

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



APLIKÁCIA MATEMATICKÝCH METÓD NA ANALÝZU
VÝNOSOV AKCIÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**APLIKÁCIA MATEMATICKÝCH METÓD NA ANALÝZU
VÝNOSOV AKCIÍ**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Dominika Víteková
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Aplikácia matematických metód na analýzu výnosov akcií
Application of mathematical methods to analysis of stock returns

Anotácia: V práci sa zaoberáme rôznymi matematickými metódami analýzy výnosov akcií. Používame ich na výber akcií do portfólia, ako aj na určenie váh zvolených akcií v portfóliu. Rôzne stratégie vytvorenia portfólia potom testujeme na reálnych dátach a sledujeme ich úspešnosť.

Vedúci: doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
Dátum zadania: 08.01.2019

Dátum schválenia: 08.01.2019
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Podakovanie Rada by som sa touto cestou podakovala svojej školiteľke doc. RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za cenné odborné rady, usmernenia a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce a rovnako dakujem za pozitívny prístup a čas, ktorý mi venovala. Ďalej by som sa rada podakovala aj svojej rodine, kamarátom, spolužiakom a priateľovi za ich trpezlivosť, optimizmus a podporu, ktoré mi pomáhali počas celého štúdia.

Abstrakt

VÍTEKOVÁ, Dominika: Aplikácia matematických metód na analýzu výnosov akcií [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2020, 82s.

Cieľom našej práce je oboznámiť čitateľa s rôznymi matematickými metódami na analýzu výnosov akcií a následne uvedené metódy navzájom porovnať. Tieto matematické metódy predstavujeme v prvej časti našej práce – začíname uvedením klasického Markowitzovho prístupu na výber optimálnych váh akcií v portfóliu a následne predstavujeme metódu minimálnej kostry grafu, DEA model krížovej efektivity a TODIM algoritmus ako ďalšie prístupy, ktoré rovnako slúžia na výber optimálnych váh akcií v portfóliu. Uvedený TODIM algoritmus zároveň používame aj ako algoritmus na výber vhodnej počiatočnej množiny akcií, ktoré budú vstupovať do optimalizácie portfólia. V druhej časti našej práce sa venujeme aplikáciám týchto metód na reálne dáta výnosov akcií a analýze výsledkov, vďaka ktorým vieme jednotlivé metódy medzi sebou porovnať.

Kľúčové slová: optimalizácia portfólia, TODIM, minimálna kostra grafu, MCDM, Markowitzov model

Abstract

VÍTEKOVÁ, Dominika: Application of mathematical methods to analysis of stock returns [Diploma thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2020, 82p.

The goal of our thesis is to inform the reader about various mathematical methods of stock returns analysis and consequently to compare the mentioned methods. We introduce these mathematical methods in the first chapter of our thesis – we begin with the introduction of the classical Markowitz method dedicated to choice of optimal weights of stocks in a portfolio and then we introduce minimum spanning tree method, DEA cross-efficiency model and TODIM algorithm as additional methods which are also destined for the same aim. We also use the featured TODIM algorithm as an algorithm to choose an appropriate set of stocks to be used in consequential portfolio optimization. In the second part of our thesis we apply the mentioned methods on real data of stock returns and analyse the results, thanks to which we are able to compare the performance of the methods.

Keywords: portfolio optimization, TODIM, minimum spanning tree, MCDM, Markowitz model

Obsah

Úvod	8
1 Metódy výpočtu optimálneho portfólia	10
1.1 Klasická Markowitzova metóda	10
1.2 Metóda minimálnej kostry grafu	12
1.2.1 Základné pojmy	12
1.2.2 Primov algoritmus a hľadanie minimálnej kostry	14
1.2.3 Použitie na siete korelácií	14
1.3 DEA model krížovej efektivity	18
1.3.1 Multikriteriálny rozhodovací problém	18
1.3.2 DEA modelovanie	19
1.3.3 Použitie pri optimalizácii portfólia	20
1.3.4 Metóda krížovej efektivity	20
1.3.5 Upravený model krížovej efektivity	23
1.4 TODIM algoritmus	27
2 Aplikácia metód	31
2.1 Metódy aplikované na celú množinu akcií	32
2.1.1 Rok 2016	33
2.1.2 Rok 2017	36
2.1.3 Rok 2018	46
2.2 Metódy aplikované na vybranú množinu akcií	48
2.2.1 Rok 2016	53
2.2.2 Rok 2017	60
2.2.3 Rok 2018	66
2.3 Zhrnutie a vyhodnotenie	71
Záver	75
Zoznam použitej literatúry	77

Úvod

Optimalizácia portfólia je problém, s ktorým sa ľudia zaoberajú už dlhé desaťročia. Cieľom každého investora je vytvoriť také portfólio, ktoré je najlepšie z množiny všetkých portfólií na základe nejakej požadovanej premennej, ktorou je často najvyšší zisk a najnižšie riziko. K problému optimalizácie portfólia sa dá pristúpiť z rôznych strán – niekedy je najjednoduchšie riadiť sa podľa vlastného úsudku, no vo väčšine prípadov je potrebné použiť nejaký matematický model alebo metódu, ktorý nám naznačí, ako portfólio vytvoriť, aby spĺňalo určité kritériá a očakávania investora. Niektoré z týchto metód môžeme nájsť napríklad v [1], [32] alebo [35] – týmito prístupmi sa budeme zaoberať aj my v našej práci. Metóda na optimalizáciu portfólia ale existuje ešte nespočetne viac – napríklad v [14] sa autori zaoberajú optimalizáciou portfólia pomocou neurónových sietí a v [7] sa autori zasa zaoberajú optimalizáciou portfólia na základe minimalizácie strát tak, aby sa maximálne straty rovnali VAR (value at risk) limitáciám daných investormi.

V oblasti optimalizácie portfólia bol však prelomovým rok 1952, v ktorom Henry Markowitz¹ vo svojich prácach [37, 38] predstavil *modernú teóriu portfólia* a uviedol tzv. Markowitzov model optimalizácie portfólia. Aj keď je tento model optimalizácie portfólia stále aktívne využívaný, v 21. storočí sa do popredia čoraz viac začali dostávať modely strojového učenia, ktorých úlohou je na základe historických dát odhadnúť vývoj trhu či predikovať jeho budúci vývoj. Jednou z oblastí, ktorá sa takejto optimalizácii venuje je napríklad *deep learning*, o ktorej sa môžeme viac dočítať napríklad v [6]. Na druhej strane, vzniká taktiež mnoho metód strojového učenia, ktoré sa využívajú napríklad neurónové siete snažia predikovať vývoj cien akcií v budúcnosti, ale stále nie sú v predikcii vždy až tak úspešné, aby sme ich vedeli s istotou používať práve na optimalizáciu portfólia. Napríklad v [33] sa využívajú na predikciu zatváracích cien akcií neurónové siete s echo stavmi (ESN), v [23] autori naopak používajú na predikciu cien akcií regresiu použitím metódy oporného bodu (angl. *support vector regression*, skr. *SVR*), no v oboch prípadoch sú vyzdvihnuté niektoré nedostatky takejto predikcie. V

¹**Henry Markowitz** (24. 08. 1927 -) – americký ekonóm, súčasne profesor na University of California, San Diego.

prvom rade autori upozorňujú na to, že presnosť predikcie závisí od voľby vhodných vstupných parametrov, v druhom rade upozorňujú na možnosť pretrénovania modelu a v neposlednom rade pripomínajú potrebu vhodne zvolenej množiny tréningových dát. Na jednej strane by mala byť táto množina vstupných dát dostatočne veľká, aby mal model priestor sa správne natrénovať, ale na druhej strane vieme, že cena akcie je časovo závislá a príliš staré dáta by mohli model natrénovať na rozpoznávanie takých vzorov (angl. *patterns*), ktoré už viac nie sú signifikantné pre jej ďalší vývoj.

V našej diplomovej práci sme sa rozhodli zanalyzovať rôzne klasické aj modernejšie metódy na optimalizáciu portfólia a navzájom ich na reálnych dátach porovnať. Cieľom práce je zistiť, ktorá metóda z uvedených prináša najlepšie výsledky, t.j. vytvorí najlepšie portfólio v porovnaní s ostatnými metódami. V prvej časti práce uvedieme jednotlivé metódy, ktoré budeme v práci používať a vysvetlíme postupy, ktoré neskôr aplikujeme. V prvej kapitole predstavíme rôzne metódy na optimalizáciu portfólia – budú sa týkať najmä uvedenia klasického Markowitzovho postupu, prístupu pomocou filtrovaných korelačných matíc a rovnako uvedieme aj DEA model na optimalizáciu portfólia. Na záver prvej kapitoly práce rovnako predstavíme TODIM algoritmus, patriaci medzi multikriteriálne rozhodovacie algoritmy, na základe ktorého vieme upraviť množinu akcií vstupujúcu do optimalizácie. Tiež sa ho pokúsime použiť ako jednu z metód na výpočet optimálneho portfólia. Napokon v druhej – praktickej časti práce na reálne dáta výnosov akcií tieto metódy aplikujeme a zanalyzujeme výsledky, ktoré medzi sebou aj porovnáme.

1 Metódy výpočtu optimálneho portfólia

V prvej časti našej práce sa budeme venovať teoretickému uvedeniu jednotlivých metód, ktoré budeme ďalej v práci používať na optimalizáciu portfólia. Keďže existuje veľmi veľa metód zaoberajúcich sa touto tematikou a ich spracovanie by prekračovalo rozsah diplomovej práce, rozhodli sme sa vybrať len niektoré z nich, ktoré sú od seba dostatočne odlišné na to, aby sme ich vedeli úspešne medzi sebou porovnať. Konkrétne ide o klasický Markowitzov prístup tvorby optimálneho portfólia, tvorbu portfólia pomocou filtrovaných korelačných matíc, DEA model určený na tvorbu optimálneho portfólia a TODIM algoritmus, ktoré spracujeme na základe využitia [35], [32], [48], [36] a [1]. Podrobnejšie odkazy na články uvedieme neskôr v texte.

1.1 Klasická Markowitzova metóda

Henry Markowitz uviedol svoj model optimalizácie portfólia v [37] prvýkrát v roku 1952 a my v práci ho opíšeme pomocou [35]. Predpokladajme, že máme n aktív (v našom prípade považujeme za aktíva akcie), pomocou ktorých chceme vytvoriť portfólio s čo najnižším rizikom. Prvým Markowitzovým predpokladom bolo, že riziko konkrétneho portfólia vieme určiť na základe *variance výnosov* akcií, ktoré sa v ňom nachádzajú. Ďalším predpokladom je riziková averznosť investora, spojená s predpokladom jeho racionálnosti pri rozhodovaní sa. Napokon tiež predpokladáme, že investor aplikuje jeden z prístupov, kedy buď bude maximalizovať svoj očakávaný zisk pri danom riziku, alebo bude maximalizovať svoj očakávaný zisk pri minimálnom riziku. Takáto úloha následne vedie k minimalizačnému problému kvadratickej optimalizácie, ktorý spočíva v hľadaní vektora váh w pre jednotlivé aktíva tak, aby boli splnené určité predpoklady a variancia portfólia bola minimálna.

Označme formálne vektor váh w pre jednotlivé aktíva tak, aby platilo $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Predpokladajme, že pre každé aktívum i poznáme vektor výnosov $r_i = (r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^k)$, jeho strednú hodnotu, ktorú označujeme $\bar{r}_i$ a kovariančnú maticu výnosov aktív, ktorú označíme Σ – tieto parametre v praxi určujeme odhadom z dát. Ak následne strednú hodnotu výnosov aktív usporiadame do vektora $\bar{r}$, očakávaný výnos a varianciu nášho

portfólia potom vieme určiť na základe vzťahov:

$$r_P = w^T \bar{r}, \quad (1)$$

$$\sigma_P^2 = w^T \Sigma w. \quad (2)$$

Ak označíme minimálny požadovaný výnos portfólia ako r_p a vektor jednotiek ako $\mathbf{1}$, môžeme sformulovať problém klasického Markowitzovho portfólia nasledovne:

$$\begin{aligned} \min_w \quad & \frac{1}{2} w^T \Sigma w \\ \text{s.t.} \quad & w^T \bar{r} \geq r_p \\ & w^T \mathbf{1} = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Aj keď existuje analytické riešenie takejto úlohy, ktoré môžeme nájsť uvedené napríklad v [40], na jej riešenie sme v našej práci využili R-kovskú funkciu `solve.QP` z balíka `quantmod` [45]. Dôvodom nepoužitia analytického riešenia v našom prípade je potreba výpočtu inverznej matice ku kovariančnej matici výnosov. Analytický postup by bol v tomto prípade nielen časovo náročnejší, ale rovnako by mohol byť aj viac nepresný. Čo sa týka samotnej funkcie `solve.QP`, je to funkcia určená na numerické riešenie úloh kvadratického programovania v tvare:

$$\begin{aligned} \min_w \quad & -d^T w + \frac{1}{2} w^T D w \\ \text{s.t.} \quad & A^T w \geq b. \end{aligned} \quad (4)$$

Na riešenie úlohy (4) implementuje táto funkcia duálnu metódu vychádzajúcu z [15] a [16]. Ako môžeme vidieť, úloha (3) je tiež úlohou kvadratického programovania, nakoľko v nej minimalizujeme kvadratickú funkciu požadovaného tvaru, pričom musia byť splnené lineárne ohraničenia v tvare rovníc alebo nerovníc. Všimnime si tiež, že nie nutne používame podmienku na nezápornosť váh, čo znamená, že povoľujeme aj tzv. krátke pozície (angl. *short selling*). Ide o postup, ktorý používajú investori, ak predpokladajú pokles ceny aktíva – dané aktívum si požičajú na to, aby ho na trhu predali a následne ho kúpili s nižšou cenou. Niekedy sa ale investor môže chcieť krátkym pozíciám vyhnúť, resp. nie vždy musia byť krátke pozície povolené – v tom prípade pribudne do úlohy (3) ohraničenie na nezápornosť váh, resp. iné ohraničenie váh (napríklad interval, v ktorom sa optimálne váhy musia nachádzať). Pridaním takéhoto ohraničenia sa optimalizačná úloha (3) neskomplicuje, keďže ju riešime numericky pomocou funkcie `solve.QP`, do

ktorej len pridáme ďalšie lineárne ohraničenia. Tiež poznamenajme, že rozhodnutia investora v tomto prípade sú ovplyvnené len rizikom a výnosmi, a že aj normálne rozdelenie je charakterizované týmito dvoma parametrami a preto, ak predpokladáme normalitu výnosov, investor nemá dôvod sa zaujímať o nič iné.

1.2 Metóda minimálnej kostry grafu

Markowitzovo riešenie optimalizačného problému portfólia je síce efektívne, no závisí od mnohých predpokladov, ktoré v praxi často nie sú splnené. Ako sme už uviedli v predošlej podkapitole, Markowitzov model predpokladá, že poznáme pre každé aktívum strednú hodnotu vektora výnosov a ich kovariančnú maticu. V praxi ale tieto parametre odhadujeme z dát časových radov výnosov aktív, no takto určený odhad má okrem nepresnosti (z toho dôvodu, že je to len odhad) aj iné nedostatky. Jedným z nich je napríklad obmedzenosť presnosti odhadu kvôli limitovanej dĺžke časových radov výnosov jednotlivých aktív. Vyššie spomínaná kovariančná matica má $\frac{n(n-1)}{2}$ rôznych prvkov a ak máme k dispozícii časové rady výnosov dĺžky k , máme len kn prvkov, pomocou ktorých odhadujeme. Avšak na to, aby sme mali len malú chybu odhadu, by sme potrebovali časové rady dĺžky $k \gg n$. Na druhej strane, pre veľké k nastáva problém s nestacionaritou časových radov výnosov [48] – napríklad môže dôjsť k porušeniu predpokladu konštantnej variancie časového radu výnosov akcií. Na základe týchto komplikácií sa preto začali vyvíjať metódy na filtrovanie len takých častí kovariančných matíc, ktoré sú voči takýmto štatistickým nepresnostiam odolné. Jednou z týchto metód je práve aj *metóda minimálnej kostry grafu* (angl. *minimum spanning tree*, skr. MST), ktorú v nasledovnej časti práce popíšeme. Najskôr ale pomocou [27] uvedieme základné pojmy, s ktorými v tejto časti práce budeme pracovať.

1.2.1 Základné pojmy

Definícia 1 (Graf, podgraf) Graf G je usporiadaná dvojica (V, E) , kde V je neprázdna množina vrcholov a E je nejaká množina dvojprvkových podmnožín množiny V . Prvky množiny E nazývame hrany. Graf $H = (V', E')$, kde $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$ nazývame *podgraf* grafu G .

Vo všeobecnosti sa množina vrcholov grafu G označuje ako $V(G)$ a množina jeho hrán ako $E(G)$. Grafy vieme znázorňovať pomocou diagramov, pomocou ktorých vieme zobrazit ich vrcholy ako body v rovine a hrany ako krivky, ktoré tieto vrcholy spájajú. Ukážku takéhoto diagramu pripájame na Obr. 1a.

Definícia 2 (Sled v grafe) Sled grafu G je taká postupnosť vrcholov a hrán

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n), \quad (5)$$

že hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1} a v_i pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$. Sled (5) sa nazýva (v_0, v_n) sled.

Definícia 3 (Dosiahnuteľnosť) Hovoríme, že vrchol v je *dosiahnuteľný* z vrcholu u v grafe G , ak v G existuje (u, v) sled.

Definícia 4 (Súvislý graf) Hovoríme, že graf G je *súvislý*, ak je každý vrchol v dosiahnuteľný z každého vrcholu u .

Definícia 5 (Cyklus) Graf s množinou vrcholov $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, kde $n \geq 3$, a s množinou hrán $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$ sa nazýva *cyklus*.

Definícia 6 (Strom) Graf sa nazýva *acyklický*, ak žiaden jeho podgraf nie je cyklus. Ak je takýto graf navyše súvislý, nazývame ho *strom*.

Napokon ešte definujeme pojem kostry grafu, pomocou ktorého vieme odvodiť pojem minimálnej kostry grafu, ktorý budeme využívať v ďalšej časti našej práce.

Definícia 7 (Kostra) *Kostrou* grafu G budeme nazývať každý taký jeho podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy pôvodného grafu a súčasne je aj stromom.

Predstavme si teraz graf G , ktorého hrany sú ohodnotené istými reálnymi váhami w . Potom hľadanie **minimálnej kostry grafu** predstavuje úlohu nájsť takú kostru grafu, ktorá má najmenší súčet ohodnotených hrán spomedzi všetkých ostatných koští. Existuje mnoho spôsobov, ktorými sa dá tento problém riešiť, no v našej práci

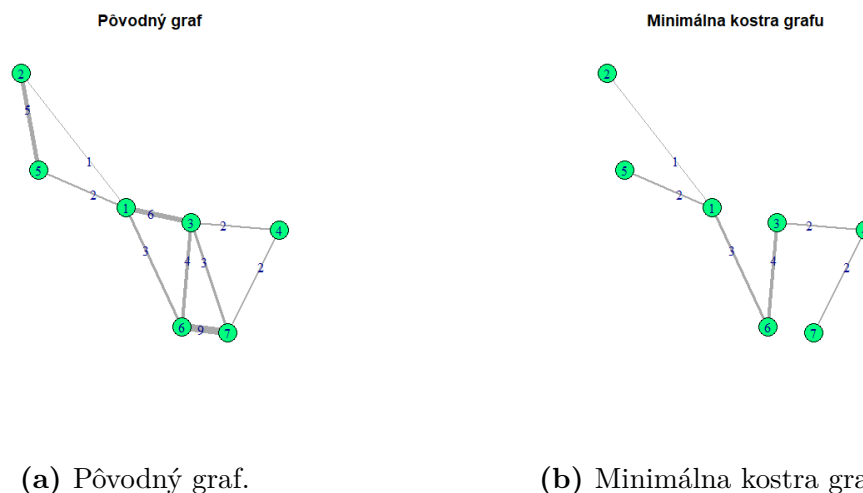
budeme využívať funkciu `mst` z balíka `igraph` [8], ktorá využíva tzv. *Primov algoritmus*.

1.2.2 Primov algoritmus a hľadanie minimálnej kostry

Tento algoritmus bol pôvodne vyvinutý a popísaný v roku 1930 českým matematikom Vojtěchom Jarníkom v [25] a neskôr znovuobjavený a opätovne republikovaný v roku 1957 Robertom C. Primom v [44]. Algoritmus vieme formálne popísať nasledovnými krokmi, ktoré vychádzajú z [10]:

- (i) Začneme stromom, ktorý je tvorený ľubovoľným jedným vrcholom z celej množiny vrcholov grafu G .
- (ii) Z hrán, ktoré tento strom spájajú s ďalšími vrcholmi, ktoré sa v našom strome ešte nenachádzajú, vyberieme hranu s najmenšou váhou a pripojíme ju k stromu.
- (iii) Opakujeme 2. krok, až pokým sa v strome nenachádzajú všetky vrcholy.

Pre lepšiu vizualizáciu pripájame na Obr. 1b aj minimálnu kostru grafu zobrazeného na Obr. 1a, vypočítanú pomocou Primovho algoritmu.



Obr. 1: Zakreslenie grafu a minimálnej kostry tohto grafu pomocou diagramu.

1.2.3 Použitie na siete korelácií

Ak sa teraz vrátíme k nášmu pôvodnému problému hľadania optimálneho portfólia, môžeme nájsť istú súvislosť s problémom hľadania minimálnej kostry grafu. Obchodované aktíva, pomocou ktorých sa snažíme zostaviť optimálne portfólio, môžeme vnímať

ako vrcholy grafu a hrany môžu byť predstavované vzťahmi medzi nimi. Všetky obchodované aktíva majú medzi sebou určité vzťahy, ktoré vieme popísať ich vzájomnými koreláciami. Vďaka tomu potom vieme vytvoriť graf s váženými hranami, ktorého vrcholy predstavujú jednotlivé aktíva a váhy hrán sú reprezentované práve korelačnými vzťahmi týchto aktív. Ako váhy hrán však nemôžeme používať priamo hodnoty korelačných koeficientov výnosov medzi dvojicami aktív, nakoľko minimálnu kostru grafu potrebujeme počítať ako minimálny súčet váh v zmysle vzdialeností, ale pri samotnej korelácii platí, že čím je väčšia, tým sú si aktíva podobnejšie – čiže presný opak vzdialenosti. Označme teda ρ_{ij} korelačný koeficient medzi výnosom aktíva i a aktíva j a zavedme novú, transformovanú premennú „vzdialenosti“ podľa [36], ktorá bude zachytávať vzťah medzi týmito aktívami a zároveň už bude spĺňať vlastnosti vzdialenosti, ktoré požadujeme:

$$d_{ij} = \sqrt{2(1 - \rho_{ij})}. \quad (6)$$

Týmto spôsobom vytvoríme takzvanú maticu vzdialeností, ktorej prvky budú zachytávať transformované vzťahy medzi výnosmi jednotlivých akcií, na základe ktorých vieme následne celú množinu akcií vizualizovať do grafu. Ďalším krokom výpočtu bude práve pomocou Primovho algoritmu získať minimálnu kostru takto vytvoreného grafu, čím získame len tie vzťahy medzi jednotlivými aktívami, ktoré sú „najdôležitejšie“. Pomocou výpočtu minimálnej kostry grafu sa vieme spätne dopracovať k matici D_{min} , ktorá obsahuje len nuly a jednotky a pomocou nej vieme pozložkovým súčinom s pôvodnou kovariančnou maticou ponechať len tie kovariancie, ktoré boli súčasťou minimálnej kostry grafu. Konkrétne matica D_{min} obsahuje jednotky na diagonále, aby sme po pozložkovom prenásobení s pôvodnou kovariančnou maticou ponechali všetky disperzie jednotlivých výnosov aktív, a na tých pozíciách d_{ij} , kde hrana i - j bola súčasťou minimálnej kostry grafu. Na ostatných pozíciách obsahuje matica D_{min} nuly. Týmto spôsobom teda pomocou vzťahu (7) získame transformovanú kovariančnú maticu, ktorú použijeme v ďalšej optimalizácii:

$$K_{tr} = D_{min} \circ Cov(r_i, r_j), \quad (7)$$

kde $Cov(r_i, r_j)$ je pôvodná kovariančná matica výnosov a znak $\circ$ značí súčin matíc po zložkách. Nie vždy je však takto získaná matica K_{tr} kladne definitná, čo by mohol byť problém pri jej dosadení do optimalizačnej úlohy v Markowitzovom prístupe, ktorý

požaduje kladnú definitnosť kovariančnej matice. Ukážeme si na príklade, ako by sa mohla kladná definitnosť počas procesu výpočtu minimálnej kostry grafu porušiť:

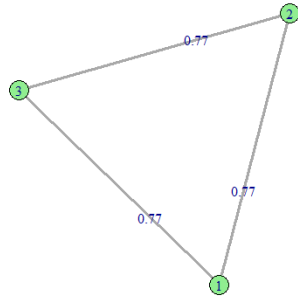
Predpokladajme, že máme zadanú kladne-definitnú kovariančnú maticu s jednotkovými disperziami (8), ktorej vlastné hodnoty sú $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ a $\lambda_{2,3} = 1 - 1/\sqrt{2}$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

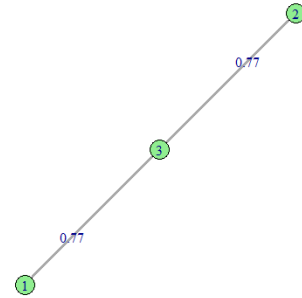
Ak chceme pomocou tejto kovariančnej matice vytvoriť sieť, použijeme transformáciu (6) na maticu vzdialeností D :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2 - \sqrt{2}} & \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ \sqrt{2 - \sqrt{2}} & 0 & \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ \sqrt{2 - \sqrt{2}} & \sqrt{2 - \sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Následne použijeme funkciu `mst`, pomocou ktorej získame minimálnu kostru grafu vytvoreného pomocou matice vzdialeností D . Pôvodný graf spolu s minimálnou kostrou znázorňujeme na Obr. 2.



(a) Pôvodný graf.



(b) Minimálna kostra grafu.

Obr. 2: Graf získaný pomocou matice vzdialeností D .

