

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ANALYTICKÉ A NUMERICKÉ METÓDY OCEŇOVANIA
SHOUT OPCÍÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**ANALYTICKÉ A NUMERICKÉ METÓDY OCEŇOVANIA
SHOUT OPCÍ**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Patrícia Pužárová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Analytické a numerické metódy oceňovania shout opcií
Analytical and numerical methods for pricing shout options

Anotácia: Práca sa bude zaoberať analytickými a numerickými metódami oceňovania shout opcií. Shout opcie sú derivátové kontrakty, ktoré v podstate pozostávajú z Americkej opcie, ktorá v okamihu predčasnej expirácie má výplatný diagram rovnajúci sa Európskej opcii na ostávajúcom časovom horizonte. V práci sa zameriame na návrh efektívneho numerického algoritmu na výpočet cien takýchto opcií založeného na riešení príslušnej parciálnej diferenciálnej Black-Scholesovej rovnice s prekážkou.

Vedúci: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Dátum zadania: 08.01.2019

Dátum schválenia: 08.01.2019
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie

Touto cestou sa chcem pod'akovať svojmu vedúcemu diplomovej práce prof. RNDr. Danieľovi Ševčovičovi, DrSc. za pomoc, odborné rady a nápady, vďaka ktorým som napredovala pri písaní tejto práce. Taktiež za jeho trpezlivosť a milý, tolerantný prístup.

Moje pod'akovanie taktiež patrí mojej rodine a najbližším priateľom, ktorí so mnou prežili celé doterajšie štúdium.

Abstrakt

PUŽÁROVÁ, Patrícia: Analytické a numerické metódy oceňovania shout opcií, Diplomová práca, Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: prof. RNDr., Daniel Ševčovič, DrSc., Bratislava, 2020, 51 s.

Nie je to málo rokov odkedy ľudí začalo lákať zhodnocovanie svojho majetku. Začali investovať najprv do komodít, neskôr do akcií, či indexových fondov prostredníctvom rôznych typov finančných derivátov. Čoraz viacej ľudí sa zaujíma o to ako zarobiť z investovania vlastných financií, čo vedie k novším a novším špekuláciám ako si poistiť budúci zisk. V tejto diplomovej práci sa budeme zaoberať jedným konkrétnym finančným nástrojom, ktorým sú tzv. shout opcie. Budeme sa venovať vybudovaniu teoretického základu pre oceňovania opcií od tých najjednoduchších typov, cez zložitejšie až sa dopracujeme k samotnému oceňovaniu shout opcií. Následne sa pokúsime o modifikáciu tohto derivátu, ktorý budeme nazývať modifikovaná shout opcia. V prvej kapitole čitateľovi poskytneme základný prehľad o oceňovaní opcií. Obsahom druhej kapitoly bude definovanie konceptu shout opcie a jej numerického oceňovania. Tretia kapitola tejto diplomovej práce sa bude zaoberať práve modifikáciou danej shout opcie. Na záver sa budeme v štvrtej kapitole venovať porovnaniu získaných výsledkov pre ceny spomenutých typov derivátov.

Kľúčové slová: shout opcie, numerické oceňovanie, Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica, hranica predčasného uplatnenia

Abstract

PUŽÁROVÁ, Patrícia: Analytical and numerical methods for pricing shout options, Diploma thesis, Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; supervisor: prof. RNDr., Daniel Ševčovič, DrSc., Bratislava, 2020, 51 p.

It is more than a few years since people began to be attracted by the appreciation of their property. They began to invest - first in commodities, later in stocks or index funds via various types of financial derivatives. More and more people are interested in how to make money from investing their own finances, which leads to aumption of new speculation on how to ensure future profits. In this diploma thesis we deal with one specific financial instrument, which are so-called shout options. We focus on building a theoretical basis for the valuation of options from the simplest types, through the more complex to the final valuation of shout options. Subsequently, we try to modify this derivative, which we call the modified shout option. In the first chapter, we provide the reader with a basic overview of option valuation. The content of the second chapter is the definition of the concept of shout option and its numerical valuation. The third chapter of this diploma thesis deals with the modification of the shout option. Finally, in the fourth chapter we compare the obtained results for the prices of the mentioned types of derivatives.

Keywords: shout options, numerical solution, Black-Scholes partial differential equation, free-boundary problems

Obsah

Úvod	8
1 Úvod do sveta opcií	10
1.1 Oceňovanie európskej call opcie	11
1.1.1 Explicitné riešenie	12
1.1.2 Numerické riešenie	13
1.2 Oceňovanie americkej call opcie	15
1.2.1 Okamžitý payoff	16
1.2.2 Hranica predčasného uplatnenia opcie	17
1.2.3 Formulácia úlohy	19
1.2.4 Numerické riešenie	20
2 Shout call opcie a ich oceňovanie	24
2.1 Okamžitý payoff	25
2.2 Formulácia úlohy	26
2.3 Numerické riešenie	28
3 Modifikované shout call opcie a ich oceňovanie	29
3.1 Okamžitý payoff	30
3.2 Formulácia úlohy	31
3.3 Numerické riešenie	34
4 Porovnanie opcií	36
4.1 Krivky cien opcií	36
4.1.1 Shout call opcie	37
4.1.2 Modifikované shout call opcie	38
4.2 Hranica predčasného uplatnenia opcie	39
4.2.1 Americké call opcie	40
4.2.2 Modifikované shout call opcie	40
4.2.3 Shout call opcie	45

Záver	50
Zoznam použitej literatúry	51

Úvod

Ľudí odjakživa lákali peniaze resp. výška hodnoty ich majetku a zaujímali sa o témy týkajúce sa obchodovania, finančníctva či inej formy manipulácie s peniazmi resp. majetkom. Z toho dôvodu začali už v dávnej minulosti vznikať rôzne druhy tzv. finančných derivátov t.j. kontraktov, odvodených resp. závislých od hodnoty podkladových aktív. V minulosti predstavovali podkladové aktíva hlavne komodity (hotové výrobky), v dnešnej dobe sa zvyknú používať ako podkladové aktíva skôr akcie, akciové indexy, dlhopisy, nehnuteľnosti a iné.

Čoraz viac ľudí sa zaujíma o finančné trhy a možný zárobok z investovania peňazí, čo vedie k novším a novším špekuláciám ako si poistiť možný zisk. Hodnoty podkladových aktív sú nestále a vedia sa poriadne rozkolísať, čo zakolíše aj s možným ziskom resp. stratou majiteľa derivátu. Rozumný investor preto prirodzene vyhľadáva nejaký nástroj, ktorým by vedel znížiť mieru rizika novej straty resp. nižšieho zisku. Takýmto finančným nástrojom sú napríklad opcie.

Okrem najjednoduchších typov opcií tzv. plain vanilla options, vzniklo počas rokov ešte mnoho ďalších ako sú bariérové, ázijské, perpetuálne, binárne opcie a iné. Jedným z novších typov opcií sú tzv. ohlasovacie opcie (ang. shout options), ktorých kúpou vlastník získa možnosť určitého „zisku navyše“ oproti základným typom opcií. Táto výhoda má prirodzene za dôsledok zvýšenie ceny takejto opcie oproti základným typom opcií, čo bude jedným z predmetov skúmania tejto diplomovej práce. Ďalším cieľom práce bude definovať vlastný typ opcie. Pôjde iba o malú úpravu v definícii shout opcie, čím však vznikne úplne nový druh derivátu, ktorý budeme označovať pojmom modifikovaná shout opcia. Teda ďalším cieľom práce bude skúmať cenovú úroveň takto definovanej opcie.

V prvej kapitole čitateľovi poskytneme na základe [2], [4] a [5] základný prehľad o opciách a uvedieme ho do problematiky oceňovania takýchto derivátov. Z [2] definujeme pojem americkej opcie, čo bude neskôr tvoriť základ pre koncept shout opcie podľa [1].

Obsahom druhej kapitoly bude teda definovanie konceptu shout opcie, jej numerického oceňovacieho modelu a vlastností za pomoci článku [1]. Tretia kapitola tejto diplomovej práce inšpirovaná článkom [6] sa bude zaoberať práve modifikáciou danej shout opcie, opisom rozdielov s klasickou shout opciou, ale aj ich spoločnými vlastnosťami. Vo štvrtej kapitole sa budeme venovať porovnaniu získaných výsledkov pre ceny spomenutých troch typov derivátov. Okrem toho sa pozrieme aj na optimálne uplatnenie takýchto opcií a to konkrétne na hranicu predčasného uplatnenia opcií, definovanú v [2] alebo [4].

1 Úvod do sveta opcí

Ako je v [4, p. 16] uvedené, pojmom opcia rozumieme právo (nie povinnosť) predat' alebo kúpiť podkladové aktívum v hodnote S za vopred dohodnutú tzv. expiračnú cenu E a vo vopred dohodnutom čase expirácie T . Uzavretím takéhoto kontraktu vzniká pravdepodobnosť, že majiteľ danej opcie bude profitovať z podkladového aktíva (ozn. PA) v budúcnosti. Za takýto benefit si od neho vypisovateľ opcie môže pýtať tzv. opčnú prémiiu t.j. poplatok za kúpu príslušnej opcie, čo budeme v tejto práci označovať pojmom cena opcie. Ako sa dočítame či už v [1], [2] alebo [4], hodnota opcie je funkciou závislou od podkladového aktíva S , expiračnej ceny E , času do expirácie t , volatility podkladového aktíva σ , výnosu podkladového aktíva r a dividendovej miery D (pokým podkladové aktívum vypláca nejaké dividendy). V tejto práci budeme túto hodnotu uvažovať ako funkciu premenlivú vzhľadom iba na cenu podkladového aktíva S a čas t do expirácie T . Ostatné premenné uvažujeme iba ako parametre funkcie. Preto cenu opcie budeme označovať ako $V(S, t)$.

Podľa typu uzavretého obchodu rozoznávame dva typy opcí:

- **Call** - v prípade, že ide o kúpu práva na kúpu podkladového aktíva
- **Put** - v prípade, že ide o kúpu práva na predaj podkladového aktíva

Podľa času uplatnenia opcie rozoznávame ďalšie dva typy opcí:

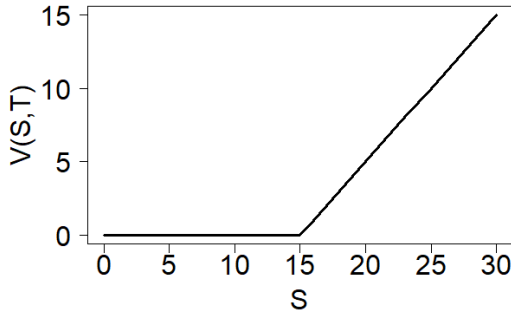
- **Európska** - opciu je možné uplatniť len v čase expirácie T
- **Americká** - opciu je možné uplatniť kedykoľvek do času expirácie T

Uvažujme teraz prípad call opcie, ktorá vypláca spojitú dividendu a predpokladajme, že sa nachádzame v čase expirácie T . Ak $S > E$, tak majiteľ opciu uplatní, teda využije právo kúpiť si od vypisovateľa dané PA, lebo jeho hodnota S je vyššia ako tá, za akú ju bude nakupovať podľa kontraktu. Čiže na tom ušetrí. Pomyselná výplata z tohto obchodu je v tom prípade $S - E$. Naopak, ak je $S \leq E$, tak sa majiteľovi neoplatí uplatniť právo na

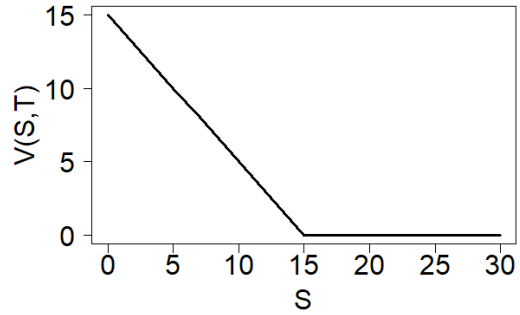
kúpu, lebo by zaplatil viac peňazí za získanie daného aktíva ako je v aktuálnej situácii nutné. V prípade neuplatnenia opcie je teda výplata nulová. Podobnými úvahami by sme ukázali vzťahy pre Put opciu. V [4, p. 49] je definovaná výplata v čase expirácie T (ang. payoff), ktorú má vlastník opcie, z jej uplatnenia v danom čase T ako:

$$V(S, T) = \begin{cases} \max(S - E, 0) & \text{v prípade Call opcie} \\ \max(E - S, 0) & \text{v prípade Put opcie} \end{cases} \quad \forall S \in [0, \infty), \quad (1)$$

pričom S je, v tomto prípade, neznáma hodnota PA v čase T . Vidíme, že takýto predpis spĺňa vyššie uvedenú úvahu. Na Obr. 1 a Obr.2 zobrazujeme grafické znázornenie daných funkcií.



Obr. 1: Výplatný diagram call opcie pre hodnotu parametra $E = 15$



Obr. 2: Výplatný diagram put opcie pre hodnotu parametra $E = 15$

Ako je ukázané v [4, p. 37], na základe myšlienky $P = S + \delta \cdot V$ t.j. vytvorenia si portfólia v hodnote P tvoreného jedným aktívom v hodnote S a δ opciami v hodnote V , a sledovaním jeho zmeny v čase t , vieme odvodiť tzv. **Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu** pre oceňovanie akéhokoľvek druhu opcií:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, \quad (2)$$

pričom konkrétny typ opcie sa určí zadaním payoffu, t.j. terminálovej podmienky, $V(S, T)$. Parameter r predstavuje bez-rizikový úrokovú mieru, D dividendovú mieru a σ^2 disperziu PA. Podotýkame, že v tejto práci uvažujeme prípad $r > D$.

1.1 Oceňovanie európskej call opcie

Európske opcie sú jeden z mála druhov opcií, ktorých hodnota sa dá vypočítať analyticky, čo je veľkou výhodou oproti ostatným. Na najbližších riadkoch sa dopracujeme k

tvaru explicitného riešenia a následne venujeme pozornosť aj numerickému modelovaniu ceny danej call opcie. Na základe toho budeme potom schopní premostiť na oceňovanie amerických typov opcií.

