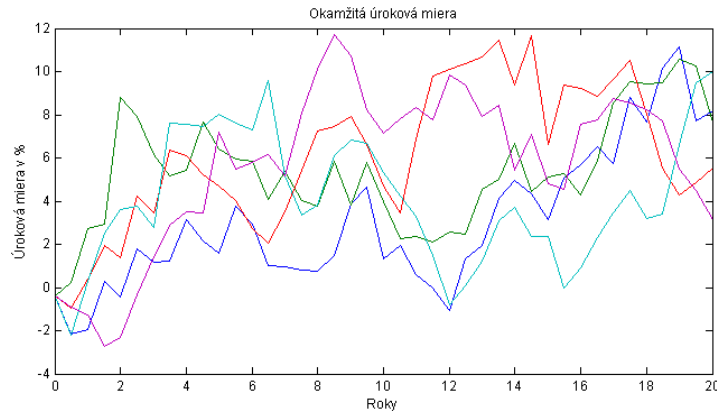
5 Výsledky simulácie

V tejto kapitole predstavíme výsledky modelu opísaného v kapitole 4, ktoré získame po zvolení konkrétnych vstupných parametrov pomocou výpočtov v programe Matlab. Okrem hodnoty doplatku, ktorý by bola DSS povinná doplniť do dôchodkového fondu z vlastných zdrojov, zobrazíme aj rôzne scenáre úrokových mier, či scenáre vývoja AHDJ.

V kapitole 3 sme nakalibrovali parametre do Vašíčkovho modelu. Na Obrázku 5 sú znázornené ukážky kriviek okamžitej úrokovej miery, ktoré sme generovali na základe rovnice (17), resp. v roku $t = 1$ pomocou (17), pričom za začiatočnú hodnotu okamžitej úrokovej miery sme zvolili $r_0 = -0,392\%$, čo je priemerná hodnota overnight sadzby EONIA za rok 2019 (zdroj: [3]) a v každom ďalšom roku pomocou rovnice

$$r_{t+\Delta t} = \frac{\theta}{\alpha} + e^{-\alpha\Delta t} \left(r_t - \frac{\theta}{\alpha} \right) + \sigma e^{-\alpha\Delta t} Z,$$

kde za Δt volíme 1 rok a $Z \sim N\left(0, \frac{e^{2\alpha\Delta t}-1}{2\alpha}\right)$.



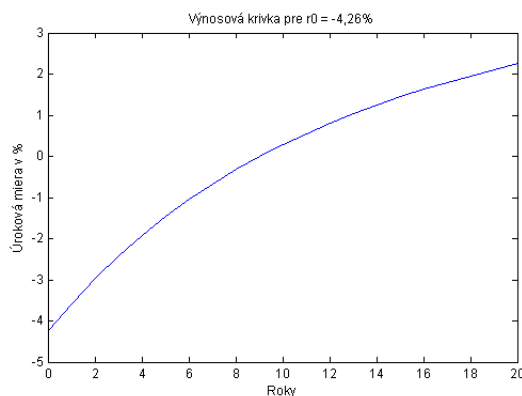
Obr. 5: Okamžité úrokové miery simulované pomocou Vašíčkovho modelu s parametrami $\theta = 0,0095$, $\alpha = 0,1118$, $\sigma = 0,0263$, $r_0 = -0,392\%$.

Časová štruktúra úrokových mier má vo väčšine prípadov rastúci priebeh, no nemusí to platiť vždy. Na Obrázku 6 sú zobrazené ukážky časovej štruktúry úrokových mier. Na prvom grafe zľava má výnosová krivka typický rastúci priebeh, na druhom grafe v posledných rokoch mierne klesá a na treťom grafe je krivka klesajúca. Takáto situácia nastáva najmä pri vysokých hodnotách okamžitej úrokovej miery. V praxi to spôsobuje,

že dlhopisy s kratšou splatnosťou majú vyššie kupóny ako dlhšie. Iným zaujímavým príkladom je situácia, ktorú sme načrtli v časti 4.1.3. Keď okamžitá úroková miera začne dosahovať príliš nízke hodnoty, kupón, ktorý vypočítame pre par bond bude záporný. Výnosová krivka, pri ktorej nastáva situácia, že dlhopisy so splatnosťou 1, 3 a 5 rokov majú záporné kupóny, je zobrazená na Obrázku 7.