Získaná matica D_{min} pomocou MST metódy (ešte bez jednotiek na diagonále) má

potom tvar:

$$\bar{D}_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

V ďalšom kroku pridáme do matice (10) na diagonálu hodnoty 1 a keď sa následne spätne pozrieme na maticu kovariancií, ktorá však už obsahuje len „významné“ kovariancie vychádzajúc z výsledku MST, dostaneme maticu:

$$K_{tr} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Táto nová kovariančná matica však už nie je kladne definitná, čo môžeme vidieť napríklad z výpočtu jej determinantu, ktorý je nulový:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad (12)$$

Keďže podobný prípad môže nastať aj pri aplikácii tejto metódy na reálne dáta, na maticu vytvorenú pomocou vzťahu (7) sme aplikovali aj R-kovskú funkciu **nearPD** z balíka **Matrix** [2], ktorá slúži na hľadanie najbližšej kladne definitnej matice pre zadanú štvorcovú maticu. Funkcia **nearPD** v prvom kroku zabezpečí symetrickosť vstupnej matice pomocou funkcie **symmpart** (tiež z balíka **Matrix**), ktorá aproximuje najbližšiu symetrickú maticu pre ľubovoľnú štvorcovú maticu A pomocou vzorca (13):

$$A = \frac{1}{2} (A + A^T). \quad (13)$$

V druhom kroku sa aplikuje algoritmus na hľadanie najbližšej kladne definitnej matice pre ľubovoľnú symetrickú vstupnú maticu A , vychádzajúci z [24]. Základom tohto algoritmu je pre ľubovoľnú symetrickú maticu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ počítať vzdialenosť:

$$\gamma(A) = \min\{\|A - X\| : X \text{ je korelačná matica}\} \quad (14)$$

a určiť maticu, pre ktorú je táto vzdialenosť minimálna.

Použitie MST prístupu na spomenuté účely však nie je novým prístupom. Na podobné účely sa tento koncept využíva aj v [4] alebo v [13], v ktorých autori hodnotia

relevantnosť informácie získanej touto metódou po aplikovaní na sieť tvorenú koreláciami výnosov akcií rôznych indexov. V iných oblastiach sa MST prístup využíva napríklad na riešenie problému najkratšej cesty medzi dvoma bodmi – týmto problémom sa zaoberá napríklad [31]. Zaujímavú aplikáciu MST môžeme nájsť aj v [47], kde sa tento prístup aplikuje na hľadanie odlišností v štruktúre priezvisk ľudí žijúcich v rôznych čínskych provinciách.

1.3 DEA model krížovej efektivity

Podľa [32] sa môžeme na problém optimalizácie portfólia pozeráť aj ako na multikriteriálny rozhodovací problém (angl. *multiple-criteria decision making*, skr. *MCDM*), ktorý môžeme vyriešiť využitím DEA modelov. Základné poznatky o MCDM modeloch, ktoré budeme v ďalšej časti tejto kapitoly potrebovať, sformulujeme pomocou [5].

1.3.1 Multikriteriálny rozhodovací problém

V literatúre sa MCDM používa v rôznych aplikáciách, počnajúc porovnávaním zhlučovacích algoritmov v [26], vyhodnocovaním a vylepšovaním výkonov aerolinií v [43], až po použitie na optimalizáciu portfólia, o ktorom sa môžeme viac dočítať napríklad v [12]. Ako naznačuje už aj samotný názov, ide o triedu metód, ktoré pomáhajú pri procese rozhodovania sa tým, že vyhodnocujú rôzne konfliktné kritériá pre rôzne alternatívy, na základe ktorých potom vedú alternatívy ohodnotiť a vybrať z nich tú „najlepšiu“. V ďalšej časti práce tento typ metód popíšeme aj formálne, využitím [5].

Majme konečnú množinu alternatív $X = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, ktoré chceme medzi sebou porovnávať, a n kritérií, na základe ktorých chceme uvedené alternatívy porovnať. Označme $y_{jk} > 0$ vyhodnotenie alternatívy a_k pre kritérium j . Hovoríme, že alternatíva a_i *dominuje* nad alternatívou a_k , ak $y_{ji} \geq y_{jk}$, $j = 1, 2, \dots, n$, a aspoň jedna z týchto nerovností je ostrá. Potom hovoríme, že alternatíva $a \in X$ je *efektívna v X*, ak nie je dominovaná žiadnou inou alternatívou z X . Ak označíme množinu ostro kladných váh kritérií ako $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, tak alternatívy, ktoré v X maximalizujú váženú sumu všetkých kritérií, nazývame *konvexne efektívne v X*, ostatné alternatívy sa nazývajú *konvexne dominované v X*. Hlavným problémom MCDM v tomto prípade

je rozhodovanie o tom, ako skombinovať viacero vysvetľujúcich premenných do jednej voľbou vhodných váh tak, aby sme následne dokázali jednotlivé alternatívy čo najlepšie porovnať a ponechať len tie, ktoré sú „najefektívnejšie“. Vhodné riešenie môže priniesť práve spomínané DEA modelovanie, ktoré uvedieme v nasledujúcej časti našej práce.

1.3.2 DEA modelovanie

Metódy obáľkovej analýzy dát (angl. *data envelopment analysis*, skr. *DEA*) sú vo všeobecnosti také metódy, ktoré umožňujú ohodnotiť efektívnosť jednotlivých útvarov, ktoré majú podobné vlastnosti, a navzájom ich medzi sebou porovnať. DEA modely majú široké využitie a napríklad v [30] boli použité práve aj na alokáciu zdrojov v portfóliu. Predtým, než nadviažeme na súvislosť DEA modelov s MCDM metódami, uvedieme základné pojmy z DEA pomocou [20]. Činnosť, na ktorej výkon sa viaže pojem efektívnosti, budeme označovať T , ako technológia. Technológia T je charakterizovaná m vstupmi a s výstupmi, pričom konkrétne hodnoty vstupov v technológii T budeme označovať vektorom $x \in \mathbb{R}^m$ a konkrétne hodnoty výstupov označíme vektorom $y \in \mathbb{R}^s$. Všetky dvojice (x, y) , pre ktoré platí, že množstvá y výstupov sa dajú vyrobiť technológiou T pomocou množstiev vstupov x (prípustné dvojice), tvoria *množinu produkčných možností*, ktorá sa označuje G . Konkrétny producent riadiaci sa technológiou T spotrebúva konkrétne hodnoty vstupov a produkuje konkrétne hodnoty výstupov a preto vieme každú prípustnú dvojicu (x, y) stotožniť s nejakým konkrétnym producentom.

Uvažujme teraz, že máme n producentov riadiacich sa technológiou T , ktorých označujeme ako DMU_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (z angl. *decision making unit*). Vektor vstupov konkrétného producenta označíme x_i a vektor výstupov označíme y_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Úlohou DEA modelov je následne na základe známych hodnôt vstupov a výstupov jednotlivých producentov určiť, ktorí producenti sú efektívni a ktorí neefektívni a pre neefektívnych producentov rovnako určiť aj mieru ich neefektivity. Predpokladajme, že máme dané váhy výstupov $u = (u_1, u_2, \dots, u_s)^T$ a váhy vstupov $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$. Produktivitu DMU_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, potom počítame ako:

$$P_i(u, v) = \frac{u^T y_i}{v^T x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Efektivitu producenta DMU_i následne definujeme ako:

$$E_i(u, v) = \frac{P_i(u, v)}{\max_{j \in \{1, \dots, n\}} P_j(u, v)}. \quad (16)$$

Aby takto definovaná efektivita mala zmysel, musí platiť, že $u > 0_s$ a $v > 0_m$. Ak sa teraz vrátíme k prepojeniu DEA modelov na MCDM metódy, jednotlivé DMU korešpondujú s konceptom alternatív v MCDM, vstupy a výstupy korešpondujú s jednotlivými kritériami v MCDM a napokon pojem efektívnosti vieme prepojiť s pojmom konvexnej efektivity alternatív v MCDM [32].

1.3.3 Použitie pri optimalizácii portfólia

Ako sme už spomínali vyššie v kapitole, aplikáciou DEA modelov ako algoritmu na riešenie MCDM problému optimalizácie portfólia sme sa inšpirovali článkom [32]. Tvorba portfólia je totižto vhodný koncept na použitie MCDM metód, keďže aj portfólio v podstate volíme tak, že máme množinu akcií – ktoré budú v tomto prípade predstavovať množinu alternatív – z ktorej sa snažíme na základe ich vzájomného porovnania podľa rôznych kritérií nájsť „lepšie“ a „horšie“ akcie a na základe toho im prideliť váhy. Už vieme, že pomocou DEA modelov dokážeme pre každú akciu získať hodnotu jej efektivity a na základe týchto hodnôt zvoliť, ktoré akcie použijeme v portfóliu a ktoré nie. Je však známe, že hlavnou nevýhodou DEA modelovania je problém prílišnej flexibility pri výbere optimálnych váh vstupných a výstupných faktorov. Pri použití klasických DEA modelov na riešenie MCDM problémov sa môžeme stretnúť s vytváraním tzv. *mavericksov* – ide o DMU, ktoré pomocou DEA získajú vysoké hodnoty efektivity len vďaka tomu, že pre niektoré faktory majú pridelené extrémne vysoké váhy a pre ostatné takmer nulové, čím v konečnom dôsledku môžeme získať úplne nesprávne zoradenie jednotlivých DMU [32]. Riešením tohto problému môže byť však využitie tzv. *metódy krížovej efektivity*, ktorú predstavíme v nasledujúcej časti práce.

1.3.4 Metóda krížovej efektivity

Metóda krížovej efektivity (angl. *cross-efficiency method*) je v [32] navrhnutá ako vhodná metóda na odstránenie vyššie spomínaného problému, keďže základným princípom tejto metódy je vyhodnocovanie efektivity útvaru nielen na základe „samozvolených“ váh, ale aj s prihliadnutím na váhy ostatných DMU. Napriek tomu, že sa

táto metóda osvedčila pri zoraďovaní DMU, sú s ňou spojené aj isté komplikácie, kvôli ktorým je jej použitie obmedzené. John Doyle a Rodney Green v [11] vidia najväčší nedostatok metódy krížovej efektivity v tom, že váhy vstupov a výstupov jednotlivých DMU, získané ako optimálne pomocou základných DEA modelov, nemusia byť unikátne. To znamená, že krížová efektivita DMU_k by mohla byť závislá na tom, ktoré optimálne hodnoty váh sa pri riešení DEA modelu nájdu prvé.

Pri výbere optimálneho portfólia sa DEA modely krížovej efektivity klasicky používajú na vzostupné zoradenie DMU podľa skóre krížových efektív, na základe ktorých sa následne vyberie k najlepších DMU, kde k predstavuje požadovanú veľkosť portfólia. Predpokladajme, že máme n DMU, pričom DMU_k , $k = 1, 2, \dots, n$, má vektor vstupov $x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk})^T \in \mathbb{R}_+^m$, ktorého váhy označíme $v_k = (v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{mk})^T$ a vektor výstupov $y_k = (y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{sk})^T \in \mathbb{R}_+^s$, ktorého váhy označíme $u_k = (u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{sk})^T$. Použitie metódy krížovej efektivity ukážeme podľa [32] na štandardnom vstupne orientovanom CCR modeli:

$$\begin{aligned}
& \max \quad \sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk} \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m v_{ij} x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_{rj} y_{rj} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
& \quad \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1 \\
& \quad v_{ik}, u_{rk} \geq \varepsilon \quad \forall i, r.
\end{aligned} \tag{17}$$

V modeli (17), v ktorom predstavuje ε infinitezimálne malý prírastok, je riešením nájdenie optimálnych váh vstupov a výstupov, na základe ktorých potom vieme určiť efektivitu DMU_k a hodnoty krížových efektív pre ostatné DMU (vyčíslené podľa DMU_k). Konkrétne, krížová efektivita DMU_l je daná ako:

$$e_{kl} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk}^* y_{rl}}{\sum_{i=1}^m v_{ik}^* x_{il}}. \tag{18}$$

Hviezdička v predošlej rovnici označuje optimálne riešenie pre DMU_k z modelu (17).

Výpočtom krížových efektív všetkých DMU dostaneme maticu krížových efektív E :

$$E = \begin{pmatrix} ECOL_1 & ECOL_1 & \cdots & ECOL_n \\ e_{11} & e_{21} & \cdots & e_{n1} \\ e_{12} & e_{22} & \cdots & e_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{1n} & e_{2n} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} EROW_1 \\ EROW_2 \\ \vdots \\ EROW_n \end{pmatrix}.$$

Premenná $ECOL_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, predstavuje aritmetický priemer krížových efektív v i -tom stĺpci, teda stĺpcovú krížovú efektívnosť DMU_i a naopak, premenná $EROW_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, predstavuje priemer krížových efektív v i -tom riadku, teda riadkovú krížovú efektívnosť DMU_i . Existuje potom viacero prístupov, na základe ktorých sa vieme rozhodnúť, ktorú premennú použiť pre DMU_i na to, aby sme jednoznačne vedeli určiť poradie, ale v našom prípade sme sa rozhodli, podobne ako v [19], ako smerodajnú brať hodnotu stĺpcovej efektívnosti jednotlivých DMU.

Ak by sme na vyhodnotenie efektivity jednotlivých DMU použili klasické DEA modely, voľba optimálnych váh pre jednotlivé DMU nie je ovplyvnená voľbou váh ostatných DMU. Tento prístup však nie je správny, ak uvažujeme využitie DEA modelov na optimalizáciu portfólia v zmysle MCDM prístupu, v ktorom sa môžu váhy jednotlivých kritérií v čase meniť, čo znamená, že jednotlivé DMU sú vystavené riziku zmeny váh, pomocou ktorých je vyhodnocovaná ich efektívnosť. Podľa [32] je práve preto metóda krížovej efektivity vhodným prístupom, nakoľko ako riziko zmeny váh použitých na vyhodnotenie efektív DMU považuje varianciu krížových efektív jednotlivých DMU, ktorá je nízka pre také DMU, ktoré sú relatívne rovnako „dobré“ vo všetkých porovnávaných kritériách a teda pomerne robustné voči zmene váh kritérií a naopak, vysoká pre také DMU, ktoré sú „dobré“ len na úzkej podmnožine kritérií a teda vystavené riziku zmeny váh kritérií. Aj keď sa metóda krížovej efektivity môže zdať ako vhodný nástroj na odstránenie vyššie spomínaných problémov, podľa [32] sú s ňou v kontexte optimalizácie portfólia spojené ešte dva zásadné problémy:

- Prvým z nich je *nedostatočná diverzifikácia portfólia* – aj keď metóda krížovej efektivity zabráni tomu, aby boli do portfólia vyberané *mavericksy*, preferuje také DMU, ktoré sú aspoň trochu dobré vo všetkých porovnávaných kritériách

a zavrhuje také DMU, ktoré sú dobré len na nejakej podmnožine kritérií. To môže viesť k vytvoreniu takého portfólia, ktoré obsahuje len podobné akcie a teda postráda diverzifikáciu.

- Druhým problémom je tzv. *zhlukovací fenomén vyhodnocovania krížovej efektivity* (angl. *ganging together phenomenon*). Ide o to, že ak dve DMU majú podobné hodnoty pre vyhodnocované faktory, dostanú podobné váhy a navzájom si zvýšia skóre krížovej efektivity, pričom ostatné DMU (ktoré nemajú podobné hodnoty pre vyhodnocované faktory) budú znevýhodnené. Znamená to, že pokiaľ má nejaké DMU príliš odlišné hodnoty vyhodnocovaných faktorov od ostatných, má len malú šancu získať vysoké skóre krížovej efektivity, čo opäť môže viesť k portfóliu, ktoré obsahuje pomerne podobné akcie a je málo diverzifikované.

Ako vidíme, použitie obvyčajnej metódy krížovej efektivity môže viesť k tvorbe portfólia, ktoré je málo diverzifikované, nakoľko táto metóda uvažuje len riziko zmeny váh jednotlivých akcií (DMU) v portfóliu, avšak nie portfólia ako celku. Riziko zmeny váh celého portfólia však nezávisí len od rizika zmeny váh jednotlivých DMU, ktoré je reprezentované varianciou krížových efektív, ale aj tzv. *medzi-rizikom* DMU (angl. *inter-DMU risk*), ktoré je reprezentované kovarianciou krížových efektív všetkých párov DMU. Ako nadstavbu klasického modelu krížovej efektivity preto navrhuje [32] riešenie, ktoré popíšeme v nasledujúcej časti tejto kapitoly.

1.3.5 Upravený model krížovej efektivity

Pre DMU_l je výnos definovaný ako jeho skóre krížovej efektivity $\bar{e}_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_{kl}$ a jeho riziko je definované ako variancia krížových efektív $\sigma_l^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (e_{kl} - \bar{e}_l)^2$. Podobne aj pre portfólio Ω , zložené z DMU vážených váhami $w \in \mathbb{R}_+^n$, kde $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, je definovaný výnos $E_\Omega = w^T \bar{e}$, kde $\bar{e}$ je vektor výnosov jednotlivých DMU, a riziko $V_\Omega = w^T \Sigma w$, kde Σ je kovariančná matica krížových efektív. Optimálne portfólio Ω^* spolu s vektorom optimálnych váh w^* sú riešením nasledovnej úlohy kvadratickej

optimalizácie:

$$\begin{aligned}
& \min && V_{\Omega} \\
& \text{s.t.} && E_{\Omega} \geq (1 - \gamma)E_{\Omega}^b \\
& && e^T w = 1 \\
& && w \geq 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

V úlohe (19) parameter γ predstavuje výnosovo-rizikový parameter, E_{Ω}^b predstavuje najväčší dosiahnuteľný výnos portfólia a vektor e je vektor so všetkými prvkami rovnými 1. Hodnotu E_{Ω}^b vieme určiť na základe maximalizácie E_{Ω} s podmienkami $e^T w = 1$ a $w \geq 0$.

Nakoľko chceme model (19) použiť na také vstupné a výstupné dáta, ktoré môžu nadobúdať aj záporné hodnoty, nemôžeme použiť klasický vstupný CCR model s aplikáciou metódy krížovej efektivity. Podľa [20] takto definovaný model predpokladá nezápornosť vstupov a dá sa dokázať, že použitie záporných vstupov by mohlo spôsobiť zmenu efektivity pre dané DMU. Podľa [41] existuje viacero možností, ako sa vysporiadať so zápornými vstupmi.

Je známe, že DEA modely sú problémom lineárneho programovania, ktoré je určené buď primárnou, alebo duálnou formuláciou. V tomto kontexte sa DEA úloha formulovaná ako primárna úloha lineárneho programovania nazýva úloha v obáľkovej forme a naopak, ak ju formulujeme ako duálny problém hovoríme, že je to úloha v multiplikatívnej forme. Obáľková forma DEA modelov nám umožňuje klasifikovať každé DMU na slabo efektívne alebo neefektívne, avšak detekovať vieme iba radiálne neefektivity. Preto je v druhej fáze výpočtu ešte potrebné riešiť model, ktorý identifikuje, ktoré slabo efektívne DMU sú efektívne, t.j. nemajú neradiálne neefektivity. Aditívne modely však dokážu klasifikovať DMU na efektívne a neefektívne priamo, nakoľko dokážu detekovať všetky typy neefektivity. Navyše sú aditívne modely invariantné na posun, čo je klasický postup na vysporiadanie sa so zápornými premennými. Práve preto [41] uvádza klasický aditívny VRS model ako jednu z možností, ako sa so zápornými vstupnými

dátami vysporiadať a definuje ho nasledovne:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -\frac{1}{m+s}(R^-s^- + R^+s^+) \\
\text{s.t.} \quad & X\lambda + s^- = x_k \\
& Y\lambda - s^+ = y_k \\
& e^T\lambda = 1 \\
& \lambda, s^-, s^+ \geq 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

V úlohe (20) matice $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $Y = (y_{rj}) \in \mathbb{R}^{s \times n}$ označujú maticu vstupov a maticu výstupov, v ktorých každý stĺpec predstavuje jedno DMU a v riadkoch sú jednotlivé hodnoty faktorov. Premenné s^- a s^+ označujú slacky vstupov a výstupov a R^- a R^+ sú definované nasledovnými vzorcami:

$$R_i^- = \max_{j=1, \dots, n} x_{ij} - \min_{j=1, \dots, n} x_{ij} \quad i = 1, \dots, m, \tag{21}$$

$$R_r^+ = \max_{j=1, \dots, n} y_{rj} - \min_{j=1, \dots, n} y_{rj} \quad r = 1, \dots, s, \tag{22}$$

$$R^- = \left(\frac{1}{R_1^-}, \frac{1}{R_2^-}, \dots, \frac{1}{R_m^-} \right), \tag{23}$$

$$R^+ = \left(\frac{1}{R_1^+}, \frac{1}{R_2^+}, \dots, \frac{1}{R_s^+} \right). \tag{24}$$

Duálna úloha k úlohe (20) má potom nasledovný tvar:

$$\begin{aligned}
\max \quad & e_k^d = py_k - qx_k + \xi \\
\text{s.t.} \quad & pY - qX + \xi e \leq 0 \\
& p \geq \frac{1}{m+s}R^+ \\
& q \geq \frac{1}{m+s}R^-.
\end{aligned} \tag{25}$$

Takto zvolený model sa taktiež nazýva *RAM model* (z angl. *range-adjusted measure*) a je vytvorený tak, aby bola zabezpečená nezávislosť účelovej funkcie od voľby jednotiek. Ak chceme model (25) interpretovať ekonomicky, vektor váh vstupov q a vektor váh výstupov p predstavujú cenu vstupov a cenu výstupov, na základe čoho py_k a qx_k predstavujú výnosy a náklady [32]. Premennú e_k^d označujeme ako ξ -upravený profit (angl. ξ -adjusted profit), ktorý dosahuje DMU_k , ak použijeme nákladovo-výnosový vektor (p, q) . DMU_k je potom optimálne práve vtedy, keď existuje kladný nákladovo-výnosový vektor (p, q) taký, že pre každé pozorované DMU_l platí: $py_k - qx_k \geq py_l - qx_l$.

Nech (p_k^*, q_k^*) je optimálny nákladovo-výnosový vektor a ξ_k^* je optimálna úprava (angl. *adjustment*) pre DMU_k . Potom optimálny ξ_k^* -upravený profit DMU_k je $py_k^* - qx_k^* + \xi_k^*$ a označujeme ho e_{kk}^* . ξ_k^* -upravený profit pre DMU_l pri použití optimálneho nákladovo-výnosového vektora DMU_k počítaný modelom (25) je zasa $e_{kl}^* = p_k^* y_l - q_k^* x_l + \xi_k^*$. Autori [32] následne tvrdia, že e_{kk}^* a e_{kl}^* korešpondujú s konceptom jednoduchkej efektivity a krížovej efektivity v základnom DEA modeli, čo však nemusí nutne platiť. Takto odvodená krížovej efektivity totižto chýba zmysluplná ekonomická interpretácia a rovnako treba upozorniť aj na možnú dodatočnú nejednoznačnosť takto získaných výsledkov, nakoľko ide o neradiálny model, teda iný, ako sme využili pri odvodení modelu krížovej efektivity na začiatku kapitoly [21].

Ak ale vo všeobecnosti označíme e_{lk}^* ako ξ_l^* -upravený profit DMU_k pri použití optimálneho nákladovo-vektorového vektora DMU_l , môžeme definovať *vektor profitov* pre DMU_k ako:

$$P_k = (e_{1k}^*, e_{2k}^*, \dots, e_{nk}^*)^T. \quad (26)$$

Následne vieme pre takto definovaný vektor určiť priemer $\bar{P}_k = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n e_{lk}^*$ a varianciu $\sigma_k^2 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (e_{lk}^* - \bar{P}_k)^2$. Uvažujme portfólio Ω , do ktorého volíme jednotlivé DMU pomocou vektora váh w . Potom výnos takéhoto portfólia definujeme podľa [32] ako $E_\Omega = w^T \bar{P}$, kde $\bar{P}$ je vektor priemerov profitových vektorov všetkých DMU, a jeho riziko ako $V_\Omega = w^T \Sigma w$, kde Σ je kovariančná matica, ktorej prvok (k, l) označuje kovarianciu vektorov profitov P_k a P_l . Optimálne portfólio Ω^* s optimálnym vektorom váh w^* vieme potom určiť vyriešením úlohy (19). V tomto prípade získame ξ -upravené zisky, ktoré ale môžu byť nekladné a teda aj najvyšší možný zisk portfólia by mohol byť nulový. Z toho dôvodu sme upravili prvé ohraničenie úlohy (19) na tvar:

$$E_\Omega \geq k, \quad (27)$$

pričom konštantu k volíme z rozsahu $\langle \min(\bar{P}); \max(\bar{P}) \rangle$.

1.4 TODIM algoritmus

V tejto časti práce pomocou [34] predstavíme TODIM algoritmus (portugalská skratka pre *Interactive and Multicriteria Decision Making*), ktorý tiež spadá do skupiny MCDM algoritmov. Medzi hlavné výhody týchto algoritmov patrí najmä fakt, že sú lepšie aplikovateľné v praxi, sú jednoduchšie a rýchlejšie na výpočet a rovnako pomáhajú predchádzať prílišnej citlivosti optimálnych váh na vstupy. Základom TODIM metódy je porovnávanie jednotlivých alternatív po dvojiciach, pričom sa pomocou danej funkcie vždy určí pre každé kritérium taká alternatíva, ktorá dominuje nad tou druhou. TODIM algoritmus je v literatúre známy, použil sa napríklad na ohodnotenie cien nájmu v [17] a Luiz F. A. M. Gomes ho napríklad použil v [18] aj na výber najvhodnejšej destinácie na tvorbu zásob zemného plynu v Brazílii. Teraz už môžeme prejsť k samotnému popisu všeobecného tvaru tejto metódy, ktorý uvidíme v nasledujúcej časti tejto kapitoly podľa [34].