1.1.1 Explicitné riešenie

Keďže uvažujeme európsku call opciu, vieme, že jej payoff je daný vzťahom (1), teda úloha, ktorej riešením dostaneme oceňovaciu formulu pre cenu tejto opcie, je nasledovná:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV &= 0 \\ V(S, T) &= \max(S - E, 0) \end{aligned} \quad \forall S \in [0, \infty) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3)$$

Rovnako ako v [4, p. 49-51], využitím transformácie premenných $x = \ln(\frac{S}{E})$, $\tau = T - t$ a aplikovaním známej transformácie $u(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} V(e^x, T - \tau)$, prevedieme Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu na rovnicu vedenia tepla:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ u(x, 0) &= E \cdot e^{\alpha x} \cdot \max(e^x - 1, 0) \end{aligned} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \tau \in [0, T], \quad (4)$$

kde funkcia $u(x, \tau)$ predstavuje transformovanú cenu opcie a α , β sú parametre zabezpečujúce transformáciu práve na rovnicu vedenia tepla. Všimnime si, že terminálová podmienka $V(S, T)$ sa transformáciou zmenila na počiatočnú podmienku $u(x, 0)$, čo bolo cieľom takto zvolenej transformácie. Z tohto systému sa využitím Greenovho vzorca, definovanom v [4, p. 51], dopracujeme k následovnému **explicitnému vzorcu pre výpočet ceny európskej call opcie**:

$$\begin{aligned} V(S, t) &= S \cdot e^{-D(T-t)} \Phi(d_1) - E \cdot e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - D + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \quad d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - D - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}, \end{aligned} \quad (5)$$

pričom $\Phi(x)$ predstavuje distribučnú funkciu normálneho normovaného rozdelenia. Intuitívne vysvetlenie daného výsledku môžeme priblížiť ekonomickou interpretáciou pomocou teórie úrokovania. Pokým majiteľ opcie v čase T očakáva zisk z daného kontraktu vo výške $S - E$, tak očakáva, že sa mu peniaze investované kúpou opcie zhodnotia do

výšky $S - E$. V tom prípade by za daný kontrakt mal v aktuálnom okamihu t zaplatiť diskontovanú sumu očakávaného zisku.

1.1.2 Numerické riešenie

Okrem analytického riešenia uvažujme ešte druhý spôsob oceňovania európskych opcií, konkrétne numerické modelovanie danej úlohy (3). V tomto prístupe postupne oceňujeme derivát vzhľadom na rôzne ceny PA po jednotlivých časových vrstvách začínajúc od času expirácie T , v ktorom poznáme hodnotu terminálovej podmienky $V(S, T)$, až sa dopracujeme k času $t = 0$. Aby sme mohli použiť numerické výpočty potrebujeme úlohu (3) určiť okrajové podmienky. Použijeme extrémne prípady vzhľadom na cenu PA. Pokiaľ bude cena najnižšia, t.j. $S = 0$, tak PA pre majiteľa nemá nijakú hodnotu, preto ju nebude mať ani opcia, ktorá sa k nemu viaže, čiže platí:

$$V(0, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Druhým extrémom je $S \rightarrow \infty$. Avšak kvôli numerickému riešeniu potrebujeme uviesť konečnú hodnotu, preto zvolíme dostatočne veľkú hodnotu S_{max} , ktorá bude predstavovať aproximáciu nekonečna. Určite platí, že $S_{max} > E$, teda payoff v čase $t = T$ je $S_{max} - E > 0$. Keďže chceme cenu PA vyjadriť všeobecne v čase t , tak musíme payoff diskontovať do času t . Z toho dôvodu vyzerá druhá okrajová podmienka ako:

$$V(S_{max}, t) = S_{max}e^{-D(T-t)} - Ee^{-r(T-t)} \quad S_{max} \rightarrow \infty \quad \forall t \in (0, T).$$

Potom **cenu európskej call opcie, ktorá vypláca spojitú dividendu získame numerickým riešením nasledovnej úlohy:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV &= 0 \\ V(S, T) &= \max(S - E, 0) \\ V(S_{max}, t) &= S_{max}e^{-D(T-t)} - Ee^{-r(T-t)} \\ V(0, t) &= 0, \quad \forall S \in [0, \infty) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{6}$$

Opäť využijeme postupnosť transformácií premenných $x = \ln(\frac{S}{E})$, $\tau = T - t$ a $u(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} V(e^x, T - \tau)$, ako v prípade analytického riešenia, čím dostaneme už známy systém (4) rozšírený o okrajové podmienky:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\
u(x, 0) &= E \cdot e^{\alpha x} \cdot \max(e^x - 1, 0) \\
u(x_{\max}, \tau) &= E \cdot e^{(\alpha+1)x_{\max} + (\beta-D)\tau} - E \cdot e^{\alpha x_{\max} + \beta\tau} \\
u(x_{\min}, \tau) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall \tau \in [0, T].
\end{aligned} \tag{7}$$

Kedže transformovaná premenná x je definovaná ako $\ln(\frac{S}{E})$, tak okrajovú podmienku pre $S = 0$, nemôžeme priamo vyjadriť dosadením nuly za hodnotu S , lebo by sme nedostali konečnú hodnotu, čo by sme numericky nemali ako vyriešiť. Preto musíme túto hodnotu aproximovať dostatočne malou hodnotou PA blízkou nule, t.j. $S_{\min} \rightarrow 0$. Potom z definície premennej x , je jasné, že čím menšiu si zvolíme štartovaciu hodnotu PA, tým bude transformovaná premenná x stále zápornejšou, t.j. $x_{\min} \rightarrow -\infty$. Z toho dôvodu je v systéme (7) okrajová podmienka vyjadrená cez bod $x_{\min}$.

Následne urobme diskretizáciu úlohy (7) na $n + 1$ cenových deliacich bodov x_i a m časových deliacich bodov τ_j , v ktorých budeme aproximovať hodnoty pre daný systém. Nech pre tieto body platí, že sú rovnomerne rozmiestnené, t.j.:

$$\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + h & \forall i = 0, 1, 2, \dots, n \\
\tau_{j+1} &= \tau_j + k & \forall j = 0, 1, 2, \dots, m-1.
\end{aligned}$$

Nech u_i^j predstavuje transformovanú cenu derivátu v cenovom deliacom bode x_i v časovej vrstve τ_j . Potom vyjadríme parciálne derivácie v rovnici vedenia tepla pomocou konečných diferencií ako:

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} - \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} = 0.$$

Prenásobením rovnice hodnotou k , preskupením členov rovnice a označením $\gamma = \frac{\sigma^2 k}{2h^2}$, dostávame:

$$-\gamma u_{i-1}^j + (1 + 2\gamma)u_i^j - \gamma u_{i+1}^j = u_i^{j-1}.$$

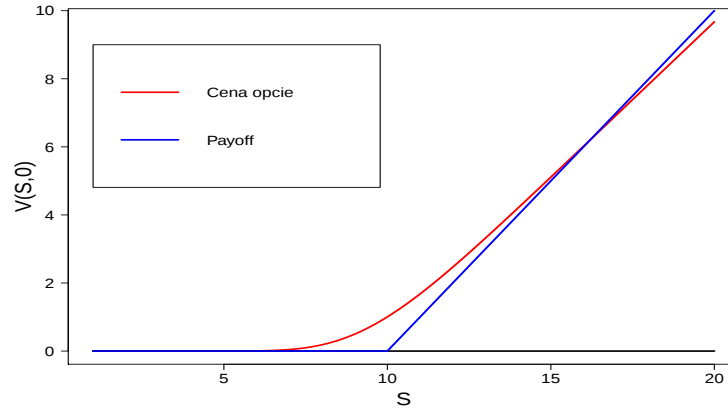
Prepísaním do maticového tvaru dostávame **predpis implicitnej numerickej oceňovacej metódy pre európsku opciu**:

$$\begin{aligned}
Au^{j+1} &= u^j + b^j & \forall j = 0, 1, 2, \dots, m-1 \\
u^{j+1} &= A^{-1}u^j + A^{-1}b^j & \forall j = 0, 1, 2, \dots, m-1,
\end{aligned}$$

pričom matica A a vektor b vyzerajú nasledovne (pre detailnejší popis viď [4, p. 173]):

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & -\gamma & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma \end{pmatrix}, \quad b^j = \begin{pmatrix} \gamma\Phi^{j+1} \\ 0 \\ \ddots \\ 0 \\ \gamma\Psi^{j+1} \end{pmatrix}.$$

Výsledkom riešenia takejto sústavy je cena opcie znázornená na nasledujúcom grafe.



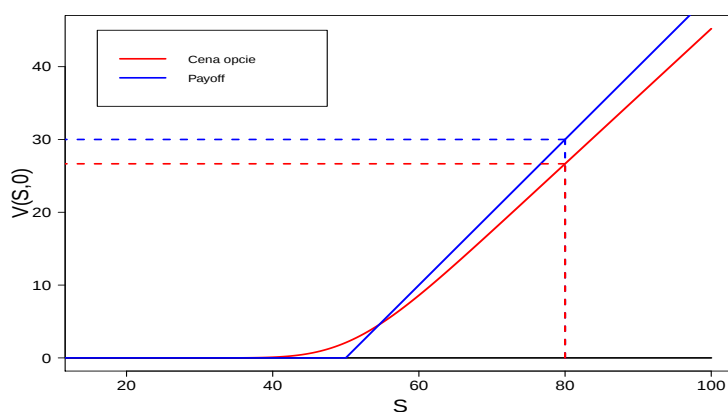
Obr. 3: Cena európskej call opcie, ktorá vypláca dividendy, v čase $t = 0$ s parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ porovnaná s výplatným diagramom danej opcie v T .

1.2 Oceňovanie americkej call opcie

V tejto časti stále uvažujeme call opciu, ktorá vypláca spojité dividendy. Postup oceňovania amerických opcií je podobný ako pri oceňovaní európskych opcií, avšak ako sa dá očakávať, benefit možnosti uplatnenia opcie kedykoľvek počas celej doby do expirácie v čase $t = T$ spôsobuje zopár zmien. Konkrétne spôsobuje vznik pojmov **okamžitý payoff** a **hranica predčasného uplatnenia opcie**, ktoré si v tejto kapitole opíšeme a vysvetlíme. Dôsledkom tohto benefitu je taktiež zmena formulácie úlohy (3) a tým aj zmena voľby numerickej metódy vhodnej na oceňovanie takéhoto derivátu. Touto metódou bude Gauss-Seidelova PSOR metóda.

1.2.1 Okamžitý payoff

Ako môžeme vidieť na Obr. 3, cena európskej call opcie v prípade vyplácania dividend môže spadnúť pod payoff, čo potvrdzuje aj [4, p.]. Keďže v oceňovacom modeli (3) sme limitovaní na uplatnenie opcie iba v čase T , tak túto vlastnosť nemusíme nijako brať do úvahy. Avšak v prípade americkej call opcie to spôsobuje arbitrážnu príležitosť, ktorú demonštrujeme pomocou príkladu na nasledujúcom Obr.4. Uvažujme americkú call opciu,



Obr. 4: Teoretická cena európskej call opcie vyplácajúcej dividendy prislúchajúca času $t = 0.5$ porovnaná s výplatným diagram danej opcie v rovnakom čase $t = 0.5$.

ktorá by sa oceňovala rovnako ako európska call opcia. Nech ide o opciu s expiráciou o 1 rok, t.j. $T = 1$ a dohodnutou expiračnou cenou 50 EUR, t.j. $E = 50$. Ďalej nech je cena PA o pol roka 80 EUR, t.j. $S = 80$. Potom payoff danej opcie o pol roka je rozdiel týchto dvoch cien, teda 30 EUR, čo vidíme aj v grafe na Obr.4 zobrazené modrou prerušovanou čiarou. Nech vypočítaná cena danej americkej call opcie o pol roka, t.j. $V(80, 0.5)$, je menej ako 30 EUR (napr. 27 EUR). To znamená, že sa nachádza pod payoffom, tak ako ilustrujeme aj v predchádzajúcom grafe. Všímvavý investor by potom danú opciu určite v danom momente kúpil a hneď aj uplatnil, aby z nej mal istý zisk. Konkrétne by jeho ziskom bol rozdiel payoffu (t.j. sumy, ktorú zarobil na kúpe a následnom predaji PA (30 EUR)) a sumy, ktorú musel zaplatiť za danú opciu (27 EUR). To spolu tvorí trojeurový istý zisk, čo je arbitráž.

Vzhľadom na tento problém, payoff (1) pre európsku opciu neplatí v tomto prípade iba v

čase T , ale mal by platiť pre každý moment t do času expirácie T , teda platí:

$$\bar{V}(S) = \begin{cases} \max(S - E, 0) & \text{v prípade Call opcie} \\ \max(E - S, 0) & \text{v prípade Put opcie} \end{cases} \quad \forall t \in [0, T], \quad (8)$$

kde S je aktuálna hodnota PA v čase t . Funkciu $\bar{V}(S)$ potom budeme označovať pojmom **okamžitý payoff americkej opcie**. Keďže daná funkcia je v každom čase rovnaká, tak ju budeme považovať za premenlivú iba vzhľadom na hodnotu PA.

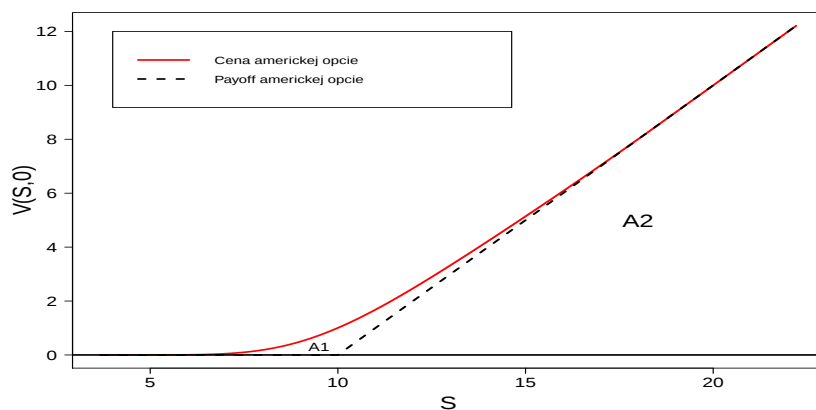
1.2.2 Hranica predčasného uplatnenia opcie

Keďže čas uplatnenia americkej opcie je ľubovoľný, tak je rozumné predpokladať, že uplatnenie príslušnej opcie je pre niektoré hodnoty PA optimálnejšie ako pre iné. V tejto kapitole sa preto budeme zaoberať tzv. hranicou predčasného uplatnenia opcie, ktorá určuje, od ktorej hodnoty ceny PA je už vhodné uplatniť opciu. Pre lepšie pochopenie následujúceho výkladu poukazujeme na rozdiel pojmov payoff a celková výplata.

Stále platí, že pojmom payoff označujeme výplatný diagram samotnej call opcie daný predpisom $\max(S - E, 0)$, zatiaľ čo pojmom celková výplata definujeme rozdiel počiatkovej investície do opcie, t.j. ceny opcie $V(S, t)$, a jej payoffu.

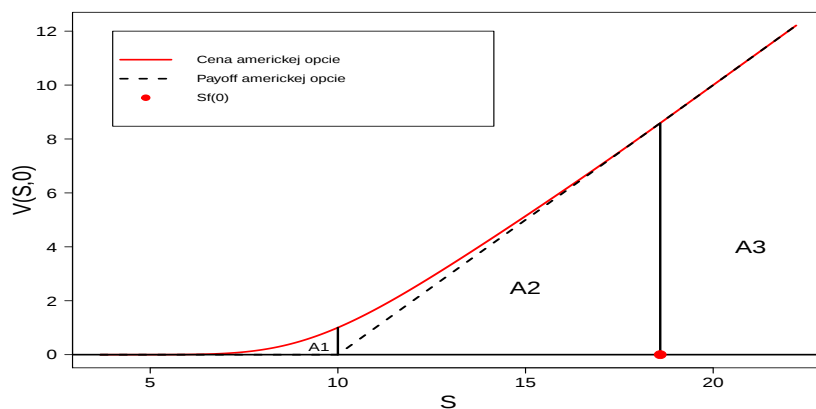
Na základe faktu z predchádzajúcej kapitoly o okamžitom payoffe uvádzame na Obr.5 očakávaný graf ceny americkej call opcie prislúchajúcej času $t = 0$. Uvedomme si, že expiračná cena $E = 10$ rozdeľuje graf na 2 oblasti. Prvú oblasť tvorí cena opcie prislúchajúca $S \in [0, E]$, v našom prípade $S \in [0, 10]$. Túto oblasť, v grafe označenú ako A1, nazývame stratovou oblasťou. Ak by majiteľ opcie pri takejto cenovej úrovni S uplatnil danú opciu, tak jej výsledný payoff je nulový, čiže by nič nezískal. Navyše by ešte aj prišiel o peniaze, ktoré zaplatil za kúpu opcie, t.j. o hodnotu $V(S, 0) \forall S \in [0, 10]$, teda jeho celková výplata by bola záporná.