Obr. 6: Ukážka tvarov časovej štruktúry úrokových mier.

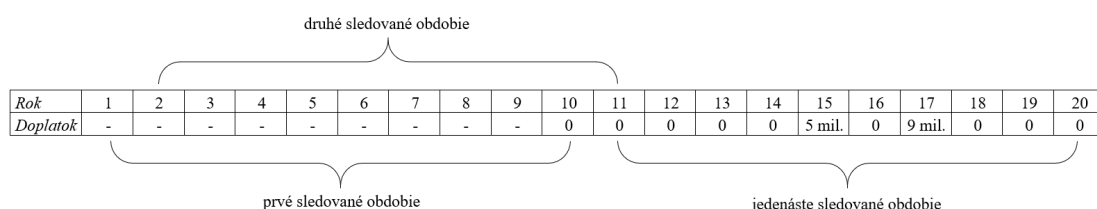


Obr. 7: Ukážka časovej štruktúry úrokových mier, pri ktorej sú kupóny dlhopisov záporné.

Záporné kupóny boli jedným z dôvodov, prečo sme pri budovaní úlohy lineárneho programovania (33) potrebovali pridať podmienku na minimálnu váhu w_1 nakupovaných dlhopisov s maturitou 1 rok. Praxou sa ukázalo, že ak budú dlhopisy so splatnosťou o jeden rok (t. j. nové nakúpené jednorôčné dlhopisy a aktuálne držané dlhopisy, ktorým do splatnosti ostáva 1 rok) tvoriť aspoň 10% z celkového portfólia, dodržíme cieľovú dĺžku a nenastanú problémy so zápornou hotovosťou. Preto volíme $W_{1Y} = 0,1$.

Na Slovensku v súčasnosti pôsobí päť dôchodkových správcovských spoločností, ktoré spolu v dôchodkových fondoch spravujú približne 9 324 mil. eur, z toho v dlhopisových garantovaných dôchodkových fondoch 6 730 mil. eur.⁵ Na jednu DSS teda pripadá priemerne 1 346 mil. eur, čo predstavuje náš začiatočný kapitál. Za cieľovú dĺžku fondu sme zvolili hodnotu 2,5 roka.

Dĺžka simulácie bude v našom prípade 20 rokov. Počas tohto obdobia sa stihne ukončiť 11 sledovaných období, t. j. bude sa realizovať 11 porovnávaní AHDJ. Sledované obdobia sú znázornené na Obrázku 8. Prvé sledované obdobie začína na začiatku roku 1 a končí na konci roku 10. Počet Monte-Carlo simulácií volíme 10 000.



Obr. 8: Znázornenie 10 ročných sledovaných období.

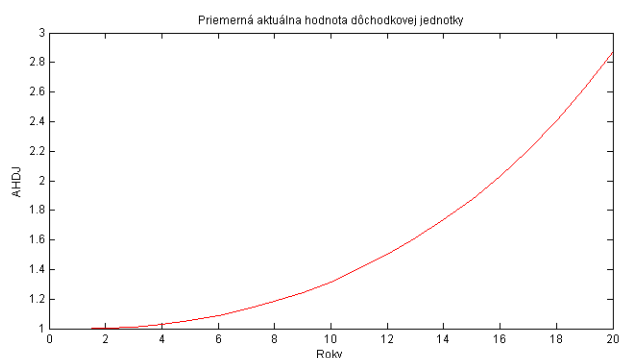
Po vložení vstupných parametrov do modelu dostávame celkovú hodnotu doplatku $H_D = 43$ mil. eur, čo predstavuje približne 3,2% zo začiatočného kapitálu. Prehľad výsledkov je zobrazený v Tabuľke 1.