Nech $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ je konečná množina všetkých alternatív a $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ je konečná množina kritérií MCDM úlohy. Predpokladajme, že výkonnosť všetkých alternatív v závislosti od jednotlivých kritérií je známa a označme x_{ik} výkonnosť alternatívy A_i v závislosti od kritéria C_k . Nakoľko môžeme predpokladať, že kritériá sú väčšinou vyjadrené pomocou rôznych jednotiek, je potrebné ich hodnoty znormalizovať. Pri normalizácii treba brať ohľad na rozdiel medzi tzv. *benefitnými* kritériami, ktorých hodnoty sú vždy lepšie vtedy, ak sú väčšie, a medzi *nákladovými* kritériami, pri ktorých to platí naopak. Keď teraz predpokladáme, že sme hodnoty znormalizovali, označme $z_{ik} \in \langle 0; 1 \rangle$ znormalizovanú výkonnosť alternatívy A_i v závislosti od kritéria C_k . Pomocou týchto hodnôt vieme vytvoriť maticu $Z = (z_{ik})_{n \times m}$, ktorú označujeme ako **maticu kritérií** (angl. *decision matrix*):

$$Z = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_m \\ z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1m} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nm} \end{pmatrix}.$$

Každému kritériu C_k je pridelená váha $w_k > 0$, ktorá hovorí o relatívnej dôležitosti

daného kritéria pri vyhodnocovaní, pričom musí platiť, že $\sum_{k=1}^m w_k = 1$. Ak vytvoríme pomocou takto definovaných váh vektor $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, usporiadanú dvojicu (Z, w) budeme nazývať **rozhodovací sa problém** vzhľadom na $\mathcal{A}$ (angl. *decision problem*). Existuje niekoľko verzií za sebou nasledujúcich krokov, pomocou ktorých možno algoritmus vykonať, ale nakoľko sme chceli TODIM algoritmus použiť na výber akcií vstupujúcich do optimalizačnej úlohy, rozhodli sme sa vychádzať z postupu uvedenom v [1]. Autori tohto článku tvrdia, že ide o prvý článok, ktorý zapája TODIM algoritmus do optimalizácie portfólia. Ako výhodu použitia TODIM algoritmu uvádzajú, že je založený na prospektovej teórii, ktorá vysvetľuje, ako sa rozhodujú jednotlivci, ak čelia nejakému riziku. Základné znalosti o prospektovej teórii a jej využitia môžeme nájsť spísané napríklad v [29]. Hlavným pozorovaním tejto teórie je, že jednotlivci reagujú na zisky a straty asymetricky. Rozdielny level reakcie vieme kvantitatívne vyjadriť v TODIM metóde ako tzv. tlmiaci faktor (angl. *attenuation factor*). Samotný algoritmus pozostáva v tomto prípade z piatich krokov [1]:

- (i) **Výpočet matice kritérií:** V prvom kroku algoritmu je dôležité vybrať kritériá, pomocou ktorých môžeme neskôr jednotlivé vstupné akcie porovnať. Autori článku ako tieto kritériá použili priemerné výnosy, smerodajnú odchýlku a koreláciu výnosov akcií v období jedného štvrťroka, jedného roka a troch rokov. My sme sa však rozhodli jednotlivé obdobia skrátiť na 3 mesiace, 6 mesiacov a 12 mesiacov kvôli tomu, aby sme na výpočet optimálneho portfólia nepoužívali príliš dávne historické údaje. Nakoľko platí, že jedna akcia má len jeden priemerný výnos a jednu smerodajnú odchýlku výnosov, ale n korelácií ostatnými akciami, autori sa rozhodli pre kritérium korelácie použiť upravený vzorec tzv. priemernej korelácie:

$$\gamma_i = \frac{\left(\sum_{j=1}^n Cor(r_i, r_j)\right) - 1}{n - 1} \quad \forall i, \quad (28)$$

kde $Cor(r_i, r_j)$ je korelácia medzi výnosom akcie i a výnosom akcie j . Hodnoty týchto celkovo 9 kritérií sme vypočítali využitím historických dát jednotlivých výnosov akcií, ktoré sme sa rozhodli analyzovať. Výstupom prvého kroku je matica kritérií A , ktorá má i riadkov a j stĺpcov, pričom i predstavuje počet akcií a j predstavuje počet zvolených kritérií.

- (ii) **Transformácia matice kritérií:** V druhom kroku je matica A transformovaná

naškálovaním jednotlivých jej prvkov na hodnoty z intervalu celých čísel 1 až 10, ktoré nazveme *skóre*. Najvyššie skóre bude pridelené tým akciám, ktoré sa v rámci vzájomného porovnania pri zohľadnení daného kritéria nachádzajú v 10% najlepších akcií. V našom prípade – ak budeme priradovať akciám skóre najskôr podľa kritérií priemerných výnosov, najvyššie skóre dostane tých 10% akcií, ktoré majú najvyššie priemerné výnosy. Naopak, pri porovnávaní akcií na základe smerodajných odchýlok výnosov a korelácií výnosov najvyššie skóre dostanú tie akcie, ktoré sa nachádzajú v 10% akcií s najnižšími hodnotami v týchto kritériách.

- (iii) **Výpočet normalizovanej matice kritérií:** Na to, aby sme mohli kritériá ohodnotené skóre medzi sebou porovnávať, musíme jednotlivé hodnoty ešte znormalizovať. Využijeme min-maxovú normalizáciu, ktorá však bude mať iný predpis pre kritériá priemerných výnosov a iný predpis pre kritériá smerodajných odchýlok výnosov a korelácií výnosov. Na znormalizovanie výnosových kritérií použijeme predpis:

$$N_{i,c} = \frac{A_{i,c} - \min_i A_{i,c}}{\max_i A_{i,c} - \min_i A_{i,c}}. \quad (29)$$

$A_{i,c}$ v tomto prípade predstavuje skóre alternatívy (akcie) i pre kritérium c a $N_{i,c}$ predstavuje toto skóre v normalizovanej podobe, pričom takto vypočítané skóre leží v intervale $\langle 0; 1 \rangle$. Pre kritérium korelácie a smerodajnej odchýlky budú normalizované skóre počítané nasledovným spôsobom:

$$N_{i,c} = \frac{\max_i A_{i,c} - A_{i,c}}{\max_i A_{i,c} - \min_i A_{i,c}}. \quad (30)$$

- (iv) **Porovnanie alternatív:** V tomto kroku algoritmu dochádza k porovnaniu jednotlivých alternatív, v našom prípade akcií. Alternatívy sa porovnávajú najskôr pre každé kritérium zvlášť a napokon celkovo. Práve v tomto okamihu sa dostávame k využitiu vyššej spomínanej prospektovej teórie v podobe voľby tlmiaceho faktora a to pomocou nasledovných rovníc:

$$CS_{i,j,c} = \begin{cases} \sqrt{\frac{w_c(N_{i,c}-N_{j,c})}{\sum_{c=1}^m w_c}}, & \text{ak } N_{i,c} > N_{j,c} \\ 0, & \text{ak } N_{i,c} = N_{j,c} \\ -\frac{1}{AF} \sqrt{\frac{w_c(N_{j,c}-N_{i,c})}{\sum_{c=1}^m w_c}}, & \text{ak } N_{i,c} < N_{j,c}, \end{cases} \quad (31)$$

$$FS_{i,j} = \sum_{c=1}^m CS_{i,j,c}. \quad (32)$$

Hodnota $CS_{i,j,c}$ predstavuje kritériové skóre alternatívy i oproti alternatíve j pre kritérium c a $FS_{i,j}$ je finálne porovnanie skóre alternatívy i oproti alternatíve j . Ďalšou významnou premennou je w_c , ktorá je definovaná ako váha každého kritéria a je vkladaná do modelu subjektívne. Tento postup sa opakuje pre všetky páry alternatív a všetky kritériá a výsledkom je štvorcová matica skóre, ktorá má taký počet riadkov a stĺpcov, aký je počet použitých alternatív v modeli. Spomínaný tlmiaci faktor je v tomto prípade označený ako $AF > 0$ a do modelu ho, rovnako ako váhy kritérií, vkladáme subjektívne. Tlmiaci faktor slúži na určenie efektu strát (teda keď $N_{i,c} < N_{j,c}$). Ak $AF > 1$, efekt strát je zoslabený, naopak pre $AF < 1$ je efekt strát zvýšený. Ak volíme veľké hodnoty tlmiaceho faktora, algoritmus vyhodnotí ako najlepšie také alternatívy (akcie) ktoré prinášajú viac ziskov, naopak, ak volíme hodnoty parametra malé, preferované sú také alternatívy, ktoré prinášajú malé straty.

- (v) **Výpočet normalizovanej matice skóre:** Posledným krokom pôvodného TODIM algoritmu je vypočítať zoradenie alternatív s využitím subjektívne zvolených faktorov na základe výpočtu nasledovného kritéria:

$$R_i = \frac{\sum_{j=1}^n FS_{i,j} - \min_i \sum_{j=1}^n FS_{i,j}}{\max_i \sum_{j=1}^n FS_{i,j} - \min_i \sum_{j=1}^n FS_{i,j}} \quad \forall i. \quad (33)$$

Hodnota R_i predstavuje poradie (angl. *rank*) alternatívy i . Ak tieto ranky jednotlivých alternatív spojíme do vektora R , všetky jeho prvky budú nadobúdať hodnoty z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$, pričom najpreferovanejšia alternatíva bude mať rank rovný 1 a najmenej preferovaná alternatíva bude mať rank rovný 0.

Keďže sa článok [1] zaoberal aj samotným hľadaním optimálneho portfólia, po poslednom kroku algoritmu ešte nasledoval krok, v ktorom sa autori venovali analýze možností výberu vhodných akcií do portfólia na základe ich rankov. Ako niektoré možnosti uviedli možnosť zahrnúť do portfólia všetky akcie s váhou úmernou ich ranku alebo vybrať top N akcií s najvyšším skóre. Tento krok však v našej práci nebol potrebný, nakoľko našim cieľom použitia TODIM algoritmu bolo najmä zúženie množiny akcií, ktorá bude vstupovať do iných metód optimalizácie portfólia.

2 Aplikácia metód

V tejto časti práce sme sa venovali aplikácii metód, ktoré sme uviedli v Kapitole 1, na reálne dáta a vzájomnému porovnaniu portfólií, ktoré po aplikácii týchto metód vznikli. Ako množinu akcií, ktorá vstupuje do optimalizácie portfólia sme zvolili akcie z indexu S&P 500. Z [9] sme stiahli dataset **S&P 500 Companies with Financial Information**, ktorý obsahuje niektoré finančné ukazovatele akcií z indexu S&P 500 v roku 2017, ktoré použijeme v DEA modeli a pre akcie nachádzajúce sa v tomto datasete sme pomocou R-kovského balíka **quantmod** [45] získali denné upravené zatváracie ceny (zatváracie denné ceny po vyplatení dividend) z obdobia 01.01.2016 - 01.01.2020. Keďže nie všetky z akcií mali dostupné tieto údaje, napokon nám zostala množina 461 akcií.

K samotnej tvorbe portfólia sme pristúpili tromi spôsobmi. Prvým spôsobom bolo porovnanie portfólií tvorených pomocou celej množiny 461 akcií vytvorených použitím klasického Markowitzovho prístupu (KM) a metódy minimálnej kostry grafu (MST). Tento spôsob sme aplikovali na ročné dáta akcií z roku 2016, 2017 a 2018 a následne sme výsledky takto vytvorených portfólií vyhodnocovali na out-of-sample obdobiach dĺžky 3 mesiace, 6 mesiacov a 1 rok nasledujúceho roka. Druhým spôsobom bola aplikácia upraveného DEA modelu krížovej efektivity z Podkapitoly 1.3, ktorú sme aplikovali len na dáta z roku 2017, nakoľko potrebné dáta pre túto metódu sme získali len pre tento rok, a opäť sme výsledky takto vytvoreného portfólia vyhodnocovali na out-of-sample období vyššie spomínaných dĺžok nasledujúceho roka. Posledným spôsobom bolo aplikovanie TODIM algoritmu – v tomto prípade sme uvažovali dva prístupy jeho použitia. Prvým z nich bol výpočet transformovaného skóre pre celú množinu akcií a jeho použitie na určenie váh akcií v optimálnom portfóliu a v druhom prístupe sme pomocou výsledkov TODIM algoritmu len určili zmenšenú množinu akcií, ktorá vstupovala do ďalšej optimalizácie portfólia pomocou KM a MST metód (tento spôsob bližšie definujeme neskôr v práci). Takto vytvorené portfóliá sme, podobne ako v prvom spôsobe, vyhodnocovali pre každý rok na out-of-sample období rôznych dĺžok v nasledujúcom roku.

2.1 Metódy aplikované na celú množinu akcií

Prvým spôsobom bolo použitie všetkých 461 akcií s dostupnými finančnými a cenovými dátami. Na porovnanie KM prístupu a MST prístupu sme na začiatku zvolili jednotnú hodnotu minimálneho požadovaného výnosu portfólia (r_p) vo výške 5%, no neskôr sme metódy porovnali aj pre iné hodnoty r_p . Pri porovnávaní metód sme sa inšpirovali [35] a ako porovnávaciu mierku sme použili Sharpov pomer (angl. *Sharpe ratio*). Koncept tohto ukazovateľa prvýkrát uviedol William F. Sharpe² v roku 1966 v [46]. I keď sa Sharpov pomer používa najmä pri porovnávaní portfólií, v [28] ho môžeme nájsť využitý napríklad aj na testovanie hypotéz. Sharpov pomer sme v našej práci použili v tvare:

$$SR = \frac{\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (r_r^k - r_f^k)}{\sigma_r}. \quad (34)$$

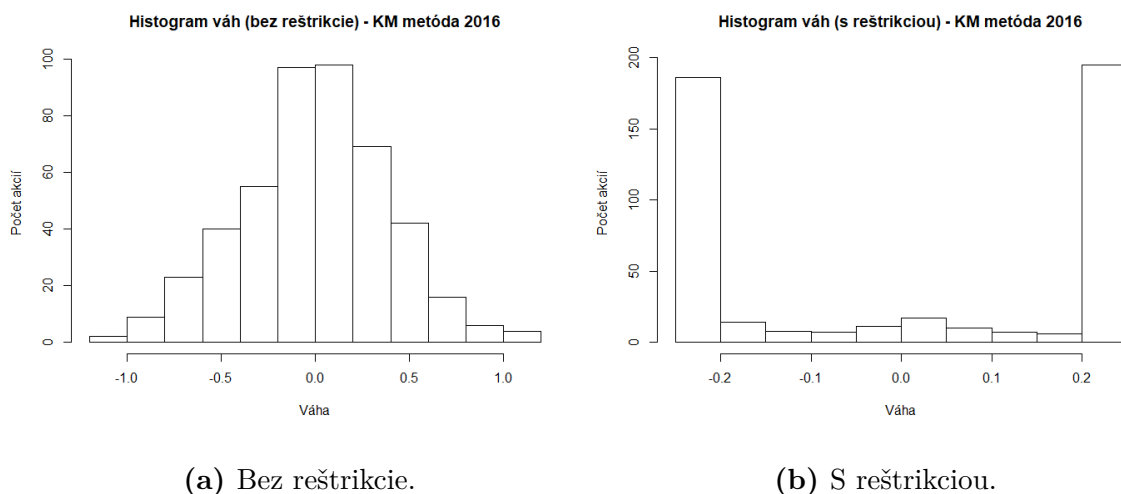
V rovnici (34) predstavuje r_r^k realizovaný výnos portfólia v k -ty deň (teda výnos portfólia vyhodnotený na out-of-sample dátach v k -ty deň), σ_r predstavuje štandardnú odchýlku denných výnosov akcií v portfóliu (teda riziko portfólia určené na out-of-sample dátach) a r_f^k je tzv. bezriziková úroková sadzba v deň k . Prenásobením $\sqrt{252}$, kde 252 je počet obchodovacích dní, sme následne získali ročnú hodnotu Sharpovho pomeru. Ako mieru bezrizikovej úrokovej sadzby sme v našom prípade uvažovali Treasury Yield Curve Rate (tzv. *výnosová krivka krátkych štátnych dlhopisov*) získanú z [49], ktorá ilustruje výnosy štátnych dlhopisov s fixnými maturitami.

V ďalšej časti práce budeme jednotlivé výsledky portfólií zapisovať do tabuliek. V tabuľke bude r_P predstavovať percentuálnu hodnotu priemerného denného výnosu akcií v portfóliu počas out-of-sample obdobia (teda napríklad r_P pre 3-mesačné out-of-sample obdobie predstavuje percentuálnu hodnotu priemerného denného výnosu akcií v portfóliu počas 3-mesačného obdobia nasledujúceho roka), σ_P predstavuje percentuálnu hodnotu štandardnej odchýlky výnosov akcií v portfóliu počas zvoleného out-of-sample obdobia, ako r_f uvádzame priemernú hodnotu bezrizikovej úrokovej miery pre danú maturitu portfólia za zvolené out-of-sample obdobie v mierke per annum a pri výpočte SR (Sharpovho pomeru) sa riadime vzťahom (34).

² **William F. Sharpe** (16. 06. 1934 -) - americký ekonóm, držiteľ Nobelovej ceny za ekonomické vedy z roku 1990.

2.1.1 Rok 2016

Portfólio sme optimalizovali najskôr na základe *klasického Markowitzovho prístupu* (KM). Prvým krokom bolo pokúsiť sa nájsť váhy v prípade, ak nie sú povolené krátke pozície, t.j. jednotlivé váhy musia byť nezáporné. To sa však v našom prípade pri zvolenom minimálnom požadovanom výnose portfólia nepodarilo, nakoľko jednotlivé ohraničenia, ktoré by mali takto zvolené váhy spĺňať, neboli konzistentné. Pristúpili sme teda k výpočtu váh, pre ktoré sú povolené krátke pozície. Rozloženie vypočítaných váh môžeme vidieť na Obr. 3a. Z obrázka vidíme, že mnohým akciám boli pridelené pomerne veľké kladné alebo veľké záporné váhy a z toho dôvodu sme sa rozhodli skúsiť aplikovať aj reštrikciu rozsahu na váhy a to konkrétne takú, že jednotlivé vypočítané váhy musia patriť do intervalu $\langle -0,25; 0,25 \rangle$. Tento interval sme zvolili z toho dôvodu, že to bol najmenší symetrický interval, pre ktorý bolo možné nájsť riešenie, t.j. vypočítané váhy boli schopné splniť všetky kritériá. Optimalizačná úloha s takouto reštrikciou úspešne zbehla, pričom tento raz je badateľné, že kvôli reštrikcii sa väčšina vypočítaných váh nachádza práve na hranici určeného intervalu, čo môžeme pozorovať na Obr. 3b.



Obr. 3: Histogram optimálnych váh vypočítaných pomocou KM prístupu z dát roku 2016.

Jednotlivé výsledky pre obe množiny vypočítaných váh sme zapísali do Tab. 1. Ako môžeme z tabuľky vidieť, pre ročné out-of-sample vyšla lepšie možnosť, v ktorej sme použili reštrikciu na váhy, no v kratších investičných obdobiach mala naopak lepšie výsledky metóda bez reštrikcie váh.

Na príklade si zároveň ukážeme, ako vieme z hodnôt v tabuľke približne (s ohľadom

Portfólio s váhami bez reštrikcie - rok 2016

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	1,24	10,53	1,20	1,87
6 mesiacov	1,09	10,86	0,88	1,58
3 mesiace	1,05	9,90	0,61	1,68

Portfólio s váhami s reštrikciou - rok 2016

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	1,20	9,06	1,20	2,09
6 mesiacov	0,90	9,03	0,88	1,58
3 mesiace	0,62	9,29	0,61	1,05

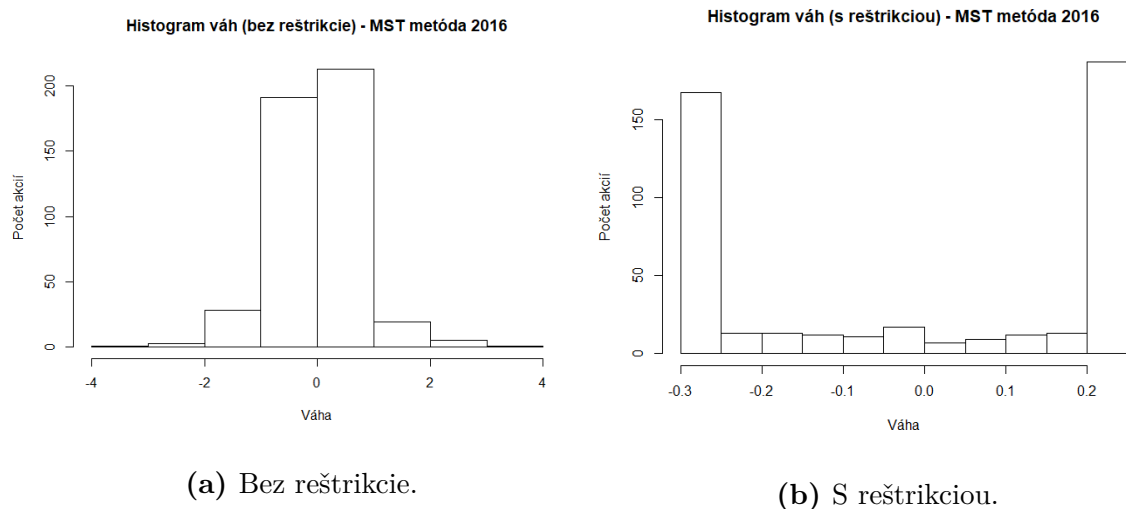
Tabuľka 1: Výsledky portfólia na out-of-sample dátach z roku 2017, získané z váh pomocou KM metódy z roku 2016.

na odchýlky kvôli zaokrúhľovaniu) určiť uvedený Sharpov pomer. Uvažujme portfólio z dát z roku 2016, vyhodnocované na 1-ročných out-of-sample dátach. Potom ročnú hodnotu Sharpovho pomeru vypočítame pomocou vzťahu:

$$SR = \frac{r_P - \frac{r_f}{252}}{\sigma_P} \sqrt{252} = \frac{1,24 - \frac{1,20}{252}}{10,53} \sqrt{252} = 1,86. \quad (35)$$

Následne sme pristúpili k výpočtu váh pomocou *metódy minimálnej kostry grafu* (MST). Ani v tomto prípade nebolo možné určiť váhy akcií v prípade, ak nie sú povolené krátke pozície (z rovnakého dôvodu ako pri KM prístupe) a preto sme podobne pracovali s váhami v takom prípade, ak krátke pozície povolené sú. Rozloženie vypočítaných váh zobrazujeme na Obr. 4. Môžeme pozorovať, že v porovnaní s váhami vypočítanými KM spôsobom majú tieto váhy oveľa väčší rozptyl. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade, aj pre tieto váhy sme sa pokúsili použiť rovnakú reštrikciu, aby sme mohli porovnať výsledky – v tomto prípade je už rozptyl vypočítaných váh podobný s tým z KM metódy. Rozloženie váh s touto reštrikciou zobrazujeme na Obr. 4b.

V ďalšom kroku sme takto vypočítané váhy opäť použili na výpočet realizovaných výnosov, rizík a Sharpovho pomeru pomocou out-of-sample dát z roku 2017 na rôzne dlhých investičných obdobiach a výsledky sme zapísali do Tab. 2. Z tabuľky vidíme, že oveľa lepšie výsledky mal prístup s aplikovanou reštrikciou váh – nielenže boli v tomto prípade vyššie hodnoty Sharpovho pomeru, ale aj realizované výnosy boli vo všetkých



Obr. 4: Histogram optimálnych váh vypočítaných pomocou MST prístupu z dát roku 2016.

prípadoch kladné a riziko portfólia bolo nižšie.

Portfólio s váhami bez reštrikcie - rok 2016

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	- 0,96	15,61	1,20	-0,98
6 mesiacov	- 1,89	16,21	0,88	-1,86
3 mesiace	- 1,69	16,71	0,61	-1,60

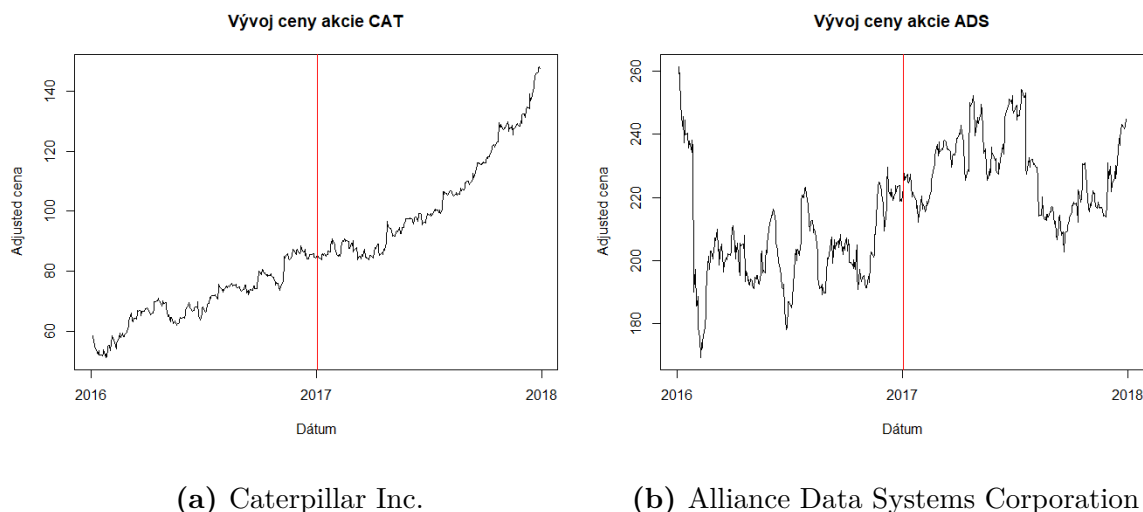
Portfólio s váhami s reštrikciou - rok 2016

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	0,66	9,24	1,20	1,13
6 mesiacov	0,34	9,68	0,88	0,55
3 mesiace	0,54	9,94	0,61	0,86

Tabuľka 2: Výsledky portfólia na out-of-sample dátach z roku 2017, získané z váh pomocou MST metódy z roku 2016.