Druhá oblasť prislúcha $S \in (E, \infty)$, v našom prípade $S \in (10, \infty)$. Pre túto oblasť, v grafe označenú ako A2, platí, že payoff opcie je kladný, avšak nazvať ju ziskovou nemôžeme. Pokým bude cena opcie vyššia ako výsledný payoff, tak majiteľ opcie nikdy nebude ziskový, bude iba menej stratový ako v prípade prvej oblasti. V momente kedy sa cena americkej opcie nalepí na payoff sa mení charakter celkovej výplaty majiteľa opcie zo



Obr. 5: Vykreslenie ceny americkej call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ prisluchajúcej $t = 0$ spolu s jej výplatným diagramom a vyznačením výplatných regiónov.

stratovej na nulovú. Prvú takú cenu PA, pre ktorú sa cena opcie rovná hodnote payoffu, označme ako S^* . Oblasť A2 preto treba ešte rozdeliť ako zobrazujeme na Obr.6.



Obr. 6: Vykreslenie ceny americkej call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ prisluchajúcej $t = 0$, spolu s bodom napojenia $S_f(0)$.

Oblasť A2 je zúžená na interval $S \in (E, S^*)$ a teda je to oblasť kedy majiteľ opcie síce má kladný payoff, ale kvôli vyšším počiatočným nákladom je stále mierne stratový. Tretiu oblasť tvoria hodnoty $S \in [S^*, \infty)$, pre ktoré platí, že cena opcie sa rovná hodnote payoffu, ako môžeme vidieť aj na Obr.6. V tejto oblasti je celková výplata majiteľa opcie síce nulová, ale aspoň sa poistil, že na kúpe PA neprerobil. Vzhľadom na to, že pre všetky hodnoty PA tretej oblasti má majiteľ rovnakú celkovú výplatu, je optimálne uplatniť opciu

v momente kedy PA nadobudne hodnotu S^* . Kvôli tomu, že je to bod, ktorý oddeľuje stratové a nestratové oblasti, sa tomuto bodu hovorí **hranica predčasného uplatnenia opcie**. Je zrejmé, že v prípade $S < S^*$ majiteľ opcie neuplatňuje danú opciu. Naopak v prípade $S \geq S^*$ danú opciu úplatní a nemusí čakať až do času T na jej uplatnenie.

1.2.3 Formulácia úlohy

V tejto kapitole poukazujeme na zmenu vo formulácii oceňovacej úlohy pre prípad amerického typu opcie. V predchádzajúcich dvoch kapitolách sme ukázali, že pre každú cenu PA v každom čase musí $V(S, t) \geq \bar{V}(S)$, aby nenastala arbitrážna príležitosť. Taktiež sme ukázali, že pre $S \geq S^*$ vďaka tomu platí rovnosť $V(S, t) = \bar{V}(S)$. Táto skutočnosť kazí vzťah (2) a na nasledujúcich riadkoch si ukážeme prečo.

Uvažujme cenu PA pohybujúcu sa v intervale $S \geq S^* > E$. Potom je jasné, že $V(S, t) = \bar{V}(S) = S - E$. Príslušné parciálne derivácie vystupujúce v Black-Scholesovej rovnici sú pre tento prípad nasledovné:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial S} = 1 \quad \frac{\partial V^2}{\partial S^2} = 0.$$

Doplnením daných vzťahov do ľavej strany rovnosti (2) a využitím známej vlastnosti $S^* \geq \frac{r \cdot E}{D}$ (viď [4, p. 157]) dostávame:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial V^2}{\partial S^2} - rV = \\ & 0 + (r - D) \cdot S \cdot 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot 0 - r \cdot (S - E) = \\ & = (r - D) \cdot S - r(S - E) = r \cdot E - D \cdot S \leq r \cdot E - D \cdot \frac{r \cdot E}{D} = 0 \end{aligned}$$

□

Záverom je, že existencia hranice predčasného uplatnenia opcie a nalepenie ceny opcie na payoff od tohto bodu spôsobujú, že úloha musí byť rozdelená na dva prípady vzhľadom na to kde sa pohybuje cena PA. Príslušnú formuláciu uvádzame nižšie:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial V^2}{\partial S^2} - rV = 0 \quad \wedge \quad V(S, t) > \bar{V}(S), \quad \forall S \in [0, S^*) \\ & \frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial V^2}{\partial S^2} - rV \leq 0 \quad \wedge \quad V(S, t) = \bar{V}(S), \quad \forall S \in [S^*, \infty). \end{aligned}$$

Avšak toto znenie vieme jednoducho zapísať ako podmienku lineárnej komplementarity, teda môžeme napísať **úlohu oceňovania americkej opcie** formulovanú ako:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV \right) \cdot (V(S, t) - \bar{V}(S)) = 0 \\
& \frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV \leq 0 \\
& V(S, t) \geq \bar{V}(S) \\
& \forall S \in [0, \infty) \quad \forall t \in [0, T],
\end{aligned} \tag{9}$$

pričom $\bar{V}(S)$ je v tomto prípade pre každú časovú vrstvu rovné $V(S, T) = \max(S - E, 0)$.

1.2.4 Numerické riešenie

V tejto časti sa budeme venovať numerickej aproximácii riešenia na diskretizovanej mriežke časových a cenových bodov, rovnako ako sme to robili pri európskych opciách, avšak tentokrát budeme musieť aplikovať na príslušnú úlohu (9) inú numerickú metódu. Keďže ide o úlohu lineárnej komplementarity je vhodné použiť tzv. Gauss-Seidelovu PSOR metódu. Opäť využijeme postupnosť transformácií premenných $x = \ln(\frac{S}{E})$, $\tau = T - t$ a $u(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} V(e^x, T - \tau)$, ako v prípade predošlých riešení, čím systém (9) prevedieme na:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \cdot (u(x, \tau) - g(x, \tau)) = 0 \\
& \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geq 0 \\
& u(x, \tau) \geq g(x, \tau) \\
& \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \tau \in [0, T],
\end{aligned} \tag{10}$$

kde funkcia $u(x, \tau)$ predstavuje transformovanú cenu opcie s parametrami α, β , ktoré zabezpečujú transformáciu práve na rovnicu vedenia tepla ako v predošlých prípadoch. Funkcia $g(x, \tau) = E e^{\alpha x + \beta \tau} \max(e^x - 1, 0)$ predstavuje transformovaný okamžitý payoff americkej call opcie. Taktiež upozorňujeme na otočenie nerovnosti v tejto transformovanej sústave, kvôli násobeniu mínus jednotkou, viď v detailnom postupe v [4, p. 49].

Aby sme boli schopní danú úlohu vyriešiť potrebujeme definovať okrajové podmienky, ktoré budú štartovacími bodmi pre algoritmus. Rovnako ako v prípade európskej opcie

použijeme extrémne hodnoty vzhľadom na cenu PA. Stále platí, že pokým je cena PA najnižšia možná, t.j. $S = 0$, tak PA nemá pre majiteľa opcie nijakú hodnotu, tak ju nemôže mať ani opcia, ktorá sa viaže k danému PA, teda platí:

$$\begin{aligned} V(0, t) &= 0 \quad \forall t \in [0, T] \\ &\Downarrow \\ u(x_{min}, \tau) &= 0 \quad \forall \tau \in [0, T]. \end{aligned}$$

Z rovnakého dôvodu ako v prípade európskej call opcie sa argument počiatočnej podmienky zmení z nuly na x_{min} . Druhým extrémom je $S \rightarrow \infty$. Avšak kvôli numerickému riešeniu potrebujeme uviesť konečnú hodnotu, preto zvolíme dostatočne veľkú hodnotu S_{max} , ktorá bude predstavovať aproximáciu nekonečna. Túto hodnotu potom doplníme do okamžitého payoffu americkej opcie. Keďže S_{max} je aproximáciou nekonečna, tak určite platí $S_{max} > E$. Z toho dôvodu vyzerá druhá okrajová podmienka ako:

$$\begin{aligned} V(S_{max}, t) &= S_{max} - E, \quad S_{max} \rightarrow \infty \quad \forall t \in [0, T] \\ &\Downarrow \\ u(x_{max}, \tau) &= Ee^{\alpha x_{max} + \beta \tau} (e^{x_{max}} - 1), \quad x_{max} \rightarrow \infty \quad \forall \tau \in [0, T]. \end{aligned}$$

Následne môžeme úlohu (10) rozšíriť o tieto okrajové podmienky, čím dostávame **model pre oceňovanie amerických shout call opcií**, ktorý je vhodný na implementáciu do ľubovoľného matematického softvéru:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \cdot (u(x, \tau) - g(x, \tau)) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\geq 0 \\ u(x, \tau) &\geq Ee^{\alpha x + \beta \tau} \max(e^x - 1, 0) \\ u(x_{min}, \tau) &= 0 \\ u(x_{max}, \tau) &= Ee^{\alpha x_{max} + \beta \tau} (e^{x_{max}} - 1) \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \tau \in [0, T]. \end{aligned} \tag{11}$$

Takýto model opäť diskretizujeme ako v prípade európskych opcií. Teda úlohu budeme numericky rátať iba v $n + 1$ cenových deliacich bodoch x_i a m časových deliacich bodoch

τ_j . Pripomeňme si, že pre spomenuté body platí, že sú rovnomerne rozmiestnené, t.j.:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h & \forall i = 0, 1, 2, \dots, n \\ \tau_{j+1} &= \tau_j + k & \forall j = 0, 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Označenie u_i^j stále používame pre transformovanú cenu derivátu v cenovom deliacom bode x_i a v časovej vrstve τ_j . Tak isto aj v tomto prípade aplikujeme vyjadrenie parciálnych derivácií pomocou konečných diferencií, čím dostaneme rovnakú maticu A a vektor b ako v prípade európskej call opcie. Tentokrát však budeme na výpočet ceny opcie pre všetky hodnoty PA (t.j. deliace body x_i) v novej časovej vrstve $j+1$, t.j. u_i^{j+1} , používať tzv. Gauss-Seidelovu SOR metódu:

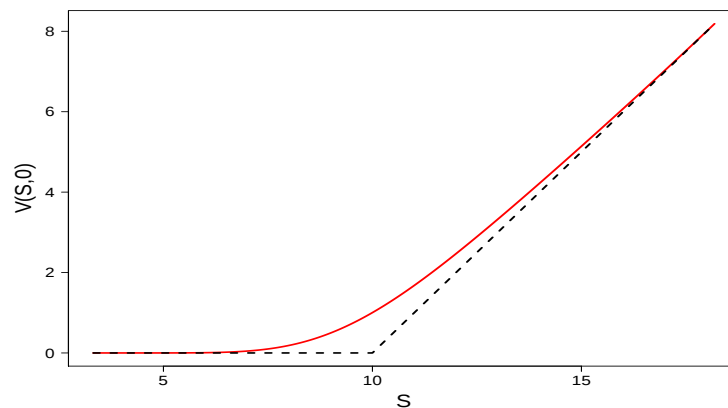
$$\begin{aligned} u_i^{j+1,p+1} &= \frac{\omega}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{z=0}^{i-1} A_{iz} u_z^{j+1,p+1} - \sum_{z=i+1}^n A_{iz} u_z^{j+1,p} \right) + (1-\omega) u_i^{j+1,p} \\ \forall p &= 0, 1, 2, \dots, p_{max}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, m-1, \end{aligned}$$

kde pre štartovací bod algoritmu platí $u^{j+1,0} = u^j$. Táto metóda je detailnejšie opísaná v [4, p. 178-180]. V tejto práci iba načrtujeme myšlienku, ktorá je skrytá v tomto vzorci. Výpočet pre každú novú hodnotu u_i^{j+1} dostaneme použitím niekoľkých tzv. mikroiterácií $u_i^{j+1,p}$, ktoré podľa [4, p. 178-180] konvergujú, k riešeniu u_i^{j+1} . V každej tejto mikroiterácii použijeme s váhou ω už vypočítané členy vektora u^{j+1} danej mikroiterácie $p+1$, vo vzorci to predstavuje prvú sumu. Rovnako s váhou ω berieme nasledujúce členy vektora u^{j+1} , ale z predchádzajúcej mikroiterácie p , čo predstavuje druhú sumu vo vzorci. Naopak s váhou $(1-\omega)$ vstupuje do výpočtu hodnota $u_i^{j+1,p}$.

Keď do výpočtu zakomponujeme ešte fakt, že daná vypočítaná cena nemôže spadnúť pod hodnotu okamžitého payoffu, tak dostávame predpis numerickej oceňovacej schémy pre americkú opciu označovanú ako **projektovaná SOR metóda (PSOR metóda)**:

$$u_i^{j+1,p+1} = \max \left(\frac{\omega}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{z=0}^{i-1} A_{iz} u_z^{j+1,p+1} - \sum_{z=i+1}^n A_{iz} u_z^{j+1,p} \right) + (1-\omega) u_i^{j+1,p}, g_i \right), \quad (12)$$

kde g_i je transformovaná hodnota okamžitého payoffu americkej call opcie. Implementáciou tejto oceňovacej metódy do softvéru R, získava cenu americkej call opcie, v takom tvare ako sa očakávalo.



Obr. 7: Cena americkej call opcie, ktorá vypláca spojitú dividendu, v čase $t = 0$ s parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ porovnaná s výplatným diagramom danej opcie v čase T . Použili sme hodnoty parametrov delenia $n = 2000$, $m = 50$. Algoritmus zbehol najrýchlejšie pre hodnotu $\omega = 1.87$

Americké opcie môžeme považovať za jedny zo základných resp. najjednoduchších typov opcií. Preto sa dá očakávať, že ponúkajú nižšiu možnú výplatu pre ich majiteľa ako iné komplikovanejšie typy opcií. Ak by potenciálny investor požadoval od opcie vyšší možný zisk (na úkor vyšších počiatočných investícií), bolo by preňho vhodnejšie obchodovať s nejakým typom zložitejších opcií. Jedným z týchto zložitejších typov sú tzv. shout opcie, ktorými sa budeme zaoberať v nasledujúcej kapitole.