Tabuľka 1: Výsledky simulácie

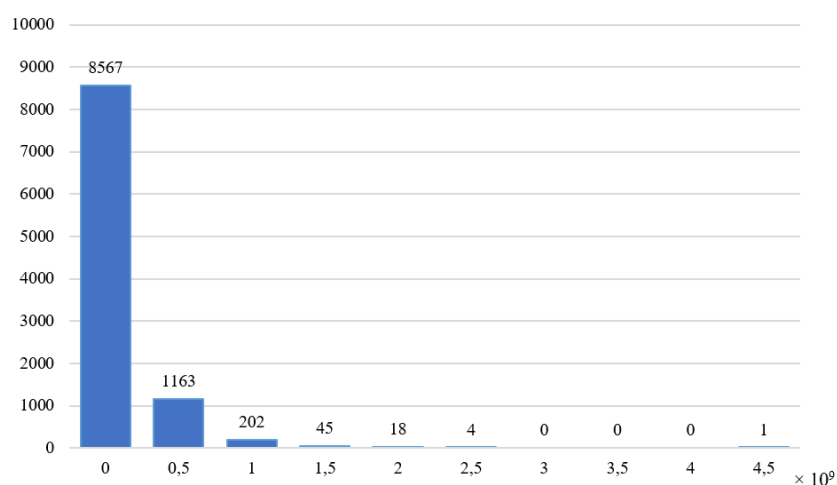
Začiatočný kapitál	1 346 000 000
Cieľová dĺžka	2,5
Dĺžka simulácie	20 rokov
Počet simulácií	10 000
Hodnota doplatku	42 966 642

⁵Údaje k 31.12.2019, zdroj [9]

Ak sa pozrieme na priemerný vývoj AHDJ (aritmerický priemer AHDJ v každom roku simulácie) zobrazený na Obrázku 8, vidíme rastúci trend. Priemerný majetok v dôchodkovom fonde na konci simulácie, po uplynutí 20 rokov, predstavuje až 4 235 mil. eur, čo je približne 3,5-násobok majetku na začiatku simulácie. Mohlo by sa zdať, že pri takomto raste fondu nebude potrebné doplácať z vlastných zdrojov, no toto sú len priemerné hodnoty. V skutočnosti sa dopĺcanie do fondu realizovalo v 1 433 simuláciách. Pokles v hodnote dôchodkovej jednotky nastal v 3 612 prípadoch, čo predstavuje 3,28% z celkového počtu sledovaných období (11×10000). Na Obrázku 10 je zobrazený histogram s počtami simulácií, v ktorých sa doplácalo do fondu. Prvý stĺpec vyjadruje počet simulácií, v ktorých nenastal pokles AHDJ, t. j. nemuselo sa doplácať, v druhom stĺpci je počet simulácií, v ktorých hodnota dopĺcania bola od 0 do 500 mil., atď.

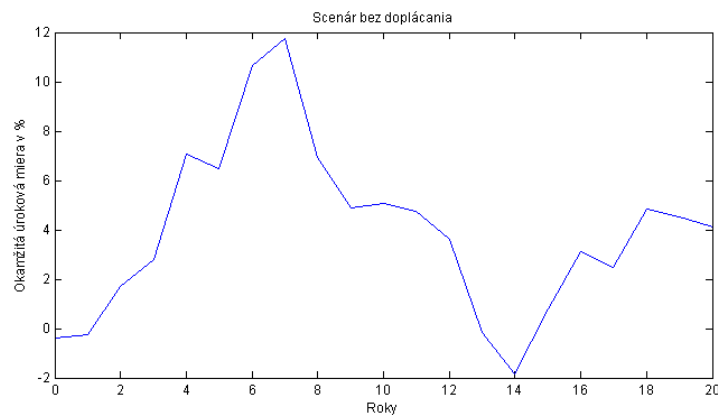


Obr. 9: Vývoj priemernej AHDJ.