Porovnaním hodnôt Sharpovho pomeru oboch metód vidíme, že v tomto roku bola z predošlých dvoch metód výrazne lepšia KM metóda, pre ktorú vyšiel Sharpov pomer vo všetkých prípadoch väčší. Dôvodom takéhoto „neúspechu“ MST metódy bez reštrikcie môže byť fakt, že metóda vybrala s pomerne veľkou zápornou váhou akcie, o ktorých zrejme predpokladala, že ich cena bude v out-of-sample období klesať, no ona napokon rástla. Príkladom takýchto akcií sú akcie firmy Caterpillar Inc. a akcie firmy Alliance

Data Systems Corporation. Čo sa týka akcií firmy Caterpillar Inc., cena jej akcií v roku 2016 kolísala v rozmedzí 50 \$ - 90 \$ a MST metóda ju do portfólia zvolila s vysokou zápornou váhou, akoby predpokladala, že cena tejto akcie v roku 2017 klesne. Ako však vidíme aj z Obr. 5a, ceny akcie tejto firmy stúpili v roku 2017 až o skoro 60 \$.

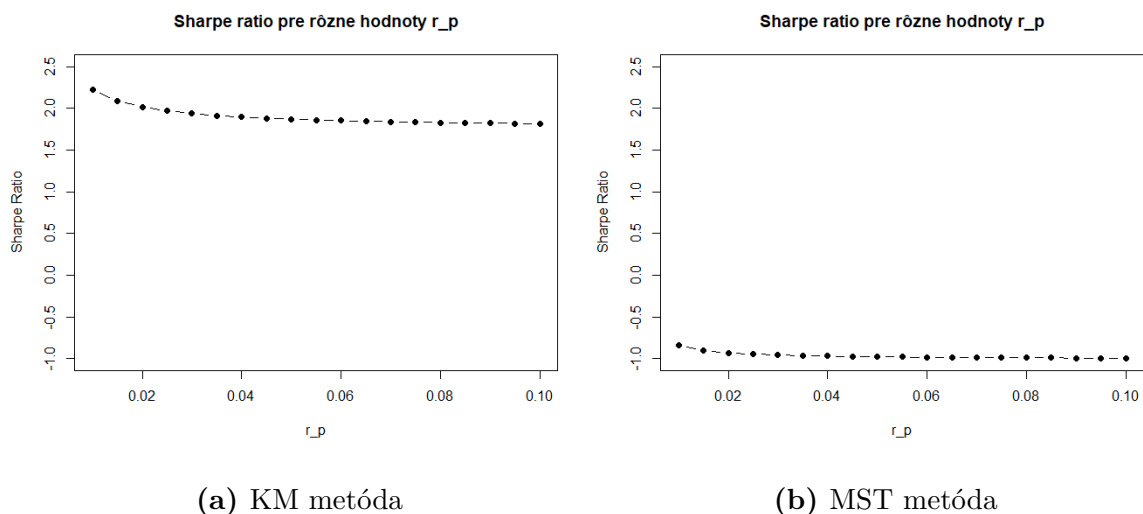


Obr. 5: Vývoj ceny akcie s vyznačenou hranicou roku 2017.

Podobne aj akciám firmy Alliance Data Systems Corporation bola MST metódou pridelená veľká záporná váha, no cena akcií tejto firmy v roku 2017 skôr rástla, ako môžeme vidieť aj na Obr. 5b. To, že mala táto akcia vplyv na výsledok daného portfólia môžeme vidieť aj z hodnôt Sharpovho pomeru. Pre 3 a 6-mesačné out-of-sample obdobie bola hodnota Sharpovho pomeru veľmi nízka a v tomto období zároveň rástla cena spomínanej akcie, avšak v druhej polovici roka 2017 začala cena tejto akcie klesať, čo sa odzrkadlilo aj na zvýšenej hodnote Sharpovho pomeru. Rovnako pre porovnanie pripájame na Obr. 6 aj vývoj hodnôt Sharpovho pomeru pre obe metódy bez aplikácie reštrikcie, pri použití rôznych hodnôt minimálneho požadovaného výnosu portfólia r_p na ročných out-of-sample dát nasledujúceho roka. Dôvod, prečo porovnávame Sharpov pomer pre váhy získané bez reštrikcie je ten, že pre vyššie hodnoty minimálneho požadovaného výnosu portfólia by nemuselo pre pevne dané reštrikcie už existovať riešenie.

2.1.2 Rok 2017

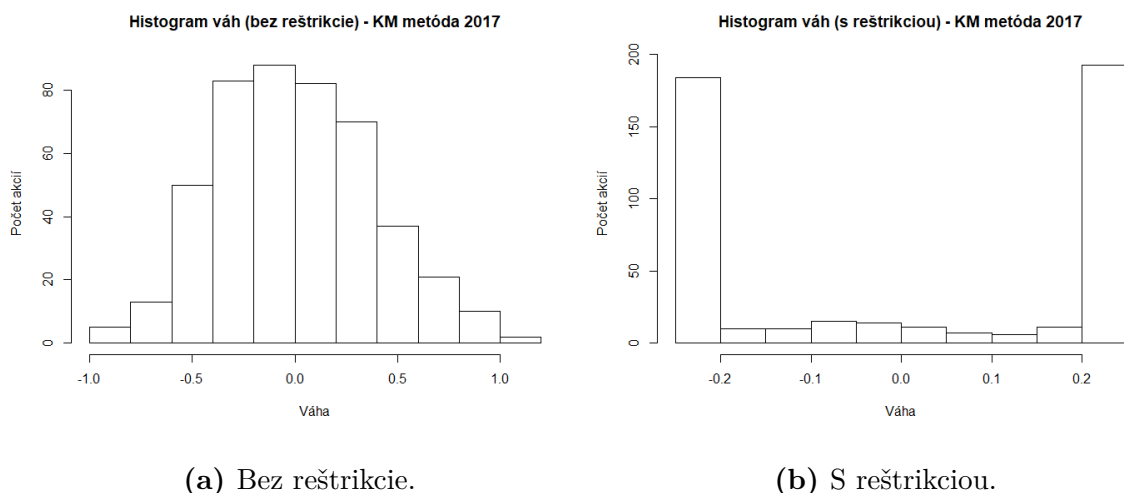
Ďalším krokom bolo použiť jednotlivé metódy aj na dáta z roku 2017. V tomto roku sme mali dostupné aj dáta vstupujúce do DEA modelu na optimalizáciu portfólia,



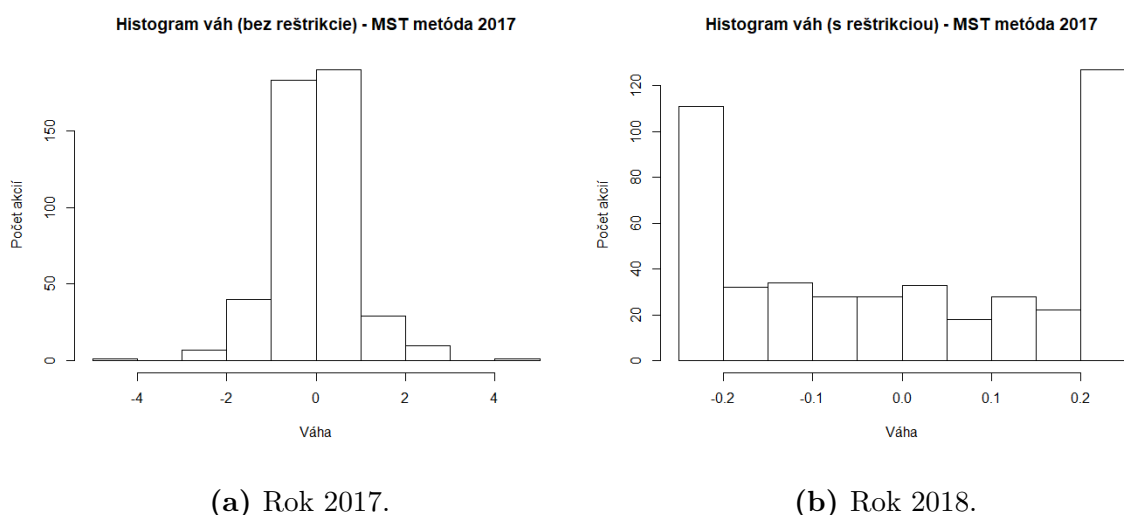
Obr. 6: Porovnanie Sharpovho pomeru na ročných out-of-sample dátach z roku 2017 pre rôzne hodnoty r_p .

ktorý sme vďaka tomu tiež mohli zahrnúť do porovnania s ostatnými metódami. Ani v tomto roku sa nám nepodarilo určiť nezáporné váhy (bez povolenia krátkych pozícií) či už KM metódou alebo MST metódou, rovnako ako v predošlom roku – kvôli nekonzistentnosti ohraničení – a preto sme opäť ďalej pracovali s váhami, ktoré povoľujú aj krátke pozície. Pomocou KM metódy sme vypočítali váhy pre jednotlivé akcie a potom sme sa opäť pokúsili vypočítať aj váhy s reštrikciou rozsahu z intervalu $\langle -0, 25; 0, 25 \rangle$, nakoľko nadobúdali váhy bez reštrikcie opäť príliš extrémne hodnoty. Jednotlivé rozloženia vypočítaných váh môžeme vidieť na Obr. 7. Pre účely porovnania sme na rovnakú množinu akcií a ich dáta z roku 2017 aplikovali aj MST metódu, pomocou ktorej sme tiež vypočítali váhy bez reštrikcie a aj s rovnakou reštrikciou ako pri KM metóde. Ich rozloženie znázorňujeme na Obr. 8. Následne sme jednotlivé výsledky KM a MST metódy zhrnuli do Tab. 3 a Tab. 4.

Z uvedených tabuliek vidíme, že v oboch metódach mali lepšie výsledky portfóliá, ktoré boli zostavené aj s podmienkou na reštrikciu váh. Ak by sme následne chceli porovnať výsledky portfólií s reštrikciou po metódach, MST metóda bola v tomto roku lepšia. Príkladom akcie, ktorú vybrala do svojho portfólia aj KM, aj MST metóda, ale s diametrálne inými váhami, je akcia firmy Arthur J. Gallagher & Co. V prípade KM metódy s reštrikciou bola táto akcia vybraná do portfólia s najnižšou možnou váhou, no v prípade MST metódy bola táto akcia naopak vybraná s najvyššou možnou váhou.



Obr. 7: Histogram optimálnych váh vypočítaných pomocou KM prístupu z dát roku 2017.



Obr. 8: Histogram optimálnych váh vypočítaných pomocou MST prístupu z dát roku 2017.

To môže indikovať, že KM metóda predpokladala pokles ceny tejto akcie, zatiaľ čo MST metóda predpokladala jej nárast. Ak sa pozrieme na priebeh ceny tejto akcie počas rokov 2017 a 2018 na Obr. 9 vidíme, že cena tejto akcie počas out-of-sample obdobia rástla a preto bola pre ňu lepšie zvolená váha práve MST metódou. Zároveň sme podobne ako pre predošlý rok porovnali na Obr. 10 hodnoty Sharpovho pomeru získané oboma metódami s použitím rôznych hodnôt r_p a váh získaných bez reštrikcií, pričom ako out-of-sample dáta sme uvažovali ročné ceny akcií v roku 2018.

V neposlednom rade sme sa pokúsili použiť aj *DEA model*, predstavený v Podkapitole 1.3, na výpočet optimálneho portfólia založeného na dátach z roku 2017. Ako

Portfólio s váhami bez reštrikcie - rok 2017

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	- 0,27	12,30	2,34	- 0,36
6 mesiacov	- 0,31	13,60	1,92	- 0,37
3 mesiace	0,81	15,18	1,58	0,84

Portfólio s váhami s reštrikciou - rok 2017

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	0,08	9,55	2,34	0,11
6 mesiacov	0,02	10,29	1,92	0,02
3 mesiace	1,08	11,12	1,58	1,53

Tabuľka 3: Výsledky portfólia na out-of-sample dátach z roku 2018, získané z váh pomocou KM metódy z roku 2017.

Portfólio s váhami bez reštrikcie - rok 2017

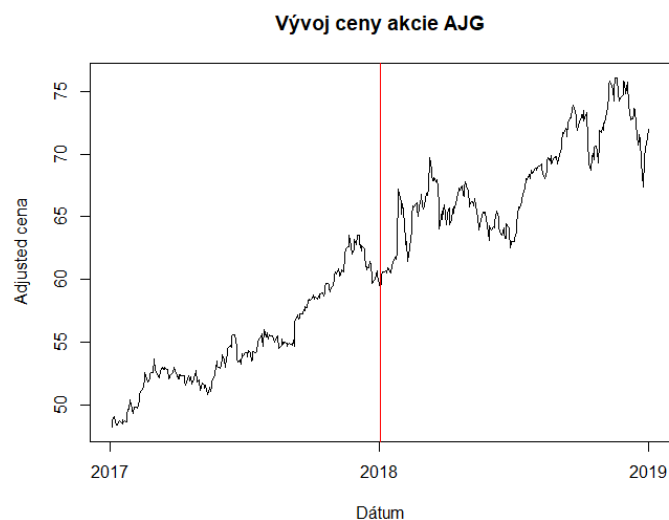
Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	- 1,73	23,09	2,34	- 1,20
6 mesiacov	- 1,81	20,27	1,92	- 1,42
3 mesiace	- 3,72	21,75	1,58	- 2,72

Portfólio s váhami s reštrikciou - rok 2017

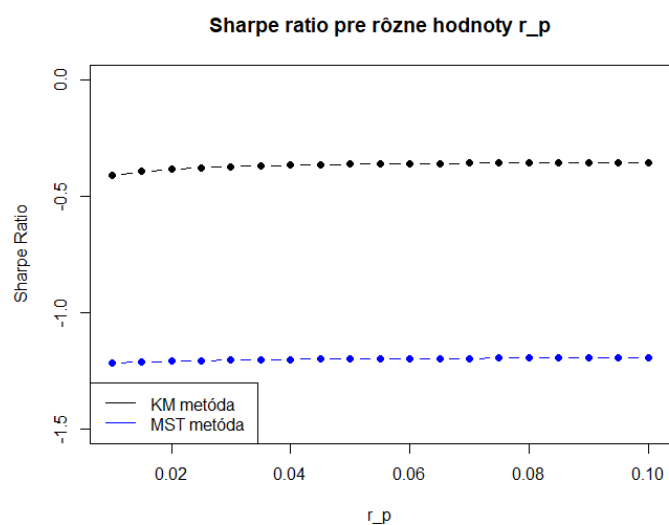
Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	0,40	13,49	2,34	0,45
6 mesiacov	0,69	12,22	1,92	0,88
3 mesiace	2,36	13,13	1,58	2,85

Tabuľka 4: Výsledky portfólia na out-of-sample dátach z roku 2018, získané z váh pomocou MST metódy z roku 2017.

jednotlivé vstupy a výstupy modelu sme sa rozhodli použiť rôzne kombinácie finančných ukazovateľov dostupných vo vyššie spomínanom datasete [9].



Obr. 9: Vývoj ceny akcie firmy Arthur J. Gallagher & Co. počas rokov 2017 a 2018, s vyznačenou hranicou roku 2017.



Obr. 10: Porovnanie Sharpovho pomeru KM a MST metódy na ročných out-of-sample dátach z roku 2018 pre rôzne hodnoty r_p .

Finančné ukazovatele

Finančné ukazovatele, inak nazývané aj pomerové ukazovatele, vznikajú pomocou numerických hodnôt vo finančných výkazoch spoločností na získanie všeobecného prehľadu o danej spoločnosti a jej prosperite. Hlavné využitie týchto ukazovateľov je sledovanie výkonnosti spoločnosti, ktoré pomáha robiť správne rozhodnutia v oblasti investovania do akcií danej spoločnosti. Finančné ukazovatele sa dajú rozdeliť na uka-

zovatele likvidity, ukazovatele rentability, ukazovatele aktivity, ukazovatele zadlženosti a ukazovatele trhovej hodnoty. V našom datasete boli k dispozícii nasledovné ukazovatele, ktorých popis a vzorce na výpočet sme uviedli pomocou [39] a [42]:

- **Price to Earnings Ratio (P/E):** Tento ukazovateľ patrí do kategórie ukazovateľov trhovej hodnoty, ktoré zachytávajú aktuálnu cenu akcie na trhu a naznačujú, či sú akcie danej firmy predražené, alebo naopak podhodnotené. Často sa používa na určenie relatívnej hodnoty spoločnosti a na porovnanie jej súčasného stavu s historickými stavmi – čím vyššia je hodnota tohto ukazovateľa, tým viac je akcia danej firmy predražená alebo to môže znamenať, že investori očakávajú nárast jej trhovej ceny niekedy v blízkej budúcnosti. Tento ukazovateľ sa určuje na základe nasledovného vzorca:

$$P/E = \frac{\text{Trhová cena akcie (za dané obdobie)}}{\text{Čistý zisk na akciu (za dané obdobie)}}. \quad (36)$$

- **Dividend Yield:** Tento ukazovateľ, rovnako ako P/E, patrí do kategórie ukazovateľov trhovej hodnoty. Na rozdiel od neho však meria množstvo dividend akcionárov v pomere k trhovej hodnote akcie. Vyššia hodnota tohto ukazovateľa však nemusí vždy byť pre investorov atraktívna, nakoľko môže naznačovať aj klesajúcu trhovú cenu akcie. Ukazovateľ vypočítame vzorcom:

$$\text{Dividend Yield} = \frac{\text{Hodnota dividendy na akciu}}{\text{Trhová cena akcie}}. \quad (37)$$

- **Earnings Per Share (EPS):** EPS je ukazovateľ patriaci do kategórie ukazovateľov trhovej hodnoty, ktorý slúži ako jeden zo základných ukazovateľov profitability spoločnosti – čím vyššia je hodnota tohto ukazovateľa, tým profitabilnejšia sa spoločnosť javí byť. Rovnako uvádzame vzorec na jeho výpočet:

$$EPS = \frac{\text{Čistý zisk spoločnosti}}{\text{Celkový počet emitovaných akcií}}. \quad (38)$$

- **52 Week Low / High:** Tento ukazovateľ vyjadruje najnižšiu / najvyššiu cenu, za ktorú bola počas predošlého roka akcia obchodovaná. Pre mnohých investorov nesie dôležitú informáciu, nakoľko z tejto ceny dokážu predikovať jej budúci vývoj a teda správne alokovať svoje investície. Zvyčajne sa akcia obchoduje v rozmedzí medzi 52 Week Low a 52 Week High a investori zvažujú investície vtedy, ak sa cena pohybuje na jednej z hraníc tohto intervalu.

- **Market Cap:** Market Capitalization (skr. *Market Cap*) vyjadruje celkovú trhovú hodnotu akcií emitovaných danou spoločnosťou. Tento ukazovateľ je určený z celkového počtu akcií na trhu, ktoré sú danou spoločnosťou emitované, vynásobeného aktuálnou trhovou cenou danej akcie. Investori väčšinou tento ukazovateľ využívajú na odhad veľkosti danej spoločnosti a na základe tejto informácie následne upravujú svoje investičné plány.
- **EBITDA:** Skratka EBITDA, ktorá v slovenskom preklade znamená zisk spoločnosti pred uplatnením úrokov, daní a odvodov, slúži ako ukazovateľ celkovej finančnej výkonnosti a profitability danej spoločnosti. Je vhodným ukazovateľom rentability, ale má mnoho nedostatkov spojených najmä s tým, že neberie do úvahy niektoré dôležité výdavky, ktoré majú významný vplyv na cash flow danej spoločnosti.
- **Price to Sales (P/S):** P/S je dôležitým ukazovateľom, ktorý vyjadruje, koľko sú investori ochotní zaplatiť za jeden dolár tržieb akcie danej firmy. Jeho hlavnou nevýhodou však je, že nezachytáva výnosy spoločnosti a neberie do úvahy ani to, či daná spoločnosť nejaké výnosy v budúcnosti bude mať. Nižšie hodnoty tohto ukazovateľa naznačujú, že daná akcia je podcenená, naopak vyššie hodnoty naznačujú nadcenenosť akcie. Tento ukazovateľ má viacero spôsobov výpočtu, v práci uvádzame najpoužívanejší z nich:

$$P/S = \frac{\text{Trhová cena akcie}}{\text{Čistý zisk z 1 akcie (za dané obdobie)}}. \quad (39)$$

- **Price to Book (P/B):** Je to ukazovateľ, ktorý vyjadruje podiel trhovej ceny akcie danej spoločnosti a jej účtovnej hodnoty, pričom nižšie hodnoty môžu znamenať, že akcia danej spoločnosti je podhodnotená. Počítame ho na základe nasledovného vzorca:

$$P/B = \frac{\text{Trhová cena akcie}}{\text{Účtovná cena akcie}}. \quad (40)$$

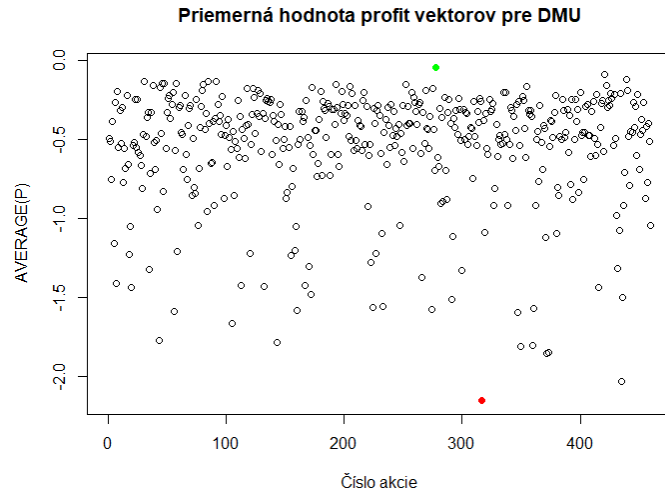
Na základe definícií jednotlivých ukazovateľov sme sa rozhodli do výstupnej matice DEA modelu zahrnúť dva najvýznamnejšie ukazovatele profitability spoločnosti – *EPS* a *EBITDA*. Naopak, do matice vstupov sme zahrnuli ukazovatele, ktoré zachytávajú

informácie o trhovej hodnote spoločnosti a napomáhajú investorom v investičných rozhodnutiach – *P/E ratio*, *Dividend Yield* a *P/S ratio*. Ukazovateľ *P/B ratio* sme v našom modeli vynechali, nakoľko obsahoval ako jediný pomerne veľa chýbajúcich dát. Model (25) sme riešili v programe R pomocou funkcie `lp` z balíka `lpSolve` [3], ktorá slúži na riešenie úloh lineárneho programovania. Model (25) do tejto triedy úloh tiež spadá, nakoľko účelová funkcia je lineárna, rovnako aj ohraničenia v tvare rovností alebo nerovností. V prípade použitia tejto funkcie sme však museli upraviť zápis úlohy, nakoľko funkcia `lp` predpokladá nezápornosť všetkých premenných v modeli, ale v našom prípade môže byť premenná ξ ľubovoľná. Rozhodli sme sa preto zapísať túto premennú v tvare $\xi = \xi^+ - \xi^-$, kde $\xi^+, \xi^- \geq 0$. Finálny tvar optimalizačnej úlohy pre DMU_k je potom nasledovný:

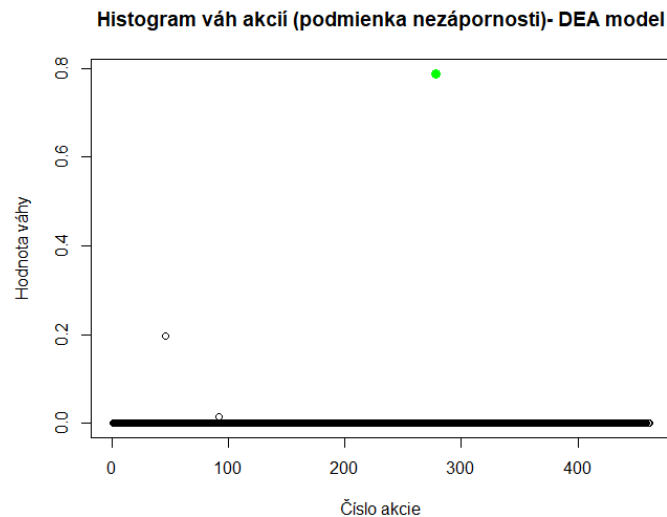
$$\begin{aligned}
\max \quad & py_k - qx_k + \xi^+ - \xi^- \\
\text{s.t.} \quad & pY - qX + \xi^+ e - \xi^- e \leq 0 \\
& -p \leq -\frac{1}{m+s} R^+ \\
& -q \leq -\frac{1}{m+s} R^- \\
& \xi^+, \xi^- \geq 0.
\end{aligned} \tag{41}$$

Po výpočte optimálnych hodnôt p^* , q^* a ξ^* pre každé DMU sme postupovali podľa článku [32] a určili vektor profitov podľa uvedeného predpisu. Následne sme vypočítali priemerné hodnoty profitových vektorov jednotlivých DMU, ktoré majú slúžiť ako analógia hodnôt *ECOL*, ktoré sme uviedli pri klasickom modeli krížovej efektivity. Ako môžeme vidieť aj na Obr. 11, pre všetky akcie vyšli hodnoty krížovej efektivity záporné. Môže to byť spôsobené najmä tým, že takýmto spôsobom sme si krížovú efektivitu definovali len pre radiálny model, avšak bola aplikovaná na neradiálny model s VRS, pri ktorom môže problém s negatívnou efektivitou nastať [21].

Takto vytvorený vektor priemerných hodnôt profitových vektorov sme potom použili na optimalizáciu váh jednotlivých akcií v portfóliu pomocou (19). Výsledok sme určovali pre rôzne hodnoty konštanty k , konkrétne sme rozdelili spomínaný interval $\langle \min(\bar{P}); \max(\bar{P}) \rangle$ na 20 podintervalov, ktorých hranice sme brali ako hodnotu k . V našom prípade však boli výsledné optimálne váhy pre všetky hodnoty k rovnaké a mali rozloženie, ktoré prikľadáme na Obr. 12. Ako môžeme vidieť, takto zostrojené portfólio



Obr. 11: Priemerná hodnota profitového vektora pre jednotlivé DMU s vyznačenou maximálnou (zelená) a minimálnou (červená) hodnotou.