2 Shout call opcie a ich oceňovanie

V tejto kapitole sa budeme venovať definícii pojmu shout opcia, ktorá je akousi „nadstavbou“ americkej opcie, a vysvetlíme problematiku jej oceňovania. Pre lepšiu prehľadnosť danej kapitoly definujeme nasledovné označenia:

- $\bar{S}$ - hodnota PA v čase $t \in (0, T)$ t.j. pred časom expirácie
- S - hodnota PA v čase $t = T$ t.j. v čase expirácie
- $\bar{E}$ - hodnota expiračnej ceny uzavretej v čase $t = 0$, t.j. na začiatku kontraktu
- E - hodnota expiračnej ceny uzavretej v čase $t \in (0, T)$, t.j. v priebehu doby kontraktu

Vychádzajúc z [1] pojmom shout opcia sa označuje opcia, ktorá dáva jej majiteľovi právo predčasného uplatnenia kedykoľvek do času expirácie T , pričom oproti americkej opcii týmto úkonom získa v danom momente uplatnenia ešte aj európsku at-the-money opciu (t.j. európsku opciu, pre ktorú platí $E = S$), ktorá je platná na zvyšnom časovom horizonte do konca expirácie T . Vďaka tomu ziskava majiteľ takejto opcie až 2 príležitosti na uplatnenie opcie. Prvé uplatnenie opcie môže nastať v ľubovoľnom čase t , zatiaľ čo druhú príležitosť má až v čase expirácie T . Spomínané prvotné uplatnenie opcie sa v [1] označuje ako „shout-ovanie“, a tak ho budeme používať aj my v tejto práci. Potom sa v čase „shout-ovania“ daný derivát správa ako americká opcia, teda aj jeho výplatný diagram je stále rovnaký ako pre americké opcie, t.j. v prípade call opcie $\max(S - E, 0)$. Z toho vyplýva, že majiteľ danej opcie „shout-uje“ iba v prípade $\bar{S} > \bar{E}$, čím nadobudne prvý zisk (označme Z_1) vo výške $\bar{S} - \bar{E}$. Keďže zároveň s týmto prvotným ziskom ziskava ešte európsku opciu s hodnotou expiračnej ceny $E = \bar{S}$ (keďže ide o at-the-money opciu), tak ziskava aj možnosť nadobudnúť v čase T druhý zisk (označme Z_2) v nožnej výške $S - E$. V princípe to znamená, že pojem „shout-ovať“ môžeme chápať ako uzamknutie si istého zisku vo výške Z_1 v čase t , t.j. v čase prvého uplatnenia opcie, s možnosťou ďalšieho budúceho zisku v čase T vo výške Z_2 .

Z toho je jasné, že majiteľ takejto opcie môže dosiahnuť väčší zisk ako v prípade americkej opcie. Vzhľadom na to je takýto derivát pre kupujúceho vzácnejší a teda očakávame,

že cena shout opcie bude všeobecne vyššia ako cena americkej opcie. V nasledujúcej kapitole si ukážeme, že toto nie je iba domnienkou, ale je to matematicky podložený fakt.

2.1 Okamžitý payoff

Keďže v predchádzajúcich častiach sme uvažovali prípad iba call opcií, tak v tom budeme pokračovať aj naďalej. Ako sme v minulej kapitole naznačili, payoff shout call opcie sa kvôli jej vlastnostiam musí upraviť oproti americkému payoffu. Aby nenastala arbitráž, tak je potrebné upraviť aj funkciu okamžitého payoffu $\bar{V}(S)$, aby spĺňal vlastnosti shout call opcie. Z predchádzajúcej kapitoly vieme, že payoff shout call opcie v každom čase t je tvorený payoffom americkej call opcie zvýšeným o hodnotu európskej at-the-money call opcie. Preto použitím (8) a (5) môžeme tieto vlastnosti vyjadriť nasledovne:

$$\bar{V}(S, t) = \max(S - E, 0) + Se^{-D(T-t)}\Phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

kde $\Phi(x)$ je distribučná funkcia normálneho normovaného rozdelenia náhodnej premennej X a pre d_1, d_2 platia nasledovné vzťahy:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - D + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - D - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}.$$

Aplikovaním vyššie spomenutej rovnosti $E = S$ na druhý sčítanec dostávame predpis **okamžitého payoffu shout call opcie** podobne ako v [1]:

$$\bar{V}(S, t) = \max(S - E, 0) + S \cdot (e^{-D(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1) - e^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2)), \quad (13)$$

kde $\Phi(x)$ je stále distribučná funkcia normálneho normovaného rozdelenia náhodnej premennej X . Avšak kvôli dosadeniu ceny PA namiesto expiračnej ceny je člen $\ln(\frac{S}{S}) = 0$, teda nastáva zmena argumentov tejto funkcie na $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2$, pre ktoré platia nasledovné vzťahy:

$$\tilde{d}_1 = \frac{(r - D + \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T - t}}{\sigma} \quad \tilde{d}_2 = \frac{(r - D - \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T - t}}{\sigma}.$$

Z takéhoto zápisu je jasné, že $\bar{V}(S, t) \geq \bar{V}(S) \forall S \in [0, \infty), \forall t \in [0, T]$. Všimnime si, že v prípade shout opcií je, narozdiel od amerických opcií, okamžitý payoff závislý od ceny PA rovnako ako aj od času t .

2.2 Formulácia úlohy

Ako sme už spomenuli a opísali v predošlých kapitolách, vďaka vlastnosti predčasného uplatnenia je shout opcia v podstate americkou opciou odlišnou iba v tvare okamžitého payoffu. Z toho dôvodu očakávame, že úlohu pre oceňovanie shout call opcie môžeme formulovať pomocou úlohy o lineárnej komplementarite (9) ako v prípade spomínaných amerických opcií. Aby sme mohli danú úlohu takto formulovať, musíme overiť, či zvolený okamžitý payoff $\bar{V}(S, t)$ spĺňa príslušnú nerovnosť pre Black-Scholesov oceňovací vzorec, teda inými slovami, či platí:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial \bar{V}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial S^2} - r\bar{V} \leq 0. \quad (14)$$

Vďaka linearite Black-Scholesovej rovnice popísanej v [4], môžeme skúmať platnosť nerovnosti (14) pre každý zo sčítancov tvoriacich funkciu $\bar{V}(S, t)$ osobitne. Z doterajších poznatkov z kapitoly 1.2.3 vieme, že člen $\max(S - E, 0)$ spĺňa nerovnosť (14) a preto stačí ukázať, že výraz $\hat{V}(S, t) = S \cdot (e^{-D(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1) - e^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2))$ tiež spĺňa nerovnosť (14).

Tvrdenie: Funkcia $\hat{V}(S, t) = S \cdot (e^{-D(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1) - e^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2))$ spĺňa nerovnosť (14).

Dôkaz. Pre takto definovanú funkciu platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{V}}{\partial t} &= DSe^{-D(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1) + Se^{-D(T-t)}\Phi'(\tilde{d}_1)(-\tilde{d}_1) - \\ &\quad - rSe^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2) - Se^{-r(T-t)}\Phi'(\tilde{d}_2)(-\tilde{d}_2) \\ \frac{\partial \hat{V}}{\partial S} &= e^{-D(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1) - e^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2) \quad \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial S^2} = 0, \end{aligned}$$

pričom pre dané výrazy $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2$ platia nasledovné vzťahy:

$$\tilde{d}_1 = \frac{(r - D + \frac{\sigma^2}{2})}{2\sigma\sqrt{T-t}} \quad \tilde{d}_2 = \frac{r - D - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma\sqrt{T-t}} \quad \tilde{d}_2 = \tilde{d}_1 - \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}.$$

Na základe tretieho z uvedených vzťahov vieme parciálnu deriváciu $\frac{\partial \hat{V}}{\partial t}$ upraviť do tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{V}}{\partial t} &= DSe^{-D(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1) - rSe^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2) - Se^{-r(T-t)}\Phi'(\tilde{d}_2) \left[\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} \right] - \\ &\quad - \left[\frac{r - D + \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma\sqrt{T-t}} \right] S \left[e^{-D(T-t)}\Phi'(\tilde{d}_1) - e^{-r(T-t)}\Phi'(\tilde{d}_2) \right]. \end{aligned}$$

Následne si spomeňme na vzťah $Se^{-D(T-t)}\Phi'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\Phi'(d_2) = 0$, odvodený v [4, p. 65]. Keď doňho dosadíme $E = S$, tak ako uvažujeme v tejto kapitole, dostávame rovnosť $S(e^{-D(T-t)}\Phi'(\tilde{d}_1) - e^{-r(T-t)}\Phi'(\tilde{d}_2)) = 0$. Potom je jasné, že výraz v červenom rámmiku je nulový a teda parciálnu deriváciu $\frac{\partial \hat{V}}{\partial t}$ vieme zjednodušiť nasledovne:

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} = DSe^{-D(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1) - rSe^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2) - Se^{-r(T-t)}\Phi'(\tilde{d}_2) \left[\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} \right].$$

Dosadením príslušných parciálnych derivácií do ľavej strany Black-Scholesovej rovnice (2) dostávame Black-Scholesov funkcionál vyjadrený ako:

$$\begin{aligned} B[\hat{V}(S, t)] = & \boxed{DSe^{-D(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1)} \boxed{-rSe^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2)} - Se^{-r(T-t)}\Phi'(\tilde{d}_2) \left[\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} \right] + \\ & \boxed{+rSe^{-D(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1) - DSe^{-D(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1) - rSe^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2)} \boxed{+DSe^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2)} - \\ & \boxed{-rS \cdot e^{-D(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1) + rSe^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2)}. \end{aligned}$$

Pozorným okom si vidíme, že súčet členov v červených rámmikoch je nulový a členy v modrých rámmikoch vieme zjednotiť do jedného člena, čo znamená, že $B[\hat{V}(S, t)]$ má tvar:

$$B[\hat{V}(S, t)] = \boxed{-} \left[(r - D)Se^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2) + Se^{-r(T-t)}\Phi'(\tilde{d}_2) \left(\frac{r - D + \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right].$$

Vzhľadom na to, že v tejto práci uvažujeme iba prípady, keď $r > D$, sú všetky členy príslušného výrazu kladné alebo nezáporné. Potom mínus pred výrazom, zobrazené v červenom rámmiku, spôsobuje že:

$$B[\hat{V}(S, t)] \leq 0,$$

tak ako sme chceli ukázať. Teda funkcia $\hat{V}(S, t)$ spĺňa nerovnosť (14). □

Preto môžeme **úlohu oceňovania shout call opcie** formulovať ako úlohu o lineárnej komplementarite:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV \right) \cdot (V(S, t) - \bar{V}(S, t)) = 0 \\ & \frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV \leq 0 \\ & V(S, t) \geq \bar{V}(S, t) \\ & \forall S \in [0, \infty) \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \tag{15}$$

pričom $\bar{V}(S, t)$ je okamžitý payoff shout call opcie definovaný pomocou (13).

2.3 Numerické riešenie

Pretože shout call opcie oceňujeme rovnakým modelom ako americké call opcie, tak budeme používať aj rovnaký numerický model, ktorý sme opísali v kapitole 1.2.4. Jedinou zmenou, ku ktorej dochádza v tomto numerickom modeli, je zmena okrajovej podmienky pre $S_{max} \rightarrow \infty$, ktorú odvodíme z okamžitého payoffu:

$$V(S_{max}, t) = S_{max} - E + S_{max} \cdot (e^{-D(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1) - e^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2)) \quad \forall t \in [0, T].$$

Potom cenu shout call opcie, ktorá vypláca spojitú dividendu, získame vyriešením úlohy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV \right) \cdot (V(S, t) - \bar{V}(S, t)) &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV &\leq 0 \\ V(S, t) &\geq \bar{V}(S, t) \end{aligned} \tag{16}$$

$$V(S_{max}, t) = S_{max} - E + S_{max} \cdot (e^{-D(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1) - e^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2))$$

$$V(0, t) = 0, \quad \forall S \in [0, \infty) \quad \forall t \in [0, T].$$

Opäť je potrebné systém previesť do transformovanej podoby, na ktorú môžeme aplikovať PSOR metódu (12):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \cdot (u(x, \tau) - g(x, \tau)) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\geq 0 \\ u(x, \tau) &\geq g(x, \tau) \\ u(x_{min}, \tau) &= 0 \\ u(x_{max}, \tau) &= g(x_{max}, \tau) \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \tau \in [0, T], \end{aligned} \tag{17}$$

pričom funkcia $g(x, \tau)$ označuje transformovaný payoff shout call opcie a vypočítame ju pomocou následovného vzorca:

$$g(x, \tau) = Ee^{\alpha x + \beta \tau} [\max(e^x - 1, 0) + e^x (e^{-D\tau}\Phi(\tilde{d}_1) - e^{-r\tau}\Phi(\tilde{d}_2))].$$

V následujúcej kapitole sa pozrieme ako sa zmení táto funkcia pre analýzu oceňovania modifikovanej shout call opcie.

3 Modifikované shout call opcie a ich oceňovanie

Keďže koncept shout opcie nie je úplnou novinkou na finančnom trhu, nechali sme sa inšpirovať článkom [6] a spravili sme vlastnú úpravu v definícii shout opcie. V tejto časti sa preto zameriame na zmenu vo vyplácaní odmeny majiteľovi klasickej shout call opcie, ktorou sme sa zaoberali v kapitole 2. Táto zmena bude pôsobiť na prvý pohľad ako drobná úprava, avšak spôsobí tak výraznú zmenu v samotnom oceňovaní, že danú opciu už nie je správne označovať pojmom shout call opcia. Preto budeme takúto opciu označovať pojmom **modifikovaná shout call opcia**. Na najbližších riadkoch poskytujeme opis zmeny vo výplate majiteľovi a následnú definíciu modifikovanej shout call opcie.

Opakujeme, že výplatou klasickej shout call opcie z kapitoly 2 je výplata americkej opcie zvýšená o cenu európskej at-the-money call opcie. To znamená, že majiteľ opcie na začiatku, v čase $t = 0$, investoval do opcie, ktorej bola stanovená expiračná cena v hodnote E . Avšak shout-ovaním v čase t získava opciu, ktorej expiračná cena už nie je E , ale je to aktuálna hodnota PA v čase t , čiže S . Predpokladajme, že majiteľ nie je spokojný s touto zmenou a chce až do času expirácie T staviť na pôvodnou expiračnú cenu, t.j. na hodnotu E . Z toho dôvodu dochádza ku zmene výplaty v momente shout-ovania. Teda v čase prvého uplatnenia opcie, t.j. v čase t , dostáva majiteľ opcie výplatu americkej call opcie spolu s **obyčajnou** európskou call opciou (**nie at-the-money opciou**). Vidíme, že zmena sa javí naozaj iba ako malá úprava v type európskej opcie, ktorú v čase t majiteľ získava. Avšak ako si ukážeme v nasledujúcej kapitole, táto zmena vytvára majiteľovi arbitrážnu príležitosť. Aby sme tomuto zabránili zavedieme povinný príplatok, ktorý musí majiteľ modifikovanej shout call opcie zaplatiť v čase t za možnosť shout-ovať v danom čase a tým získať žiadanú európsku call opciu. Tento poplatok prirodzene spôsobí zníženie jeho okamžitého payoffu. Vzhľadom na to a na fakt, že ho v budúcnosti čakajú ešte ďalšie výdavky, očakávame, že cena takéhoto modifikovaného derivátu bude nižšia ako pôvodnej shout call opcie. Na druhú stranu, keďže majiteľ opcie dostáva ku klasickému americkému payoffu $\max(S - E, 0)$ ešte niečo navyše, tak očakávame, že sa cena modifikovanej shout call opcie bude stále držať nad cenou americkej call opcie.