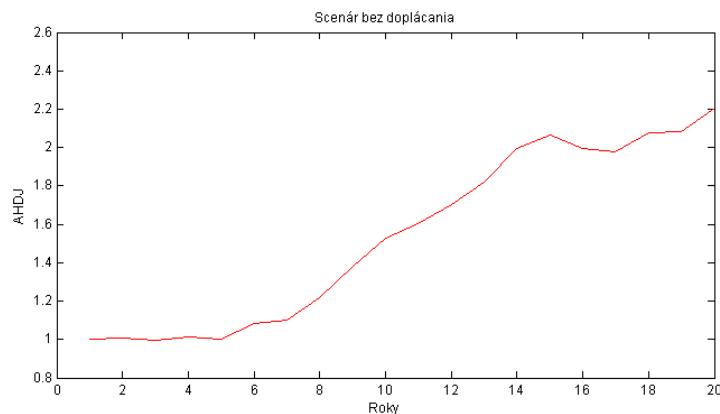


Obr. 10: Histogram hodnoty doplatkov za jednotlivé simulácie.

Pozrime sa na príklad scenára, v ktorom nenastalo doplácanie do fondu v žiadnom roku. Krivka okamžitej úrokovej miery pre tento scenár je zobrazená na Obrázku 11 a na Obrázku 12 je znázornený vývoj AHDJ. Z grafov môžeme pozorovať citlivosť AHDJ na zmenu úrokových mier. Pri poklese okamžitej úrokovej miery poklesne (vo väčšine prípadov) aj časová štruktúra úrokových mier, čo sa odrazí na náraste AHDJ. Túto závislosť sme načrtli v časti 2.3 pri popisovaní vlastností durácie.

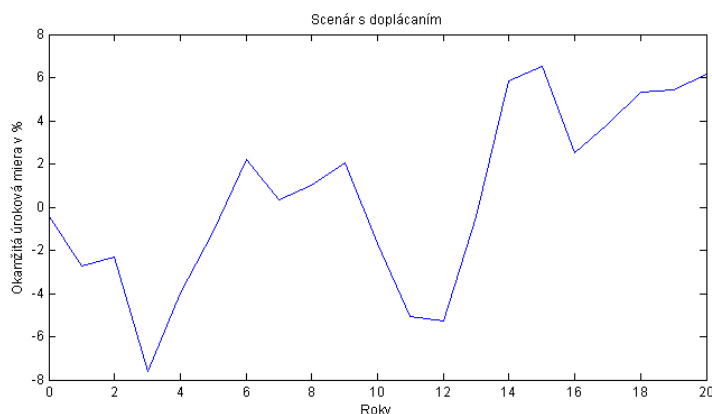


Obr. 11: Okamžitá úroková miera pre scenár bez doplácania.

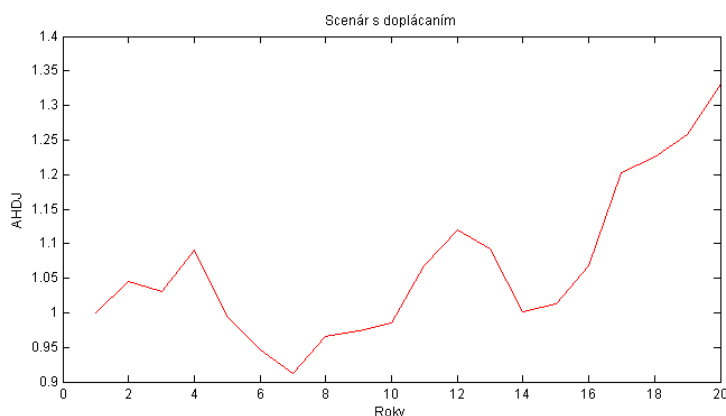


Obr. 12: Vývoj AHDJ pre scenár bez doplácania.

Ďalej sa pozrime príklad scenára, v ktorom počas niektorého sledovaného obdobia nastal pokles AHDJ a do fondu sa doplácala hotovosť z vlastných zdrojov. Na Obrázku 13 je zobrazená krivka okamžitej úrokovej miery pre tento scenár a na Obrázku 14 vývoj AHDJ. Všimnime si, že medzi dvanástym a štrnástym rokom došlo k prudkému rastu úrokových mier, čoho dôsledkom je výrazný pokles hodnoty dlhopisov. Do fondu bolo preto potrebné v štrnástom roku doplniť majetok vo výške 111 mil. eur (súčasná hodnota doplatku je v tomto prípade 142 mil. eur).