Obr. 12: Optimálne váhy akcií počítané pomocou DEA modelu s podmienkou nezápornosti váh s vyznačenou maximálnou (zelená) hodnotou.

opäť čelí problému s veľmi nízkou diverzifikáciou. Napriek tomu, že použitie modelu (19) malo zabezpečiť to, aby sme sa takémuto problému vyhli, jeho nastanie môže byť spôsobené určitou nepresnosťou, ku ktorej sme sa vyjadrili už pri definícii modelu. V článku [32] sa totižto uvádza len akási analógia krížovej efektivity (ktorú vieme dobre popísať napríklad pri radiálnom CRS modeli) na neradiálny (aditívny) model s VRS so špecificky zvolenými váhami, avšak takáto analógia sa nezdá byť úplne korektná [21].

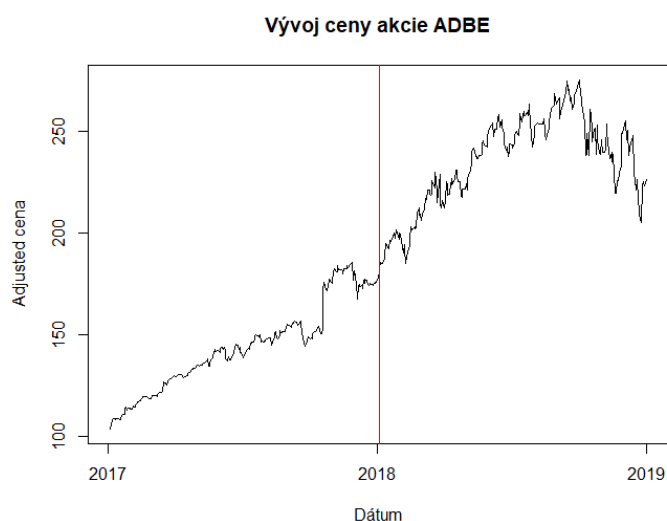
Jednak uvedená analógia postráda ekonomickú interpretáciu pomocou nejakého typu efektivity a navyše v našom prípade ani nevedla k uspokojivým výsledkom. Napriek tomu sme sa rozhodli vyskúšať spočítať realizovaný výnos, riziko a hodnotu Sharpovho pomeru pre portfólio s takto zvolenými optimálnymi váhami na out-of-sample dátach z roku 2018 a výsledky sme zapísali do Tab. 5. Takto zvolené portfólio vybralo s najvyš-

Portfólio s DEA váhami z roku 2017

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	0,07	1,99	2,34	0,52
6 mesiacov	0,23	1,61	1,92	2,21
3 mesiace	0,30	1,90	1,58	2,46

Tabuľka 5: Výsledky portfólia na out-of-sample dátach z roku 2018, získané z váh pomocou DEA cross-efficiency aditívneho modelu s VRS na dátach z roku 2017.

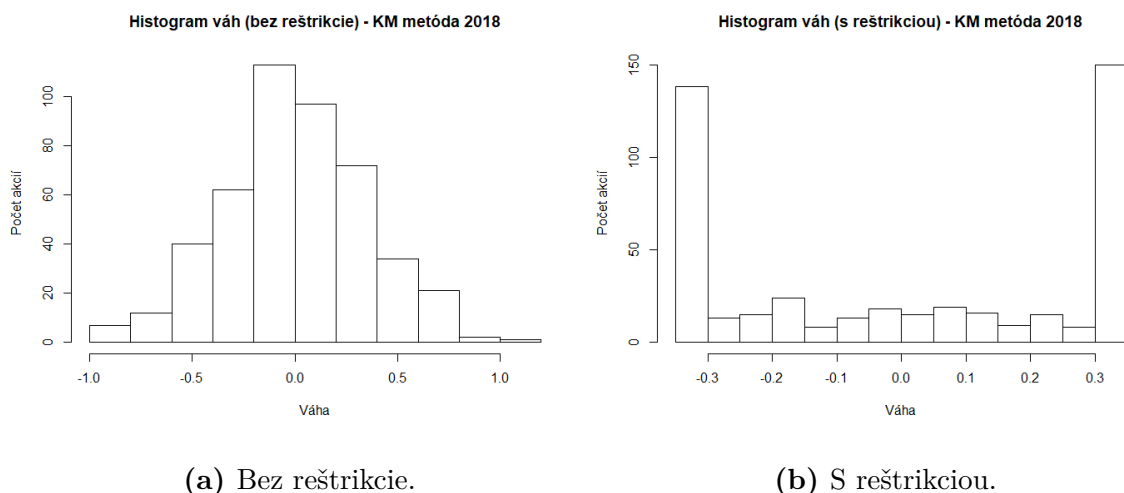
šou váhou akciu firmy Adobe Inc., ktorá sa globálne venuje vývoju softvérov. Priebeh ceny tejto akcie pripájame na Obr. 13.



Obr. 13: Vývoj ceny akcie firmy Adobe Inc. počas roku 2017 (trénovacie obdobie) a 2018 (out-of-sample obdobie), oddelené zvislou čiarou.

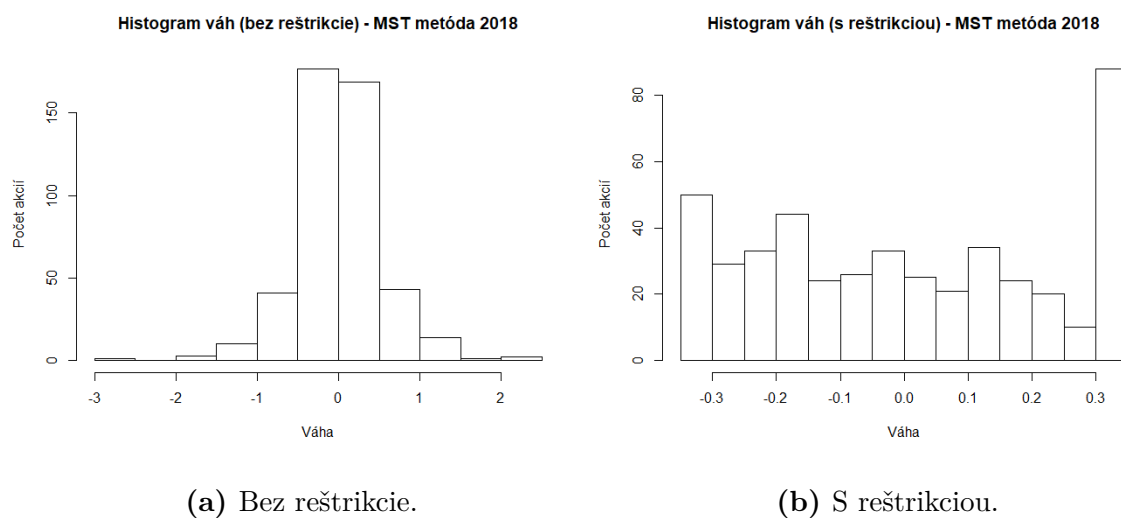
2.1.3 Rok 2018

Napokon sme sa pozreli aj na porovnanie KM a MST metód počítaných z dát v roku 2018 a porovnali sme ich na out-of-sample dátach z roku 2019. V tomto prípade sa nám však pomocou KM metódy nepodarilo nájsť vhodné riešenie s predošle používanou reštrikciou váh – ako interval, do ktorého musia váhy s reštrikciou patriť sme zobrali najbližší možný symetrický interval, pomocou ktorého už bolo riešenie možné nájsť, a to interval $\langle -0,31; 0,31 \rangle$. Tento interval pre reštrikciu váh sme použili ako v KM prístupe, tak aj v MST prístupe. Histogramy vypočítaných váh prikľadáme na Obr. 14 a Obr. 15. Jednotlivé výsledky takto zostavených optimálnych portfólií sme zapísali do Tab. 6.

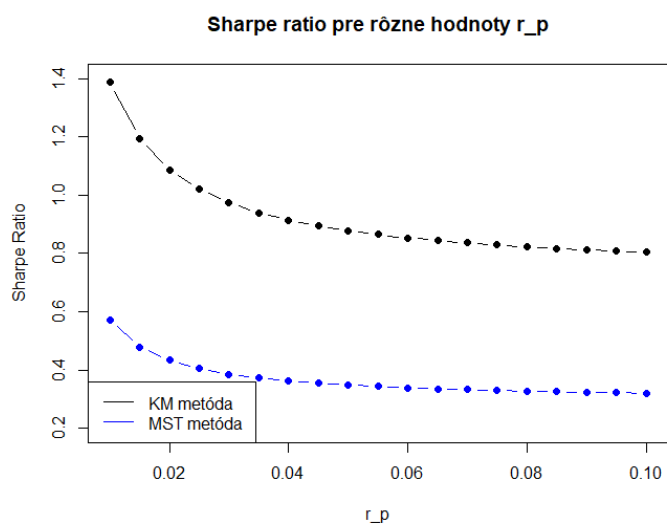


Obr. 14: Histogram optimálnych váh vypočítaných pomocou KM prístupu z dát roku 2018.

Aj v tomto prípade vyšla MST metóda výpočtu relatívne lepšie, no napriek tomu sa v prvom štvrťroku 2019 vyskytla záporná hodnota Sharpovho pomeru, spôsobená najmä nízkym realizovaným výnosom. Dôvodom môže byť prepád burzy v decembri 2018, ktorý spadá do obdobia, počas ktorého prebiehal výpočet váh a rovnako zasahoval do začiatku roka 2019 a teda zrejme aj ovplyvnil výsledok. Ak sa však pozrieme na vyhodnotenie výsledkov počas celého nasledujúceho roka, vyšší Sharpov pomer vykazuje KM metóda – i keď realizované výnosy sú v oboch metódach takmer rovnaké, KM metóda vykazuje nižšie hodnoty rizika optimálneho portfólia. Na Obr. 16 zároveň pripájame hodnoty Sharpovho pomeru optimálnych portfólií vytvorených KM a MST metódou pri použití rôznych hodnôt minimálneho požadovaného výnosu portfólia a



Obr. 15: Histogram optimálnych váh vypočítaných pomocou MST prístupu z dát roku 2018.



Obr. 16: Porovnanie Sharpovho pomeru KM a MST metódy na ročných out-of-sample dátach z roku 2019 pre rôzne hodnoty r_p .

vyhodnotení na ročných dátach nasledujúceho roka.

Portfólio s váhami bez reštrikcie - KM metóda, rok 2018

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	0,67	12,03	2,05	0,88
6 mesiacov	- 0,25	10,44	2,43	- 0,41
3 mesiace	-1,21	10,05	2,44	- 1,92

Portfólio s váhami s reštrikciou - KM metóda, rok 2018

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	0,58	11,43	2,05	0,80
6 mesiacov	0,23	9,85	2,43	0,36
3 mesiace	-1,59	8,93	2,44	- 2,84

Portfólio s váhami bez reštrikcie - MST metóda, rok 2018

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	0,63	28,38	2,05	0,35
6 mesiacov	0,80	20,63	2,43	0,61
3 mesiace	- 1,61	21,10	2,44	- 1,22

Portfólio s váhami s reštrikciou - MST metóda, rok 2018

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	0,63	17,11	2,05	0,58
6 mesiacov	0,51	15,15	2,43	0,52
3 mesiace	- 1,14	14,04	2,44	- 1,30

Tabuľka 6: Výsledky portfólií vytvorených pomocou váh z KM a MST metódy, na out-of-sample období nasledujúceho roka uvedenej dĺžky.

2.2 Metódy aplikované na vybranú množinu akcií

V druhej polovici praktickej časti našej práce sme použili TODIM algoritmus a to dvoma rôznymi spôsobmi. Prvým spôsobom bol výpočet skóre jednotlivých akcií postupnou aplikáciou krokov tohto algoritmu a následné určenie váh akcií v portfóliu na základe vzorca:

$$w_i = \frac{R_i}{\sum_{j=1}^n R_j} \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (42)$$

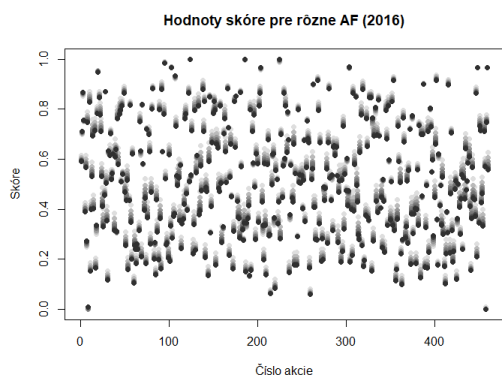
Takto tvorené portfólio sme vytvorili z dát v rokoch 2016, 2017 a 2018 a podobne ako aj v predošlých metódach, sme jeho výsledky porovnávali pomocou out-of-sample dát

rôzne dlhých investičných období v nasledujúcom roku. Cieľom druhého spôsobu bolo naopak pomocou vypočítaných hodnôt skóre určiť množinu akcií, ktorá má „dobré“ hodnoty skóre a použiť ich v ďalšej optimalizácii – konkrétne pomocou KM metódy, MST metódy a pomocou vzťahu (42).

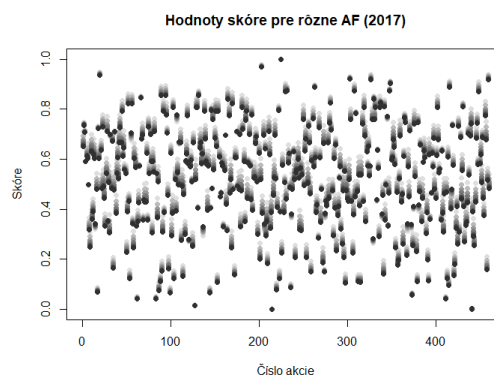
Ako vstup do TODIM algoritmu sme použili 3, 6 a 12-mesačné priemerné výnosy, smerodajné odchýlky a korelácie výnosov 461 akcií, s ktorými sme pracovali už aj v predošlých prístupoch. Následne sme postupne prešli všetkými krokmi TODIM algoritmu a v každom skúmanom roku sme vyhodnotili skóre jednotlivých akcií. V algoritme sme použili rovnomerné váhy pre všetky kritériá, nakoľko si myslíme, že k dobre vytvorenému portfóliu prispievajú všetky kritériá v rovnakej miere. Čo sa týka voľby hodnôt tlmiaceho faktora, pokúsili sme sa experimentálne vypočítať výsledky pomocou hodnôt menších a aj väčších ako 1, aby sme ich medzi sebou vedeli porovnať. Konkrétne sme volili hodnoty z množiny $\{0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,5; 1,75; 2\}$. Na Obr. 17 znázorňujeme hodnoty skóre pri použití rôznych hodnôt tlmiaceho faktora pre každý rok zvlášť. Najsvetlejšou farbou sme znázornili výsledky skóre získané použitím najmenšej hodnoty tlmiaceho faktora a hodnoty skóre získané pomocou vyšších hodnôt tlmiaceho faktora sú naznačené stmavujúcou sa farbou.

Ako sme už spomenuli pri odvádzaní TODIM algoritmu, hodnota tlmiaceho faktora menšia ako 1 efekt strát zvyšuje a naopak, hodnota väčšia ako 1 ich efekt znižuje. V praxi hodnota tlmiaceho faktora menšia ako 1 znamená, že ak má konkrétna akcia napríklad vysokú koreláciu s ostatnými, je to pre ňu strata a teda musí mať dostatočne dobré priemerné výnosy a smerodajnú odchýlku, aby sa vyrovnala ostatným akciám. Z tohto dôvodu nás však budú zaujímať najmä výsledky získané pomocou tlmiaceho faktora s hodnotou blízkou 1, pretože chceme získať čo najobjektívnejšie výsledky bez toho, aby sme príliš upravovali efekt strát alebo efekt ziskov. Konkrétne sa budeme naďalej venovať výsledkom získaným pomocou tlmiaceho faktora s hodnotou 0,75, 1 a 1,25. Pre tieto hodnoty tlmiaceho faktora sme vykreslili aj medziročné porovnanie získaných skóre akcií ktoré znázorňujeme na Obr. 18.

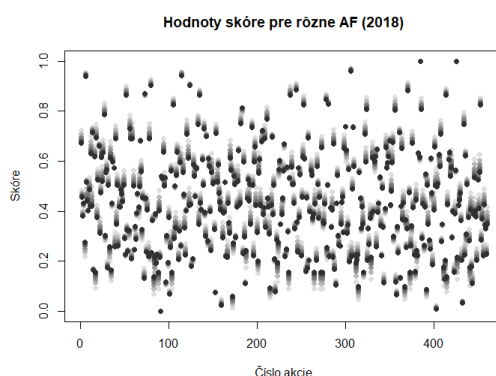
V prvom rade sme sa pozreli na výsledky prvého prístupu počas jednotlivých rokov. Na Obr. 19 znázorňujeme vykreslené hodnoty skóre jednotlivých akcií, pri použití už len zmenšenej množiny tlmiacich faktorov $\{0,75; 1; 1,25\}$. Z obrázka vidno, že isté



(a) Rok 2016.



(b) Rok 2017.

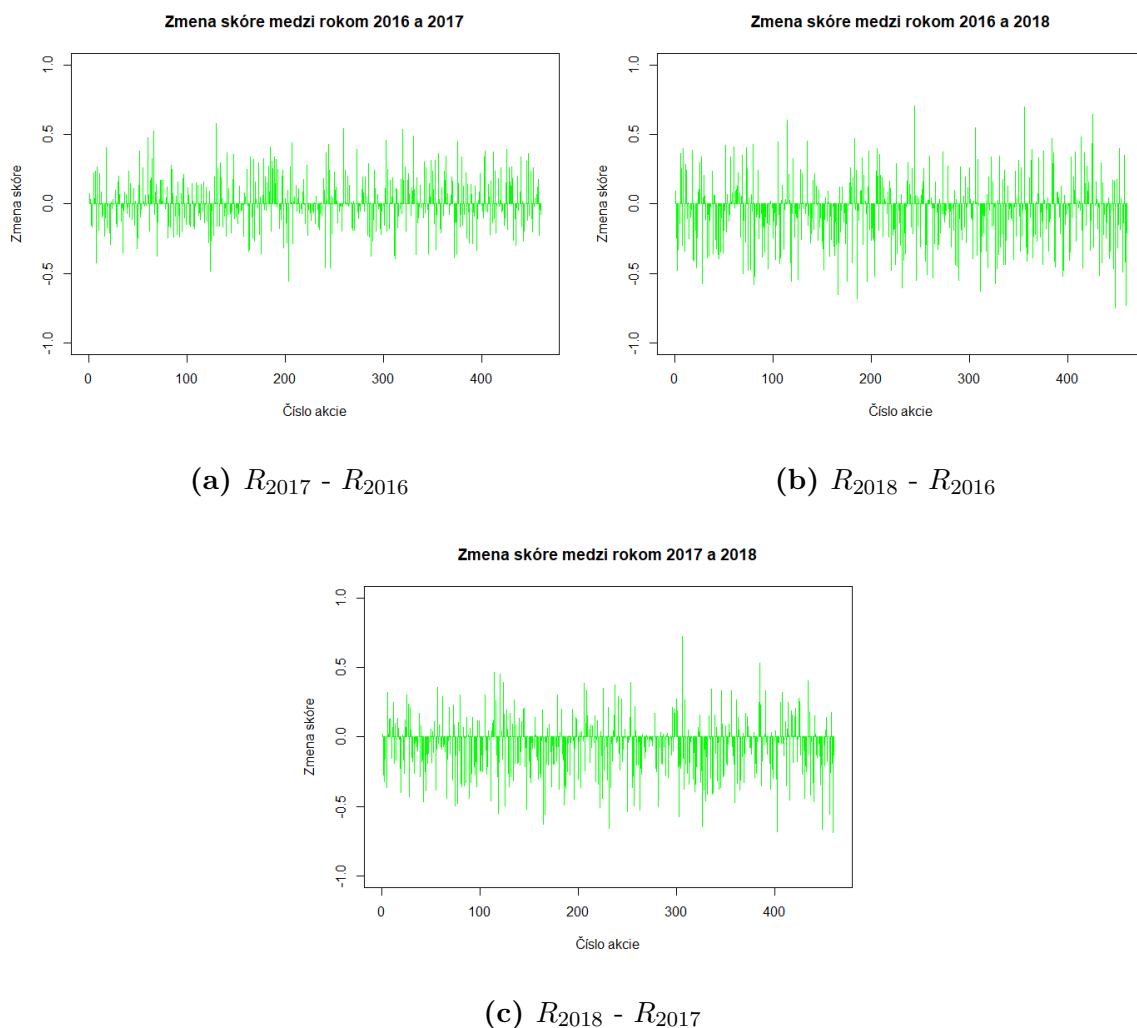


(c) Rok 2018.

Obr. 17: Výsledky skóre pre rôzne hodnoty tlmiaceho faktora, ktoré sú farebne odlíšené od najmensej (najsvetlejšia farba) po najväčšiu (najtmavšia farba).

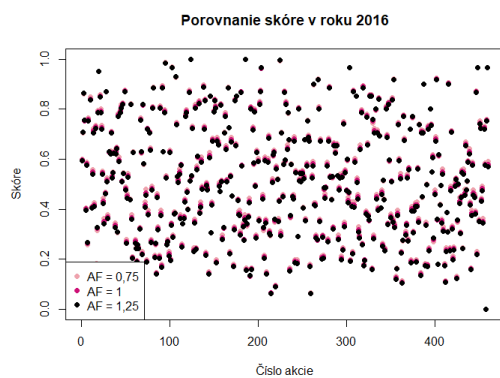
hodnoty skóre, ktoré sú príliš vysoké, resp. príliš nízke, sú rovnaké pre všetky hodnoty tlmiacich faktorov. Ide zrejme o akcie, ktoré sú dostatočne dobré, resp. dostatočne zlé, pri akejkoľvek forme posilnenia alebo oslabenia strát kritérií, ktoré ich charakterizujú. Hodnoty optimálneho portfólia pri použití váh vypočítaných pomocou vzťahu (42) sme skúsili vypočítať pre všetky z uvedených hodnôt tlmiaceho faktora, no nakoľko sa výsledky líšili rádovo len v 10^{-9} , rozhodli sme sa v ďalších výpočtoch pracovať len s výsledkami získanými pomocou hodnoty tlmiaceho faktora 0,75. Bližšie porovnanie výsledkov pri použití rôznych hodnôt tlmiaceho faktora popíšeme neskôr v práci. Potom sme pomocou (42) určili váhy jednotlivých akcií vstupujúcich do portfólia v každom roku a opäť, ako v predošlých metódach, sme určili realizovaný výnos, riziko a Sharpev pomer takto vytvorených portfólií. Výsledky sme zhrnuli do Tab. 7.

Celkovo si z Tab. 7 môžeme všimnúť, že portfóliá tvorené touto metódou vykazujú

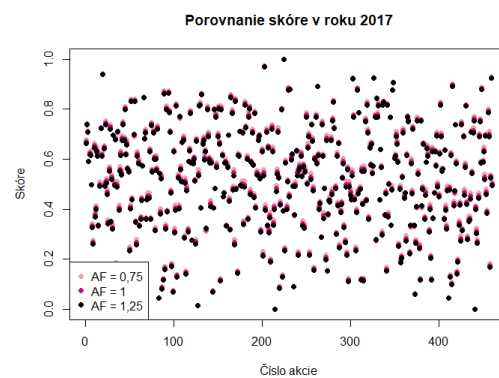


Obr. 18: Medziročný rozdiel hodnôt skóre (R) získané TODIM metódou pre jednotlivé akcie.

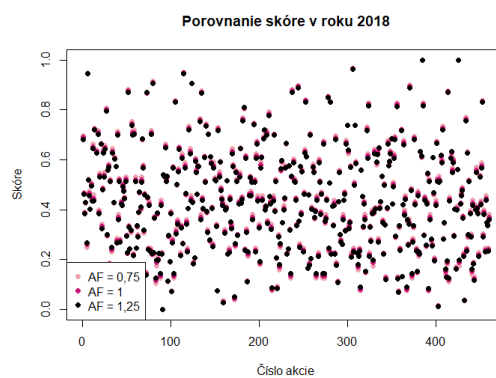
veľmi malé hodnoty rizika, no aj malé hodnoty realizovaných výnosov. Najmenšie riziko má portfólio tvorené z dát v roku 2016 a vyhodnocované na dátach z roku 2017 a to v každom investičnom horizonte. Z tabuľky tiež vidíme, že výsledky získané touto metódou sú veľmi dobré pre rok 2016 a 2018, no v roku 2017 vykazovalo takto vytvorené portfólio najmenšie hodnoty Sharpovho pomeru spomedzi všetkých predošlých metód s reštrikciou váh použitých v tomto roku. Ak sa pozrieme konkrétnejšie na váhy jednotlivých akcií v TODIM portfóliu z roku 2017, všimneme si, že sa pohybujú len v tisícinách, čo môžeme vidieť na Obr. 20. Zároveň vidíme, že z toho dôvodu, že bolo aj skóre jednotlivých akcií nezáporné, tak aj váhy akcií v portfóliu musia byť nutne nezáporné a práve možno preto vykazuje takto vytvorené portfólio pomerne zlé výsledky, keďže s nezápornými váhami sme mali pre zvolené akcie problém aj v predošlých me-



(a) Rok 2016.

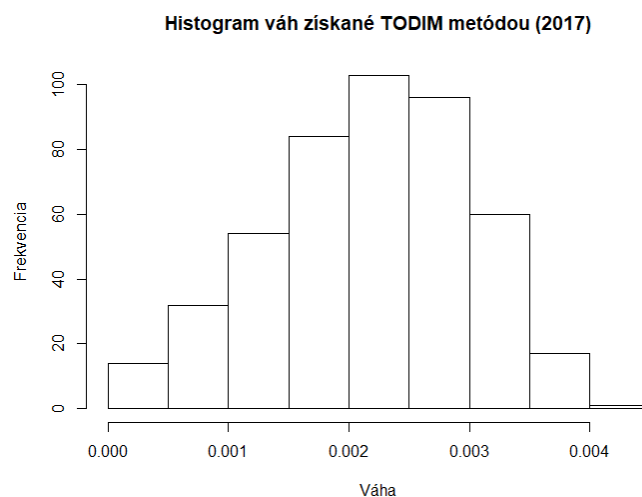


(b) Rok 2017.



(c) Rok 2018.

Obr. 19: Porovnanie skóre metódy TODIM pre $AF = 0,75$, $AF = 1$ a $AF = 1,25$.