Aby sme to zhrnuli, tak pojmom **modifikovaná shout call opcia** rozumieme opciu,

ktorá dáva za špecifický príplatok jej majiteľovi právo predčasného uplatnenia kedykoľvek do času expirácie T , pričom týmto úkonom získa v danom momente uplatnenia ešte aj klasickú európsku call opciu.

3.1 Okamžitý payoff

Ako sme uviedli v predchádzajúcom texte, mení sa typ európskej opcie, ktorú majiteľ modifikovanej shout call opcie dostáva pri prvotnom uplatnení oproti klasickej shout call opcií. Z toho je jasné, že aby nenastala arbitráž, tak je potrebné znovu upraviť aj funkciu okamžitého payoffu $\bar{V}(S, t)$, aby spĺňala vlastnosti tentokrát modifikovanej shout call opcie. Na definovanie okamžitého payoffu modifikovanej shout call opcie použijeme vyjadrenie, z ktorého sme vychádzali už aj pri klasických shout call opciách:

$$\bar{V}(S, t) = \max(S - E, 0) + Se^{-D(T-t)}\Phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \quad (18)$$

kde $\Phi(x)$ je distribučná funkcia normálneho normovaného rozdelenia náhodnej premennej X a pre d_1, d_2 platia nasledovné vzťahy:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - D + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - D - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}.$$

Tentokrát už nič nedosádzame a uvažujeme takýto tvar okamžitého payoffu. Pozrime sa však na správanie sa výplaty v čase t blížiacemu sa k času expirácie T :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T} \bar{V}(S, t) &= \lim_{t \rightarrow T} (\max(S - E, 0) + Se^{-D(T-t)}\Phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2)) \\ &= \max(S - E, 0) + Se^0\Phi(\infty) - Ee^0\Phi(\infty) \\ &= \max(S - E, 0) + S - E. \end{aligned}$$

Keďže predpokladáme, že majiteľ je rozumný a shout-uje iba v prípade $S > E$, tak potom výsledným payoffom v čase expirácie T je hodnota $2(S - E)$. Uvedomme si ale, že ak by daný investor neuplatnil opciu predčasne, t.j. neshout-oval by, tak by jeho výsledným payoffom bola hodnota iba $S - E$, pre $S > E$. Keďže sa výsledné hodnoty payoffov nerovnajú pre prípad so shout-ovaním a bez shout-ovania, tak nastáva arbitrážna príležitosť. Teda takýto payoff pre opciu nie je prípustný. Z toho dôvodu zavedieme určitý poplatek, ktorý majiteľ opcie musí uhradiť v čase shout-ovania za benefit získania klasickej európskej opcie.

Vzhľadom na to, že potrebujeme, aby výsledný payoff v čase expirácie T mal tvar $\max(S - E, 0)$, tak vhodným príplatkom je $S - E$. Aby bola uvedená čiastka konzistentná v každom čase t , tak je potrebné ju diskontovať. Teda očakávame, že funkcia vyjadrujúca veľkosť príplatku v každom čase t je suma $(S - E)e^{-r(T-t)}$. V skutočnosti sa však ukázalo, že správnym korekčným poplatkom by mala byť suma $(S - E)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$, čo ukážeme neskôr v tejto kapitole. Potom pridaním tohto korekčného člena do vyjadrenia (18), dostávame správny tvar **okamžitého payoffu modifikovanej shout call opcie**:

$$\begin{aligned}\bar{V}(S, t) &= \max(S - E, 0) + Se^{-D(T-t)}\Phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - (S - E)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \\ &= \max(S - E, 0) + S(e^{-D(T-t)}\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)).\end{aligned}\tag{19}$$

Porovnaním s payoffom klasickej shout call opcie (13) vidíme, že predpisy sú takmer identické. Jediným rozdielom, v ktorom sa odlišujú, sú hodnoty argumentov $\Phi(x)$. Podotýkame však, že výraz $S(e^{-D(T-t)}\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}\Phi(d_2))$ už nie je európskou opciou, iba jej je veľmi podobný. Preto túto opciu označujeme ako modifikovanú shout call opciu. V nasledujúcich kapitolách si ukážeme aké zmeny tento nenápadný rozdiel spôsobuje.

3.2 Formulácia úlohy

Keďže tentokrát oceňujeme iba o modifikáciu klasickej shout call opcie, tak rovnako predpokladáme, že môžeme použiť oceňovací model založený na riešení úlohy o lineárnej komplementarite. Aby sme mohli danú úlohu takto formulovať, musíme znovu overiť, či zvolený okamžitý payoff $\bar{V}(S, t)$ spĺňa príslušnú nerovnosť pre Black-Scholesov oceňovací vzorec, teda inými slovami, či platí:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial \bar{V}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial S^2} - r\bar{V} \leq 0.\tag{20}$$

Pre zjednodušenie úlohy rozpíšme vzorec (19) nasledovne:

$$\bar{V}(S, t) = \max(S - E, 0) + V^{ec}(S, t) + (E - S)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

kde $V^{ec}(S, t)$ je označenie pre cenu európskej call opcie definovanú vzorcom (5). Vďaka linearite Black-Scholesovej rovnice popísanej v [4], môžeme skúmať platnosť nerovnosti (20) pre každý zo sčítancov osobitne. Z doterajších poznatkov z kapitoly 1.2.3 vieme, že

člen $\max(S - E, 0)$ splňa nerovnosť (20) a z kapitoly 1.1.1, že člen $V^{ec}(S, t)$ dokonca splňa (2). Potom stačí ukázať, že výraz $\hat{V}(S, t) = (E - S)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$ tiež splňa nerovnosť (20).

Tvrdenie: Funkcia $\hat{V}(S, t) = (E - S)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$ splňa nerovnosť (20).

Dôkaz. Z kapitoly 1.1.1 vieme, že cena európskej call opcie $V^{ec}(S, t)$ splňa Black-Scholesovu diferenciálnu rovnicu, teda inými slovami vieme, že Black-Scholesov funkcionál ceny európskej opcie je nulový:

$$B[V^{ec}(S, t)] = B[Se^{-D(T-t)}\Phi(d_1) - Ee^{r(T-t)}\Phi(d_2)] = 0.$$

Uvažujme nasledovnú funkciu $\bar{\bar{V}}(S, t)$:

$$\bar{\bar{V}}(S, t) = V^{ec}(S, t) + Se^{r(T-t)}\Phi(d_2) - Se^{-D(T-t)}\Phi(d_1).$$

Úpravou tohto výrazu dostávame dôležitý vzťah medzi pomocnou funkciou $\bar{\bar{V}}(S, t)$ a našou skúmanou funkciou $\hat{V}(S, t)$:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{V}}(S, t) &= Se^{-D(T-t)}\Phi(d_1) - Ee^{r(T-t)}\Phi(d_2) + Se^{r(T-t)}\Phi(d_2) - Se^{-D(T-t)}\Phi(d_1) \\ &= -(E - S)e^{r(T-t)}\Phi(d_2)\end{aligned}$$

$$\bar{\bar{V}}(S, t) = -\hat{V}(S, t).$$

Opätovným využitím linearity Black-Scholesovej rovnice dostávame:

$$B[\bar{\bar{V}}(S, t)] = B[V^{ec}(S, t)] + B[Se^{r(T-t)}\Phi(d_2)] - B[Se^{-D(T-t)}\Phi(d_1)]. \quad (21)$$

Keďže vieme, že $B[V^{ec}(S, t)]$ je nula, stačí zistiť aké znamienko majú zvyšné 2 členy v predchádzajúcej rovnici.

1. Nech $V(S, t) = Se^{-D(T-t)}\Phi(d_1)$

Pre takto definovanú funkciu platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &= DSe^{-D(T-t)}\Phi(d_1) + Se^{-D(T-t)}\Phi'(d_1) \left[\frac{\ln(\frac{S}{E}) - (r - D + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{2\sigma(T - t)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ \frac{\partial V}{\partial S} &= e^{-D(T-t)}\Phi(d_1) + \frac{e^{-D(T-t)}\Phi'(d_1)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{e^{-D(T-t)}\Phi'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T - t}} + \frac{e^{-D(T-t)}\Phi''(d_1)}{S\sigma^2(T - t)}.\end{aligned}$$

Ako si môžeme všimnúť, tu sa výrazne prejavuje prvý vplyv zmeny argumentov distribučnej funkcie $\Phi(x)$. Dosadením príslušných parciálnych derivácií do ľavej strany Black-Scholesovej rovnice (2) dostávame:

$$\begin{aligned}
B[V(S, t)] = & \boxed{DSe^{-D(T-t)}\Phi(d_1)} + \boxed{Se^{-D(T-t)}\Phi'(d_1) \left[\frac{\ln(\frac{S}{E}) - (r - D + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{2\sigma(T-t)^{\frac{3}{2}}} \right]} + \\
& \boxed{+(r-D)Se^{-D(T-t)}\Phi(d_1)} + \boxed{\frac{(r-D)Se^{-D(T-t)}\Phi'(d_1)}{\sigma\sqrt{T-t}}} + \\
& + \boxed{\frac{Se^{-D(T-t)}\Phi'(d_1)\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}}} + \boxed{\frac{Se^{-D(T-t)}\Phi''(d_1)}{2(T-t)}} - \\
& \boxed{-rSe^{-D(T-t)}\Phi(d_1)}.
\end{aligned}$$

Súčet členov v červených rámkoch je hneď na prvý pohľad nulový. Využitím vzťahu $\Phi''(x) = \Phi'(x)(-x)$ sa dá ukázať, že rovnako aj súčet členov v modrých rámkoch je nulový. Teda sme ukázali, že $B[Se^{-D(T-t)}\Phi(d_1)] = 0$.

2. Nech $V(S, t) = Se^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$

Pre takto definovanú funkciu platí:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} &= rSe^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + Se^{-r(T-t)}\Phi'(d_2) \left[\frac{\ln(\frac{S}{E}) - (r - D - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{2\sigma(T-t)^{\frac{3}{2}}} \right] \\
\frac{\partial V}{\partial S} &= e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + \frac{e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)}{S\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{e^{-r(T-t)}\Phi''(d_2)}{S\sigma^2(T-t)}.
\end{aligned}$$

Dosadením príslušných parciálnych derivácií do ľavej strany Black-Scholesovej rovnice (2) dostávame:

$$\begin{aligned}
B[V(S, t)] = & \boxed{rSe^{-r(T-t)}\Phi(d_2)} + \boxed{Se^{-r(T-t)}\Phi'(d_2) \left[\frac{\ln(\frac{S}{E}) - (r - D - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{2\sigma(T-t)^{\frac{3}{2}}} \right]} + \\
& + (r-D)Se^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + \boxed{\frac{(r-D)Se^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)}{\sigma\sqrt{T-t}}} + \\
& + \boxed{\frac{Se^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}}} + \boxed{\frac{Se^{-r(T-t)}\Phi''(d_2)}{2(T-t)}} - \\
& \boxed{-rSe^{-r(T-t)}\Phi(d_2)}.
\end{aligned}$$

Tentokrát sa vynulujú iba 2 výrazy v červených rámkoch. Využitím vzťahu $\Phi''(x) = \Phi'(x)(-x)$ dokážeme spojiť dané 4 výrazy v modrých rámkoch do jedného jednoduchšieho. Teda po zjednodušení dostaneme:

$$B[V(S, t)] = (r - D)Se^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + Se^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\frac{\sigma}{\sqrt{(T-t)}} \geq 0.$$

Kvôli tomu, že v tejto práci uvažujeme prípad, keď $r > D$, tak je jasné, že daný výraz je nezáporný, čím sme ukázali, že $B[Se^{-r(T-t)}\Phi(d_2)] \geq 0$.

Keď sa teraz vrátíme k rovnici (21) a doplníme do nej získané hodnoty, dostávame:

$$B[\bar{V}(S, t)] = 0 + B[Se^{r(T-t)}\Phi(d_2)] - 0 = B[Se^{r(T-t)}\Phi(d_2)] \geq 0.$$

Aplikovaním vzťahu medzi $\bar{V}(S, t)$ a $\hat{V}(S, t)$ dostávame:

$$B[\hat{V}(S, t)] \leq 0,$$

tak ako sme chceli ukázať. □

Preto môžeme **úlohu oceňovania modifikovanej shout call opcie** formulovať ako úlohu o lineárnej komplementarite:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV \right) \cdot (V(S, t) - \bar{V}(S, t)) &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV &\leq 0 \\ V(S, t) &\geq \bar{V}(S, t) \\ \forall S \in [0, \infty) \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \tag{22}$$

pričom $\bar{V}(S, t)$ je okamžitý payoff modifikovanej shout call opcie definovaný pomocou (19).

3.3 Numerické riešenie

Pretože modifikované shout call opcie oceňujeme rovnakým modelom ako shout call a americké call opcie, tak budeme používať aj rovnaký numerický model (17), ktorý sme opísali v kapitole 2.3. Opäť jedinou zmenou, ku ktorej dochádza v tomto numerickom

modeli, je zmena okrajovej podmienky pre $S_{max} \rightarrow \infty$, ktorú definujeme na základe predpisu okamžitého payoffu:

$$V(S_{max}, t) = S_{max} - E + S_{max} \cdot (e^{-D(T-t)}\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)), \quad \forall t \in [0, T].$$

Potom je jasné, že sa v danom modeli (17) musí zmeniť aj funkcia $g(x, \tau)$, ktorá označuje transformovaný payoff modifikovanej shout call opcie následovne:

$$g(x, \tau) = Ee^{\alpha x + \beta \tau} [\max(e^x - 1, 0) + e^x (e^{-D\tau}\Phi(\hat{d}_1) - e^{-r\tau}\Phi(\hat{d}_2))],$$

Treba si dať pozor, pretože argumenty $\hat{d}_1, \hat{d}_2$ sú tentokrát dané vzťahmi:

$$\hat{d}_1 = \frac{x + (r - D + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \hat{d}_2 = \frac{x + (r - D - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

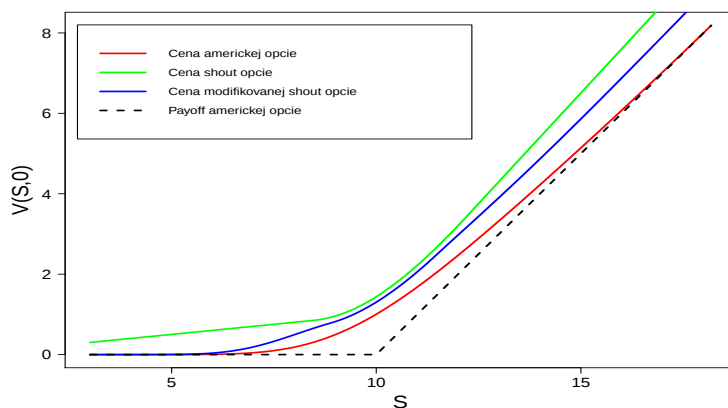
V následujúcej kapitole sa zameriame na výsledky implementácie príslušnej teórie pre americké, shout a modifikované shout call opcie do softvéru R.