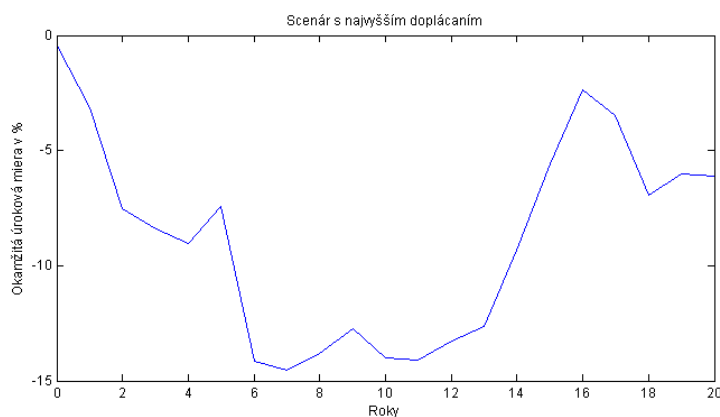
Obr. 13: Okamžitá úroková miera pre scenár s doplácáním.



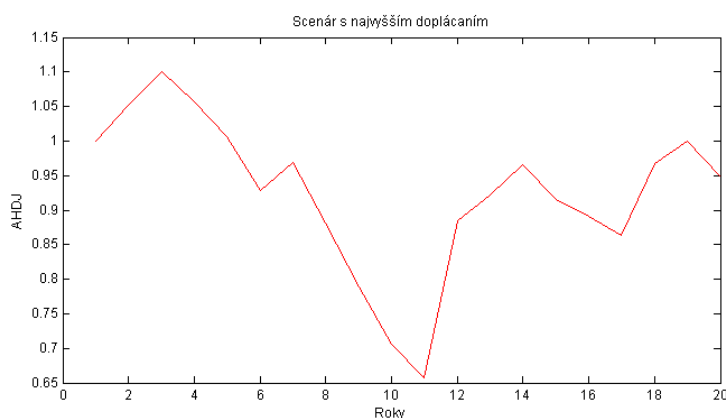
Obr. 14: Vývoj AHDJ pre scenár s doplácáním.

Z histogramu sme si mohli všimnúť, že pre jednu simuláciu vyšla hodnota doplatku ďaleko vyššia ako v ostatných simuláciách - z intervalu od 4 000 mil. do 4 500 mil. Pozrime sa, aké hodnoty by v tomto extrémnom prípade musela nadobúdať okamžitá úroková miera

a ako sa pre tento prípad vyvíjala AHDJ. Na Obrázku 15 je zobrazená krivka okamžitej úrokovej miery pre tento scenár a na Obrázku 16 vývoj AHDJ.



Obr. 15: Okamžitá úroková miera pre scenár s najvyšším doplácaním.



Obr. 16: Vývoj AHDJ pre scenár s najvyšším doplácaním.

Majetok vo fonde sme museli doplniť z vlastných zdrojov až sedemkrát (z možných 11 sledovaných období), výška doplatkov v jednotlivých rokoch je zobrazená v Tabuľke 2. Spolu by bolo potrebné doplniť do fondu majetok približne vo výške 1 200 mil. eur. Súčasná hodnota celkového doplatku bola v tomto prípade kvôli výrazne nízkym úrokovým mieram až 4 421 mil. eur.

Tabuľka 2: Výška doplatkov v scenári s najvyšším doplácaním.

<i>Rok</i>	<i>Doplatok</i>
10	425 028 338
11	194 847 049
12	195 957 272
13	103 415 006
14	107 021 454
15	47 310 785
16	127 014 305
17	0
18	0
19	0
20	0

Záver

V našej diplomovej práci sme sa zaoberali fungovaním dlhopisového garantovaného fondu. V zmysle zákona o SDS [16] je dôchodková správcovská spoločnosť povinná doplniť majetok do fondu z vlastných zdrojov v prípade, že hodnota dôchodkovej jednotky na konci sledovaného obdobia je nižšia ako na jeho začiatku. Hlavným cieľom práce bolo oceniť túto garanciu.