Obr. 20: Histogram optimálnych váh vypočítaných pomocou TODIM metódy v roku 2017.

Portfólio z dát z roku 2016

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	0,07	0,53	1,20	1,89
6 mesiacov	0,05	0,57	0,88	1,39
3 mesiace	0,07	0,58	0,61	1,87

Portfólio z dát z roku 2017

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	- 0,06	1,09	2,34	- 0,95
6 mesiacov	0,00	1,04	1,92	- 0,16
3 mesiace	- 0,04	1,25	1,58	- 0,53

Portfólio z dát z roku 2018

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	0,09	0,88	2,05	1,55
6 mesiacov	0,14	0,87	2,43	2,37
3 mesiace	0,25	0,92	2,44	4,10

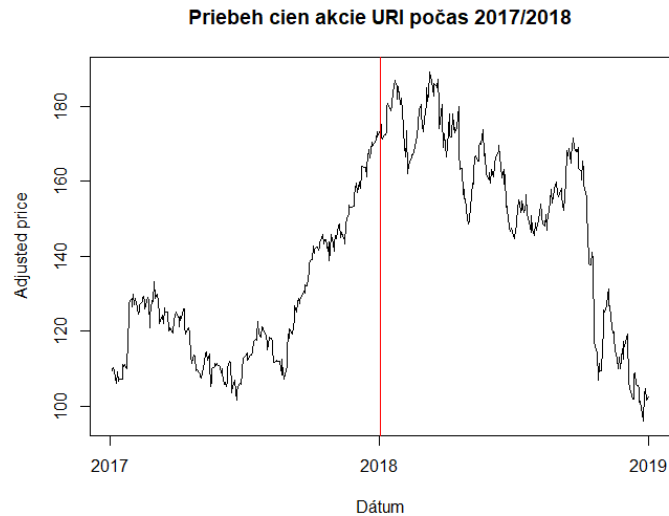
Tabuľka 7: Výsledky portfólií vytvorených pomocou akcií vážených transformovanou hodnotou skóre z TODIM algoritmu na out-of-sample období nasledujúceho roka uvedenej dĺžky.

tódach. Akcia, ktorá je v spomínanom portfóliu najzastúpenejšia patrí firme *United Rental* a jej priebeh počas rokov 2017 a 2018 zobrazujeme na Obr. 21. Je vidno, že v roku 2017 cena akcie rástla a zrejme práve aj vďaka tomu bola do portfólia zvolená s najvyššou váhou, nakoľko mala ešte potenciál rásť ďalej. Na prelome rokov 2017 a 2018 však cena tejto akcie začala pomerne prudko klesať a kvôli tomuto poklesu znižovala aj hodnotu nami vytvoreného portfólia.

V ďalšej časti práce sme sa následne venovali druhému spôsobu využitia TODIM algoritmu, pomocou ktorého sme vyhodnotili množinu akcií, ktorá bude vstupovať do ďalšej optimalizácie.

2.2.1 Rok 2016

Na Obr. 19a sme si mohli všimnúť, že hodnoty skóre pri použití rôznych hodnôt tlmiaceho faktora v roku 2016 sú takmer totožné. Najväčšie rozdiely pridelených hodnôt skóre sú vo výške stotín, čo zobrazujeme aj na Obr. 22. Nakoľko je teraz naším cieľom

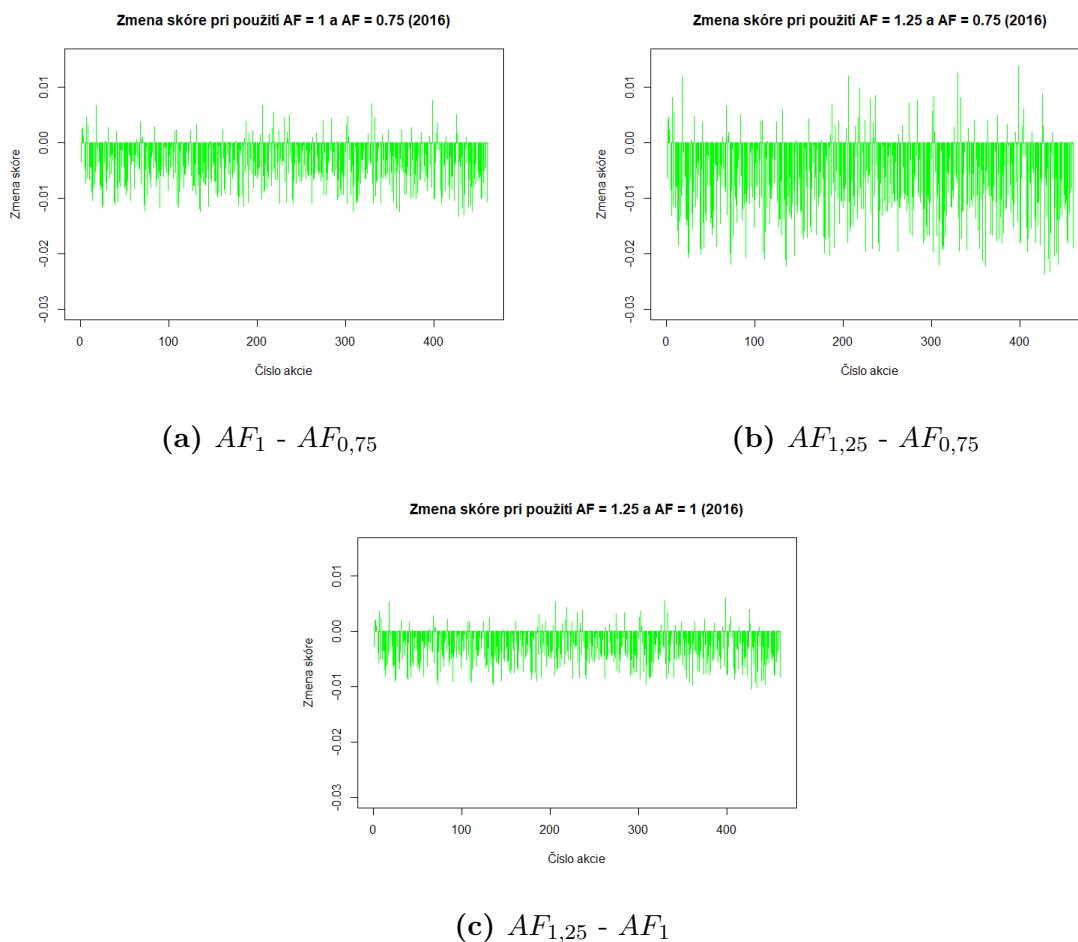


Obr. 21: Pribeh vývoja cien akcie URI počas obdobia 2017-2018.

na základe hodnôt skóre určiť hranicu skóre, od ktorej už akcie s rovnakým alebo vyšším skóre budeme zahŕňať do ďalšej optimalizácie, a rozdiely medzi hodnotami skóre v rôznych verziách sú pomerne malé, rozhodli sme sa na toto porovnanie používať výsledky skóre získané použitím $AF = 0,75$.

Na výber vhodnej hranice sme použili zhľukovaciu metódu K-means, ktorú sme aplikovali pomocou R-kovskej funkcie `kmeans` z balíka `stats`, ktorý je súčasťou programu R. Táto metóda je založená na algoritme publikovanom v [22] a jej cieľom je rozdeliť m n -dimenzionálnych bodov do K zhľukov (angl. *cluster*) tak, aby bola v týchto zhľukoch minimálna suma štvorcov vzdialeností bodov od stredov jednotlivých zhľukov. V našom prípade máme 1-rozmerné body, ktoré sú predstavované hodnotami skóre akcií, a máme ich spolu 461. Ako vstup metódy sme manuálne zadali požadovaný počet zhľukov **3**, so snahou získať skupiny nízkeho, stredného a vysokého skóre. Pomocou tohto algoritmu sme získali presne také skupiny, aké sme potrebovali a znázorňujeme ich na Obr. 23. Na základe výsledkov sme ako hranicu zobrali najmenšiu hodnotu skóre pre akcie, ktoré boli zaradené do skupiny s vysokým skóre – takýchto akcií bolo 137, pričom hraničná hodnota skóre bola 0,66.

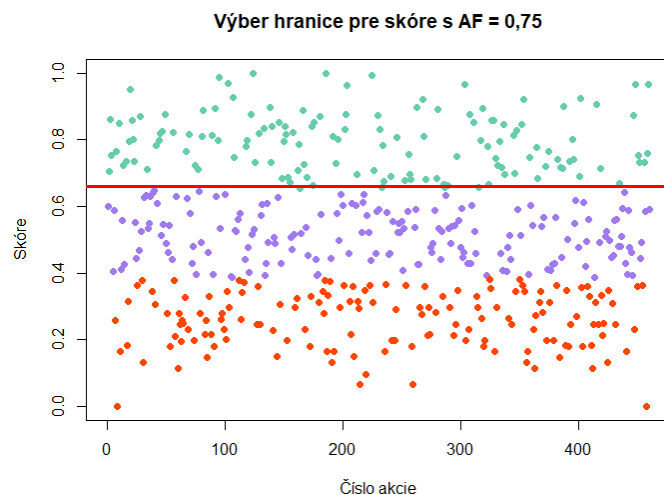
V ďalšom kroku sme teda uvažovali len množinu týchto vybraných 137 akcií, na ktorých výnosy sme aplikovali KM metódu, MST metódu a určenie váh na základe vzťahu (42). Ak sa pozrieme na rozloženie váh vypočítané KM metódou na Obr. 24a,



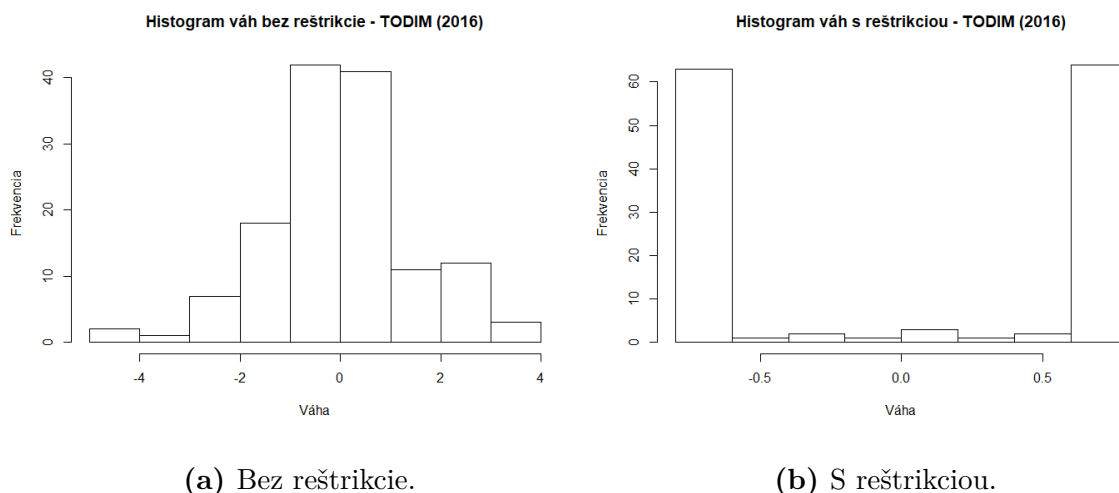
Obr. 22: Porovnanie skóre metódy $TODIM_{2016}$ pre rôzne hodnoty tlmiaceho faktora (AF). Skóre metódy pri použití $AF = i$ v tomto prípade označujeme AF_i .

váhy pre jednotlivé akcie vyšli v absolútnej hodnote veľmi veľké – to by však mohlo viesť k nedostatočnej diverzifikácii portfólia, tak sme do výpočtu zahrnuli aj reštrikciu na váhy (Obr. 24b). Najmenšia splniteľná reštrikcia (teda reštrikcia, pri ktorej optimálne počítané váhy vedeli splniť všetky ohraničenia) bol interval $\langle -0,75; 0,75 \rangle$. Z histogramu váh s reštrikciou vidíme, že naozaj sa váhy koncentrujú najmä na okrajoch tohto intervalu. Pre takto určené váhy sme napriek ich extrémnym hodnotám určili výsledky podobne ako v predošlých prípadoch a zapísali sme ich do Tab. 8.

Následne sme aplikovali na rovnakú množinu akcií aj MST metódu. Pomocou nej boli jednotlivým akciám, rovnako ako KM metódou, pridelené príliš veľké váhy v absolútnej hodnote – ako môžeme vidieť aj na Obr. 25 – a preto sme tiež použili aj reštrikciu na váhy, v rovnakom rozsahu ako pri KM metóde. Na Obr. 26 navyše pripá-



Obr. 23: Zhluky akcií podľa hodnôt skóre v roku 2016, vyznačená hranica oddeľujúca skupinu akcií s najvyšším skóre.



Obr. 24: Histogram optimálnych váh vypočítaných po aplikácii TODIM metódy v roku 2016, počítané KM metódou.

jame graf najmenej kostry grafu, ktorá vznikla po aplikácii MST metódy na množinu nami vybraných 137 akcií. Napokon sme aj v tomto prípade vyčíslili výsledky takto vytvorených portfólií a zapísali sme ich do Tab. 9.

Pri porovnaní metód môžeme jednoznačne zhodnotiť, že prístupy s aplikovanou reštrikciou váh dávali v oboch metódach lepšie výsledky, pričom obe metódy s aplikovanou reštrikciou mali najhoršie výsledky pri vyhodnocovaní na 6-mesačnom out-of-sample období. Pre váhy získané bez reštrikcie pomocou KM a MST metód sme navyše

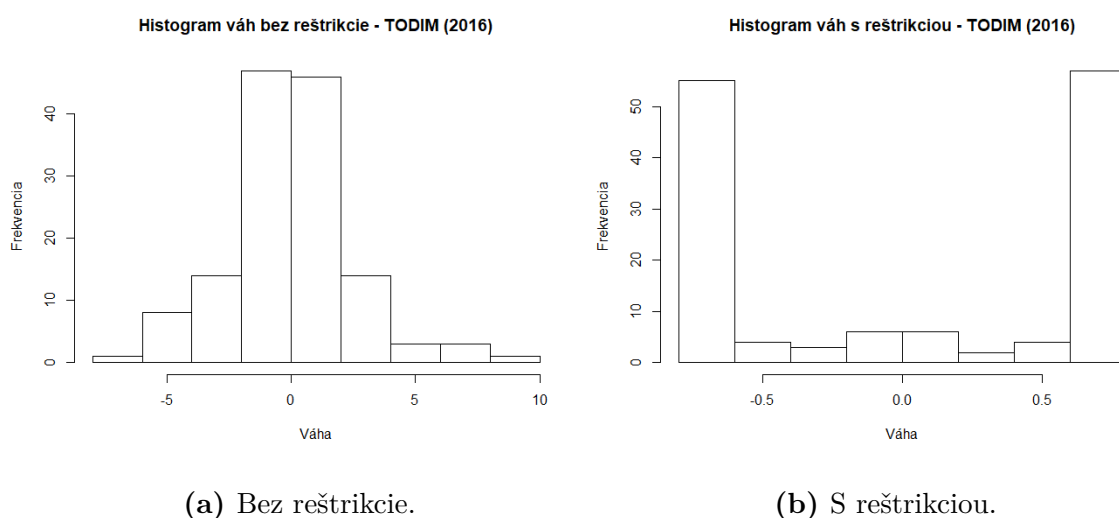
Portfólio s váhami bez reštrikcie - rok 2016

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	- 0,14	15,06	1,20	- 0,15
6 mesiacov	- 1,19	15,96	0,88	- 1,19
3 mesiace	- 1,62	16,25	0,61	- 1,58

Portfólio s váhami s reštrikciou - rok 2016

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	1,32	13,10	1,20	1,59
6 mesiacov	0,49	13,91	0,88	0,55
3 mesiace	0,92	13,20	1,20	1,11

Tabuľka 8: Výsledky portfólií vytvorených pomocou akcií vybraných TODIM algoritmom v roku 2016 a váh z KM metódy, na out-of-sample období nasledujúceho roka uvedenej dĺžky.

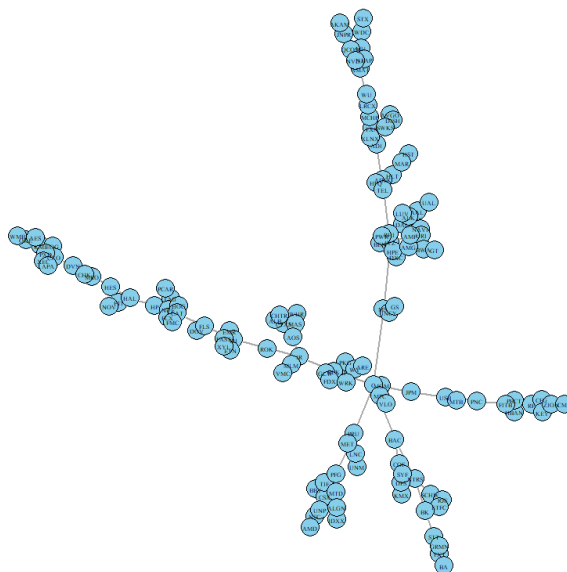


Obr. 25: Histogram optimálnych váh vypočítaných po aplikácii TODIM metódy v roku 2016, počítané MST metódou.

vykreslili priebeh hodnôt Sharpových pomerov pre rôzne požadované r_p , ktoré sme vyhodnocovali na ročnom období out-of-sample dát nasledujúceho roka, s použitím váh vypočítaných bez reštrikcie – tento priebeh pripájame na Obr. 27.

Pozreli sme sa ale aj na prístup, ktorý sme vyššie spomínali, a to pomocou vybranej množiny akcií vytvoriť portfólio s váhami určenými vzťahom (42). Takto vybrané nezáporné váhy už boli rozložené lepšie, ale naopak od KM a MST metód nadobúdali

Minimálna kostra grafu výnosov akcií vybraných TODIM metódou v r. 2016



Obr. 26: Minimálna kostra grafu výnosov akcií vybraných TODIM metódou v roku 2016.

Portfólio s váhami bez reštrikcie - rok 2016

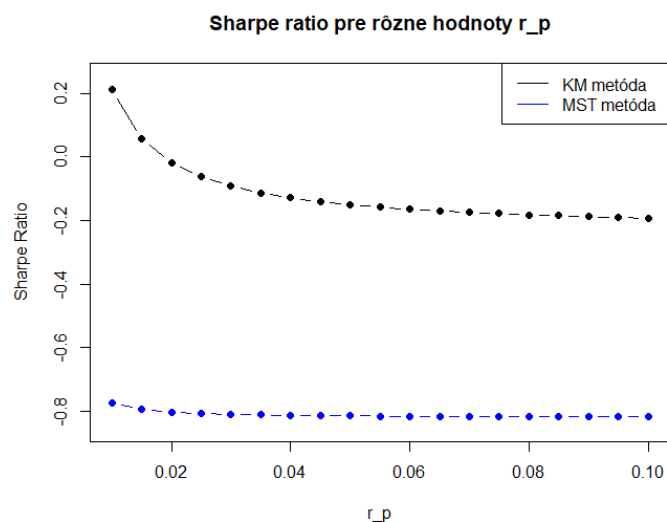
Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	- 1,26	24,68	1,20	- 0,81
6 mesiacov	- 0,95	26,03	0,88	- 0,58
3 mesiace	- 1,73	25,60	0,61	- 1,07

Portfólio s váhami s reštrikciou - rok 2016

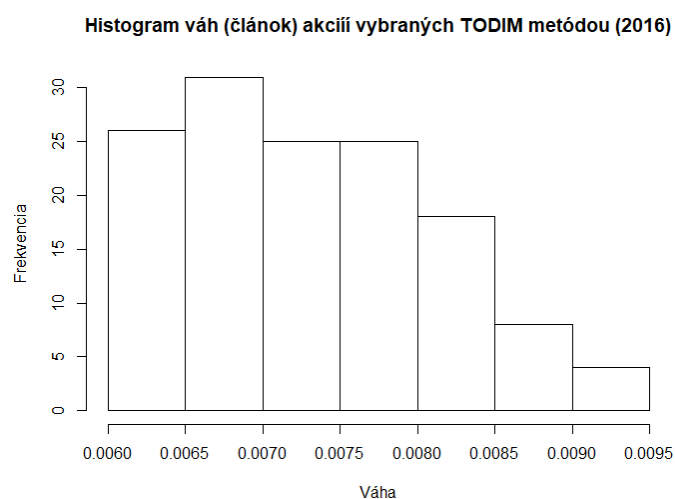
Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f (%)	SR
12 mesiacov	0,77	13,57	1,20	0,90
6 mesiacov	- 0,30	14,28	0,88	- 0,33
3 mesiace	0,62	13,65	0,61	0,72

Tabuľka 9: Výsledky portfólií vytvorených pomocou akcií vybraných TODIM algoritmom v roku 2016 a váh z MST metódy, na out-of-sample období nasledujúceho roka uvedenej dĺžky.

extrémne nízke hodnoty, ako môžeme vidieť na Obr. 28. Výsledky takto vytvoreného portfólia sme zapísali do Tab. 10. Toto portfólio malo zo všetkých ostatných použitých metód pre túto množinu akcií najlepšie výsledky Sharpovho pomeru v spomínanom 6-mesačnom out-of-sample období. V porovnaní s výsledkami ostatných metód malo



Obr. 27: Porovnanie Sharpovho pomeru KM a MST metód na ročných out-of-sample dátach z roku 2017 pre rôzne hodnoty r_p .



Obr. 28: Histogram optimálnych váh vypočítaných po aplikácii TODIM metódy v roku 2016, počítaných pomocou vzorca (42).

toto portfólio navyše oveľa menšie realizované riziko a pomerne nízke realizované výnosy. Avšak čo sa týka porovnania s portfóliom tvoreným rovnako určenými váhami, ale aplikovanými na celú množinu akcií, v tomto prípade malo portfólio aplikované na menšiu množinu akcií nižšie hodnoty Sharpovho pomeru.

Portfólio s váhami bez reštrikcie - rok 2016

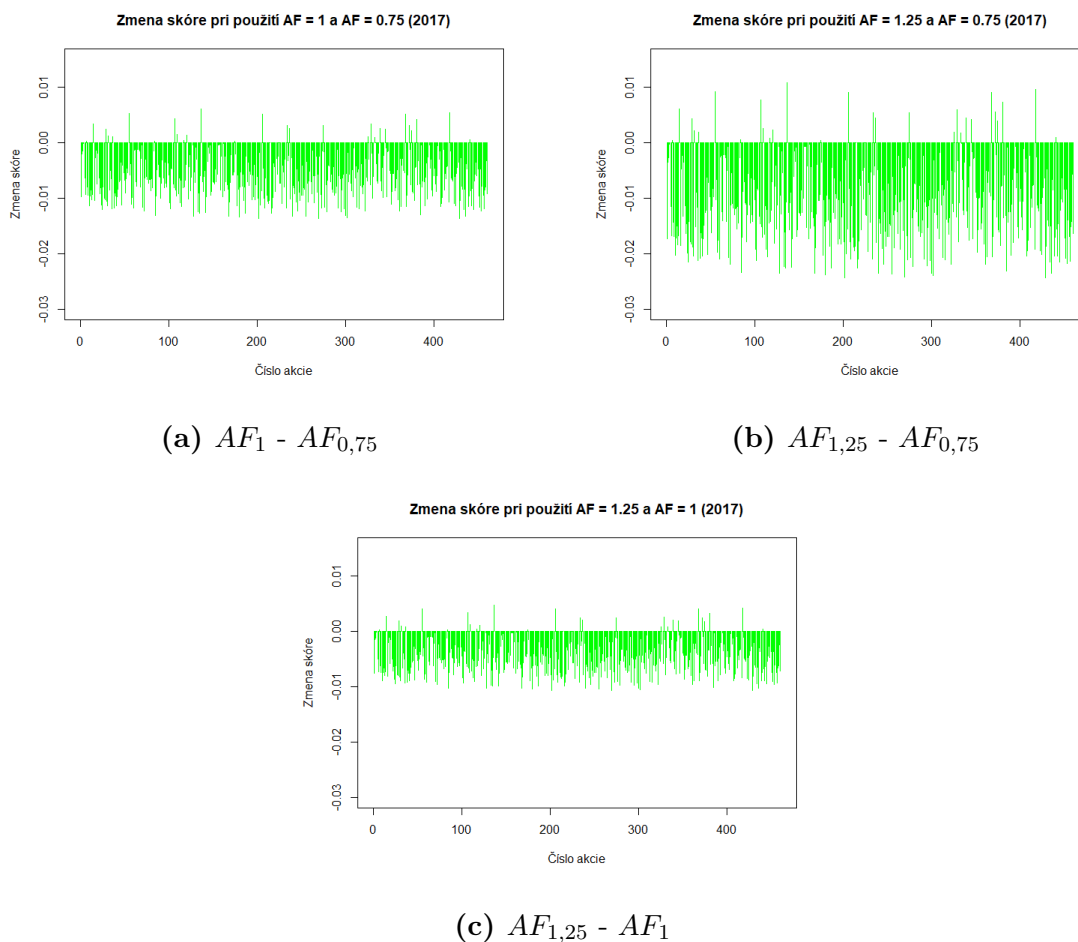
Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f (%)	SR
12 mesiacov	0,07	0,70	1,20	1,52
6 mesiacov	0,04	0,78	0,88	0,81
3 mesiace	0,06	0,81	0,61	1,10

Tabuľka 10: Výsledky portfólia vytvoreného pomocou akcií vybraných TODIM algoritmom v roku 2016 a váh zo vzťahu (42).

2.2.2 Rok 2017

Podobne ako pre rok 2016, aj pre rok 2017 sme sa pokúsili hľadať optimálne portfólio pomocou TODIM metódy oboma prístupmi. Z Obr. 29 vidíme, že aj v tomto roku boli opäť skóre získané pomocou použitia rôznych hodnôt tlmiaceho faktora rozdielne len v stotinách, a tak sme sa aj v tomto prípade ďalej rozhodli pracovať s hodnotami skóre získanými pomocou tlmiaceho faktora s hodnotou 0,75. Na skóre hodnoty všetkých 461 akcií sme znova použili metódu K-means s predvolenými 3 zhlukmi na to, aby sme získali hranicu skóre, od ktorej budeme akcie považovať za „dobré“ a budeme ich uvažovať v ďalšej optimalizácii. Tento raz bolo takýchto akcií 140, pričom výsledok zhlučovania zobrazujeme na Obr. 30. V tomto roku bola optimálna hranica skóre rovná 0,65 a do výberu akcií sa dostalo 83 akcií, ktoré boli vo výbere akcií s najvyšším skóre aj v roku 2016.

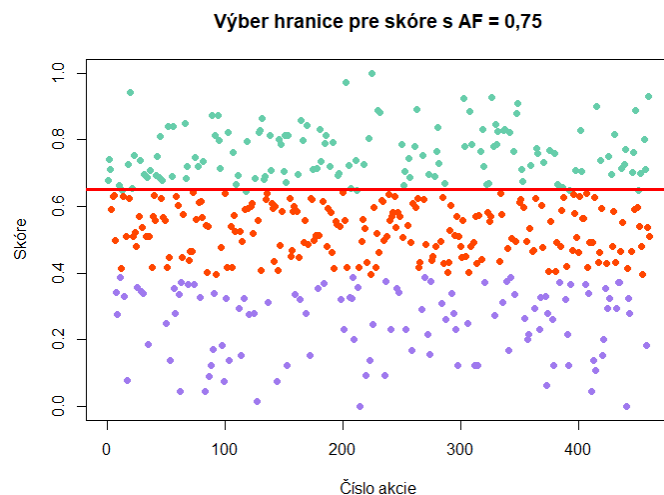
Aj v tomto prípade sme vypočítali váhy pre vybrané akcie najskôr pomocou KM a MST metódy a potom pomocou váh určených vzťahom (42). V prvom prípade – keď sme pokračovali v optimalizácii pomocou KM a MST metódy – sme určili najprv váhy bez akejkoľvek reštrikcie, ale nakoľko boli tieto váhy v absolútnej hodnote opäť príliš veľké, určili sme váhy aj s reštrikciou. V roku 2017 sa nám podarilo aplikovať najmenšiu symetrickú reštrikciu z intervalu $\langle -0,62; 0,62 \rangle$, ktorú sme použili v prípade oboch metód. Histogramy vypočítaných váh pomocou jednotlivých metód znázorňujeme na Obr. 31. Z obrázka vidíme, že váhy s reštrikciou jednotlivých akcií sa pomocou výpočtu KM a MST metódou opäť nachádzajú najmä na krajoch intervalu, v ktorého rozsahu je reštrikcia aplikovaná. Rovnako ako aj v predošlom roku na Obr. 32 pripájame vytvorenú minimálnu kostru grafu výnosov akcií, ktoré MST metóda vytvorila v tomto prípade.



Obr. 29: Porovnanie skóre metódy $TODIM_{2017}$ pre rôzne hodnoty tlmiaceho faktora (AF). Skóre metódy pri použití $AF = i$ v tomto prípade označujeme AF_i .

Výsledky takto vytvorených portfólií sme následne určili na out-of-sample dátach roku 2018 a zapísali sme ich do Tab. 11.

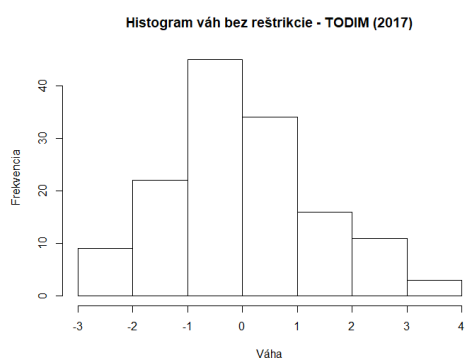
Po porovnaní výsledkov jednotlivých portfólií vytvorených týmito metódami môžeme zhodnotiť, že najlepšie výsledky malo portfólio tvorené MST metódou bez reštrikcie. Ak jeho výsledky porovnáme s výsledkami získanými MST metódou s reštrikciou váh vidíme, že síce malo portfólio tvorené váhami bez reštrikcie oveľa väčšie riziko, ale na druhej strane vykazovalo aj oveľa vyššie realizované výnosy. Na druhej strane, v prípade KM metódy reštrikcia váh vplývala na výsledky skôr pozitívne. Zatiaľ čo v prípade bez reštrikcie vykazovalo portfólio záporné realizované výnosy a vďaka tomu aj záporné hodnoty Sharpovho pomeru, v prípade použitia váh s reštrikciou boli všetky výsledky vyššie a kladné. V porovnaní s portfóliami z predošlého roka, získanými týmto



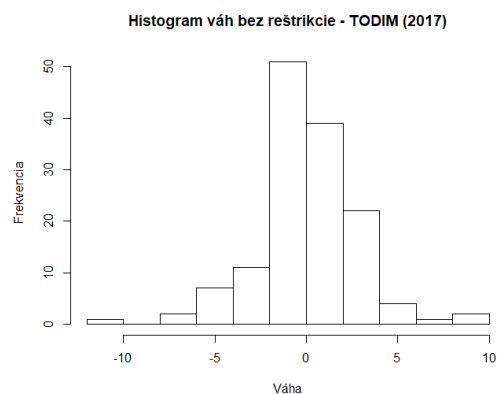
Obr. 30: Zhluky akcií podľa hodnôt skóre v roku 2017, vyznačená hranica oddeľujúca skupinu akcií s najvyšším skóre.

spôsobom, boli výsledky MST metódy lepšie v roku 2017, zatiaľ čo KM metóda vykazovala najmä pri portfóliu tvorenom s váhami s reštrikciou lepšie výsledky v roku 2016. Následne sme ešte pre portfóliá tvorené pomocou váh bez reštrikcie KM a MST metódami vykreslili na Obr. 33 hodnoty Sharpovho pomeru na celoročných out-of-sample dátach roku 2018 pri použití rôznych hodnôt minimálneho požadovaného výnosu r_p .

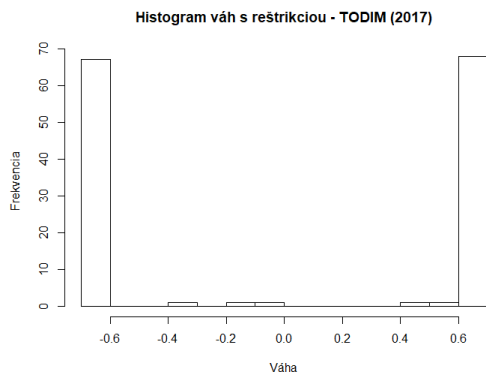
Aj v tomto roku sme sa pozreli na aplikáciu postupu, pomocou ktorého sme jednotlivým vybraným akciám pridelili váhy na základe vzťahu (42). Rozloženie týchto váh bolo podobné ako v predošlom roku, pričom váhy akcií boli opäť veľmi malé a ako sme už vyššie spomínali, nezáporné. Výsledky takto získaného portfólia pripájame v Tab. 12. Z výsledkov vidíme, že tento postup sa v roku 2017 neosvedčil. Dôvodom môže byť nezápornosť váh, ktorá je v tomto prípade aplikovaná, nakoľko aj pri KM a MST metóde boli krátke pozície povolené a akcie, ktorým boli pridelené veľké záporné váhy, boli v spomínaných portfóliách značne zastúpené. Ak by sme chceli výsledky tejto metódy porovnať s výsledkami z predošlého roka všimneme si, že v oboch prípadoch bolo riziko portfólia pomerne menšie ako v iných metódach, ale rovnako boli menšie aj realizované výnosy jednotlivých portfólií.



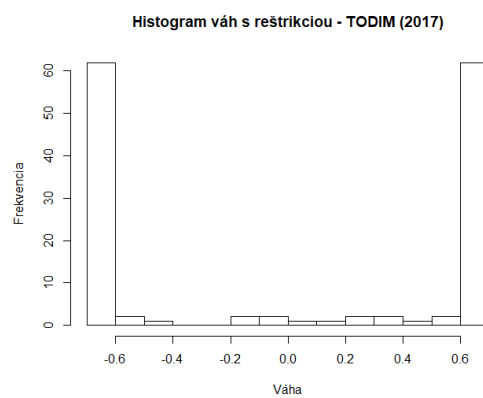
(a) KM metóda - bez reštrikcie.



(b) MST metóda - bez reštrikcie.



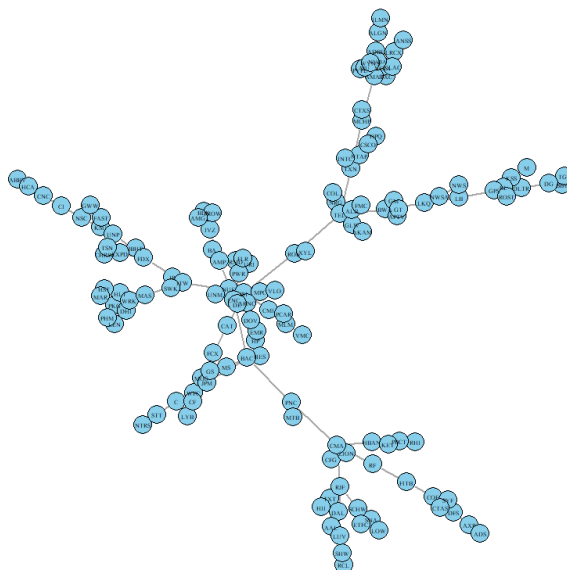
(c) KM metóda - s reštrikciou.



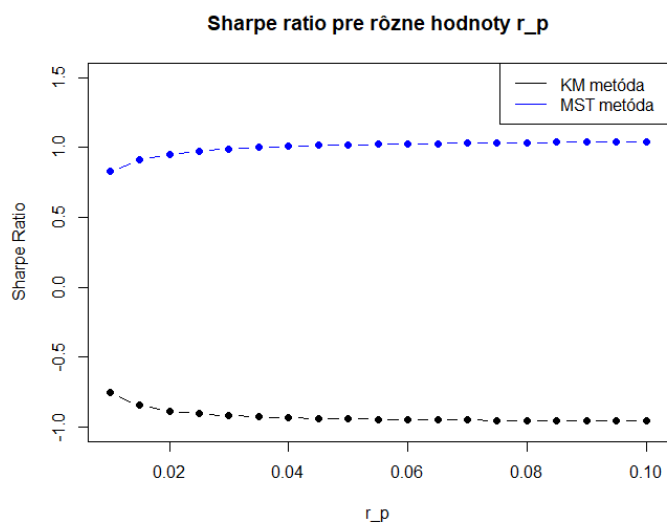
(d) MST metóda - s reštrikciou.

Obr. 31: Histogram optimálnych váh vypočítaných po aplikácii TODIM metódy v roku 2017, počítané KM a MST metódou.

Minimálna kostra grafu výnosov akcií vybraných TODIM metódou v r. 2017



Obr. 32: Minimálna kostra grafu výnosov akcií vybraných TODIM metódou v roku 2017.



Obr. 33: Porovnanie Sharpovho pomeru KM a MST metód na ročných out-of-sample dátach z roku 2018 pre rôzne hodnoty r_p .

Portfólio s váhami bez reštrikcie - KM metóda, rok 2017

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	- 0,99	16,80	2,34	- 0,94
6 mesiacov	- 2,14	17,68	1,92	- 1,93
3 mesiace	- 0,41	18,46	1,58	- 0,36

Portfólio s váhami s reštrikciou - KM metóda, rok 2017

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	0,15	18,94	2,34	0,12
6 mesiacov	0,45	17,07	1,92	0,42
3 mesiace	0,35	15,68	1,58	0,35

Portfólio s váhami bez reštrikcie - MST metóda, rok 2017

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	2,96	45,92	2,34	1,02
6 mesiacov	5,38	36,62	1,92	2,33
3 mesiace	7,93	33,97	1,58	3,71

Portfólio s váhami s reštrikciou - MST metóda, rok 2017

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	0,08	19,21	2,34	0,06
6 mesiacov	0,22	16,97	1,92	0,20
3 mesiace	0,30	15,50	1,58	0,30

Tabuľka 11: Výsledky portfólií vytvorených pomocou akcií vybraných TODIM algoritmom v roku 2017 a váh z KM a MST metódy, na out-of-sample období nasledujúceho roka uvedenej dĺžky.

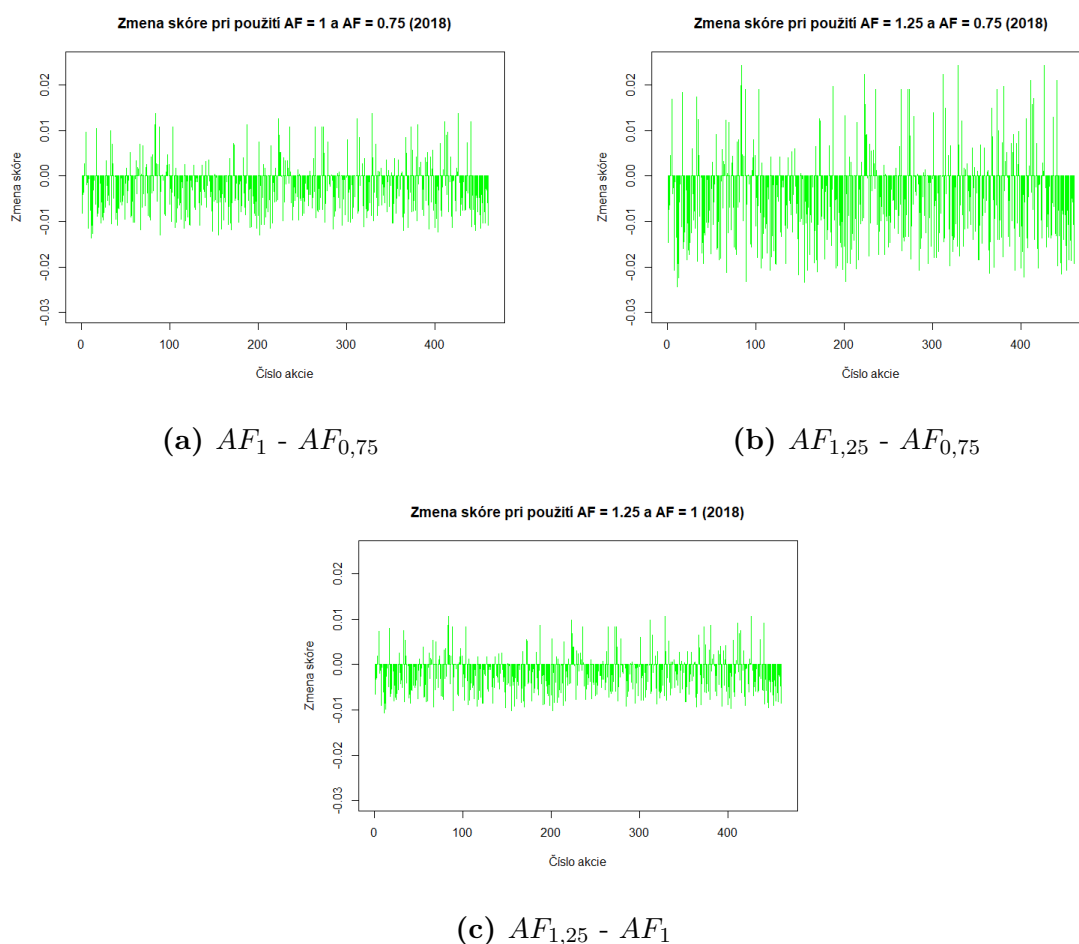
Portfólio s váhami bez reštrikcie - rok 2017

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	- 0,08	1,23	2,34	- 1,11
6 mesiacov	- 0,02	1,19	1,92	- 0,34
3 mesiace	- 0,02	1,42	1,58	- 0,32

Tabuľka 12: Výsledky portfólia vytvoreného pomocou akcií vybraných TODIM algoritmom v roku 2017 a váh zo vzťahu (42).

2.2.3 Rok 2018

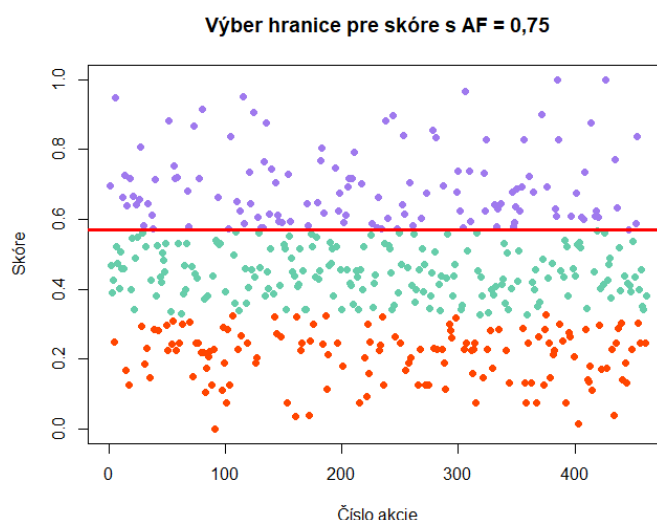
V neposlednom rade sme sa pozreli aj na porovnanie metód v roku 2018. V prípade aplikovania metód optimalizácie portfólia na celú množinu akcií sme sa stretli so zápornými hodnotami Sharpovho pomeru na out-of-sample dátach, a to najmä v prvom kvartáli roku 2019, preto bude zaujímavé porovnať, ako sa budú výsledky líšiť v tomto prístupe. Opäť sme na množinu všetkých 461 akcií aplikovali TODIM metódu a vypočítali hodnoty skóre pre rôzne hodnoty tlmiaceho faktora a podobne ako aj v predošlých rokoch sa tieto hodnoty veľmi nelíšili (Obr. 34) a preto sme do ďalších výpočtov zahrnuli len výsledky získané pomocou $AF = 0,75$.



Obr. 34: Porovnanie skóre metódy $TODIM_{2018}$ pre rôzne hodnoty tlmiaceho faktora (AF). Skóre metódy pri použití $AF = i$ v tomto prípade označujeme AF_i .

Následne sme, podobne ako v predošlých rokoch, na skóre akcií získané pomocou $AF = 0,75$ aplikovali metódu K-means s manuálne zadaným požadovaným počtom

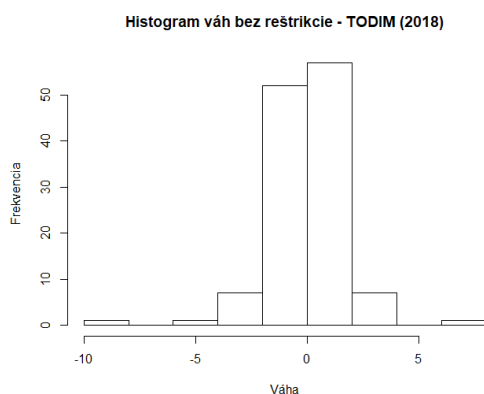
zhlukov 3 a pomocou nej sme určili hraničnú hodnotu skóre, čoho výsledok môžeme vidieť na Obr. 35. V tomto roku bola hraničná hodnota skóre 0,57 a počet akcií, ktoré mali skóre väčšie alebo rovné tejto hodnote, bol 126. Z týchto 126 vybraných akcií bolo 46 vybraných do ďalšej optimalizácie v roku 2016 a 37 z nich bolo vybraných do ďalšej optimalizácie v roku 2017.



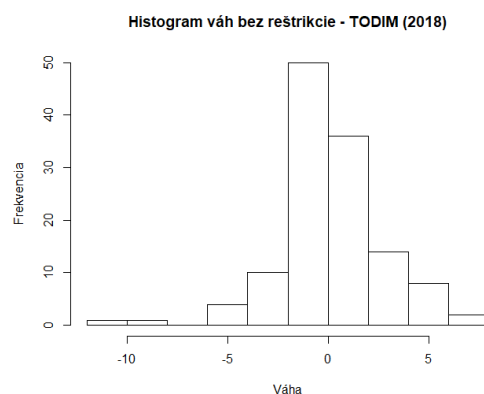
Obr. 35: Zhluky akcií podľa hodnôt skóre v roku 2018, vyznačená hranica oddeľujúca skupinu akcií s najvyšším skóre.

Na takto vybranú množinu akcií sme aplikovali postupne KM metódu, MST metódu a napokon výpočet váh pomocou vzťahu (42). V prípade optimalizácie portfólia pomocou KM a MST metód sme bez reštrikcie váh dostali váhy s príliš veľkým rozptylom, čo môžeme vidieť aj na Obr. 36 a preto sme sa rozhodli aplikovať aj reštrikciu na váhy, pričom najmenšia možná symetrická reštrikcia bola z intervalu $\langle -0,74; 0,74 \rangle$. Naviac na Obr. 37 pripájame aj graf siete, ktorú pomohla vytvoriť MST metóda aplikovaná na množinu akcií zvolených TODIM metódou v tomto roku. Výsledky takto vytvorených portfólií sme zapísali do Tab. 13.

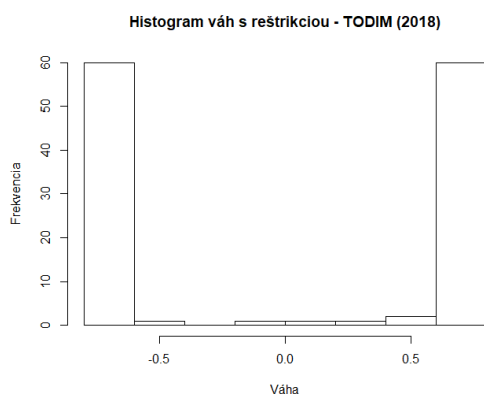
Z výsledkov zapísaných v tabuľke vidíme, že v tomto roku mali všetky metódy pomerne zlé výsledky. Jedine v MST metóde, vyhodnocovanej na 6-mesačnom out-of-sample období, máme kladnú hodnotu Sharpovho pomeru, avšak vo všetkých ostatných prípadoch sú hodnoty Sharpových pomerov záporné. Dôvodom takýchto výsledkov môže byť neštandardné správanie sa cien akcií, ktoré nastalo ku koncu roka



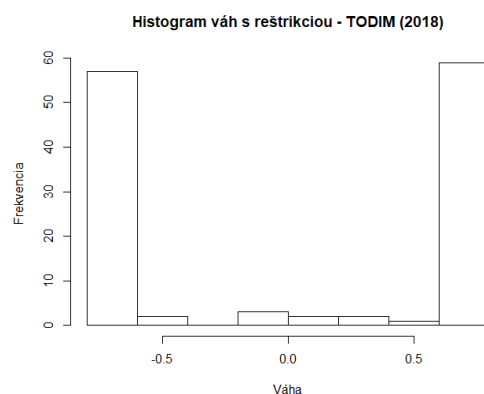
(a) KM metóda - bez reštrikcie.



(b) MST metóda - bez reštrikcie.



(c) KM metóda - s reštrikciou.



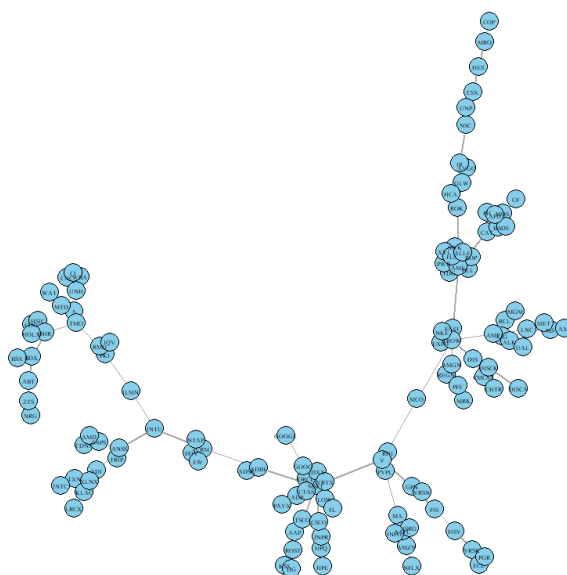
(d) MST metóda - s reštrikciou.

Obr. 36: Histogram optimálnych váh vypočítaných po aplikácii TODIM metódy v roku 2018, počítané KM a MST metódou.

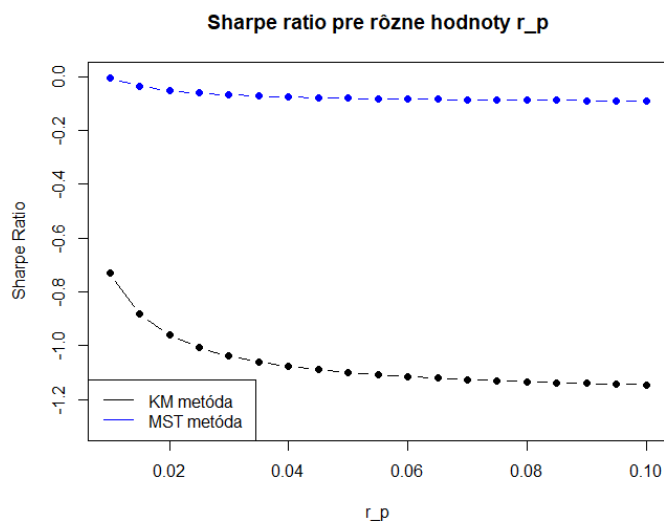
2018. Rovnako môže byť dôvodom aj samotný nesprávny výber akcií vstupujúci do ďalšej optimalizácie spôsobený tým, že skóre akcií sa určovalo na základe dát z roku 2018, ktoré zahŕňajú aj spomínané obdobie, v ktorom došlo k rapídному poklesu cien niektorých akcií. To by mohlo svedčiť o tom, že takto zvolený prístup (výberu akcií s najlepším skóre) nie je dostatočne robustný voči neštandardným zmenám na trhu, resp. by to mohlo naznačovať, že ako vstupné parametre TODIM metódy treba voliť viac špecifické kritériá. V poslednom kroku sme tiež porovnali hodnoty Sharpových pomerov získané KM a MST metódami bez reštrikcie pri použití rôznych hodnôt minimálneho požadovaného výnosu v tomto roku – tento graf pripájame na Obr. 38.

Napokon sme ešte aplikovali prístup, v ktorom sme na takto vybranú množinu akcií aplikovali váhy dané vzťahom (42). Histogram vypočítaných optimálnych váh pripá-

Minimálna kostra grafu výnosov akcií vybraných TODIM metódou v r. 2018



Obr. 37: Minimálna kostra grafu výnosov akcií vybraných TODIM metódou v roku 2018.



Obr. 38: Porovnanie Sharpovho pomeru KM a MST metód na ročných out-of-sample dátach z roku 2019 pre rôzne hodnoty r_p .

jame na Obr. 39. Môžeme vidieť, že aj v tomto prípade sú váhy pomerne malé a veľa z nich je koncentrovaných pri skoro nulovej hodnote. Výsledky takto vytvoreného portfólia sme potom zapísali do Tab. 14.

Portfólio s váhami bez reštrikcie - KM metóda, rok 2018

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	- 2,02	29,33	2,05	- 1,10
6 mesiacov	- 1,58	17,94	2,43	- 1,41
3 mesiace	- 2,47	17,45	2,44	- 2,25

Portfólio s váhami s reštrikciou - KM metóda, rok 2018

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	- 1,07	21,36	2,05	- 0,80
6 mesiacov	- 0,18	18,89	2,43	- 0,16
3 mesiace	- 0,81	16,38	2,44	- 0,79

Portfólio s váhami bez reštrikcie - MST metóda, rok 2018

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	- 0,50	100,17	2,05	- 0,08
6 mesiacov	- 1,64	30,37	2,43	0,85
3 mesiace	- 3,17	34,13	2,44	- 1,48

Portfólio s váhami s reštrikciou - MST metóda, rok 2018

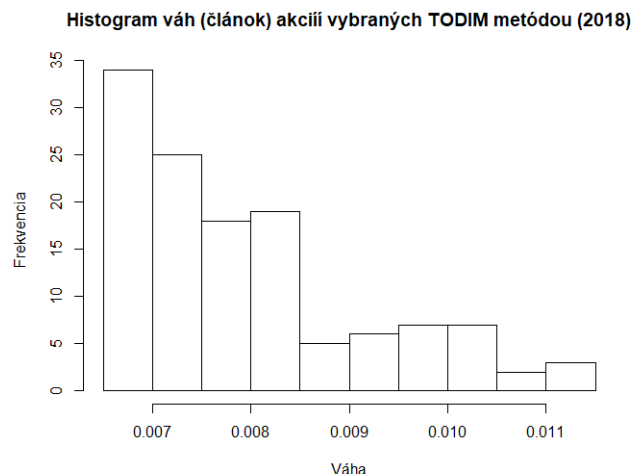
Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	- 1,08	21,18	2,05	- 0,81
6 mesiacov	- 0,18	18,29	2,43	- 0,17
3 mesiace	- 0,56	16,21	2,44	- 0,56

Tabuľka 13: Výsledky portfólií vytvorených pomocou akcií vybraných TODIM algoritmom v roku 2018 a váh z KM a MST metódy, na out-of-sample období nasledujúceho roka uvedenej dĺžky.

Portfólio s váhami bez reštrikcie - rok 2018

Dĺžka obdobia	r_P (%)	σ_P (%)	r_f p.a. (%)	SR
12 mesiacov	0,10	0,95	2,05	1,60
6 mesiacov	0,16	0,97	2,43	2,45
3 mesiace	0,27	1,05	2,44	3,94

Tabuľka 14: Výsledky portfólia vytvoreného pomocou akcií vybraných TODIM algoritmom v roku 2018 a váh zo vzťahu (42).



Obr. 39: Histogram optimálnych váh vypočítaných po aplikácii TODIM metódy v roku 2018, počítaných pomocou vzorca (42).

2.3 Zhrnutie a vyhodnotenie

V poslednej časti našej práce sa budeme venovať celkovému porovnaniu a vyhodnoteniu jednotlivých metód. Zmyslom takéhoto porovnania bude v prvom rade celkovo pre každý rok vyhodnotiť „poradie“ jednotlivých metód podľa toho, aké mali hodnoty Sharpovho pomeru v porovnaní s ostatnými a to zvlášť pre každú sledovanú dĺžku investičného obdobia, s ktorými sme pracovali. V druhom rade bude toto zhodnotenie slúžiť aj na porovnanie prístupu použitia všetkých akcií ako vstupu do optimalizácie portfólia v porovnaní s prístupom, v ktorom sme do optimalizácie vstupovali len so zmenšenou množinou akcií, určenou na základe výsledkov TODIM algoritmu. V nasledujúcich tabuľkách budeme používať na označenie prístupu aplikácie na celú množinu akcií skratku *CMA* a na označenie prístupu aplikácie na vybranú množinu akcií budeme používať skratku *VMA*. Zároveň budeme označovať metódy bez použitia váh s reštrikciou ako *nores* a metódy s použitím váh s aplikovanou reštrikciou označíme ako *res*.

Rok 2016

V prvom rade sme sa pozreli na porovnanie jednotlivých metód pomocou oboch prístupov v roku 2016. V Tab. 15 pripájame tabuľku všetkých výsledkov Sharpovho pomeru,

ktoré sme získali danou metódou a vyhodnotili na danom investičnom out-of-sample období. Najtmavšou farbou sme pre každú dĺžku investičného obdobia (riadok tabuľky) vyznačili najvyššiu hodnotu Sharpovho pomeru a nižšie hodnoty sme zoradili medzi sebou a vyznačili s postupne sa zosvetľujúcou farbou. Ako môžeme vidieť, pri vyhodnocovaní výsledkov získaných pomocou celej množiny akcií (CMA) bola najúspešnejšia KM metóda, pričom lepšia možnosť sa zdá v tomto prípade byť jej verzia, v ktorej aplikujeme reštrikciu na váhy. Táto metóda bola veľmi úspešná v tvorbe portfólia na dlhšie investičné obdobie, no naopak, pri krátkom investičnom období sa najviac osvedčila metóda s použitím TODIM váh. Ak sa zameriame na portfóliá tvorené len pomocou zúženej množiny akcií vybranej TODIM algoritmom (VMA), v tomto prípade boli opäť úspešné tie isté dve metódy, pričom TODIM metóda už tvorila lepšie portfólio aj v 6-mesačnom out-of-sample období, pričom v 3-mesačnom období bola takmer rovnako úspešná ako KM metóda. Ak by sme to teda chceli pre rok 2016 zhrnúť, najúspešnejšie portfólio na dlhodobejšiu investíciu bolo vytvorené pomocou KM metódy s použitím reštrikcie váh a pre krátkodobejšie investície bola najlepšou voľbou metóda s použitím TODIM váh.

Čo sa týka porovnania jednotlivých prístupov výberu počiatočnej množiny akcií vstupujúcich do optimalizácie v tomto roku, jednoznačne môžeme tvrdiť, že lepšie výsledky prináša metóda, v ktorej použijeme ako vstup celú množinu akcií. Pri použití VMA vidíme efekt nedostatočnej diverzifikácie portfólia, nakoľko akcie, ktoré boli vybrané ako vstupné, boli všetky charakteristické vysokými hodnotami skóre počítaného pomocou TODIM metódy, ktorej vstupom boli hodnoty priemerných výnosov, korelácií a smerodajných odchýlok výnosov akcií a teda môžeme tvrdiť, že TODIM metóda síce vybrala tie „najlepšie“ akcie, no to sú zároveň aj akcie, ktorých výnosy sa správajú veľmi podobne a to spôsobuje malú diverzifikáciu nášho portfólia.

Rok 2017

V roku 2017 nám pribudla aj metóda výpočtu optimálneho portfólia pomocou DEA modelov, ktorú sme sa však rozhodli neporovnávať s ostatnými metódami, lebo aj napriek pomerne vysokým hodnotám Sharpovho pomeru pri vyhodnotení je spojená s mnohými nepresnosťami, ktoré sme popísali už pri jej úvode. Výsledky sme podobne

CMA	KM - nores	KM - res	MST - nores	MST - res	TODIM váhy
12 mesiacov	1,87	2,09	- 0,98	1,13	1,89
6 mesiacov	1,58	1,58	- 1,86	0,55	1,39
3 mesiace	1,68	1,05	- 1,60	0,86	1,87
VMA	KM - nores	KM - res	MST - nores	MST - res	TODIM váhy
12 mesiacov	- 0,15	1,59	- 0,81	0,90	1,52
6 mesiacov	- 1,19	0,55	- 0,58	- 0,33	0,81
3 mesiace	- 1,58	1,11	- 1,07	0,72	1,10

Tabuľka 15: Porovnanie hodnôt Sharpovho pomeru pre dva rôzne prístupy použité na dáta z roku 2016 a vyhodnotenú na dátach z roku 2017.

ako pre rok 2016 zapísali aj v tomto roku do Tab. 16. Čo sa ale týka ostatných metód, v roku 2017 sa pri uvažovaní CMA prístupu zdá byť najúspešnejšia MST metóda s reštrikciou váh, ktorá mala najvyššie hodnoty Sharpovho pomeru pre všetky dĺžky investičných období, na ktorých sme Sharpov pomer vyhodnocovali. KM metóda s reštrikciou váh, ktorá bola úspešná pre dáta z roku 2016, sa v tomto prípade nachádza druhá v poradí podľa úspešnosti. Ak sa pozrieme na VMA prístup, najúspešnejšou metódou bola MST metóda bez použitia reštrikcie na váhy, ktorá bola v CMA prístupe paradoxne najhoršia. Pri porovnaní oboch prístupov medzi sebou si môžeme všimnúť, že VMA prístup vytvoril portfóliá, ktoré dosiahli pri vyhodnotení vyššie hodnoty Sharpovho pomeru oproti CMA prístupu. V prípade VMA prístupu bola, podobne ako v predošlom roku, priemerne najmenej úspešná KM metóda bez reštrikcie váh.

CMA	KM - nores	KM - res	MST - nores	MST - res	TODIM váhy	DEA váhy
12 mesiacov	- 0,36	0,11	- 1,20	0,45	- 0,95	0,52
6 mesiacov	- 0,37	0,02	- 1,42	0,88	- 0,16	2,21
3 mesiace	0,84	1,53	- 2,72	2,85	- 0,53	2,46
VMA	KM - nores	KM - res	MST - nores	MST - res	TODIM váhy	DEA váhy
12 mesiacov	- 0,94	0,12	1,02	0,06	- 1,11	-
6 mesiacov	- 1,93	0,42	2,33	0,20	- 0,34	-
3 mesiace	- 0,36	0,35	3,71	0,30	- 0,32	-

Tabuľka 16: Porovnanie hodnôt Sharpovho pomeru pre dva rôzne prístupy použité na dáta z roku 2017 a vyhodnotenú na dátach z roku 2018.

Rok 2018

Napokon sme spracovali aj výsledky portfólií tvorených z dát v roku 2018 a zapísali sme ich do Tab. 17. Hneď pri prvom pohľade z tabuľky vidíme, že v tomto roku bola jednoznačne najlepšia metóda použitia TODIM váh a to ako aj v CMA prístupe, tak aj vo VMA prístupe. V porovnaní s ostatnými metódami mala pri vyhodnotení na out-of-sample dátach z roka 2019 najvyššie hodnoty Sharpovho pomeru. Ak by sme chceli porovnať výsledky portfólia získaného pomocou TODIM váh medzi prístupmi, v 3-mesačnom investičnom období bol pre TODIM lepší CMA prístup, zatiaľ čo v dlhších investičných obdobiach už boli prístupy pomerne podobné. Ak porovnáme medzi prístupmi ostatné metódy, najmä pre dlhšie investičné obdobia vyzerá byť úspešnejší prístup CMA. Rovnako si môžeme všimnúť, že KM metóda bez reštrikcie mala vo VMA prístupe, podobne ako aj v predošlých rokoch, najmenšiu úspešnosť. Zároveň vieme zhodnotiť, že takto vytvorené portfóliá mali najmenšiu úspešnosť pri vyhodnocovaní na len 3-mesačnom investičnom období, čo je badateľné zo záporných hodnôt Sharpovho pomeru.

CMA	KM - nores	KM - res	MST - nores	MST - res	TODIM váhy
12 mesiacov	0,88	0,80	0,35	0,58	1,55
6 mesiacov	- 0,41	0,36	0,61	0,52	2,37
3 mesiace	- 1,92	- 2,84	- 1,22	- 1,30	4,10
VMA	KM - nores	KM - res	MST - nores	MST - res	TODIM váhy
12 mesiacov	- 1,10	- 0,80	- 0,08	- 0,81	1,60
6 mesiacov	- 1,41	- 0,16	0,85	- 0,17	2,45
3 mesiace	- 2,25	- 0,79	- 1,48	- 0,56	3,94

Tabuľka 17: Porovnanie hodnôt Sharpovho pomeru pre dva rôzne prístupy použité na dáta z roku 2018 a vyhodnotenú na dátach z roku 2019.

Záver

Cielom našej práce bolo uviesť, vysvetliť a napokon aj porovnať rôzne matematické metódy výpočtu optimálneho portfólia. V Kapitole 1 sme predstavili v prvom rade klasický Markowitzov prístup, ktorý poznáme už aj z kurzov programu Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie, no v ďalšej časti kapitoly sme uviedli aj (pre nás) nové prístupy na optimalizáciu portfólia. Prvým z nich bola metóda minimálnej kostry grafu (MST), pomocou ktorej sme vysvetlili využitie sietí založených na koreláciách v optimalizácii portfólia. Druhým prístupom bolo DEA modelovanie, pričom v prvom kroku sme uviedli myšlienku súvisu DEA modelovania a MCDM metód a v ďalšom kroku sme pomocou zavedenia modelu krížovej efektivity v Podkapitole 1.3 predstavili jeho použitie pri optimalizácii portfólia. Ako sa však neskôr ukázalo, napriek tomu, že tento model vykazoval pomerne dobré výsledky, je spojený aj s mnohými nepresnosťami, kvôli ktorým musíme jeho výsledky brať s rezervou. V závere prvej kapitoly sme predstavili aj TODIM algoritmus, z triedy MCDM algoritmov, pomocou ktorého sme uviedli nielen novú možnosť na výpočet váh v portfóliu, ale aj spôsob výberu zmenšenej množiny akcií, ktoré budú vstupovať do ďalšej optimalizácie.

V Kapitole 2 sme následne aplikovali všetky uvedené metódy a postupy na dáta z rôznych rokov, aby sme vedeli výsledky porovnať nielen medzi metódami, ale aj na rôznych dátach. V prvej podkapitole sme aplikovali všetky metódy a algoritmy na celú množinu akcií a v druhej podkapitole sme najskôr pomocou TODIM algoritmu vybrali zmenšenú množinu akcií a v ďalšom kroku sme spomínané metódy aplikovali už len na túto množinu. Zároveň sme do týchto podkapitol zahrnuli aj prvé analýzy výsledkov jednotlivých metód, pričom sme sa pokúsili zistiť, prečo boli niektoré metódy lepšie ako ostatné. V poslednej podkapitole tejto kapitoly (Podkapitola 2.3) sme na záver zhrnuli porovnanie všetkých metód a prístupov na rôznych dátach a pripojili sme naše úvahy a závery ohľadom použitých metód.

Hlavný prínos našej práce vidíme v prehľadnom spracovaní rôznych typov metód na analýzu výnosov akcií a následnú tvorbu optimálneho portfólia. Väčšina článkov zameraných na túto tematiku sa totižto sústreďí iba na jednu konkrétnu oblasť venujúcu sa tejto problematike a postrádame v nich komplexnejšie porovnanie s ostatnými

metódami. Ako ďalší prínos vidíme poukázanie na nedostatky upraveného DEA modelu krížovej efektivity, ktorý sa síce zdal byť ako vhodný nástroj na riešenie problému optimalizácie portfólia ako MCDM úlohy, avšak napriek úpravám tvoril portfólio, ktorému chýbala diverzifikácia. Možným pokračovaním našej práce by mohla byť napríklad analýza toho, ktoré kritériá použiť v TODIM algoritme tak, aby sa zlepšila jeho presnosť v tvorbe portfólia, analýza toho, ako vybrať vhodnú hranicu skóre na vytvorenie zmenšenej množiny akcií do ďalšej optimalizácie či experimentovanie s inými metódami filtrovania matíc.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Alali F., Tolga A. C.: *Portfolio allocation with the TODIM method*, Expert Systems With Applications 124 (2019), 341-348, dostupné na internete (20.12.2019): <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417419300570>
- [2] Bates D., Maechler M.: *Matrix: Sparse and Dense Matrix Classes and Methods*, R package version 1.2-12, 2017, dostupné na internete (02.04.2020): <https://CRAN.R-project.org/package=Matrix>
- [3] Berkelaar M. et al.: *lpSolve: Interface to 'Lp_solve' v. 5.5 to Solve Linear/Integer Programs*, R package version 5.6.13, 2015, dostupné na internete (02.04.2020): <https://CRAN.R-project.org/package=lpSolve>
- [4] Birch J., Pantelous A. A., Soramäki K.: *Analysis of Correlation Based Networks Representing DAX 30 Stock Price Returns*, Computational Economics 47 (2016), 501–525, dostupné na internete (28.03.2020): <https://link.springer.com/article/10.1007/s10614-015-9481-z>
- [5] Bouyssou D.: *Using DEA as a tool for MCDM: some remarks*, Journal of the Operational Research Society 50 (1999), 974-978, dostupné na internete (09.03.2020): <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1057/palgrave.jors.2600800>
- [6] Buehler H., Gonon L.: *Deep hedging*, Quantitative Finance 19 (2019), 1271-1291, dostupné na internete (13.01.2020): <https://tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14697688.2019.1571683>
- [7] Campbell R., Huisman R., Koedijk K.: *Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework*, Journal of Banking & Finance 25 (2001), 1789-1804, dostupné na internete (27.03.2020): <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426600001606>
- [8] Csardi G., Nepusz T.: *The igraph software package for complex network research*, InterJournal Complex Systems (2006), 1695, dostupné na internete (02.04.2020): <http://igraph.org>

- [9] DataHub: *S&P 500 Companies with Financial Information*, dostupné na internete (23.12.2019): <https://datahub.io/core/s-and-p-500-companies-financials>
- [10] Dey A., Pal A.: *Prim's algorithm for solving minimum spanning tree problem in fuzzy environment*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics 12 (2016), 419-430, dostupné na internete (27.03.2020): <http://www.afmi.or.kr/2016-Vol-12-No-03.htm>
- [11] Doyle J., Green R.: *Efficiency and Cross-efficiency in DEA: Derivations, Meanings and Uses*, Journal of Operational Research Society 45 (1994), 567-578, dostupné na internete (30.03.2020): <https://www.jstor.org/stable/2584392>
- [12] Ehrgott M., Klamroth K., Schwehm Ch.: *An MCDM approach to portfolio optimization*, European Journal of Operational Research 155 (2004), 752-770, dostupné na internete (29.03.2020): <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0377221702008810>
- [13] Esfahanipour A., Zamanzadeh S. E.: *A Stock Market Filtering Model Based on Minimum Spanning Tree in Financial Networks*, AUT Journal of Modeling and Simulation 45 (2013), 67-75, dostupné na internete (28.03.2020): https://miscj.aut.ac.ir/article_490.html
- [14] Fernández A., Gómez S.: *Portfolio selection using neural networks*, Computers & Operations Research Volume 34 (2007), 1177-1191, dostupné na internete (27.03.2020): <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054805002042>
- [15] Goldfarb D., Idnani A.: *Dual and primal-dual methods for solving strictly convex quadratic programs*, Numerical Analysis(2006), 226-239, dostupné na internete (27.03.2020): <https://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0092976>
- [16] Goldfarb D., Idnani A.: *A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs*, Mathematical Programming 27 (1983), 1-33, dostupné na internete (27.02.2020): <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02591962>

- [17] Gomes L. F. A. M., Rangel L. A. D.: *An application of the TODIM method to the multicriteria rental evaluation of residential properties*, European Journal of Operational Research Volume 193 (2009), 204-211, dostupné na internete (30.03.2020): <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221707010740>
- [18] Gomes L. F. A. M., Rangel L. A. D., Maranhão F. J. C.: *Multicriteria analysis of natural gas destination in Brazil: An application of the TODIM method*, Mathematical and Computer Modelling 50 (2009), 92-100, dostupné na internete (30.03.2020): <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717709000788>
- [19] Grižáková L.: *Metóda krížovej efektivity v obálkovej analýze dát*, bakalárska práca, FMFI UK, 2018, dostupné na internete (12.02.2020): <https://opac.crzp.sk/?fn=detailBiblioForm&sid=5379D0B7E3C25FE39D33B84ABF03&seo=CRZP-detail-kniha>
- [20] Halická M.: *DEA modely*, učebný materiál, FMFI UK, Bratislava, 2015, dostupné na internete (20.01.2020): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/teaching.xhtml>
- [21] Halická M., osobná komunikácia, FMFI UK, Bratislava, 2020
- [22] Hartigan J. A., Wong M. A.: *Algorithm AS 136: A K-Means Clustering Algorithm*, Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics) 28 (1979), 100-108, dostupné na internete (21.03.2020): <https://www.jstor.org/stable/2346830>
- [23] Henrique B. M., Sobreiro V. A., Kimura H.: *Stock price prediction using support vector regression on daily and up to the minute prices*, The Journal of Finance and Data Science 4 (2018), 183-201, dostupné na internete (01.05.2020): <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405918818300060>
- [24] Higham N. J.: *Computing the nearest correlation matrix - a problem from finance*, IMA Journal of Numerical Analysis 22 (2002), 329-343, dostupné na internete (22.03.2020): <https://academic.oup.com/imajna/article-abstract/22/3/329/708688>

- [25] Jarník V.: *O jistém problému minimálním. (Z dopisu panu O.Borůvkovi)*, Práce moravské přírodovědecké společnosti 6 (1930), 57-63, dostupné na internetu (01.03.2020): <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/500726>
- [26] Kou G., Peng Y., Wang G.: *Evaluation of clustering algorithms for financial risk analysis using MCDM methods*, Information Sciences 275 (2014), 1-12, dostupné na internetu (28.03.2020): <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025514002503>
- [27] Kovář P.: *Teorie grafů*, příprava přednášek a cvičení, VŠB - Technická univerzita Ostrava, Krmelín, 2018, dostupné na internetu (28.02.2020): http://home1.vsb.cz/~kov16/predmety_gt.php
- [28] Ledoit O., Wolf M.: *Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio*, Journal of Empirical Finance 15 (2008), 850-859, dostupné na internetu (02.04.2020): <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0927539808000182>
- [29] Levy J. S.: *An Introduction to Prospect Theory*, Political Psychology 13 (1992), 171-186, dostupné na internetu (30.03.2020): <https://www.jstor.org/stable/3791677>
- [30] Liesiö J., Andelmin J., Salo A.: *Efficient Allocation of Resources to a Portfolio of Decision Making Units*, pre-print, European Journal of Operational Research (2020), dostupné na internetu (01.04.2020): <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0377221720302459>
- [31] Likaj M. et al.: *Application of graph theory to find optimal paths for the transportation problem*, IFAC Proceedings Volumes 46 (2013), 235-240, dostupné na internetu (28.03.2020): <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S147466701634246X>
- [32] Lim S., Oh K.W., Zhu J.: *Use of DEA cross-efficiency evaluation in portfolio selection: An application to Korean stock market*, European Journal of Operational Research 236 (2014), 361-368, dostupné na internetu (20.12.2019): <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0377221713009776>

- [33] Lin X., Yang Z., Song Y.: *Short-term stock price prediction based on echo state networks*, Expert Systems with Applications 36 (2009), 7313–7317, dostupné na internete (01.05.2020): <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0957417408006519>
- [34] Llamazares B.: *An analysis of the generalized TODIM method*, European Journal of Operational Research 269 (2018), 1041–1049, dostupné na internete (01.03.2020): <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0377221718302042>
- [35] London A., Gera I., Bánhelyi B.: *Markowitz Portfolio Selection Using Various Estimators of Expected Returns and Filtering Techniques for Correlation Matrices*, Acta Polytechnica Hungarica 15 (2018), 217–229, dostupné na internete (20.12.2019): <http://acta.uni-obuda.hu/>
- [36] Mantegna R. N.: *Hierarchical Structure in Financial Markets*, The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems 11 (1999), 193–197, dostupné na internete (20.12.2019): <https://link.springer.com/article/10.1007/s100510050929>
- [37] Markowitz, H. M.: *Portfolio Selection*, The Journal of Finance 7 (1952), 77–91, dostupné na internete (12.09.2019): <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>
- [38] Markowitz, H. M.: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Yale University Press, New Haven, 1959
- [39] McLaney E., Atrill P.: *Accounting: An Introduction*, Pearson Education, Harlow, 2009
- [40] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Bratislava, 2005
- [41] Pastor J., Ruiz J.: *Variables With Negative Values In Dea*, In: Zhu J., Cook W.D. (eds): *Modeling Data Irregularities and Structural Complexities in Data Envelop-*

- ment Analysis*, Springer, Boston, MA, 63-84, dostupné na internete (10.04.2020): https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-0-387-71607-7_4
- [42] Pettitt B. S., Ferris K. R.: *Valuation for Mergers and Acquisitions*, Pearson Education, New Jersey, 2013
- [43] Pineda P. J. G. et al.: *An integrated MCDM model for improving airline operational and financial performance*, Journal of Air Transport Management 68 (2018), 103-117, dostupné na internete (28.03.2020): <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0969699717301175>
- [44] Prim R. C.: *Shortest Connection Networks And Some Generalizations*, Bell System Technical Journal 36 (1957), 1389-1401, dostupné na internete (27.03.2020): <https://ieeexplore.ieee.org/document/6773228>
- [45] Ryan J. A., Ulrich J. M.: *quantmod: Quantitative Financial Modelling Framework*, R package version 0.4-15, 2019, dostupné na internete (27.03.2020): <https://CRAN.R-project.org/package=quantmod>
- [46] Sharpe W. F.: *Mutual Fund Performance*, The Journal of Business 39 (1966), 119-138, dostupné na internete (01.04.2020): <https://www.jstor.org/stable/2351741>
- [47] Shi Y. et al.: *A study of Chinese regional hierarchical structure based on surnames*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 518 (2019), 169-176, dostupné na internete (28.03.2020): <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437118314961>
- [48] Tola V. et al.: *Cluster analysis for portfolio optimization*, Journal of Economic Dynamics and Control 32 (2008), 235-258, dostupné na internete (20.12.2019): <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165188907000462>
- [49] U.S. Department of the treasury: An official website of the United States Government, dostupné na internete (20.12.2019): <https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=realyield>