4 Porovnanie opcí

V tejto kapitole poskytujeme grafické znázornenia a číselnú interpretáciu numerických metód oceňovania americkej, shout a modifikovanej shout opcie, a ich vzájomné porovnanie. Pre všetky spomenuté opcie uvažujeme prípad call opcí. Ako sme už spomínali predtým, na každý zo spomínaných derivátov sme aplikovali tzv. PSOR numerickú schému definovanú ako (12), ktorá je detailnejšie popísaná v [4, p. 178-180]. Metódu sme implementovali do prostredia softvéru R.

4.1 Krivky cien opcí

Ako prvé opisujeme výsledky výpočtu cenovej krivky pre príslušné opcie. Na Obr.8 vidíme porovnanie kriviek predstavujúcich ceny daných troch opcí prislúchajúcich času $t = 0$. Inými slovami vidíme grafické zobrazenie toho, aká musí byť cena americkej, shout a modifikovanej shout call opcie, keď nám zostáva do expirácie ešte T času.



Obr. 8: Cena americkej call opcie, shout call opcie a modifikovanej shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ porovnané s okamžitým payoffom americkej opcie.

Vidíme, že graf potvrdzuje domnienku, že cena modifikovanej shout call opcie musí byť vyššia ako cena americkej call opcie, ale zároveň je nižšia ako cena klasickej shout call opcie. Tento výsledok podporujú aj výsledky zobrazené v tabuľke 1:

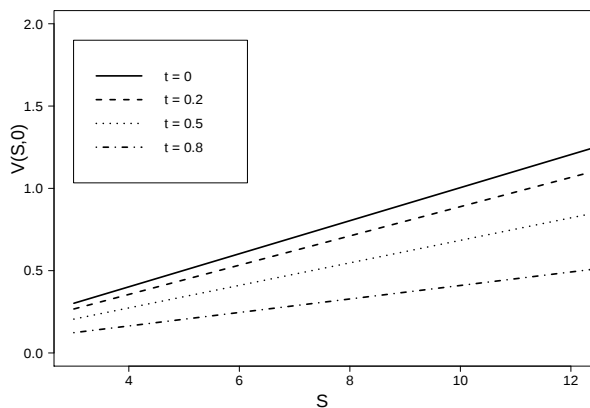
cena opcie \ S	5	10	15	20	30	40	50
$V_A(S, 0)$	0.19	1.00	5.14	10.00	20.00	30.00	40.00
$V_{MS}(S, 0)$	0.49	1.30	5.86	11.07	21.60	32.13	42.66
$V_S(S, 0)$	0.80	1.44	6.51	12.01	23.01	34.02	45.02

Tabuľka 1: Porovnanie vypočítaných cien americkej call opcie (V_A), shout call opcie (V_S) a modifikovanej shout call opcie (V_{MS}) so vstupnými hodnotami parametrov $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma^2 = 0.2$ v čase $t = 0$.

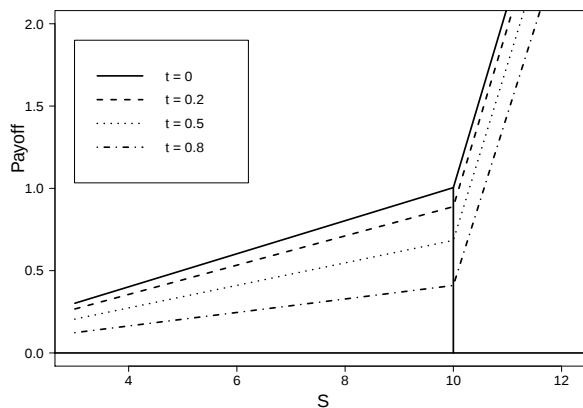
Ďalej si môžeme všimnúť, že každá z príslušných kriviek má odlišný tvar. Zatiaľ, čo cena americkej a shout opcie sú nepochybne konvexnými funkciami v premennej S , tak krivka ceny pre modifikovanú shout opciu sa tak na prvý pohľad nejaví. Rovnako je vidieť, že cena klasickej shout call opcie sa na intervale $S \in (0, E)$ pohybuje v relatívne výrazne vyšších hodnotách ako ceny zvyšných dvoch opcií. Obidve tieto pozorovania sú dôsledkom výskytu ceny európskej opcie v okamžitom payoffe shout a modifikovanej shout call opcie. V nasledujúcej časti sa pozrieme na priebeh okamžitých payoffov pre tieto 2 opcie.

4.1.1 Shout call opcie

Pripomeňme si predpis okamžitého payoffu pre shout call opcie (13). Uvedomme si, že argumenty distribučnej funkcie $\tilde{d}_1$ a $\tilde{d}_2$ v tomto prípade nezávisia od S , ale iba od času t . Z toho vyplýva, že v danej časovej vrstve t , je celý výraz $e^{-D(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1) - e^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2)$ iba konštantou a preto je cena európskej at-the-money call opcie obyčajnou lineárnou funkciou v premennej S . Treba si však uvedomiť, že so zmenou času sa mení aj sklon tejto lineárnej funkcie. Konkrétne s časom t blížiacim sa do expirácie T je sklon stále nižší a nižší, ako zobrazujeme na Obr. 9. Ekonomickým vysvetlením tohto klesania je, že čím sme bližšie k času expirácie T , tým „istejší“ je vývoj ceny PA, teda nesieme menšie riziko ako pre dlhší časový úsek, čím sa cena európskej opcie znižuje. V našom príklade je na počiatku, t.j. v čase $t = 0$, táto konštanta rovná 0.1004369. Keďže na intervale $S \in (0, E)$ je $\max(S - E, 0) = 0$, tak okamžitý payoff v čase $t = 0$ je lineárna priamka so sklonom približne 0.1, čo je vidieť aj na grafe na Obr. 9. Naopak pre $S \in [E, \infty)$, je $\max(S - E, 0) > 0$, teda na tomto intervale sa okamžitý payoff mení na lineárnu priamku so strmším sklonom, čo zobrazujeme na Obr.10.



Obr. 9: Cena európskej at-the-money call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ vykreslená v rôznych časových vrstvách z intervalu $(0,1)$.



Obr. 10: Okamžitý payoff shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ vykreslený v rôznych časových vrstvách z intervalu $(0,1)$.

4.1.2 Modifikované shout call opcie

V tejto časti si spomeňme na predpis okamžitého payoffu pre modifikovanú shout call opciu (19). Ako sme si povedali v kapitole 3, tento payoff je tvorený americkým payoffom a členom, ktorý výrazne pripomína európsku at-the-money call opciu. Pre zjednodušenie zavedieme následovné značenie tohto člena:

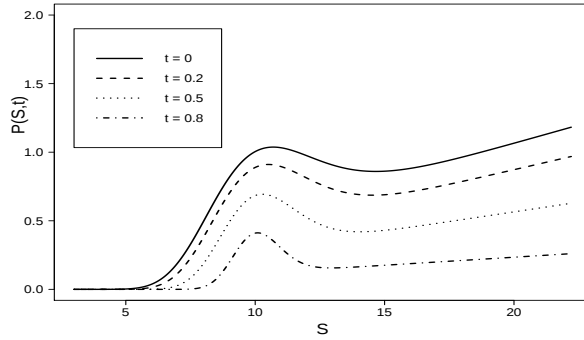
$$P(S, t) = S(e^{-D(T-t)}\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)),$$

kde pre argumenty distribučnej funkcie $\Phi(x)$ platí:

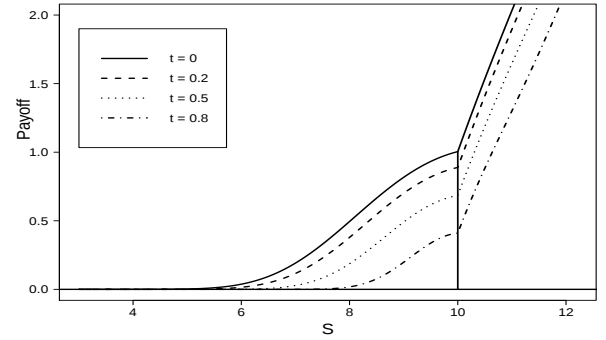
$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - D + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - D - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}.$$

Tentokrát je dôležité uvedomiť si, že argumenty distribučnej funkcie d_1 a d_2 závisia aj od S . Z toho vyplýva, že v danej časovej vrstve t , už nebude $P(S, t)$ iba lineárnou funkciou v závislosti od premennej S , ale bude trochu komplikovanejšia. Ako môžeme vidieť na Obr. 11, funkcia je pre malé hodnoty S konvexná, potom sa zmení na konkávnu, keď sa blíži k expiračnej cene, v tomto prípade k hodnote 10 a do tretice sa opäť pretočí na konvexnú funkciu rastúcu do nekonečna. To je dôvodom prečo sa krivka ceny modifikovanej shout call opcie stále viac a viac vzdáva od ceny americkej opcie s hodnotou S rastúcou do nekonečna na Obr.8. Rovnako ako v prípade klasickej shout call opcie sa s časom t

blížiacim sa k expirácii znižujú hodnoty tejto krivky. Navyše je z grafov na Obr.11 a Obr. 9 čitateľné, že hodnoty $P(S, t)$ sú nižšie ako hodnoty európskej at-the-money call opcie pre všetky hodnoty PA. Preto je naozaj vo výsledku cena klasickej shout call opcie vyššia ako cena modifikovanej shout call opcie, ako ukazuje Obr. 8.



Obr. 11: Priebeh funkcie $P(S, t)$ so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ vykreslený v rôznych časových vrstvách z intervalu $(0,1)$.



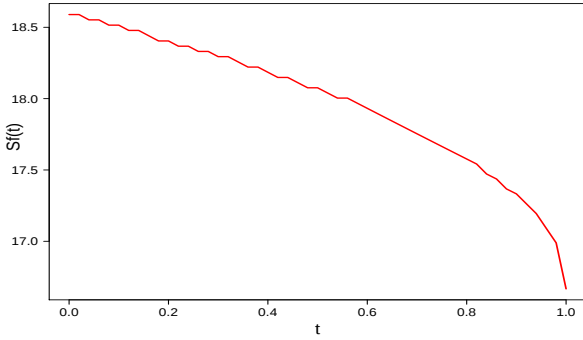
Obr. 12: Okamžitý payoff modifikovanej shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ vykreslený v rôznych časových vrstvách z intervalu $(0,1)$.

4.2 Hranica predčasného uplatnenia opcie

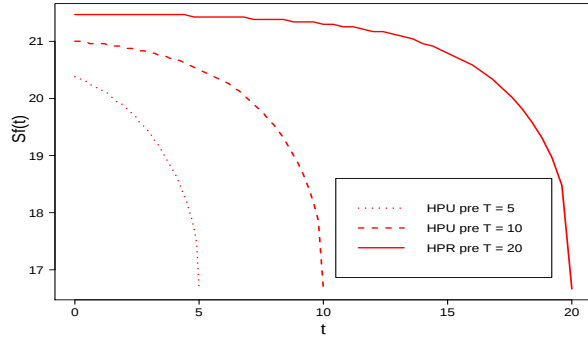
V tejto kapitole sa vraciame k téme optimálneho predčasného uplatnenia opcie, ktoré sme už načrtli v kapitole 1.2.2. Teda zaoberáme sa oblasťami prílepenia na payoff cien americkej, shout a modifikovanej shout call opcie. Ako sme v predchádzajúcej kapitole uviedli, s meniacim sa časom do expirácie t sa mení aj okamžitý payoff, čím sa mení aj samotná cena opcií. Z toho vyplýva, že v každom čase t sa bude cena opcie priliepať na payoff pre inú hodnotu PA, teda bude iná hranica predčasného uplatnenia. Preto môžeme, rovnako ako v [4, p. 152-153] alebo článku [3], považovať túto hranicu predčasného uplatnenia opcie za funkciu závislú od času t a označíme ju ako $S_f(t)$. Na najbližších stranách uvidíme výsledky správania sa hranice predčasného uplatnenia pre americké, shout a modifikované shout call opcie.

4.2.1 Americké call opcie

Ako sme už spomínali predtým, cena opcie klesá s rastúcim časom t , teda môžeme očakávať, že aj bod prvého prilepenia na payoff sa bude znižovať. To znamená, že môžeme očakávať, že funkcia $S_f(t)$ bude klesajúcou funkciou. Táto domnienka je potvrdená a zobrazená na nasledujúcom Obr. 13.



Obr. 13: Priebeh funkcie hranice predčasného uplatnenia americkej call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$.



Obr. 14: Priebeh funkcie hranice predčasného uplatnenia (HPU) americkej call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a rôzne časy expirácie T .

Ako si môžeme všimnúť na Obr. 14 s rastúcim časom do expirácie T sa tvar krivky $S_f(t)$ zachováva. Taktiež vidíme, že hodnota v bode $t = 0$ narastá čoraz menej a menej a to môže znamenať, že sa blíži k svojej limite, označme ju $\hat{S}$. Ako je uvedené v [1], táto limita naozaj existuje a je vyjadrená ako:

$$\hat{S} = \frac{E}{1 - \frac{1}{\delta}}$$

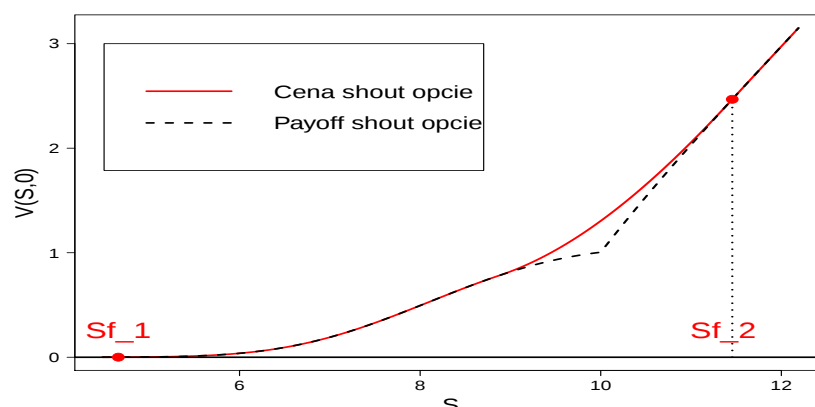
$$\delta = \frac{1}{2\sigma^2} \left[\sigma^2 - 2(r - D) + \sqrt{4(r - D)^2 + 4(r - D)\sigma^2 + \sigma^4} \right].$$

Ďalšie vlastnosti tejto krivky sú známe a odvodené napríklad v [2],[4] alebo [5], preto sa nimi veľmi nebudeme zaoberať a radšej premiestnime našu pozornosť na výsledky pre shout call opcie a modifikované shout call opcie.