Na úvod sme stručne vysvetlili fungovanie súčasného dôchodkového systému na Slovensku. Vysvetlili sme terminológiu týkajúcu sa dlhopisových garantovaných fondov a uviedli základné obmedzenia v zákone. Majetok v dlhopisovom garantovanom fonde je z veľkej časti tvorený dlhopismi, preto sme v ďalšej časti opísali pojem dlhopis a vysvetlili, akým spôsobom sa dlhopisy oceňujú. Dôležitým ukazovateľom stavu portfólia je durácia, ktorú sme definovali v podkapitole 2.3. Riadením durácie sa dôchodkové správcovské spoločnosti zabezpečujú proti riziku veľkej zmeny hodnoty fondu pri zmene úrokových mier.

Tretia kapitola bola venovaná úrokovým mieram. Predstavili sme príklady jednofaktorových modelov pre modelovanie okamžitej úrokovej miery, pričom sme sa zamerali na Vašíčkov model, ktorý predpokladá, že proces okamžitej úrokovej miery sa riadi podľa stochastickej diferenciálnej rovnice (10). Uviedli sme rovnicu (17), pomocou ktorej vieme generovať hodnoty okamžitej úrokovej miery a vychádzajúc z knihy [8] sme pri rizikovo neutrálnej miere z okamžitej úrokovej miery odvodili časovú štruktúru úrokových mier. V časti 3.3 sme pomocou metódy založenej na minimalizácii rozdielu medzi reálnymi výnosovými krivkami a teoreticky určenými krivkami nakalibrovali vstupné rizikovo neutrálne parametre do Vašíčkovho modelu, teda do rovnice (17) a rovnice (25).

V kapitole 4 sme predstavili model, pomocou ktorého sme sa dopracovali k cene garancie, ktorá vyplýva pre garantovaný dlhopisový dôchodkový fond zo zákona [16]. K doplatku do fondu sme pristupovali ako k derivátu, ktorý v prípade, že počas sledovaného 10-ročného obdobia poklesne AHDJ, má hodnotu dlžnej čiastky a v prípade, že AHDJ nepoklesne, má nulovú hodnotu. Vytvorili sme dlhopisový fond a simulovali jeho fungovanie počas zvoleného obdobia. V každom roku sme za hotovosť z vyplatených kupónov a zmaturovaných dlhopisov nakúpili do portfólia nové dlhopisy tak, aby sme dodržali cieľovú duráciu. Pomocou vygenerovaných úrokových mier uvedených v kapitole 3 sme v každom roku vedeli vypočítať hodnotu majetku vo fonde, určiť AHDJ a vyčíslit po-

trebný doplatok. K celkovej hodnote doplácania sme sa dostali prostredníctvom strednej hodnoty doplatkov pre veľké množstvo simulácií.

V záverečnej kapitole sme ukázali výsledky modelu. Program sme spustili pre 10 000 simulácií, z toho v 1 433 simuláciách by bolo potrebné realizovať doplácanie majetku do fondu z vlastných zdrojov. Celkovú hodnotu garantovaného doplatku počas nami zvoleného 20-ročného obdobia sme vyčíslili na približne 43 mil. eur. Okrem celkovej hodnoty doplatku sme zobrazili aj príklady scenárov úrokových mier a scenáre vývoja AHDJ.

V posledných rokoch sa čoraz viac dostáva do povedomia evidentná potreba súkromného sporenia si na dôchodok v dôsledku negatívneho demografického vývoja. Väčšina majetku sporiteľov je spravovaná v dlhopisových garantovaných dôchodkových fondoch, ktoré sú vo veľkej miere ovplyvňované úrokovými mierami. Hlavným prínosom našej práce je poukázanie na prísne obmedzenia v dlhopisovom garantovanom fonde. V práci sa nám podarilo zostaviť model, ktorým možno oceniť záruku, že v prípade poklesu hodnoty majetku v dôchodkovom fonde DSS doplní majetok z vlastných zdrojov. Za zváženie stojí pozrieť sa na vhodnosť vstupných parametrov do Vašíčkovho modelu. Hoci sú parametre odhadované z reálnych dlhodobých úrokových sadzieb, niektoré scenáre úrokových mier veľmi nezodpovedajú realistickému vývoju hodnôt.