4.2.2 Modifikované shout call opcie

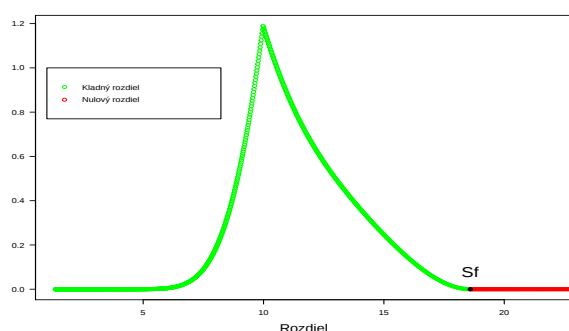
Aplikovaním predchádzajúcej analýzy na modifikované shout call opcie, dostávame zaujímavý výsledok, zobrazený na Obr.15. Vidíme, že v tomto prípade vznikajú až dve hranice

predčasného uplatnenia, teda dve hodnoty PA, počínajúc ktorými je cena modifikovanej shout opcie rovná payoffu danej opcie. Okamžitý payoff pre túto call opciu je v porovnaní s okamžitým payoffom pre americkú call opciu výrazne prísnejším ohraňčením. Dôsledkom toho je, že cena modifikovanej shout call opcie veľmi tesne kopíruje príslušný payoff a je medzi nimi iba malá odchýlka. Kvôli týmto malým cenovým rozdielom je ťažké

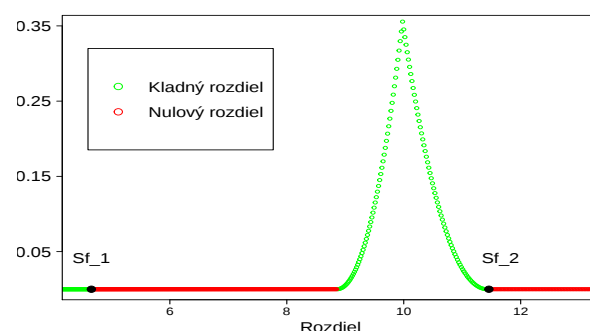


Obr. 15: Vypočítaná cena modifikovanej shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ porovnaná s jej okamžitým payoffom a vyznačenými bodmi napojenia na payoff.

z daného grafu vyčítať kedy sa hodnota ceny opcie nalepí na payoff. Pre lepšiu predstavu prikľadáme Obr.16 a Obr.17, na ktorých znázorňujeme rozdiel ceny opcie a jej príslušného payoffu v čase $t = 0$. Na Obr.16 je zobrazený rozdiel príslušných kriviek z Obr.6. Ako je z



Obr. 16: Rozdiel ceny americkej call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ a jej payoffu v čase $t = 0$.

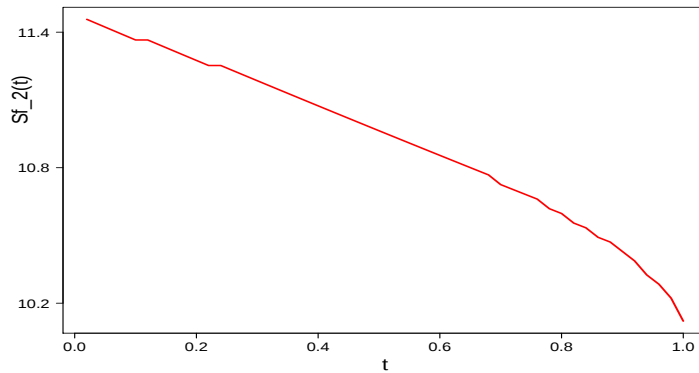


Obr. 17: Rozdiel ceny modifikovanej shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ a jej payoffu v čase $t = 0$.

grafu jasné, v prípade americkej call opcie sa cena rovná payoffu iba na jednom intervale, zatiaľ čo Obr.17 dokazuje, že v prípade modifikovanej shout call opcie sú takéto intervaly dva. Z toho dôvodu zavedieme nasledovné označenie. Bod napojenia sa na payoff na intervale $(0, E)$ budeme nazývať **dolná hranica predčasného uplatnenia** a označíme ho ako $S_f^1(t) \forall t \in [0, T]$. Bod napojenia sa na payoff na intervale $[E, \infty)$ budeme nazývať **horná hranica predčasného uplatnenia** a označíme ho ako $S_f^2(t) \forall t \in [0, T]$.

4.2.2.1 Horná hranica predčasného uplatnenia

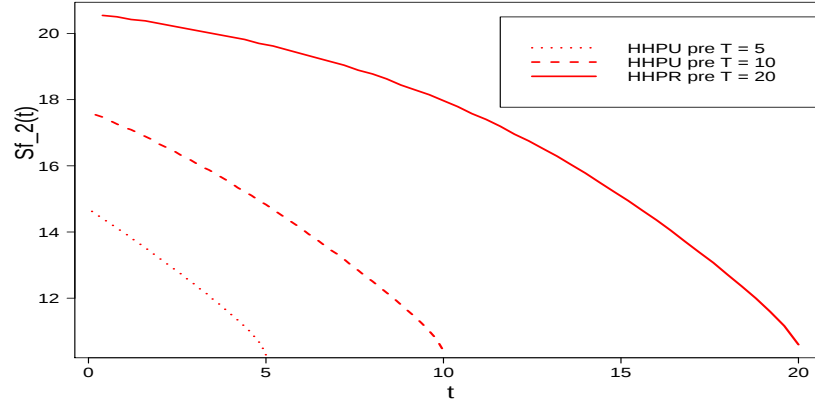
V tejto kapitole sa zameriavame na zobrazenie a vysvetlenie výsledkov spojených s analýzou hornej hranice predčasného uplatnenia. Vzhľadom na to, že modifikovaná shout call opcia má pôvod v americkej opcii, tak očakávame, že priebeh $S_f^2(t)$ bude podobný ako v prípade americkej call opcie. Ako môžeme vidieť na Obr. 18, toto očakávanie sa potvrdilo. Teda



Obr. 18: Priebeh hornej hranice predčasného uplatnenia modifikovanej shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ na intervale $[0, 1]$.

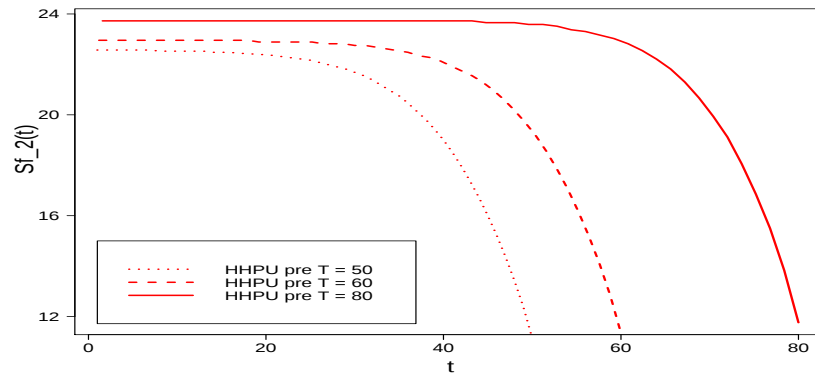
čím je aktuálny čas t bližšie k času do expirácie T , tak je optimálne uplatniť modifikovanú shout opciu pri čoraz nižšej hodnote PA. Toto je veľmi prirodzené, keďže pre opciu platí, že s aktuálnym časom t blížiacim sa k času expirácie T je jej hodnota čoraz nižšia, teda sa skôr naliepa na daný payoff. Výrazný rozdiel oproti americkej call opcii je však v obore hodnôt danej krivky. Ak porovnáme Obr.13 s Obr.18, tak si všimneme, že v prípade času do expirácie $T = 1$ sú hodnoty $S_f^2(t)$ oveľa nižšie ako v prípade americkej hranice predčasného uplatnenia $S_f(t)$. To je spôsobené práve tým, ako sme už spomínali, že okamžitý payoff modifikovanej shout call opcie je prísnejším ohraňčením ako payoff americkej call opcie tzn. krivka modifikovaného shout payoffu nadobúda väčšie hodnoty

ako krivka amerického payoff. Zvyšovaním času do expirácie T , sa prirodzene hodnoty



Obr. 19: Priebek hornej hranice predčasného uplatnenia (HHPU) modifikovanej shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a meniacim sa parametrom $T \in \{5, 10, 20\}$.

krivky $S_f^2(t)$ zväčšujú, no jej tvar sa zachováva, ako je zobrazené na Obr.19. V porovnaní s americkou call opciou je však tento priebeh plynulejší, bez náhleho spádu v blízkosti expiračného času. Ako ale ukazujeme na Obr.20, pre dostatočne veľké hodnoty parametru T sa tvar kriviek už výrazne zhoduje s tými na Obr. 14. Ďalej si všimnime, že rovnako ako v prípade americkej call opcie sa nárast hodnoty bodu $S_f^2(0)$ stále viacej a viacej znižuje a tým vzniká otázka, či pre hodnotu $S_f^2(0)$ tiež existuje limita alebo nie. V [1]



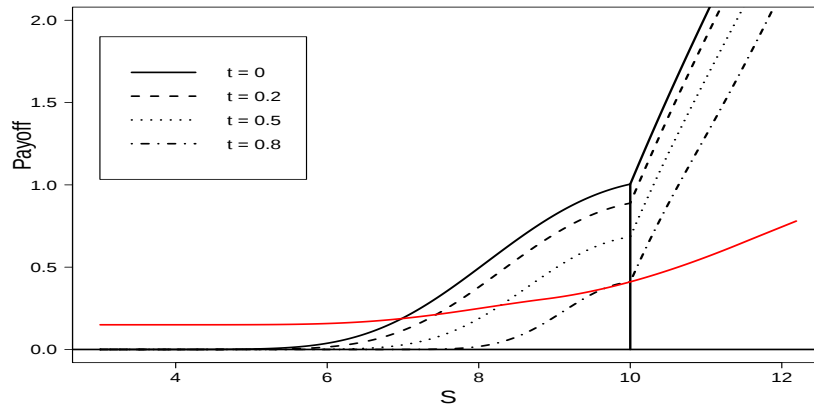
Obr. 20: Priebek hornej hranice predčasného uplatnenia (HHPU) modifikovanej shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a meniacim sa parametrom $T \in \{50, 60, 80\}$.

predpokladajú, že vzhľadom na to, že shout opcia je odvodená z americkej opcie, tak pre

$t \rightarrow \infty$ bude nadobúdať rovnakú limitu ako daná americká opcia. Na základe toho by sme mohli predpokladať, že keďže naša modifikovaná opcia je úpravou klasickej shout opcie, tak by tiež mohla nadobúdať túto limitu. Avšak touto myšlienkou sa v tejto práci zaoberať nebudeme a zostáva otvorená ďalšiemu skúmaniu.

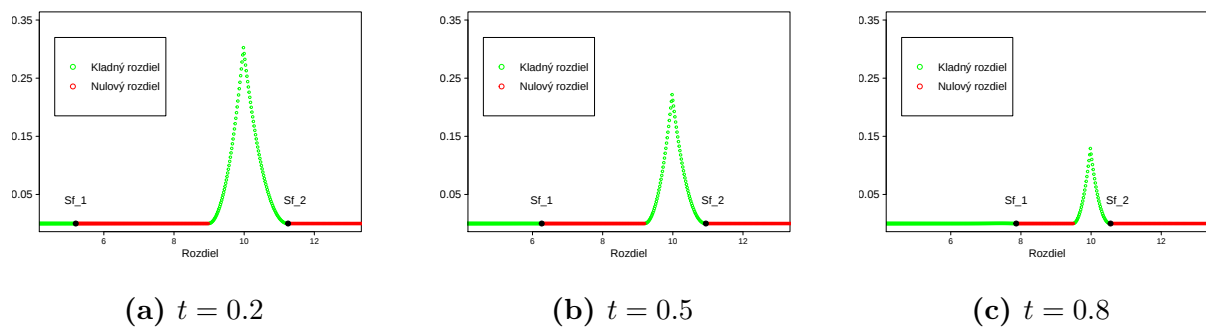
4.2.2.2 Dolná hranica predčasného uplatnenia

V tejto kapitole sa zameriavame na zobrazenie a vysvetlenie výsledkov spojených s analýzou dolnej hranice predčasného uplatnenia. Aký bude priebeh $S_f^1(t)$ už nemôžeme predpokladať na základe výsledkov americkej opcie, keďže táto hranica pre ňu neexistuje. Pri-



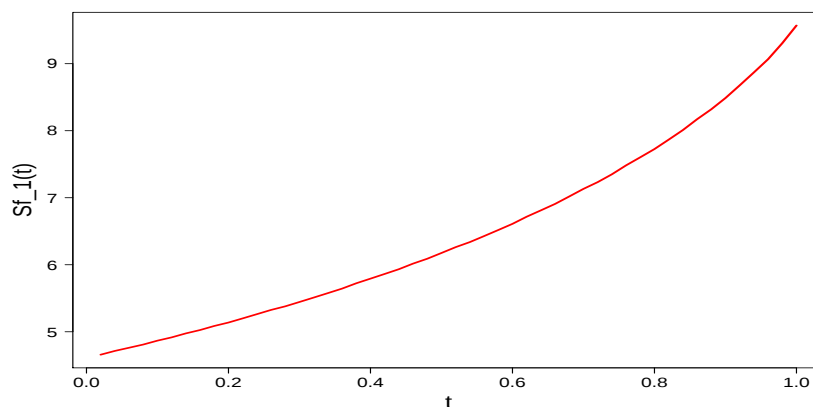
Obr. 21: Porovnanie priesečníkov ceny opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ s jej okamžitým payoffom vykresleným v rôznych časových vrstvách z intervalu $(0,1)$.

pomeňme si preto priebeh okamžitého payoffu modifikovanej shout call opcie. Na Obr. 21 vidíme, že s časom t blížiacim sa k času expirácie T sa konkávna časť grafu, nazvime ju „kopček“, čoraz viac a viac posúva smerom doprava. Preto sa aj krivka ceny príslušnej opcie naliepa na daný kopček pre čoraz väčšiu hodnotu PA, ako zobrazujeme na Obr. 21, a to aj napriek tomu, že v rastúcim čase klesá aj cenová krivka danej opcie. Aby sme túto teóriu ešte viacej podporili ponúkame k nahliadnutiu súbor grafov na Obr.22, ktorý ukazuje, že klesanie cenovej krivky v čase je naozaj pomalšie ako klesanie okamžitého payoffu danej opcie. Dôsledkom je, že sa hodnota PA, pre ktoré sa daná cenová krivka naliepa na spomenutý payoff, stále zvyšuje. Z toho dôvodu očakávame, že funkcia $S_f^1(t)$ bude mať opačný charakter v porovnaní s funkciou $S_f^2(t)$, teda bude rastúcou funkciou.



Obr. 22: Rozdiel ceny modifikovanej shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ a jej okamžitého payoffu v rôznych časových vrstvách $t \in (0, 1)$.

Na grafe na Obr.23 zobrazujeme priebeh funkcie $S_f^1(t)$, ktorý túto domnienku potvrdzuje. Teda môžeme povedať, že pokiaľ sa cena PA nachádza v intervale $(0, E)$, tak čím je majiteľ danej opcie bližšie k času expirácie T , tým treba, aby sa PA obchodovalo s vyššou cenou, aby sa mu oplátilo uplatniť opciu.

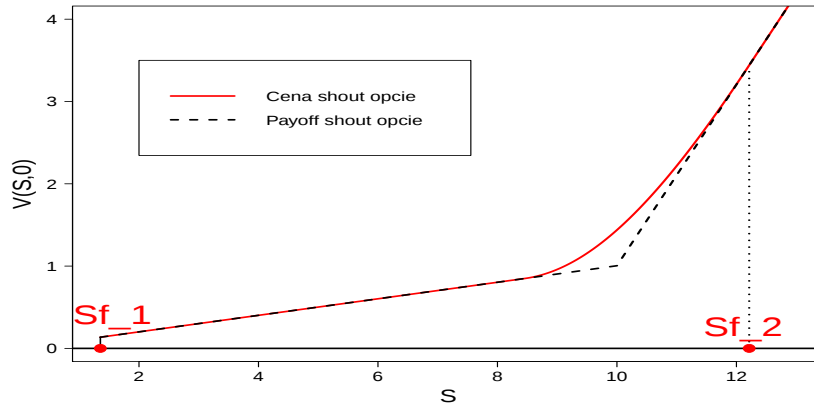


Obr. 23: Priebeh dolnej hranice predčasného uplatnenia modifikovanej shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ na časovom intervale $(0,1)$.

4.2.3 Shout call opcie

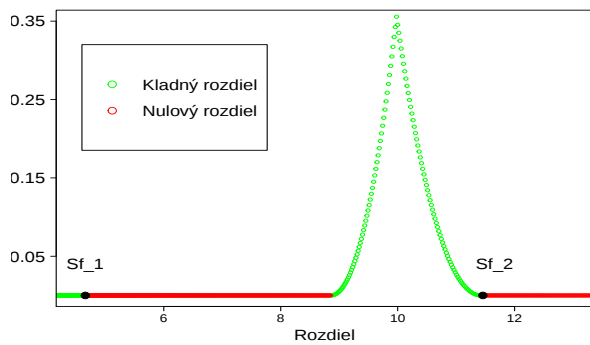
V tejto kapitole sa pozrieme na predchádzajúcu analýzu z pohľadu klasických shout call opcií. Na Obr.24 zobrazujeme body prvého prilepenia na okamžitý payoff. Vidíme, že aj v tomto prípade vznikajú až dve hranice predčasného uplatnenia, teda dve hodnoty PA,

počínajúc ktorými je cena shout opcie rovná payoffu danej opcie. Okamžitý payoff pre túto call opciu je v porovnaní s okamžitými payoffmi predchádzajúcich opcií ešte prísnejším ohrozením. Dôsledkom toho je, že cena klasickej shout call opcie sa naliepa na príslušný payoff hneď od začiatku, t.j. od najnižšej ceny PA. Kvôli malým cenovým rozdielom je

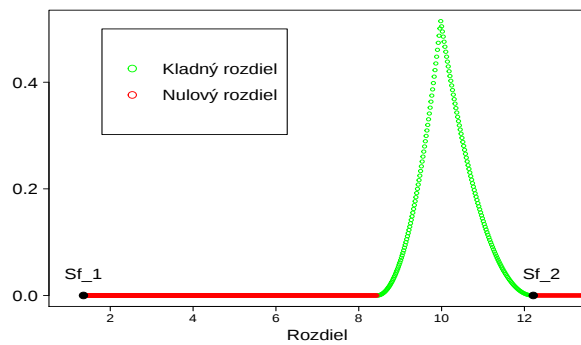


Obr. 24: Vypočítaná cena shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ porovnaná s jej okamžitým payoffom a vyznačenými bodmi napojenia na payoff.

ťažké z daného grafu vyčítať kedy sa hodnota ceny opcie rovná okamžitému payoffu. Pre lepšiu predstavu preto prikladáme Obr.25 a Obr.26, na ktorých môžeme porovnať rozdiely



Obr. 25: Rozdiel ceny modifikovanej shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ a jej payoffu v čase $t = 0$.



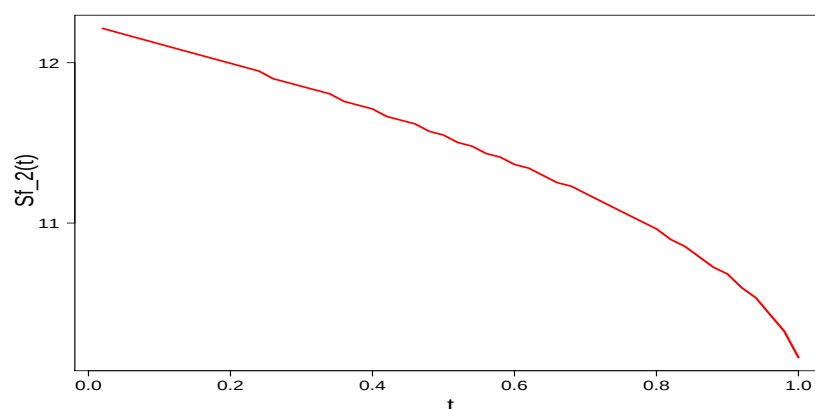
Obr. 26: Rozdiel ceny shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ a jej payoffu v čase $t = 0$.

cien modifikovanej shout a klasickej shout opcie a ich príslušných payoffov v čase $t = 0$.

Ako môžeme vidieť, tak aj pre shout opciu platí, že existujú dva intervaly prilepenia ceny opcie na payoff. Na Obr.25 je zobrazený rozdiel ceny modifikovanej shout call opcie a jej príslušného payoffu. Keď tento graf porovnáme s Obr.26, na ktorom zobrazujeme rozdiel shout call opcie a jej príslušného payoffu, tak si všimneme, že v druhom prípade sa cena naozaj naliepa už hneď od prvej ceny PA. Z toho dôvodu sa aj v tejto kapitole budeme zaoberať $S_f^1(t)$, rovnako ako aj $S_f^2(t)$.

4.2.3.1 Horná hranica predčasného uplatnenia

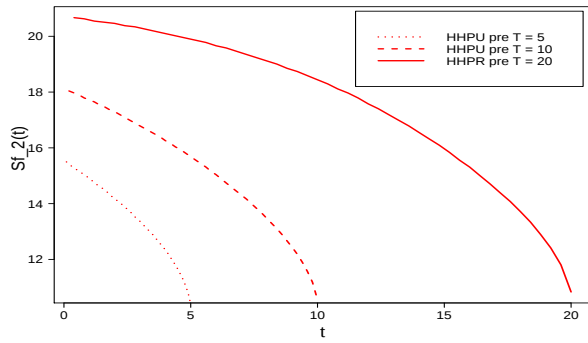
V tejto kapitole sa zameriavame na zobrazenie a vysvetlenie výsledkov spojených s analýzou hornej hranice predčasného uplatnenia klasickej shout call opcie. Tak ako v prípade modifikovaných shout call opcií očakávame, že priebeh $S_f^2(t)$ bude podobný ako v prípade americkej call opcie.



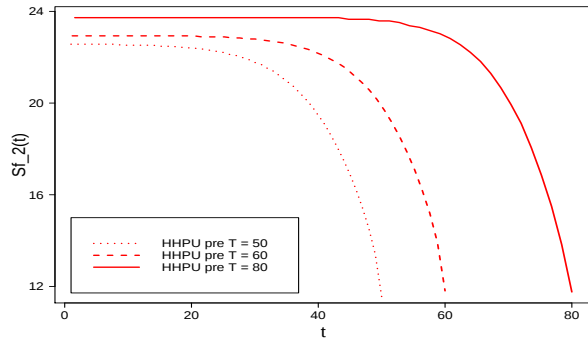
Obr. 27: Priebeh hornej hranice predčasného uplatnenia shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ na časovom intervale $[0, 1]$.

Graf na Obr. 27 jednoznačne dokazuje, že toto očakávanie je opäť pravdivé. Teda stále platí, že čím je aktuálny čas t bližšie k času do expirácie T , tak je optimálne uplatniť shout opciu pri čoraz nižšej hodnote PA. Rovnako ako pri modifikovaných shout opciách, aj tu sa odlišuje obor hodnôt danej krivky od predchádzajúcich opcií. Konkrétne na základe tohto pozorovania vidíme, že hodnoty danej krivky sú nižšie ako pre americké opcie, ale naopak mierne vyššie ako pre modifikované shout opcie. Tabuľka 2 ponúka aj číselné vyjadrenie hodnôt hornej hranice predčasného uplatnenia v čase $t = 0$, t.j. bodu $S_f(0)$, pre každú opciu, aby sme lepšie videli toto porovnanie. Zároveň na Obr.28 a Obr.29

zobrazujeme priebeh krivky $S_f^2(t)$ pre rôzne scenáre vzhľadom na meniaci sa čas expirácie T . Vidíme, že taktiež aj v tomto prípade sa tvar krivky zachováva pre rôzne maturity. Taktiež si môžeme všimnúť, že pre prípady s dostatočne veľkými časmi expirácie T , napr.



Obr. 28: Priebeh hornej hranice predčasného uplatnenia shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a meniacim sa parametrom $T \in \{5, 10, 20\}$.



Obr. 29: Priebeh hornej hranice predčasného uplatnenia shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a meniacim sa parametrom $T \in \{50, 60, 80\}$.

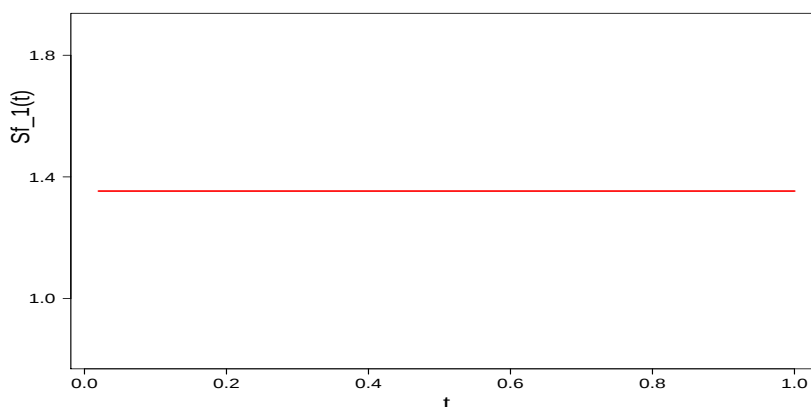
60 a 80 rokov, sa hodnoty kriviek pre dané tri skúmané opcie odlišujú čoraz menej, ba až zanedbateľne a teda šanca, že hodnoty $S_f(0)$ konvergujú k tej istej limite, je pomerne vysoká. Avšak ako sme už spomínali v predchádzajúcej kapitole, túto otázku nechávame otvorenú ďalším pozorovaniam, či prácam.

T	1	5	10	20	50	60
$S_f(0)$	18.59	20.38	21.00	21.47	22.52408	22.88736
$S_{f_{MS}}^2(0)$	11.46	14.62	17.54	20.54	22.56917	22.95613
$S_{f_S}^2(0)$	12.46	15.49	18.04	20.67	22.56917	22.93318

Tabuľka 2: Hodnoty HHPU v $t = 0$ pre americkú (S_f), modifikovanú shout ($S_{f_{MS}}$) a shout opciu (S_{f_S}) pre vstupné hodnoty parametrov $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma^2 = 0.2$ a rôzne časy expirácie T .

4.2.3.2 Dolná hranica predčasného uplatnenia

Na záver tejto práce zobrazujeme výsledok spojený s analýzou dolnej hranice predčasného uplatnenia pre prípad shout opcie. Ako sme mohli vidieť na Obr.24 alebo Obr.26 a ako sme už aj spomenuli skôr, táto hranica v prípade shout opcí nie je nijako špeciálne zaujímavá. Je to obyčajná konštantná funkcia rovnajúca sa hodnote S_{min} , ktorú sme volili počas



Obr. 30: Priebeh dolnej hranice predčasného uplatnenia shout call opcie so vstupnými parametrami $E = 10$, $r = 0.15$, $D = 0.09$, $\sigma = 0.2$ a $T = 1$ na časovom intervale $(0, 1)$.

numerického riešenia ako aproximáciu $S = 0$. To znamená, že cena príslušnej opcie sa hneď na začiatku iteračného procesu numerického riešenia nalepí na okamžitý payoff a odlepí sa až v okolí expiračnej ceny E , ako je vidieť na Obr. 24.

Záver

V tejto práci sme sa venovali numerickému oceňovaniu troch typov call opcií. Najprv sme vybudovali prehľad o numerickom oceňovaní základného typu call opcie tzv. európskej call opcie, z čoho sme premostili do oceňovania trochu zložitejšieho derivátu, akým je americká call opcia. Následne sme v druhej kapitole definovali pojem shout call opcie, vysvetlili princíp tzv. shout-ovania a opísali proces numerického oceňovania takéhoto typu derivátu, ktorý je v podstate iba nadstavbou toho amerického. V tretej kapitole sme sa venovali vlastnej modifikácii shout call opcie. Opísali sme rozdiely oproti klasickej shout call opcií, tak isto ako vlastnosti ktoré majú spoločné. Vysvetlili sme prečo takáto upravená opcia stále môže byť považovaná za opciu oceňovanú pomocou Black-Scholesovej úlohy. Hlavným ťažiskom tejto práce bola štvrtá kapitola, v ktorej sa nám podarilo implementovať tento koncept oceňovania shout call opcií a modifikovaných shout call opcií do prostredia softvéru R. Výsledky sme porovnávali s americkou call opciou. Okrem samotnej ceny daných opcií sme sa venovali aj pozorovaniu priebehu krivky označovanej ako hranica predčasného uplatnenia opcie. Zistili sme, že na rozdiel od amerických call opcií majú shout a modifikované shout call opcie až dve oblasti optimálneho uplatnenia. Na základe získaných výsledkov aj teoretického základu sú najdrahšími opciami klasické shout call opcie. Na druhej strane najlacnejšími z týchto trochu sú americké call opcie. Taktiež sme si všimli, že sa krivky pre spomenuté tri typy opcií limitne blížia k podobnému bodu, avšak existenciu presnej limity sme nezisťovali. Túto tému nechávame otvorenú pre ďalšiu prácu alebo výskum.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Alobaidi, G., Mallier, R., Mansi, S.: *Laplace transforms and shout options*, Acta Mathematica Universitatis Comenianae Vol. LXXX (2011), 79-102
- [2] Kim, I.J.: *The analytic valuation of American options*, Review of Financial Studies 3 (1990), 547-572
- [3] Ševčovič, D.: *Analysis of the free boundary for the pricing of an American call option*, Euro. Journal on Applied Mathematics, 12 (2001), 25 - 37
- [4] Ševčovič, D., Stehlíková, B., Mikula, K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Nakladateľstvo STU, Bratislava, 2009
- [5] Van Moerbeke, P.: *On optimal stopping and free boundary problems*, Arch. Rational Mech. & Analysis 60 (1976), 101 - 148
- [6] Windcliff, H., Forsyth, P.A., Vetzal, K.: *Shout options: a framework for pricing contracts which can be modified by the investor*, J. Comp. Appl. Math. 134 (2001), 213 - 241