Téma garancie poskytuje priestor pre množstvo ďalšieho výskumu. Konkrétne v našej práci by sme mohli vylepšiť model o pridanie prichádzajúcich platieb, odchádzajúcich platieb a odplaty DSS. Ďalej by bolo vhodné vytvoriť dlhopisový fond, ktorý by nebol tvorený iba par bond dlhopismi, ale viac by sa podobal dlhopisovým garantovaným fondom, či už zložením majetku vo fonde alebo podielom dlhopisov, ktoré by boli oceňované metódou umorovanej hodnoty. Tiež by bolo zaujímavé otestovať portfólio, ktoré by obsahovalo dlhopisy s nižším ratingom (napr. korporátne dlhopisy).

Zoznam použitej literatúry

- [1] Allianz - Slovenská dôchodková správcovská spoločnosť, a. s.: Správy o hospodárení spoločnosti 2019, dostupné na internete (4.5.2020): <https://www.asdss.sk/14385>
- [2] Bearing: Treasury a finančné trhy, dostupné na internete (28.4.2020): <https://bearing.com/sk/e-learning/treasury-and-financial-markets/scripts>
- [3] EMMI: EONIA Rates, dostupné na internete (6.5.2020): <https://www.emmi-benchmarks.eu/euribor-eonia-org/eonia-rates.html>
- [4] Európska centrálna banka: Záporná úroková sadzba ECB, dostupné na internete (14.1.2020): <https://www.ecb.europa.eu/explainers/tell-me-more/html/why-negative-interest-rate.sk.html>
- [5] Halgašová, J., Stehlíková, B., Bučková, Z.: *Estimating the short rate from the term structures in the Vasicek model*, Tatra Mountains Mathematical Publications 61 (2014), pp. 87-104
- [6] Inštitút finančnej politiky: Sú dôchodky z druhého piliera prinízke?, dostupné na internete (14.1.2020): <https://www.mfsr.sk/sk/financie/institut-financnej-politiky/publikacie-ifp/komentare/1-su-dochodky-z-druheho-piliera-prinizke-januar-2015.html>
- [7] Ječmenová, A.: *Optimálne riadenie dlhopisového dôchodkového fondu z hladiska garancií a výkonnosti*, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2019
- [8] Melicherčík, I., Olašová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, Bratislava, 2005
- [9] Ministerstvo práce, sociálnych vecí a rodiny SR: Dôchodkový systém, dostupné na internete (3.5.2020): <https://www.employment.gov.sk/sk/socialne-poistenie-dochodkovy-system/dochodkovy-system/>
- [10] Národná banka Slovenska: Dlhodobé úrokové sadzby, dostupné na internete (26.3.2020): <https://www.nbs.sk/sk/statisticke-udaje/financne-trhy/urokove-sadzby/dlhodobe-urokove-sadzby>

- [11] Radič, P.: *Modely úrokových měr*, bakalárska práca, Univerzita Karlova v Prahe Matematicko-fyzikálna fakulta, Praha, 2012
- [12] Remiarová, K.: *Správa garantovaného fondu v dôchodkovom systéme na Slovensku*, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2017
- [13] Ševčovič, D., Stehlíková, B., Mikula, K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Nakladateľstvo STU, Bratislava, 2009
- [14] Urbánová Csajková, A.: *Calibration of term structure models*, dissertation thesis, FMFI UK, Bratislava, 2007
- [15] VÚB Generali dôchodková správcovská spoločnosť, a.s.: Výročné správy a správy o hospodárení, dostupné na internete (4.5.2020): https://www.vubgenerali.sk/onas/vyroczne-spravy/subory/VS_2019.pdf
- [16] Zákon č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov
- [17] Zákon č. 461/2003 Z. z. o sociálnom poistení v znení neskorších predpisov
- [18] Zákon č. 530/1990 Zb. Zákon o dlhopisoch
- [19] Zákon č. 650/2004 Z. z. o doplnkovom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov