

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**STOCHASTICKÉ MODELOVANIE
ŠPECIFICKÝCH MIER PLODNOSTI
VO VYBRANÝCH KRAJINÁCH**

Diplomová práca

2022

Bc. Erika Lettrichová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**STOCHASTICKÉ MODELOVANIE
ŠPECIFICKÝCH MIER PLODNOSTI
VO VYBRANÝCH KRAJINÁCH**

Diplomová práca

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1113 Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci:	Mgr. Gábor Szűcs, PhD.

Bratislava, 2022

Bc. Erika Lettrichová



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Erika Lettrichová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Stochastické modelovanie špecifických mier plodnosti vo vybraných krajinách
Stochastic modeling of age-specific fertility rates in selected countries

Anotácia: Z hľadiska demografie na obmenu ľudskej populácie vplyvajú tri hlavné procesy, a to plodnosť (fertilita), úmrtnosť (mortalita) a sťahovanie (migrácia). Ich sledovanie, zaznamenávanie a modelovanie patrí medzi kľúčové úlohy demografov. Obvykle používaný postup sa skladá z niekoľkých na seba nadväzujúcich krokov: od zhromažďovania údajov cez tvorbu modelov až po vytváranie predpovedí pre stav sledovanej populácie v budúcnosti. Cieľom tejto diplomovej práce bude matematicky modelovať špecifické miery plodnosti v niekoľkých vybraných populáciách, porovnávať odhadnuté demografické modely a predikovať vývoj plodnosti v skúmaných krajinách. Pri modelovaní špecifických mier plodnosti by sa mali používať predovšetkým stochastické dynamické modely typu Leeovho-Carterovho modelu resp. jeho modifikované a zovšeobecnené verzie.

Vedúci: Mgr. Gábor Szűcs, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
Dátum zadania: 13.01.2021

Dátum schválenia: 17.01.2021
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Abstrakt

Táto záverečná práca je venovaná modelovaniu a predikovaniu špecifickej miery plodnosti vo vybraných populáciách vo vekovom intervale 18 až 42 rokov s jednoročným vekovým delením. V práci sú použité dáta o špecifickej miere plodnosti, strednom stave ženskej populácie a počte živonarodených detí podľa veku matky za jednotlivé kalendárne roky. Všetky použité dáta sú dostupné na internetovej stránke *The Human Fertility Database* [5], v rámci práce boli aplikované na odhadovanie parametrov použitých modelov. Parametre modelov boli kalibrované pomocou štatistického softvéru R [11], a potom ďalej spracované v programe Microsoft Excel [10]. Cieľom diplomovej práce bolo nájsť pre každú z vybraných populácií najvhodnejší model. Medzi vybrané populácie patrí Slovensko, Česko, Maďarsko, Rakúsko a Holandsko. Pri hľadaní najkvalitnejšieho modelu sme vyskúšali 10 rôznych stochastických modelov, ktoré sme získali postupným vylepšovaním základného Leeiho modelu [8], ku ktorému sme pridávali rôzne kombinácie časových, vekových a kohortných parametrov. Pre kvantitatívne porovnanie modelov sme sledovali hodnoty funkcie vierohodnosti, počet odhadovaných parametrov a hodnoty Bayesovho informačného kritéria. Kvalitatívnu stránku modelov sme vyhodnocovali na základe odhadnutých rezíduí modelov. Následne, na základe vyhodnotenia najkvalitnejšieho modelu pre špecifickú mieru plodnosti slovenskej populácie, sme odhadli parametre modelu, ktoré sme použili pre krátkodobú predikciu špecifickej miery plodnosti pre obdobie do roku 2025. Na záver sme sa bližšie pozreli na poisťné produkty pre budúce matky, ich výhodosť a dostupnosť na trhu.

Kľúčové slová: stochastické modely, špecifická miera plodnosti, Leeiho model, predikcie pravdepodobnosti.

Abstract

This thesis is dedicated to modeling and predicting the age-specific fertility rate in selected populations between ages of 18 to 42 years with a one-year age division. We use data of the specific fertility rate, the median of the female population and the number of live-born children according to the age of the mother for each calendar year. All datasets that were applied to estimate the parameters of the models are available on the website of *The Human Fertility Database*. The model parameters were calibrated using statistical software R [11], and then they were further processed in Microsoft Excel [10]. The aim of the master's thesis was to find the most suitable model for each of the selected populations. Selected populations include the Slovak Republic, the Czech Republic, Hungary, Austria and the Netherlands. In search of the best model, we tested 10 different stochastic models, which we obtained by improving the basic Lee's model [8], we added various combinations of age, period and cohort parameters. For quantitative comparison of models, we used the values of the likelihood function, the number of estimated parameters and the value of the Bayesian information criterion. We evaluated the quality of the models on the basis of estimated model residuals. Subsequently, based on the evaluation of the best model for the age-specific fertility rate of the Slovak population, we estimated the model parameters that we used for short-term prediction of the age-specific fertility rate until 2025. Finally, we took a closer look at insurance products for future mothers, their benefits and market availability.

Keywords: stochastic models, age-specific fertility rate, Lee's model, probability predictions.

Predhovor

Úprimne ďakujem všetkým, ktorí stáli pri mne počas tvorby tejto práce: Gábor, Marika, Tibor, Tibor, Terezka, Adka, Jožko, Miško, Kubko, Milada, Zuzka, Tomáš, Kiko, Kika, Karin, Tímea, Juraj, Adam, Rebeka, Paulína, Lýdia, Ján, Števká, Daniela, Adka, Karin, Monika, Monika, Lenka, Rasto, Janka, Janko, Maťo, Edmund a Marek.

Obsah

Úvod	8
1 Základné označenia a pojmy v matematickej demografii	9
1.1 Označenia v matematickej demografii	9
2 Modelovanie vekovo špecifických mier plodnosti	11
2.1 Motivácia modelovania	11
2.2 Leeho model	11
2.3 Stochastické modely vekovo špecifických mier plodnosti	13
2.4 Odhad parametrov	15
2.5 Kvantitatívne porovnanie modelov	16
2.6 Odhadovanie rezíduí	17
2.7 Kvalitatívne posudzovanie vhodnosti modelov	18
3 Stochastické modely vekovo špecifických mier plodnosti vo vybraných krajinách	20
3.1 Metodické poznámky k modelom	20
3.1.1 Metodika voľby vekového a časového rozsahu	20
3.1.2 Spôsob odhadovania parametrov modelov	21
3.1.3 Kvantitatívne porovnanie použitých modelov	21
3.1.4 Odhadovanie rezíduí	22
3.1.5 Kvalitatívne posudzovanie vhodnosti modelov	23
3.2 Slovenská populácia	23
3.3 Česká populácia	25
3.4 Maďarská populácia	28
3.5 Rakúska populácia	33

3.6	Holandská populácia	36
4	Predikovanie vekovo špecifickej miery plodnosti	40
4.1	Odhadovanie parametrov modelov	40
4.2	Predikovanie budúcich špecifických mier plodnosti	40
5	Poistné produkty pre budúce matky dostupné na slovenskom trhu	45
	Záver	47
	Zoznam použitej literatúry	48
	Prílohy	

Úvod

Vývoj stavu obyvateľstva je čoraz dôležitejším a výraznejším faktorom, ktorý vplýva na mnohé oblasti spoločenskej i ekonomickej sféry všetkých krajín. Väčšina populácie na svete prechádza zmenami. Životná úroveň obyvateľstva sa zvyšuje, úmrtnosť v jednotlivých krajinách klesá. Dožívame sa čím ďalej, tým vyššieho veku. Do pozornosti sa dostáva výrazný pokles populačnej pôrodnosti a celkové znižovanie mier plodnosti. Pokým v roku 1950 na jednu slovenskú ženu v produktívnom veku pripadalo približne 3,5 novonarodeného dieťaťa, v roku 2019 bolo toto číslo už len na hodnote 1,5 dieťaťa. Záchovná hodnota je pritom vo výške 2,1 dieťaťa na jednu ženu v produktívnom veku. Nachádzame sa teda už výrazne pod *záchovnou hodnotou*. Ako sa vyvíjala krivka špecifickej miery plodnosti na Slovenku a ako v okolitých krajinách? Aký trend vývoja predpokladáme na najbližšie obdobie? Dokážeme nájsť kvalitný model, ktorým dokážeme dostatočne presne popísať doterajší vývoj? Dokážeme na základe parametrov modelu predikovať špecifickú mieru plodnosti na najbližšie roky? Odpoveďami na tieto otázky sa zaoberáme v našej práci. V prvej kapitole sú uvedené základné označenia a pojmy v matematickej demografii, ktorú využívame v práci. Druhá kapitola sa zaoberá špecifickou mierou plodnosti, motiváciou jej modelovania a dopadmi jej doterajšieho vývoju. Ďalej sa zaoberáme bližším popisom spôsobu voľby parametrov modelov a teoretickým popisom spôsobov kvalitatívneho a kvantitatívneho porovnania modelov, ktoré sme aplikovali pre určenie najefektívnejšieho modelu. Tretia kapitola sa zaoberá s konkrétnymi výpočtami a zhodnoteniami výsledkov použitých modelov pre vybrané krajiny: Slovensko (SVK), Česko (CZE), Maďarsko (HUN), Rakúsko (AUT) a Holandsko (NLD). Štvrtá kapitola sa zaoberá krátkodobou predikciou špecifickej miery plodnosti do budúcnosti, na základe parametrov získaných pomocou najvhodnejšieho modelu pre slovenskú populáciu v tretej kapitole. V záverečnej piatej kapitole je uvedený prehľad poisťných produktov, ktoré sú v ponuke komerčných poisťovní pre budúce rodičky na slovenskom trhu.

1 Základné označenia a pojmy v matematickej demografii

Demografia je vedecká disciplína, ktorá sa zaoberá skúmaním ľudskej populácie. Medzi úlohy matematickej demografie patrí zbieranie údajov a ich vyhodnocovanie pomocou techník teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky. Ďalšou z úloh matematickej demografie je tvorba predikcií, či popísanie priaznivých alebo nepriaznivých trendov, ktoré očakávame na základe dosiahnutých výsledkov. V našom diplomovom výskume sa bližšie zaoberáme demografickými ukazovateľmi súvisiacimi s plodnosťou a pôrodnosťou. V prvej kapitole preto uvádzame základné demografické pojmy, ktorými popisujeme demografické javy spojené s vývojom plodnosti a pôrodnosti.

1.1 Označenia v matematickej demografii

Pôrodnosť a plodnosť, spolu s úmrtnosťou, výrazným spôsobom ovplyvňujú populačný rast. Od vývoja pôrodnosti závisí stav našej spoločnosti v budúcnosti. Výraz plodnosť alebo fertilita používame na označenie realizovanej fyziologickej plodnosti. Ide teda o skutočný počet pôrodov, ktoré ženy majú počas svojho reprodukčného obdobia v skúmanej populácii alebo kohorte. Reprodukčné obdobie obvykle vymedzujeme vekovým intervalom 15–45 rokov (podľa dokončeného veku). Reprodukčný vek je vek, počas ktorého je žena schopná rodiť deti. Pojem pôrodnosť alebo natalita predstavuje rodenie detí, chápané ako hromadný demografický jav.

V nasledujúcej časti si predstavíme demografické ukazovatele, ktoré súvisia s plodnosťou. Zdrojom definícií jednotlivých demografických pojmov je prevažne [6]. Prvým predstaveným relatívnym analytickým demografickým ukazovateľom je index plodnosti, ktorý predstavuje počet detí vo veku 0–4 rokov k strednému stavu žien v reprodukčnom veku. Zvyčajne je vyjadrený v promile. Ďalším ukazovateľom je konečná plodnosť, ktorá predstavuje priemerný počet živonarodených detí pripadajúcich na jednu ženu tej istej generácie za predpokladu nulovej úmrtnosti žien počas celého reprodukčného obdobia.

Manželská plodnosť je plodnosť, ktorá je realizovaná počas stavu manželstva. Opačkom je mimomanželská plodnosť. Mierou manželskej plodnosti označujeme počet živonarodených detí vydatým ženám k strednému stavu vydatých žien v reprodukčnom veku,

zvyčajne za rok. Miera mimomanželskej plodnosti predstavuje počet živonarodených detí nevydatým ženám k strednému stavu slobodných, rozvedených a ovdovených žien v reprodukčnom veku, obyčajne za rok.

Miera plodnosti podľa veku je relatívny analytický demografický ukazovateľ, ktorý udáva počet živonarodených detí ženám v určitom veku k strednému stavu žien v tom istom veku; miery plodnosti podľa veku nazývame aj ako špecifické miery plodnosti (age-specific fertility rate, ozn. ASFR). Zvyčajne sa vyjadruje na 1000 osôb. Ďalej poznáme mieru ženskej, resp. mužskej plodnosti, ktorá predstavuje počet živonarodených detí k strednému stavu žien, resp. mužov v reprodukčnom veku, obyčajne za rok. Všeobecná miera plodnosti predstavuje počet živonarodených detí k strednému stavu žien v reprodukčnom veku, obyčajne za rok. Zodpovedá miere ženskej plodnosti, niekedy sa nazýva aj ako čistá miera plodnosti. Ďalším ukazovateľom je úhrnná plodnosť (total fertility rate, ozn. TFR), ktorá predstavuje priemerný počet živonarodených detí pripadajúcich na jednu ženu počas jej celého reprodukčného obdobia, pri zachovaní úrovne plodnosti sledovaného roka a za predpokladu nulovej úmrtnosti.

Čistá miera reprodukcie predstavuje priemerný počet živonarodených dievčat, ktoré by sa narodili jednej žene počas jej celého reprodukčného obdobia, pri zachovaní úrovne plodnosti a úmrtnosti sledovaného roka.

2 Modelovanie vekovo špecifických mier plodnosti

V tejto kapitole si predstavíme motiváciu modelovania špecifickej miery plodnosti a jej súčasný vývoj. Ďalej si predstavíme modely, ktoré sme použili na modelovanie špecifickej miery plodnosti.

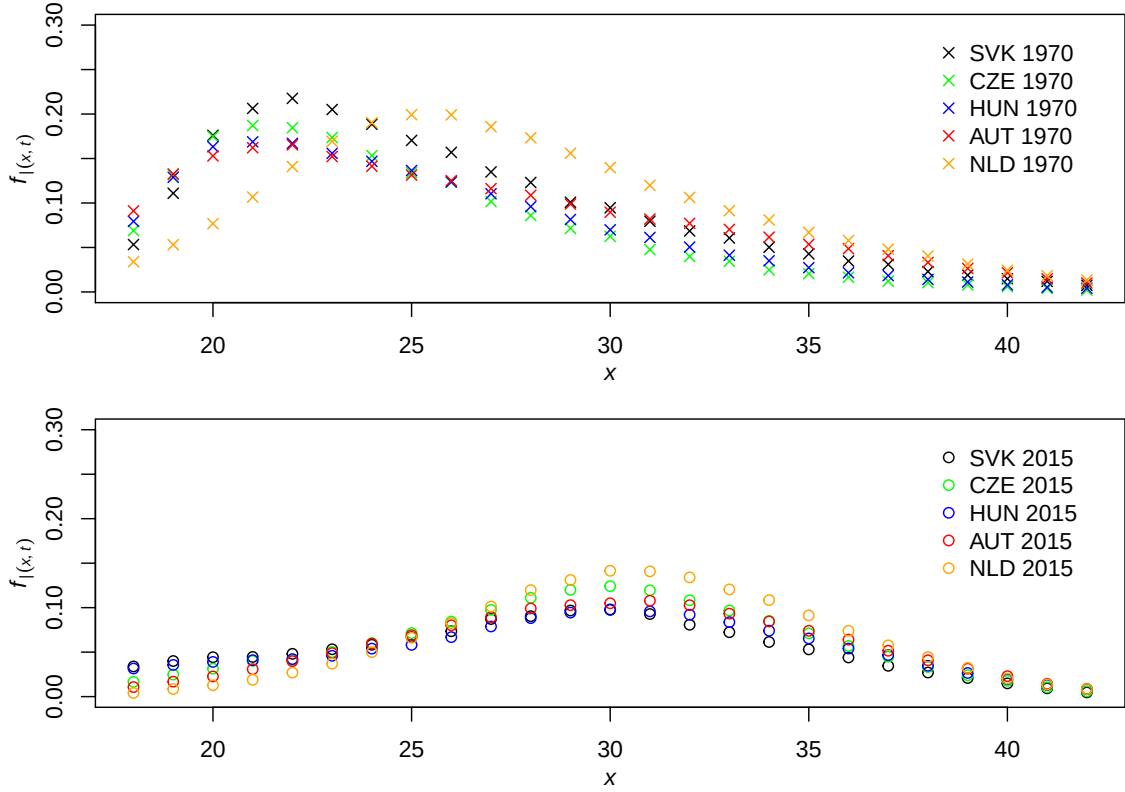
2.1 Motivácia modelovania

Pri historickom vývoji plodnosti na území Slovenska počas uplynulých dvoch storočí možno hovoriť o troch základných obdobiach. [16] Prvé obdobie sa vyznačovalo vysokou plodnosťou aj úmrtnosťou. Toto obdobie sa pretransformovalo v druhej polovici 19. storočia a prvej polovici 20. storočia vo väčšine európskych krajín do obdobia s nízkou plodnosťou a znižujúcou sa úmrtnosťou. Tretie obdobie, ktoré trvá dodnes, sa vyznačuje výrazne nižšou intenzitou plodnosti. Okrem poklesu intenzity rodenia detí sledujeme výrazný posun vo veku, kedy ženy rodia svoje prvé dieťa. V minulosti ženy vstupovali do manželstva už v nízkom veku, a tak nebol nízky priemerný vek pri prvom pôrode ničím neobvyklý. S nízkym vekom vstupu do manželstva mala súvislosť aj ďalšia možnosť a ochota mať viac detí. Pozorovali sme teda vysokú mieru plodnosti u žien vo veku 20–24 rokov. V súčasnosti je však skôr výrazným javom odkladanie materstva do vyššieho veku, čo so sebou prináša aj zmeny v nastavení rodenia druhých a ďalších detí. Nedochádza teda len k poklesu špecifickej miery plodnosti, ale aj k posunu obdobia vekov, pre ktoré pozorujeme maximálne hodnoty. Na Obr. 1 môžeme vidieť k akému poklesu a posunu vo vývoji špecifickej miery plodnosti došlo v priebehu 45 rokov v skúmaných populáciách.

2.2 Leeiho model

V tejto časti si bližšie popíšeme Leeiho model, ktorý predstavuje základný model pre popísanie vývoju špecifickej miery plodnosti. Jeho autorom je Ronald D. Lee a bol publikovaný v roku 1993 v článku *Modeling and forecasting the time series of US fertility: Age distribution, range, and ultimate level* [8].

Nech $f_{x,t}$ predstavuje špecifickú mieru plodnosti vo veku x a kalendárnom roku t .



Obr. 1: Vývoj vekovo špecifickej miery plodnosti vo vybraných krajinách v roku 1970 a v roku 2015 (zdroj: *vlastné spracovanie na základe dát z HFD [5]*)

Potom definujeme model špecifickej miery plodnosti vzťahom:

$$\ln(f_{x,t}) = a_x + b_x f_t + \varepsilon_{x,t}, \quad (1)$$

kde $x \in \chi$ a $t \in \tau$, pričom χ predstavuje množinu sledovaných vekov žien a τ je množina sledovaných kalendárnych rokov. Pre parametre modelu b_x a f_t navyše definujeme hraničné podmienky (normovanie) v tvare:

$$\sum_{t \in \tau} k_t = 0,$$

$$\sum_{x \in \chi} b_x = 1.$$

Potom parameter a_x predstavuje priemernú hodnotu špecifických mier plodnosti, parameter b_x predstavuje vekovo špecifický parameter nezávislý od času, ktorý zachytáva rozdielnosti medzi rodičkami v jednotlivých vekoch a parameter f_t reprezentuje index celkovej plodnosti. Parameter $\varepsilon_{x,t}$ predstavuje chybu, ktorá určuje veľkosť vplyvov, ktoré sa modelom nepodarilo zachytiť. Predpokladá sa, že $\varepsilon_{x,t}$ je parameter s vlastnosťami bieleho šumu.

Pre odhad parametrov modelu (1) nemôže byť použitá metóda najmenších štvorcov, nakoľko na pravej strane rovnice, respektíve rovníc, sa nenachádzajú regresné premenné. Preto autor článku [8] navrhol použiť metódu singulárneho rozkladu (ozn. SVD) z matice logaritmických špecifických mier plodnosti.

2.3 Stochastické modely vekovo špecifických mier plodnosti

V diplomovom výskume sme na modelovanie špecifických mier plodnosti využili modely, ktoré uvádzame v tejto podkapitole. Vychádzali sme zo základného Leeiho modelu (1), ktorý sme sa snažili vylepšiť vhodným pridaním časových, vekových a kohortných parametrov alebo ich kombináciou. Parametre označené indexom x predstavujú vekové parametre, indexom t časové parametre a indexom $t - x$ kohortné parametre.

Prvým použitým modelom bol Leeiho model, ktorý vo výskume označujeme skratkou **M1A**. Ide o rovnaký model, aký je použitý v článku [8]:

$$\ln f_{x,t} = a_x + b_x f_t + \varepsilon_{x,t}.$$

V modeli M1A používame nasledovné ohraničenia pre parametre:

$$\begin{aligned} \sum_{t \in \tau} f_t &= 0, \\ \sum_{x \in \chi} b_x &= 1. \end{aligned}$$

Modelom **M2A** sme označili Renshaw-Habermanov model s ohraničeniami, ktorý je známy tiež ako modifikovaný Leeiho model, ktorý zovšeobecnil A. E. Renshaw a S. Haberman pridaním kohortného efektu j_{t-x} a ďalšieho vektora vekovo špecifických parametrov g_x :

$$\ln f_{x,t} = a_x + b_x f_t + g_x j_{t-x} + \varepsilon_{x,t},$$

pričom ohraničenia pre parametre v prípade tohto modelu sú:

$$\begin{aligned}\sum_{t \in \tau} f_t &= 0, \\ \sum_{x \in \chi} b_x &= 1, \\ \sum_{x \in \chi, t \in \tau} j_{t-x} &= 0, \\ \sum_{x \in \chi} g_x &= 1.\end{aligned}$$

Model s označením **M2B** je taktiež Renshawho-Habermanov model, pri ktorom sme nepoužili ohraničenia pre parametre, a tak sme dostali model bez ohraničení. Vynechaním ohraničení zvyšujeme počet parametrov, ktoré odhadujeme, a tým môžeme zlepšiť kvalitu daného modelu.

$$\ln f_{x,t} = a_x + b_x f_t + g_x j_{t-x} + \varepsilon_{x,t}.$$

Model **M3A** vznikol modifikáciou Renshawho-Habermanov modelu, konkrétne vynechaním vekového parametra g_x :

$$\ln f_{x,t} = a_x + b_x f_t + j_{t-x} + \varepsilon_{x,t},$$

pričom ohraničenia pre parametre v prípade tohto modelu sú:

$$\begin{aligned}\sum_{t \in \tau} f_t &= 0, \\ \sum_{x \in \chi} b_x &= 1, \\ \sum_{x \in \chi, t \in \tau} j_{t-x} &= 0.\end{aligned}$$

V modeli **M3B** – modifikovanom Renshawho-Habermanov modeli – sme vo výpočte vynechali ohraničenia pre parametre:

$$\ln f_{x,t} = a_x + b_x f_t + j_{t-x} + \varepsilon_{x,t}.$$

Model **M4B**, ktorý vznikol znovu modifikáciou Renshawho-Habermanovho modelu bez ohraničení, kde sme kohortný parameter násobili členom $(c - x)$:

$$\ln f_{x,t} = a_x + b_x f_t + (c - x) j_{t-x} + \varepsilon_{x,t}.$$

kde c je skalárny parameter modelu, regresná premenná x predstavuje vek, pre ktorý je špecifická miera plodnosti počítaná.

Model **M5B** interne nazývame ako modifikovaný Renshawho-Habermanov model bez ohraničení, ktorý vznikol pridaním ďalšieho vekového parametru c_x , ktorý je normovaný členom $\frac{x}{x_p}$:

$$\ln f_{x,t} = a_x + b_x f_t + j_{t-x} + \left(c_x - \frac{x}{x_p} \right) + \varepsilon_{x,t}.$$

kde c_x je nový, vekovo špecifický parameter pre $x \in \chi$. Parameter x predstavuje vek, pre ktorý je špecifická miera plodnosti počítaná a x_p je priemerná hodnota sledovaných vekov.

Model **M6B** – modifikovaný Renshawho-Habermanov model bez ohraničení doplnený o časovo špecifický parameter h_t , ktorý násobíme členom $\left(d - \frac{x}{x_p} \right)$, kde d je skalárny parameter modelu a $\frac{x}{x_p}$, kde x je nezávislá regresná premenná, ktorá nadobúda lineárne rastúce hodnoty predstavujúce vek, pre ktorý je špecifická miera plodnosti počítaná a x_p je priemerná hodnota sledovaných vekov:

$$\ln f_{x,t} = a_x + b_x f_t + j_{t-x} + \left(d - \frac{x}{x_p} \right) h_t + \varepsilon_{x,t}.$$

Model **M7B** je modifikovaný model M6B, v ktorom sme člen pri časovo špecifickom parametri h_t nahradili novým, vekovo špecifickým parametrom g_x :

$$\ln f_{x,t} = a_x + b_x f_t + j_{t-x} + g_x h_t + \varepsilon_{x,t}.$$

Model **M8B** je modifikovaný model M6B, kde sme pridali ďalší kohortný parameter s označením z_{t-x} :

$$\ln f_{x,t} = a_x + b_x f_t + j_{t-x} + \left(d - \frac{x}{x_p} \right) h_t + z_{t-x} + \varepsilon_{x,t}.$$

Odhadnuté parametre modelov vyššieho rádu už nemajú rovnakú interpretáciu ako v prípade modelu M1A. Tieto modely sú preparametrizované a efekty parametrov sa medzi sebou rozložia. Modely vyššieho rádu sú komplexnejšie a vhodnejšie na použitie, nakoľko použitím základného M1A nedokážeme zachytiť niektoré časti informácií.

2.4 Odhad parametrov

Veľká časť našej práce sa zaoberá práve odhadovaním parametrov modelov, ktoré sú predstavené v podkapitole 2.3, preto si v tejto časti stručne popíšeme spôsob, akým

sme parametre odhadovali.

Nech $x \in \chi$ a $t \in \tau$, kde $\chi = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ predstavuje množinu vekov žien a $\tau = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ je množina sledovaných kalendárnych rokov. Pre každé x a t sme definovali $FP(x, t)$, ktoré predstavuje priemernú veľkosť x -ročnej ženskej populácie v roku t (označenie FP pochádza z anglického pomenovania female population). Ďalej sme definovali $LB(x, t)$, ktoré predstavuje priemerný počet živonarodených detí x -ročným ženám počas kalendárneho roku t (z anglického výrazu live births). Predpokladajme, že platí predpoklad o tom, že počet živonarodených detí $LB(x, t) \forall x \in \chi, t \in \tau$, sa riadi podľa Poissonovo rozdelenia pravdepodobnosti s parametrom $FP(x, t)f(x, t)$, kde $f(x, t)$ predstavuje špecifickú mieru plodnosti vo veku x a v kalendárnom roku t . Čo značíme ako:

$$LB(x, t) \sim \text{Po}(FP(x, t)f(x, t)), \quad \forall x \in \chi, t \in \tau, \quad (2)$$

Množinu parametrov, ktoré sa odhadujú pre každý model, označme symbolom Φ . Špecifickú mieru plodnosti $f(x, t)$ potom formálne môžeme označiť ako $f(x, t; \Phi)$, keďže každý model je závislý od parametrov. Potom za platnosti predpokladu o Poissonovom rozdelení (2) logaritmus funkcie vierohodnosti má tvar:

$$\ell(\Phi; LB, FP) = \sum_{t \in \tau} \sum_{x \in \chi} (LB(x, t) \ln[FP(x, t)f(x, t; \Phi)] - FP(x, t)f(x, t; \Phi) - \ln[LB(x, t)!]) \quad (3)$$

kde LB a FP sú matice pozorovaní $LB(x, t)_{x \in \chi, t \in \tau}$, $FP(x, t)_{x \in \chi, t \in \tau}$. Parametre odhadujeme pomocou stochastickej optimalizácie – maximalizáciou logaritmu funkcie vierohodnosti danej vzťahom (3). Metódy, ktoré používame v našom výskume na odhad parametrov, sú popísané v podkapitole 3.1.2.

2.5 Kvantitatívne porovnanie modelov

V prípade použitia metódy maximalizácie hodnoty funkcie vierohodnosti modelov sa na porovnanie efektívnosti modelov používa Bayesovo informačné kritérium (Bayesian information criterion, ozn. BIC). Očakáva sa, že model, kde je použitý väčší počet parametrov, bude opisovať dáta lepšie ako model s menším počtom parametrov, a teda bude mať väčšiu hodnotu funkcie vierohodnosti. Kritérium BIC okrem hodnoty funkcie

vierohodnosti zohľadňuje aj počet odhadovaných parametrov a tak, čím má model viac parametrov, tým je penalizácia modelu vyššia. V našom výskume sme uvažovali nasledovnú upravenú definíciu BIC:

$$\text{BIC} = \ell(\hat{\Phi}) - \frac{1}{2}\nu \ln(n), \quad (4)$$

kde Φ je vektor parametrov modelu, $\hat{\Phi}$ je odhad vektoru získaný použitím metódy maximálnej vierohodnosti, $\ell(\hat{\Phi})$ je maximálna hodnota logaritmu funkcie vierohodnosti (log-likelihood, ozn. LogLik), n je počet pozorovaní a ν je počet použitých parametrov, ktoré sme v danom modeli odhadovali.

2.6 Odhadovanie rezíduí

Pre zhodnotenie kvality použitých modelov sme sa zaoberali skúmaním vlastností ich rezíduí. Postup sme prebrali najmä z článku [3], v ktorom sa autori zaoberajú modelovaním úmrtnostných mier.

Postupovali sme nasledovným spôsobom. Rozdelili sme intervaly rokov do tzv. dátových okien, ktoré sme posúvali v každom ďalšom výpočte o jeden rok. Prvým krokom výpočtu v každom dátovom okne bolo odhadnutie parametrov modelov. Prvé dátové okno obsahuje roky $t_1, \dots, t_n$ kde n je počet rokov v dátovom okne, ktorý sa pri posúvaní nemení. Na základe dát z tohto dátového okna sme metódou popísanou v podkapitole 2.4 odhadli parametre modelov. Získané odhady sme použili na výpočet modelových špecifických mier plodnosti $\bar{f}$ pre rok t_n a pre veku x z množiny $\chi = \{x_1, \dots, x_k\}$, kde k je počet sledovaných vekov, čo označujeme ako $\bar{f}(x, t_n)$. Následne sme na základe použitia vzťahu:

$$\hat{\varepsilon}(x, t_n) = \frac{\tilde{f}(x, t+n) - \bar{f}(x, t_n)}{\sqrt{\bar{f}(x, t_n)/\text{FP}(x, t_n)}} \quad (5)$$

získali odhad rezíduí modelu špecifických mier plodnosti, kde:

$$\tilde{f}(x, t) = \frac{\text{LB}(x, t)}{\text{FP}(x, t)} \quad (6)$$

je pozorovaná špecifická miera plodnosti vo veku x rokov a kalendárnom roku t . Predstavený postup sme zopakovali pre všetky dátové okná, a tak sme získali maticu odhadnutých rezíduí použitých regresných modelov.

Znovu sme vychádzali z predpokladu uvedeného v podkapitole 2.4, a to, že počet narodených detí $\text{LB}(x, t)$ sa riadi podľa Poissonovho rozdelenia a ich počet je dostatočne

veľký na to, aby po vykonaní vhodnej transformácie a normovania konvergoval k normálnemu rozdeleniu. Normalitu modelu sme považovali za jeho „pridanú charakteristiku“, pričom prítomnosť normálneho rozdelenia sme testovali na matici odhadnutých rezíduí. Ak sa totiž nezamietne dodatočne pridaná hypotéza o normalite modelu, potom pri niektorých ďalších krokoch matematického modelovania a predikovania mier plodnosti je možné použiť aj postupy, testy a techniky vyžadujúce platnosť predpokladu normality.

2.7 Kvalitatívne posudzovanie vhodnosti modelov

Pri testovaní hypotézy o nezávislosti a normalite rozdelenia rezíduí sme pre maticu odhadnutých rezíduí vykonali niekoľko testov. Testy, ktoré sme použili pre posúdenie vhodnosti modelov, sú popísané nižšie. Pre overenie nulovej strednej hodnoty v matici odhadnutých rezíduí sme použili:

- jednovýberový t-test,
- Wilcoxonov jednovýberový test.

Jednotkovú varianciu v matici odhadnutých rezíduí sme testovali pomocou:

- chí-kvadrát test (χ^2 test).

Normalitu odhadnutých rezíduí sme overovali použitím:

- Jarqueov-Berov test (ozn. JB),
- upravený Jarqueov-Berov test (Adjusted Jarqueov-Berov test, ozn. AJB),
- Shapirov-Wilkov test (ozn. ShW),
- Kolmogorovov-Smirnovov test všeobecnej normality (ozn. KS norm),
- Kolmogorovov-Smirnovov test štandardnej normality $\mathcal{N}(0; 1)$ (ozn. KS norm(0;1)).

Pre posúdenie nezávislosti sme počítali štatisticky významné korelácie medzi odhadnutými rezíduami na hladine významnosti 0,01 pomocou testov o nulovej korelácii cez:

- sledované veky,
- sledované roky.

Ďalšou možnosťou pre vizuálne posúdenie nezávislosti odhadnutých rezíduí v matici odhadnutých rezíduí je použitie tzv. tepelných máp, ktoré zobrazujú hodnotu matice

odhadnutých rezíduí pre jednotlivé modely. Ak naša hypotéza platí a rezíduá sú nezávislé, tepelná mapa by mala mať náhodný vzor, podobný bielemu šumu. Ak sú na tepelnej mape viditeľné zhluky alebo pravidelné formy, hypotézu o nezávislosti zamietame.

3 Stochastické modely vekovo špecifických mier plodnosti vo vybraných krajinách

V tretej kapitole diplomovej práce sme porovnávali kvalitu použitých stochastických modelov M1A–M8B, ktoré sme bližšie popísali v podkapitole 2.3. Odhad parametrov modelov sme robili postupom predstaveným v podkapitole 3.1.2. Pre porovnanie kvality použitých modelov sme využili postupy spomenuté v podkapitolách 2.5, 2.6 a 2.7. Dáta, ktoré sme používali na získanie odhadov modelov, sme čerpali z databázy The Human Fertility Database (ozn. HFD [5]).

3.1 Metodické poznámky k modelom

Vhodnosť modelov pre stochastické modelovanie špecifickej miery plodnosti sme sa rozhodli skúmať na slovenskej, českej, maďarskej, rakúskej a holandskej populácii. Zaujímalo nás, ktorý z použitých modelov bude najvhodnejší pre jednotlivé populácie. Populácie, ktoré sme vybrali, majú približne rovnaké trendy vo vývoji plodnosti, a preto sme neočakávali výrazné rozdiely vo vhodnosti jednotlivých použitých modelov.

3.1.1 Metodika voľby vekového a časového rozsahu

Pre porovnanie kvality použitých modelov sme zvolili jednotný vekový a časový rozsah použitých dát. Špecifická miera plodnosti sa z pravidla počíta v reprodukčnom období ženy, ktoré je v rozmedzí 15–49 rokov. Nakoľko zvyšujúcim sa vekom ženy počet detí pripadajúcich na jednu ženu klesá, pre spoľahlivosť výpočtov sme ako hornú hranicu zvolili vek 42 rokov. Analogicky, v prípade žien vo veku 15, 16, 17 rokov sa vyskytuje malý počet narodených detí, čo môže zvyšovať chybovosť našich modelov. Preto sme sa rozhodli spodnú vekovú hranicu nastaviť na hodnotu 18 rokov.

Časové obdobie sme volili na základe dostupnosti dát v databáze HFD. Zvolili sme obdobie rokov 1960–2019, resp. 1958–2017 pre maďarskú populáciu.

3.1.2 Spôsob odhadovania parametrov modelov

Parametre použitých stochastických modelov M1A – M8B sme odhadovali pomocou maximalizácie logaritmu funkcie vierohodnosti danej vzťahom (3) v štatistickom softvéri [11] pomocou funkcie `optim()`.

Pre model M1A sme funkciu vierohodnosti optimalizovali pomocou Broydenovho-Fletcherovho-Goldfarbovho-Shannovho algoritmu, ktorý označujeme ako BFGS. Algoritmus BFGS patrí do triedy kvázinewtonových metód, ktoré vychádzajú z pôvodnej Newtonovej metódy. V kvázinewtonovských metódach sa pri výpočte nepoužíva inverzná Hesseova matica druhých parciálnych derivácií priamo, ale iba jej odhad pomocou gradientov [12]. Pre odhadované modely M2A – M8B sme funkciu vierohodnosti optimalizovali v dvoch krokoch. V prvom kroku sme použili algoritmus Nelder a Meada, ktorý pri výpočte používa iba funkčné hodnoty, nepotrebuje derivácie funkcií, a teda ide o robustnú metódu, no náročnú na výpočtový čas. Patrí do rádu simplexových metód. V druhom kroku sme použili algoritmus BFGS, ktorý je rýchlejší a presnejší ako algoritmus Nelder a Meada. Dvojkrokovú metódu sme sa rozhodli použiť z dôvodu veľkého počtu odhadovaných parametrov, kde algoritmus Nelder a Meada zvykne dosahovať väčšiu úspešnosť dokonvergovania k semi-optimálnemu bodu. Parametre získané v prvej optimalizácii následne sme použili ako štartovacie parametre algoritmu BFGS, a tak algoritmus s väčšou pravdepodobnosťou dokázal dokonvergovať do optimálneho bodu so zvolenou numerickou presnosťou.

Odhady štartovacích hodnôt pre funkciu `optim()` sme získali pomocou Leeho modelu `lca()` z balíku `demography` [14]. Odhady parametrov Leeho modelu (M1A) v prípade slovenskej, českej, maďarskej, rakúskej a holandskej populácie sú graficky znázornené v Prílohe A na Obr. 19 až Obr. 23. Tieto odhadnuté hodnoty sme v istej miere používali aj pri voľbe štartovacích hodnôt modelov vyššieho rádu, pričom sme ich, pochopiteľne, museli mierne upraviť a vhodne doplniť, pretože modely M2A – M8B majú väčší počet parametrov, ako základný Leeho model.

3.1.3 Kvantitatívne porovnanie použitých modelov

Pre kvantitatívne porovnanie kvality použitých modelov sme sledovali maximálnu hodnotu logaritmu funkcie vierohodnosti, počet odhadovaných parametrov a hodnotu

BIC, ktorý je daný vzťahom (4).

Pre populácie všetkých vybraných krajín sme použitím údajov z databázy HFD vypočítali BIC hodnoty na základe vypočítanej maximálnej hodnoty logaritmu funkcie vierohodnosti a počtu odhadovaných parametrov. V prípade porovnávania kvality modelu na základe BIC hodnoty v našom prípade platí, že za najlepší model sa považuje ten, ktorého BIC hodnota je najväčšia.

Vo výsledkoch, ktoré prezentujeme v ďalšej časti tejto kapitoly, uvádzame mediánové hodnoty logaritmu funkcie vierohodnosti. Ide o mediánovú hodnotu maximálnej hodnoty logaritmu funkcie vierohodnosti zo všetkých hodnôt, ktoré sme získali v jednotlivých dátových oknách. Pomocou tejto mediánovej hodnoty logaritmickú funkciu vierohodnosti sme vypočítali mediánové BIC. Priemerné poradie je poradie, ktoré sme získali z matice poradí, ktorá obsahovala poradie BIC hodnoty každého modelu v každom dátovom okne v rámci porovnania jednotlivých modelov. Na vytvorenie matice poradí sme použili program MS Excel a funkciu `rank()`.

3.1.4 Odhadovanie rezíduí

Pre zhodnotenie kvality použitých modelov sme sa zaoberali skúmaním vlastností ich rezíduí, ktoré sme získali tak, že sme rozdelili intervaly rokov do tzv. dátových okien, ktoré sme posúvali v každom ďalšom výpočte o jeden rok.

Postup získavania rezíduí: v prvom kroku sme celé časové obdobie 1960–2019, resp. 1958–2017 pre maďarskú populáciu, rozdelili na 20-ročné dátové okná. Pre zjednodušenie budeme ďalšie kroky tvorby dátových okien bližšie popisovať len pre časové obdobie 1960–2019, pre časové obdobie 1958–2017 je postup analogický. Po rozdelení na 20-ročné dátové okná sme získali prvé dátové okno pre roky 1960–1979. Použitím získaných údajov z databázy HFD sme odhadli parametre použitých modelov pomocou metódy maximálnej vierohodnosti. Získané odhady sme použili na výpočet odhadov vekovo špecifickej miery plodnosti $\bar{f}(x, 1979)$ pre veku $x = 18, \dots, 42$ rokov. Následne sme vypočítali špecifickú mieru plodnosti $\tilde{f}(x, 1979)$ z dát pre posledný rok 1979 a pre všetky veku. Použitím vzťahu (5) sme vypočítali odhadnuté rezíduá modelu špecifickej miery plodnosti $\hat{\varepsilon}(x, 1979)$. Dátové okná sme posúvali o jeden rok a postup sme opakovali. Takýmto spôsobom sme získali 40 dátových okien (t. j. 1960–1979, 1961–1980, 1962–1981, $\dots$,

2000–2019) pre 25 rôznych vekov. Dostali sme teda maticu odhadnutých rezíduí s rozmermi 25×40 .

Rezíduá zjednodušene definujeme ako rozdiel medzi skutočnými špecifickými mierami plodnosti z dát a špecifickými mierami plodnosti, ktoré sú odhadnuté pomocou modelov.

3.1.5 Kvalitatívne posudzovanie vhodnosti modelov

Pre testovanie hypotézy o nezávislosti a normalite rozdelenia odhadnutých rezíduí sme vypočítali ich opisné štatistiky – priemer, variancia, koeficient šikmosti, koeficient špicatosti. Ak sa odhady rezíduí riadia normálnym rozdelením, očakávali sme, že štatistiky budú nadobúdať približne hodnoty pre priemer rovné 0, variancia rovná 1, koeficient šikmosti 0 a koeficient špicatosti 3. Pre každý použitý model sme testovali platnosť hypotézy o nezávislosti a normálnom rozdelení $\mathcal{N}(0; 1)$ odhadnutých rezíduí pomocou testov predstavených v podkapitole 2.7. Pre vizuálne posúdenie nezávislosti odhadnutých rezíduí v matici odhadnutých rezíduí sme použili tzv. tepelné mapy. Tepelné mapy odhadnutých rezíduí modelu M1A pre všetky posudzované populácie sú uvedené v Prílohe B na Obr. 24 až Obr. 28.

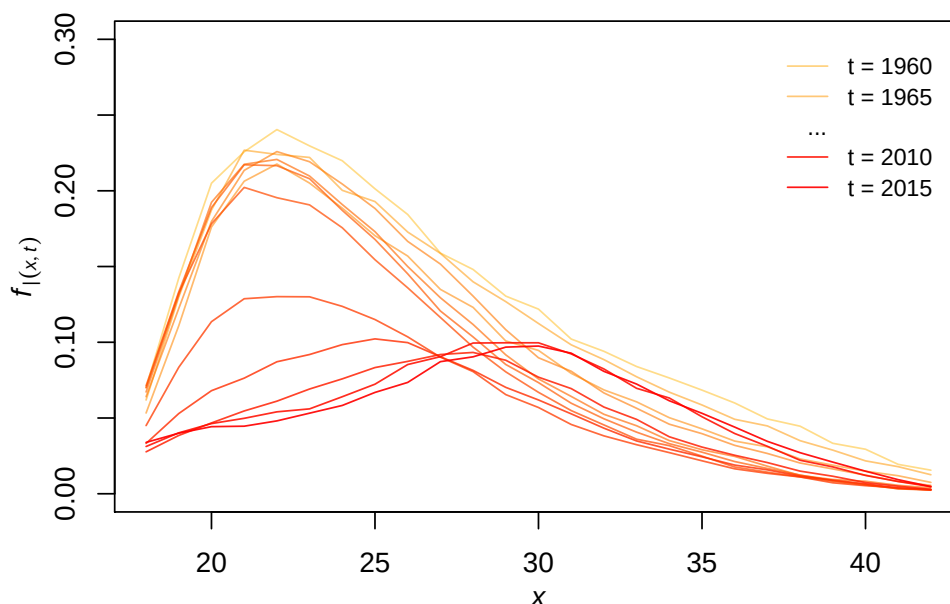
3.2 Slovenská populácia

Vývoj špecifickej miery plodnosti na Slovensku je zobrazený na Obr. 2. Pozorujeme pokles špecifickej miery plodnosti zvyšujúcim sa rokom pozorovania, no taktiež môžeme vidieť posun vo veku žien, kedy je špecifická miera plodnosti najvyššia, z veku 23 rokov na vek 30 rokov.

V Tabuľke 1 sú uvedené hodnoty úhrnnej plodnosti slovenskej populácie v rokoch 1961, ..., 2020. Pokým v roku 1961 bola hodnota úhrnnej plodnosti 2,967, čo predstavuje takmer tri narodené deti na jednu ženu v reprodukčnom veku, v roku 2020 bola táto hodnota na úrovni 1,533.

V Tabuľke 2 sú zobrazené výsledky jednotlivých použitých modelov pre slovenskú populáciu. Maximálnu hodnotu logaritmu funkcie vierohodnosti rovnú $-2\,532,77$ dosahuje model M7B. Pri tomto modeli však odhadujeme 179 parametrov, čo negatívne ovplyv-

ňuje BIC hodnotu. Na základe veľkosti BIC ukazovateľa nám ako najvhodnejší model pre slovenskú populáciu vyšiel model M6B. Z výsledkov p-hodnôt testov normality pre odhadnuté rezíduá modelu M6B sme dostali, že všetky hodnoty sú nad bežne používanými hladinami významnosti, takže hypotézu o normalite nezamietame. Tepelná mapa



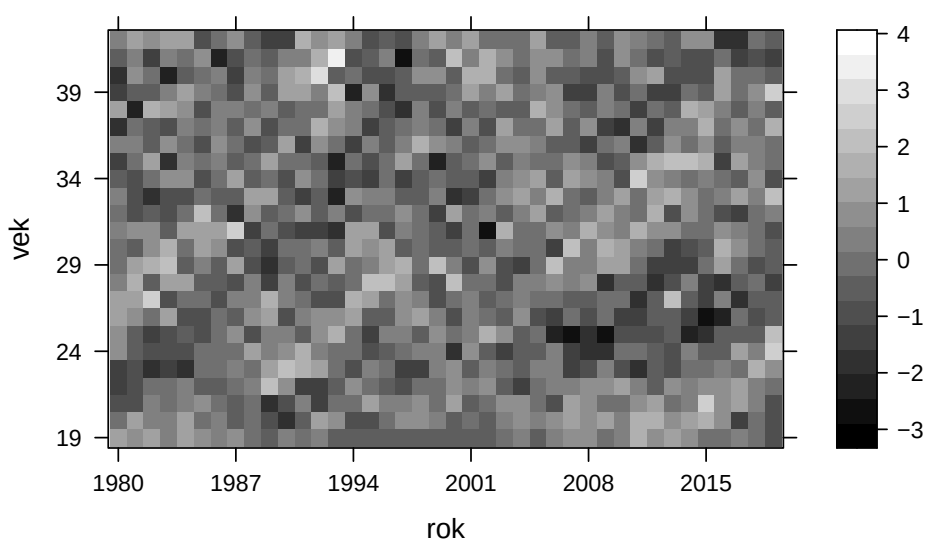
Obr. 2: Vývoj špecifickej miery plodnosti na Slovensku (zdroj: vlastné spracovanie na základe dát z HFD [5])

Tabuľka 1: Hodnoty úhrnnej plodnosti v slovenskej populácii v rokoch 1961, ..., 2020

1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
2,967	2,837	2,936	2,911	2,806	2,684	2,511	2,421	2,466	2,428
1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
2,427	2,482	2,549	2,592	2,522	2,522	2,470	2,459	2,444	2,316
1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
2,279	2,270	2,268	2,253	2,256	2,203	2,151	2,153	2,090	2,096
1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
2,051	1,931	1,872	1,673	1,529	1,478	1,437	1,384	1,339	1,302
2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
1,200	1,188	1,205	1,249	1,264	1,253	1,268	1,341	1,437	1,428
2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
1,448	1,465	1,474	1,503	1,400	1,480	1,520	1,540	1,570	1,533

(zdroj: vlastné spracovanie na základe dát z HFD [5])

modelu M6B je zobrazená na Obr. 3. Na tepelnej mape nie sú viditeľné výrazné zhluky ani diagonály, „hypotézu” o nezávislosti odhadnutých rezíduí teda nezamietame.



Obr. 3: Tepelná mapa rezíduí modelu M6B pre slovenskú populáciu (*zdroj: vlastné spracovanie*)

3.3 Česká populácia

Historický vývoj špecifickej miery plodnosti v Česku, zobrazený na Obr. 4, je podobný vývoju špecifickej miery plodnosti na Slovensku. Od roku 1960 do roku 1995 pozorujeme výrazný pokles špecifickej miery plodnosti. Po roku 1995 sa pokles takmer zastaví, no dochádza k posunu vo vekových skupinách, kedy dosahuje špecifická miera plodnosti maximálne hodnoty.

V českej populácii sa úhrnná plodnosť v roku 1961 pohybovala na úrovni 2,140, čo predstavuje dve živonarodené deti na jednu ženu v reprodukčnom veku. Najnižšia hodnota úhrnnej plodnosti rovná 1,139 bola v roku 1999. Od roku 1999 úhrnná plodnosť v českej populácii rástla a v súčasnosti je na úrovni 1,710. Hodnoty úhrnnej plodnosti v českej populácii v rokoch 1961, ..., 2020 sú prezentované v Tabuľke 3.

V Tabuľke 4 sú zobrazené výsledky jednotlivých použitých modelov pre českú populáciu. Maximálnu mediánovú hodnotu logaritmu funkcie vierohodnosti rovnú $-2\,701,72$ dosiahol model M7B. Vysoký počet odhadovaných parametrov tohto modelu neovplyvnil kvalitu modelu podľa BIC ukazovateľa, a tak aj na základe porovnania mediánových

Tabuľka 2: Výsledky modelov pre slovenskú populáciu

SVK, 1960-2019	Porovnanie odhadnutých modelov pomocou mediánu hodnôt logaritmickej funkcie vierohodnosti (LogLik), mediánu Bayesovho informačného kritéria (BIC) a poradí v rámci skupiny použitých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Mediánová LogLik hodnota	-4415,49	-2872,81	-2669,23	-2643,79	-2635,14	-2738,80	-2622,48	-2554,32	-2532,77	-2553,44
Počet parametrov	78	155	159	126	129	130	159	150	179	199
Mediánové BIC	-4626,79	-3292,29	-3101,15	-2988,70	-2989,37	-3096,14	-3054,40	-2973,81	-3026,83	-3109,65
Poradie podľa mediánového BIC	10	9	7	2	3	6	5	1	4	8
Priemerné poradie	10,00	8,35	6,43	2,98	3,05	5,55	6,00	1,88	3,68	7,10

SVK, 1960-2019	Opisné charakteristiky odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Aritmetický priemer	1,8085	0,1800	0,1314	-0,2054	0,0314	0,2841	0,0364	0,0167	0,0077	0,0293
Variancia	15,9601	1,8351	1,5379	2,0447	1,3531	1,8948	1,3673	0,8817	0,5043	0,8410
Koeficient šikmosti	-0,0656	0,5954	0,4985	-0,5188	0,0753	0,1123	0,1148	0,0335	-0,1325	0,0401
Koeficient špicatosti	4,3629	5,9611	4,6831	4,6624	3,4133	3,1098	3,4445	3,1506	3,3845	3,0460

SVK, 1960-2019	P-hodnota testov o nulovej strednej hodnote v matici odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Jednovýberový t-test	< 0,0001	< 0,0001	0,0008	< 0,0001	0,3933	< 0,0001	0,3253	0,5732	0,7310	0,3120
Wilcoxonov jednovýberový test	< 0,0001	0,0007	0,0100	0,0003	0,5109	< 0,0001	0,4916	0,6189	0,4378	0,3681

SVK, 1960-2019	P-hodnota testov o jednotkovej variancii v matici odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Chi-kvadrát test	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0061	< 0,0001	0,0002

SVK, 1960-2019	P-hodnota testov normality pre odhadnuté rezíduá jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
JB	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0210	0,2475	0,0115	0,5435	0,0145	0,8430
AJB	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0250	0,2475	0,0080	0,5060	0,0120	0,8135
ShW	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0284	0,0969	0,0231	0,2018	0,0037	0,4201
KS norm	< 0,0001	< 0,0001	0,0001	0,0015	0,0847	0,0276	0,1591	0,2783	0,1318	0,3546
KS norm(0; 1)	< 0,0001	< 0,0001	0,0008	< 0,0001	0,0121	< 0,0001	0,0220	0,1500	< 0,0001	0,0255

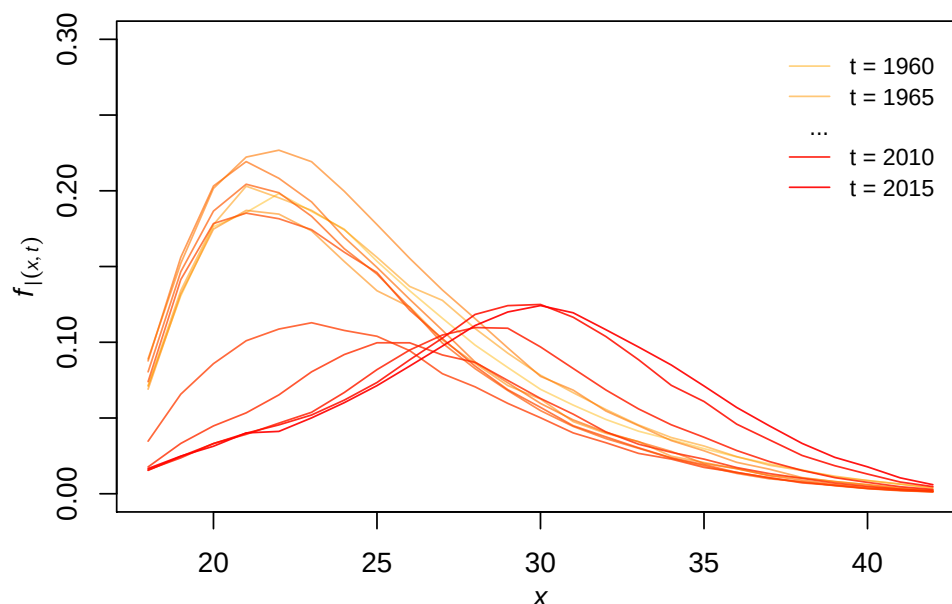
SVK, 1960-2019	Percentuálny podiel štatisticky významných korelácií medzi odhadnutými rezíduami na hladine									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Cez veky	100,00%	75,00%	58,33%	91,67%	54,17%	66,67%	45,83%	4,17%	0,00%	4,17%
Cez roky	89,74%	5,12%	12,82%	28,21%	23,08%	30,77%	25,64%	12,82%	5,13%	10,26%

(zdroj: vlastné spracovanie)

BIC hodnôt nám model M7B vychádza ako najvhodnejší. Ako druhý najvhodnejší vyšiel model M6B. Opisné charakteristiky odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov taktiež dosahujú požadované hodnoty. Výsledky p-hodnôt testov sú na hranici hladín významnosti

iba v prípade testov normality odhadnutých rezíduí a neuspokojujúce výsledky sme dostali pri chí-kvadrát teste o jednotkovej variancii. V ostatných testoch sú p-hodnoty testov nad bežne používanými hladinami významnosti, takže hypotézu o normalite nezamietame.

Tepelná mapa modelu M7B je zobrazená na Obr. 5.

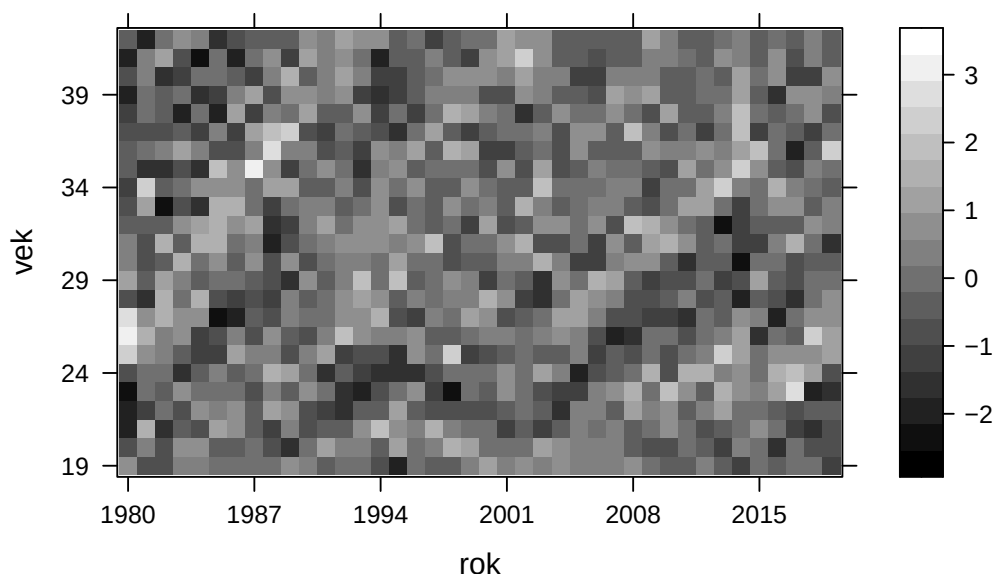


Obr. 4: Vývoj špecifickej miery plodnosti v Česku (zdroj: vlastné spracovanie na základe dát z HFD [5])

Tabuľka 3: Hodnoty úhrnnej plodnosti v českej populácii v rokoch 1961, ..., 2020

1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
2,140	2,152	2,353	2,384	2,209	2,040	1,929	1,860	1,893	1,920
1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
1,980	2,077	2,291	2,440	2,412	2,372	2,329	2,335	2,298	2,108
1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
2,021	2,014	1,971	1,976	1,974	1,948	1,923	1,954	1,888	1,908
1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
1,861	1,715	1,667	1,440	1,281	1,189	1,178	1,163	1,139	1,151
2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
1,144	1,165	1,172	1,219	1,275	1,323	1,440	1,513	1,514	1,516
2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
1,427	1,452	1,456	1,528	1,570	1,631	1,687	1,708	1,709	1,710

(zdroj: vlastné spracovanie na základe dát z HFD [5])



Obr. 5: Tepelná mapa rezíduí modelu M7B pre českú populáciu (*zdroj: vlastné spracovanie*)

3.4 Maďarská populácia

Vo vývoji špecifickej miery plodnosti v Maďarsku, zobrazenej na Obr. 6, pozorujeme jej postupný pokles a zároveň posun vo vekovej skupine, v ktorej nadobúda maximálne hodnoty. V súčasnosti dosahuje špecifická miera plodnosti pre maďarskú populáciu maximálnu hodnotu rovnú približne 0,1 pri vekovej skupine 30 rokov.

Hodnota úhrnnej plodnosti v maďarskej populácii sa medzi rokmi 1961, ..., 1991 držala približne na úrovni dve živonarodené deti pripadajúce na jednu ženu v reprodukčnom veku. Od roku 1992 pozorujeme pokles až do roku 2010, kedy bola úhrnná plodnosť rovná 1,250. Od roku 2011 dochádzalo k postupnému nárastu úhrnnej plodnosti. V súčasnosti sa úhrnná plodnosť v Maďarsku pohybuje na úrovni 1,563. Všetky hodnoty úhrnnej plodnosti sú prezentované v Tabuľke 5.

V Tabuľke 6 sú zobrazené výsledky jednotlivých použitých modelov pre maďarskú populáciu. Maximálnu mediánovú hodnotu logaritmu funkcie vierohodnosti dosiahol model M7B. Za ním nasledoval model M8B a model M6B. Pri modeli M8B sme odhadovali až 199 parametrov, čo výrazne zhoršilo jeho poradie na základe BIC kritéria. Vysoký počet odhadovaných parametrov pri modeli M7B nezhoršilo poradie tohto modelu na základe BIC kritéria a umiestnil sa ako najvhodnejší model. Druhý najvhodnejší bol model M6B.

Najbližšie hodnoty opisných charakteristík k požadovaným má model M7B. V prípade p-hodnôt testov a korelačných testov má pre testy o nulovej strednej hodnote a korelačné

Tabuľka 4: Výsledky modelov pre českú populáciu

CZE, 1960-2019	Porovnanie odhadnutých modelov pomocou mediánu hodnôt logaritmickej funkcie vierohodnosti (LogLik), mediánu Bayesovho informačného kritéria (BIC) a poradi v rámci skupiny použitých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Mediánová LogLik hodnota	-6244,74	-3165,94	-2928,98	-3013,90	-2983,47	-3028,05	-2983,47	-2786,13	-2701,72	-2785,75
Počet parametrov	78	155	159	126	129	130	159	150	179	199
Mediánové BIC	-6456,03	-3585,43	-3360,90	-3358,81	-3337,70	-3385,39	-3415,39	-3205,61	-3195,78	-3341,96
Poradie podľa mediánového BIC	10	9	6	5	3	7	8	2	1	4
Priemerné poradie	10,00	7,58	5,70	5,15	4,88	5,85	7,25	1,75	1,63	5,23

CZE, 1960-2019	Opisné charakteristiky odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Aritmetický priemer	2,7846	0,2158	0,1811	-0,4409	-0,0813	0,2627	-0,1040	-0,0215	0,0026	-0,0140
Variancia	39,9401	3,4164	2,2868	5,0814	2,8005	4,1364	3,0288	1,7707	0,7963	1,7538
Koeficient šikmosti	0,3025	0,4143	0,4328	-0,9699	-0,0928	0,2129	-0,2937	0,0159	0,1198	0,0006
Koeficient špicatosti	3,4956	4,7259	4,3361	5,2902	3,4812	4,5049	3,9400	3,2891	3,3155	3,3373

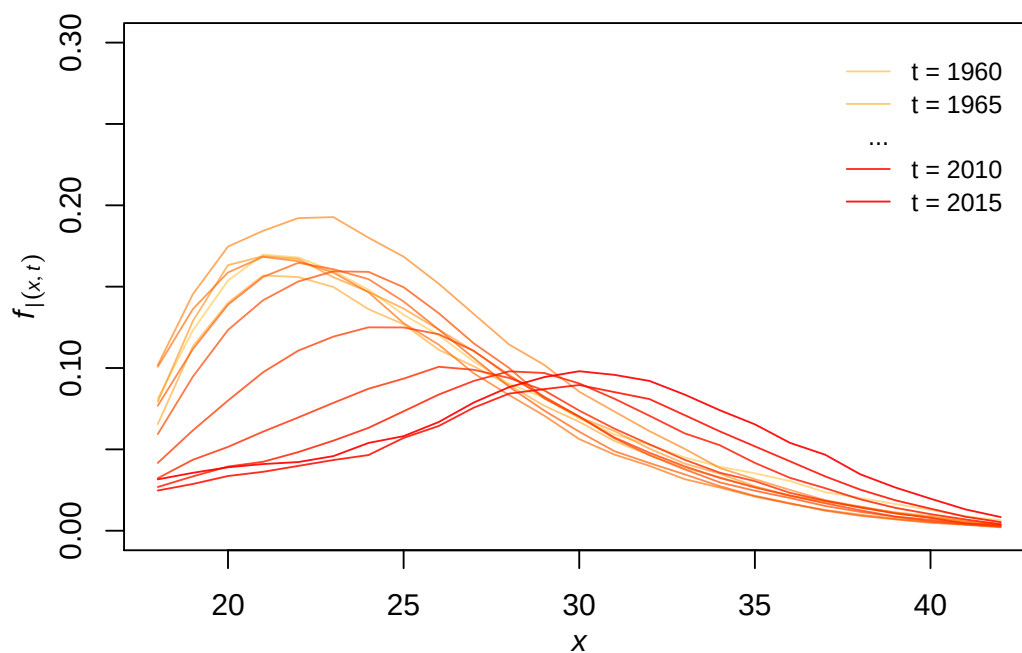
CZE, 1960-2019	P-hodnota testov o nulovej strednej hodnote v matici odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Jednovýberový t-test	< 0,0001	0,0002	0,0002	< 0,0001	0,1248	< 0,0001	0,0592	0,6090	0,9276	0,7389
Wilcoxonov jednovýberový test	< 0,0001	0,0042	0,0039	< 0,0001	0,1433	0,0001	0,1355	0,4458	0,8871	0,5939

CZE, 1960-2019	P-hodnota testov o jednotkovej variancii v matici odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Chi-kvadrát test	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001

CZE, 1960-2019	P-hodnota testov normality pre odhadnuté rezíduá jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
JB	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0065	< 0,0001	< 0,0001	0,1565	0,0390	0,0825
AJB	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0085	< 0,0001	< 0,0001	0,1535	0,0355	0,0795
ShW	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0250	< 0,0001	< 0,0001	0,0159	0,0199	0,0087
KS norm	0,0698	0,0011	0,0016	< 0,0001	0,4303	0,0098	0,2300	0,0574	0,1710	0,0578
KS norm(0; 1)	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0002	0,0207	< 0,0001

CZE, 1960-2019	Percentuálny podiel štatisticky významných korelácií medzi odhadnutými rezíduami na hladine									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Cez veky	100,00%	95,83%	87,50%	91,67%	95,83%	95,83%	95,83%	70,83%	4,17%	62,50%
Cez roky	100,00%	25,64%	15,38%	64,10%	64,10%	48,72%	66,67%	43,59%	2,56%	38,46%

(zdroj: vlastné spracovanie)



Obr. 6: Vývoj špecifickej miery plodnosti v Maďarsku (zdroj: vlastné spracovanie na základe dát z HFD [5])

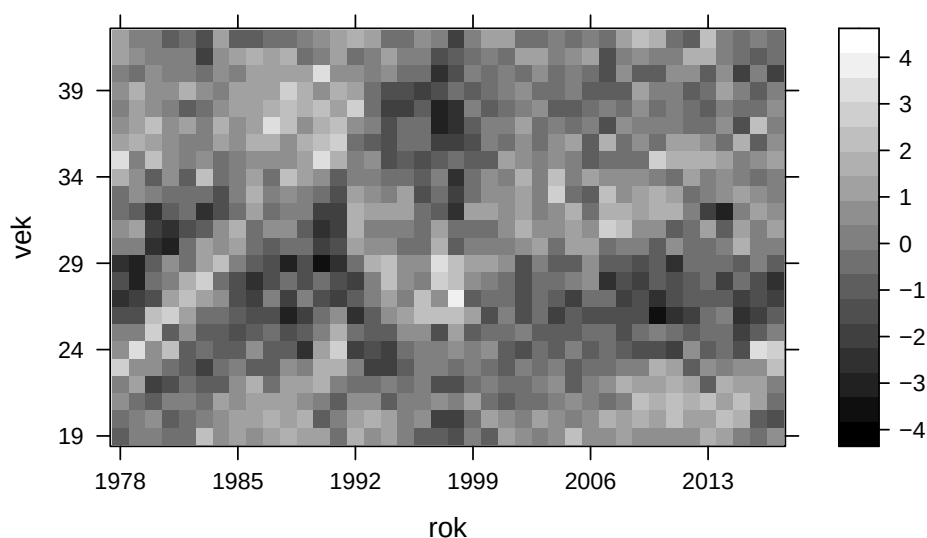
Tabuľka 5: Hodnoty úhrnnej plodnosti v maďarskej populácii v rokoch 1961, ..., 2020

1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
1,939	1,795	1,825	1,822	1,831	1,899	2,027	2,081	2,052	1,989
1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
1,941	1,940	1,942	2,288	2,366	2,250	2,168	2,078	2,018	1,915
1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
1,882	1,806	1,761	1,774	1,874	1,869	1,854	1,846	1,838	1,868
1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
1,875	1,776	1,687	1,642	1,571	1,458	1,377	1,327	1,284	1,321
2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
1,310	1,303	1,272	1,276	1,307	1,340	1,316	1,348	1,322	1,250
2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
1,258	1,338	1,341	1,412	1,441	1,496	1,496	1,487	1,492	1,563

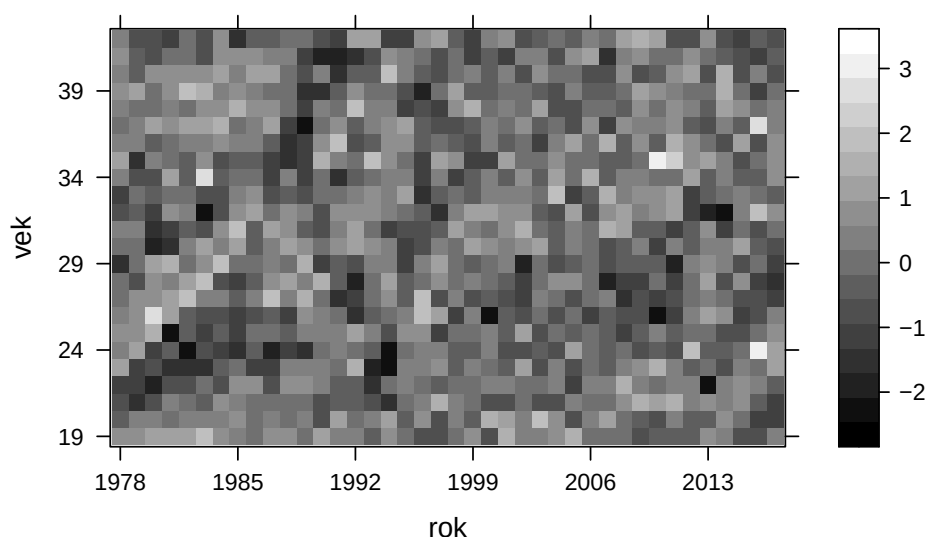
(zdroj: vlastné spracovanie na základe dát z HFD [5])

testy hodnoty nad bežne používanými hladinami významnosti model M7B. Model M6B má zas výrazne lepšie hodnoty pre testy normality. Pri pohľade na tepelné mapy môžeme

pri modeli M6B, zobrazené na Obr. 7, pozorovať mierne zhluky a výraznejšie diagonály, čo nám potvrdzujú aj výsledky pre korelácie cez veku a roky. Preto z pohľadu na tepelné mapy nám model M7B, zobrazený na Obr. 8, vychádza ako vhodnejší. Celkovo, pre maďarskú populáciu, vyhodnocujeme model M6B a model M7B ako rovnako vhodný model.



Obr. 7: Tepelná mapa rezíduí modelu M6B pre maďarskú populáciu (*zdroj: vlastné spracovanie*)



Obr. 8: Tepelná mapa rezíduí modelu M7B pre maďarskú populáciu (*zdroj: vlastné spracovanie*)

Tabuľka 6: Výsledky modelov pre maďarskú populáciu

HUN, 1958-2017	Porovnanie odhadnutých modelov pomocou mediánu hodnôt logaritmickej funkcie vierohodnosti (LogLik), mediánu Bayesovho informačného kritéria (BIC) a poradi v rámci skupiny použitých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Mediánová LogLik hodnota	-6431,09	-3104,23	-2976,50	-3266,55	-3167,23	-3118,84	-3167,23	-2738,18	-2662,24	-2736,55
Počet parametrov	78	155	159	126	129	130	159	150	179	199
Mediánové BIC	-6642,39	-3523,72	-3408,42	-3611,46	-3521,47	-3476,18	-3599,15	-3157,66	-3156,30	-3292,76
Poradie podľa mediánového BIC	10	7	4	9	6	5	8	2	1	3
Priemerné poradie	10,00	6,53	4,90	7,08	5,55	5,53	7,40	1,80	1,63	4,60

HUN, 1958-2017	Opisné charakteristiky odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Aritmetický priemer	0,5428	0,1974	0,0322	-0,1622	-0,0139	-0,0993	0,0388	0,0724	0,0251	0,0764
Variancia	34,0091	3,9027	2,7387	5,2949	3,2940	3,6367	3,3355	1,4306	0,6891	1,3488
Koeficient šikmosti	-0,5598	-0,2859	0,3444	-0,5426	0,2729	0,2066	0,2552	-0,0182	0,0152	0,0316
Koeficient špicatosti	3,4574	5,7788	6,3800	4,3196	3,5032	3,9963	3,5375	3,1510	3,3719	3,1842

HUN, 1958-2017	P-hodnota testov o nulovej strednej hodnote v matici odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Jednovýberový t-test	0,0033	0,0016	0,5390	0,0260	0,8086	0,0999	0,5014	0,0559	0,3391	0,0379
Wilcoxonov jednovýberový test	< 0,0001	0,0001	0,7175	0,2870	0,4698	0,0520	0,8248	0,0588	0,2740	0,0671

HUN, 1958-2017	P-hodnota testov o jednotkovej variancii v matici odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Chí-kvadrát test	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001

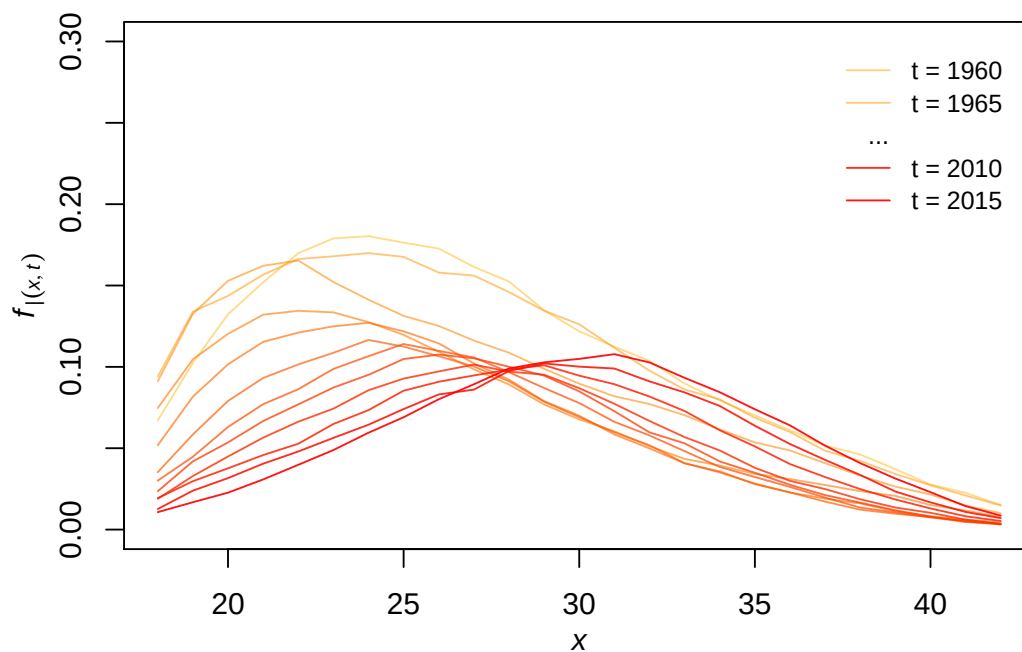
HUN, 1958-2017	P-hodnota testov normality pre odhadnuté rezíduá jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
JB	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0015	< 0,0001	< 0,0001	0,5840	0,0460	0,4230
AJB	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,5890	0,0425	0,4075
ShW	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,2643	0,0290	0,1808
KS norm	0,0238	0,0121	0,0017	0,0031	0,0206	0,0963	0,0134	0,2967	0,1316	0,1333
KS norm(0; 1)	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0004	0,0019	0,0017

HUN, 1958-2017	Percentuálny podiel štatisticky významných korelácií medzi odhadnutými rezíduami na hladine									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Cez veky	100,00%	95,83%	91,67%	95,83%	83,33%	95,83%	83,33%	62,50%	12,50%	54,17%
Cez roky	100,00%	30,77%	30,77%	66,67%	71,79%	58,97%	71,79%	43,59%	7,69%	41,03%

(zdroj: vlastné spracovanie)

3.5 Rakúska populácia

Z vývoju špecifickej miery plodnosti pre rakúsku populáciu, zobrazená na Obr. 9, môžeme vidieť, že od roku 1960 dochádzalo k jej postupnému poklesu. V súčasnosti sa maximálna hodnota špecifickej miery plodnosti dosahuje pri veku žien 32 rokov.

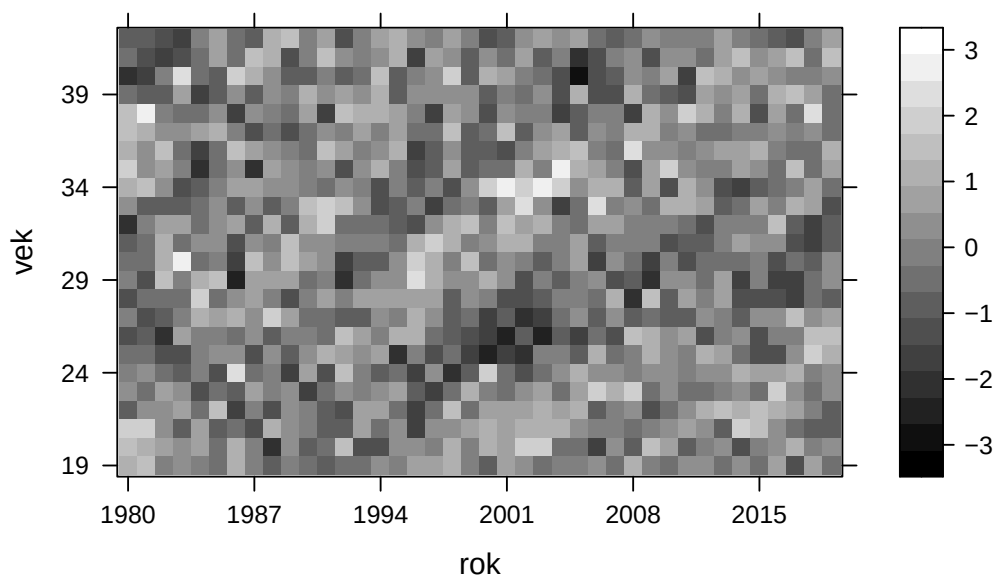


Obr. 9: Vývoj špecifickej miery plodnosti v Rakúsku (zdroj: vlastné spracovanie na základe dát z HFD [5])

Hodnota úhrnnej plodnosti pre rakúsku populáciu klesla z hodnoty 2,8 v roku 1962 na 1,44 v roku 2020. V súčasnosti teda pripadá na jednu ženu v reprodukčnom veku 1,44 dieťaťa. Všetky hodnoty úhrnnej plodnosti pre rakúsku populáciu sú uvedené v Tabuľke 7.

V Tabuľke 8 sú zobrazené výsledky jednotlivých použitých modelov pre rakúsku populáciu. Najväčšiu maximálnu mediánovú hodnotu logaritmu funkcie vierohodnosti dosiahol v prípade rakúskej populácie model M7B, no nakoľko v prípade tohto modelu odhadujeme 179 parametrov, v prípade poradia v rámci BIC hodnoty sa umiestnil až na 4. mieste. S hodnotou logaritmu funkcie vierohodnosti rovnou $-2\,659,99$, BIC hodnotou rovnou $-3\,079,48$ nám prípade rakúskej populácie ako najvhodnejší model vyšiel model M6B. Opisné charakteristiky tohto modelu taktiež dosahujú približne požadované hodnoty. P-hodnoty testov rezíduí modelu M6B sú nad hladinou významnosti, kedy položenú hypotézu o normalite nezamietame. Tepelná mapa modelu M6B pre rakúsku populáciu je zobrazená na Obr. 10. Na tepelnej mape rezíduí modelu nie sú viditeľné zhľuky

ani pravidelné formy či diagonály. Odhadnuté rezíduá pohybujú medzi hodnotami -3 až 3 . Na základe vizuálneho posúdenia tepelnej mapy rezíduí modelu M6B pre rakúsku populáciu „hypotézu“ o nezávislosti odhadnutých rezíduí nezamietame.



Obr. 10: Tepelná mapa rezíduí modelu M6B pre rakúsku populáciu (zdroj: vlastné spracovanie)

Tabuľka 7: Hodnoty úhrnnej plodnosti v rakúskej populácii v rokoch 1961, ..., 2020

1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
2,786	2,800	2,821	2,795	2,703	2,663	2,621	2,586	2,488	2,292
1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
2,200	2,085	1,938	1,908	1,827	1,688	1,631	1,604	1,598	1,652
1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
1,674	1,661	1,559	1,522	1,474	1,449	1,432	1,447	1,446	1,457
1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
1,507	1,505	1,501	1,465	1,423	1,446	1,393	1,370	1,340	1,364
2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
1,331	1,394	1,376	1,419	1,408	1,409	1,385	1,417	1,396	1,443
2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
1,431	1,440	1,436	1,464	1,491	1,530	1,518	1,475	1,461	1,440

(zdroj: vlastné spracovanie na základe dát z HFD [5])

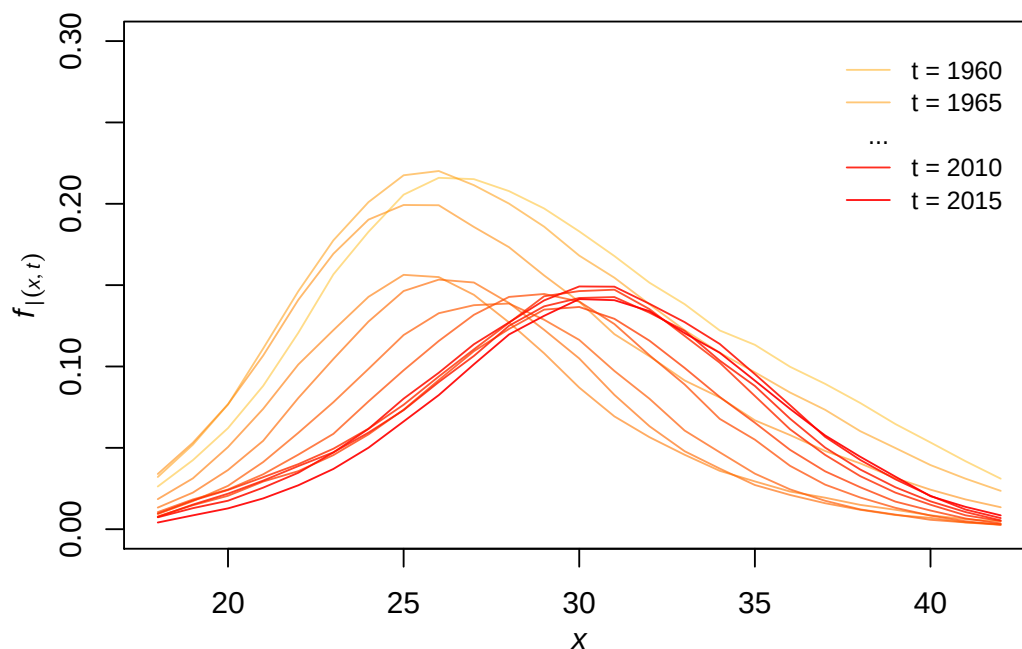
Tabuľka 8: Výsledky modelov pre rakúsku populáciu

AUT, 1960-2019	Porovnanie odhadnutých modelov pomocou mediánu hodnôt logaritmickej funkcie vierohodnosti (LogLik), mediánu Bayesovho informačného kritéria (BIC) a poradí v rámci skupiny použitých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Mediánová LogLik hodnota	-3618,93	-2850,90	-2761,98	-2825,32	-2728,59	-2747,69	-2737,04	-2659,99	-2616,28	-2658,80
Počet parametrov	78	155	159	126	129	130	159	150	179	199
Mediánové BIC	-3830,22	-3270,38	-3193,89	-3170,23	-3082,82	-3105,03	-3168,96	-3079,48	-3110,34	-3215,00
Poradie podľa mediánového BIC	10	9	7	6	2	3	5	1	4	8
Priemerné poradie	10,00	7,68	5,95	4,90	3,18	4,03	6,28	2,18	3,65	7,18
AUT, 1960-2019										
model	Opisné charakteristiky odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Aritmetický priemer	0,6857	0,0547	0,1371	0,1096	0,0351	0,0356	0,0417	0,0194	0,0232	0,0394
Variancia	14,3131	1,9465	1,5843	1,6501	1,5550	1,8800	1,5322	0,8864	0,5602	0,9018
Koeficient šikmosti	-0,3308	-0,1678	0,0585	0,1209	0,1492	0,2507	0,2060	0,0476	0,2173	-0,0139
Koeficient špicatosti	3,7930	5,5661	7,1915	3,1940	3,4040	4,0135	3,4271	2,9392	3,0073	2,9844
AUT, 1960-2019										
model	P-hodnota testov o nulovej strednej hodnote v matici odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Jednovýberový t-test	< 0,0001	0,2153	0,0006	0,0071	0,3741	0,4115	0,2870	0,5150	0,3278	0,1899
Wilcoxonov jednovýberový test	< 0,0001	0,2021	0,0049	0,0222	0,6040	0,8382	0,5462	0,5265	0,7764	0,1551
AUT, 1960-2019										
model	P-hodnota testov o jednotkovej variancii v matici odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Chi-kvadrát test	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0086	< 0,0001	0,0240
AUT, 1960-2019										
model	P-hodnota testov normality pre odhadnuté rezíduá jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
JB	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,1195	0,0110	< 0,0001	0,0020	0,7675	0,0200	0,9790
AJB	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,1165	0,0120	< 0,0001	0,0010	0,7745	0,0255	0,9810
ShW	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0157	0,0059	< 0,0001	0,0030	0,4089	0,0046	0,4566
KS norm	0,0020	0,0017	0,0080	0,2351	0,1128	0,0136	0,2230	0,1770	0,0415	0,1329
KS norm(0; 1)	< 0,0001	< 0,0001	0,0009	< 0,0001	0,0010	0,0005	0,0014	0,0428	< 0,0001	0,0062
AUT, 1960-2019										
model	Percentuálny podiel štatisticky významných korelácií medzi odhadnutými rezíduami na hladine významnosti 0,01									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Cez veky	100,00%	75,00%	70,83%	79,17%	75,00%	62,50%	75,00%	12,50%	0,00%	12,50%
Cez roky	94,87%	15,38%	5,13%	20,51%	41,03%	23,08%	38,46%	12,82%	5,13%	10,26%

(zdroj: vlastné spracovanie)

3.6 Holandská populácia

V Holandsku, narozdiel od ostatných sledovaných populácií, ženy už v roku 1960 rodili vo vyššom veku, čo sa prejavilo na grafe vývoju špecifickej miery plodnosti maximom pre vek 26 rokov. V ostatných sledovaných populáciách krivka špecifickej miery plodnosti dosahovala maximum v roku 1960 pre 22–24 ročné ženy. Vývoj špecifickej miery plodnosti pre holandskú populáciu je zobrazený na Obr. 11.

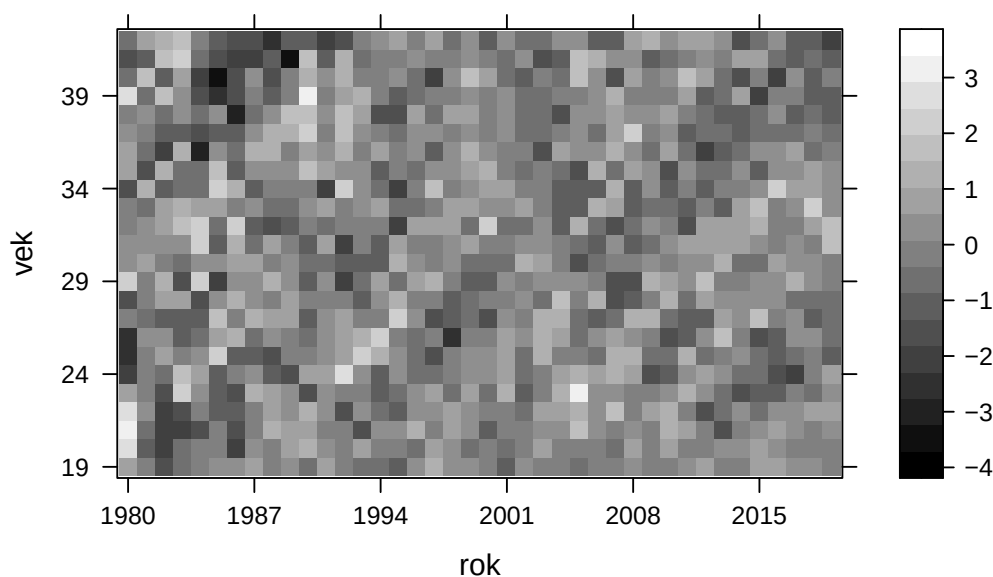


Obr. 11: Vývoj špecifickej miery plodnosti v Holandsku (zdroj: vlastné spracovanie na základe dát z HFD [5])

Úhrnná plodnosť v holandskej populácii bola v roku 1961 rovná 3,217, čo predstavovalo viac ako tri živonarodené deti na jednu ženu v reprodukčnom veku. V súčasnosti, v roku 2020, je úhrnná plodnosť na hodnote 1,55. Všetky hodnoty úhrnnej plodnosti pre holandskú populáciu sú uvedené v Tabuľke 9.

V Tabuľke 10 sú zobrazené výsledky jednotlivých použitých modelov pre holandskú populáciu. Maximálnu mediánovú hodnotu logaritmu funkcie vierohodnosti rovnú $-2852,48$ dosiahol model s označením M7B. Pri tomto modeli sme odhadovali 179 parametrov, no to neovplyvnilo vhodnosť modelu na základe porovnania BIC kritéria. Model M7B s BIC rovnou $-3346,54$ nám vyšiel ako najvhodnejší pre holandskú populáciu. P-hodnoty testov o nulovej strednej hodnote, jednotkovej variancii a normalite odhadnutých rezíduí boli nad bežne používanou hladinou významnosti, kedy hypotézu o normalite ne-

zamietame. Tepelná mapa modelu M7B je zobrazená na Obr. 12. Odhadnuté rezíduá pohybujú medzi hodnotami -4 až 4 .



Obr. 12: Tepelná mapa rezíduí modelu M7B pre holandskú populáciu (zdroj: vlastné spracovanie)

Tabuľka 9: Hodnoty úhrnnej plodnosti v holandskej populácii v rokoch 1961, ..., 2020

1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
3,217	3,175	3,192	3,165	3,038	2,901	2,812	2,713	2,746	2,570
1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
2,360	2,149	1,903	1,773	1,664	1,632	1,580	1,584	1,563	1,603
1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
1,564	1,496	1,468	1,492	1,512	1,553	1,558	1,545	1,554	1,617
1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
1,612	1,587	1,572	1,569	1,531	1,529	1,562	1,628	1,652	1,722
2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
1,710	1,731	1,747	1,726	1,709	1,721	1,718	1,774	1,791	1,796
2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
1,760	1,723	1,679	1,713	1,658	1,663	1,619	1,586	1,574	1,550

(zdroj: vlastné spracovanie na základe dát z HFD [5])

Tabuľka 10: Výsledky modelov pre holandskú populáciu

NLD, 1960-2019	Porovnanie odhadnutých modelov pomocou mediánu hodnôt logaritmickej funkcie vierohodnosti (LogLik), mediánu Bayesovho informačného kritéria (BIC) a poradí v rámci skupiny použitých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Mediánová LogLik hodnota	-5691,23	-3613,38	-3076,58	-3518,86	-3257,41	-3377,79	-3241,25	-2946,65	-2852,48	-2950,59
Počet parametrov	78	155	159	126	129	130	159	150	179	199
Mediánové BIC	-5902,52	-4032,86	-3508,49	-3863,77	-3611,64	-3735,13	-3673,17	-3366,13	-3346,54	-3506,79
Poradie podľa mediánového BIC	10	9	4	8	5	7	6	2	1	3
Priemerné poradie	10,00	8,10	4,15	6,73	5,30	5,90	6,45	2,23	1,40	4,75

NLD, 1960-2019	Opisné charakteristiky odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Aritmetický priemer	0,8234	-0,0558	0,0469	-0,2427	0,0384	0,1835	0,0366	0,0307	-0,0247	0,0532
Variancia	80,8826	5,8437	2,7152	4,3385	3,8084	4,9071	3,6366	2,0520	0,8980	1,9826
Koeficient šikmosti	0,6144	0,2821	0,3970	0,1178	-0,0420	-0,2544	-0,0609	0,0870	0,0293	-0,0248
Koeficient špicatosti	4,8785	5,6762	7,6773	3,3644	2,8791	3,9767	3,1131	3,6538	3,5862	3,5765

NLD, 1960-2019	P-hodnota testov o nulovej strednej hodnote v matici odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Jednovýberový t-test	0,0039	0,4658	0,3687	0,0002	0,5336	0,0089	0,5445	0,4983	0,4095	0,2324
Wilcoxonov jednovýberový test	0,0497	0,0259	0,4529	0,0001	0,4766	0,0050	0,4419	0,6651	0,4351	0,1757

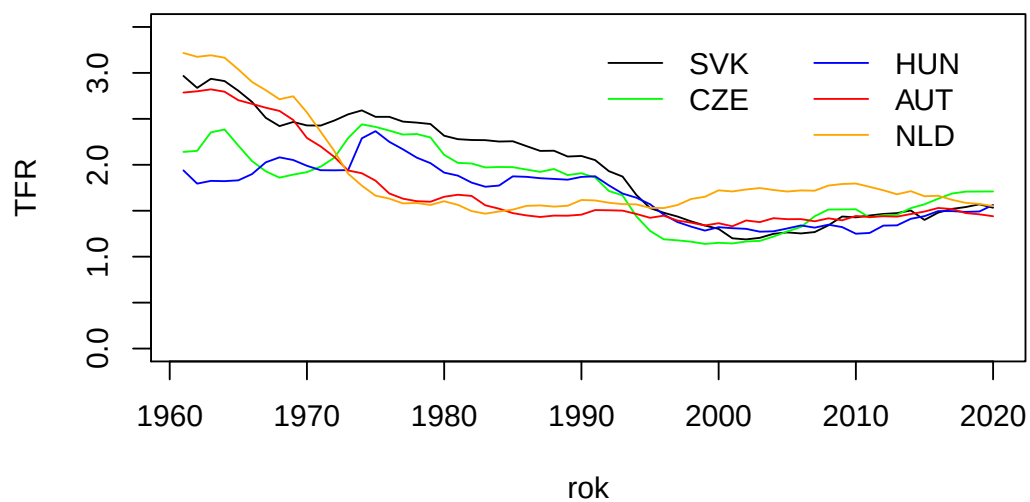
NLD, 1960-2019	P-hodnota testov o jednotkovej variancii v matici odhadnutých rezíduí jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Chi-kvadrát test	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0189	< 0,0001

NLD, 1960-2019	P-hodnota testov normality pre odhadnuté rezíduá jednotlivých modelov									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
JB	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0230	0,6290	< 0,0001	0,5450	< 0,0001	0,0045	0,0030
AJB	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0275	0,6365	< 0,0001	0,5310	0,0010	0,0030	0,0055
ShW	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0465	0,1666	< 0,0001	0,0602	0,0003	0,0022	0,0004
KS norm	< 0,0001	< 0,0001	0,0012	0,2671	0,2465	0,1382	0,1174	0,0695	0,0771	0,0560
KS norm(0; 1)	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0100	< 0,0001

NLD, 1960-2019	Percentuálny podiel štatisticky významných korelácií medzi odhadnutými rezíduami na hladine významnosti 0,01									
model	M1A	M2A	M2B	M3A	M3B	M4B	M5B	M6B	M7B	M8B
Cez veky	100,00%	79,17%	70,83%	91,67%	95,83%	95,83%	95,83%	79,17%	25,00%	75,00%
Cez roky	100,00%	18,21%	20,51%	69,23%	3,81%	43,59%	74,36%	43,59%	7,69%	48,72%

(zdroj: vlastné spracovanie)

Porovnanie vývoju úhrnnej plodnosti v rámci všetkých piatich sledovaných populácií je zobrazené na Obr. 13.



Obr. 13: Vývoj úhrnnej plodnosti v sledovaných populáciách v rokoch 1961, ..., 2020 (zdroj: vlastné spracovanie na základe dát z HFD [5])

4 Predikovanie vekovo špecifickej miery plodnosti

V tejto kapitole si predstavíme spôsob predikovania špecifickej miery plodnosti, ktorý sme použili v našej práci. Ďalej si uvedieme výsledky krátkodobej predikcie pre slovenskú populáciu. Predikcia špecifickej miery plodnosti je komplikovaná, nakoľko tehotenstvo môže nastať viackrát za život ženy a výrazne ho ovplyvňujú rôzne exogénne faktory (ekonomické, spoločenské, sociálne, náboženské a pod.).

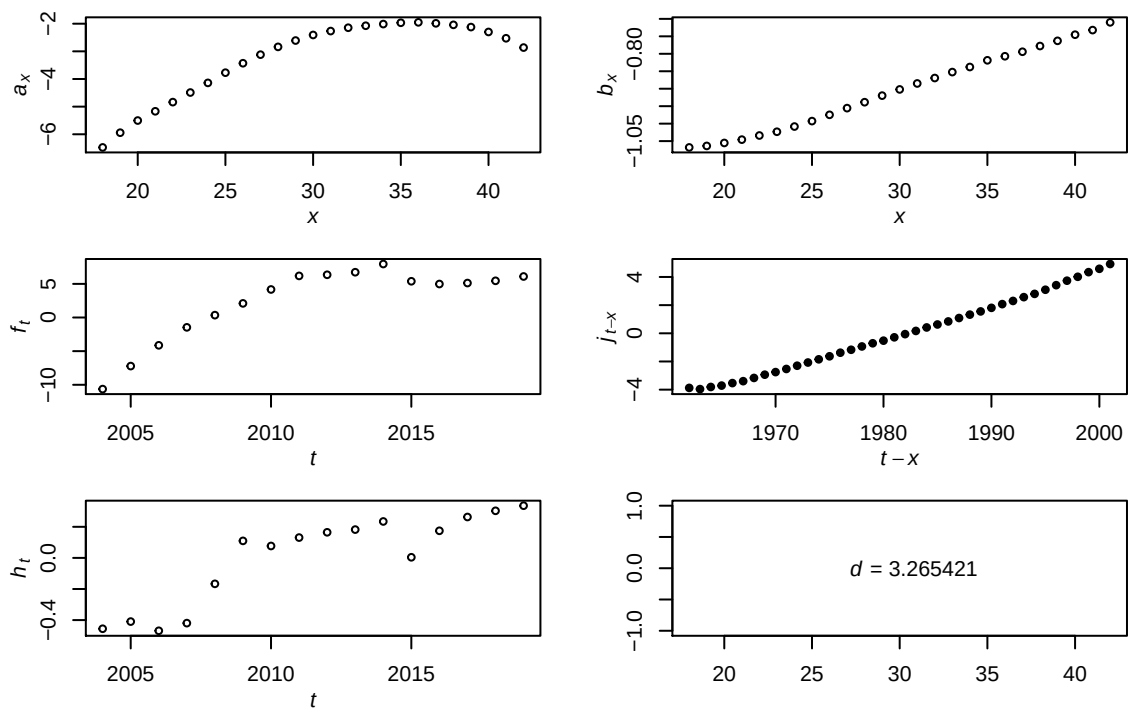
4.1 Odhadovanie parametrov modelov

Na základe výsledkov uvedených v podkapitole 3.2 vieme, že ako najvhodnejší model pre popísanie špecifickej miery plodnosti pre slovenskú populáciu vyšiel model s označením M6B. Postup odhadovania parametrov sme použili rovnaký ako bol predstavený v podkapitole 2.4. Obdobie rokov, na ktorom sme parametre odhadovali, sme nastavili v rozmedzí rokov 2004, 2005, ..., 2019. Pre získanie odhadov parametrov modelov sme použili softvér R [11]. Hodnoty odhadnutých parametrov pre vekovo špecifické parametre a_x , b_x pre $x = 18, 19, 20, \dots, 42$, časovo špecifické parametre f_t , h_t pre $t = 2004, 2005, 2006, \dots, 2019$, kohortný parameter j_{t-x} a hodnota skalárneho parametra d modelu M6B sú zobrazené na Obr. 14.

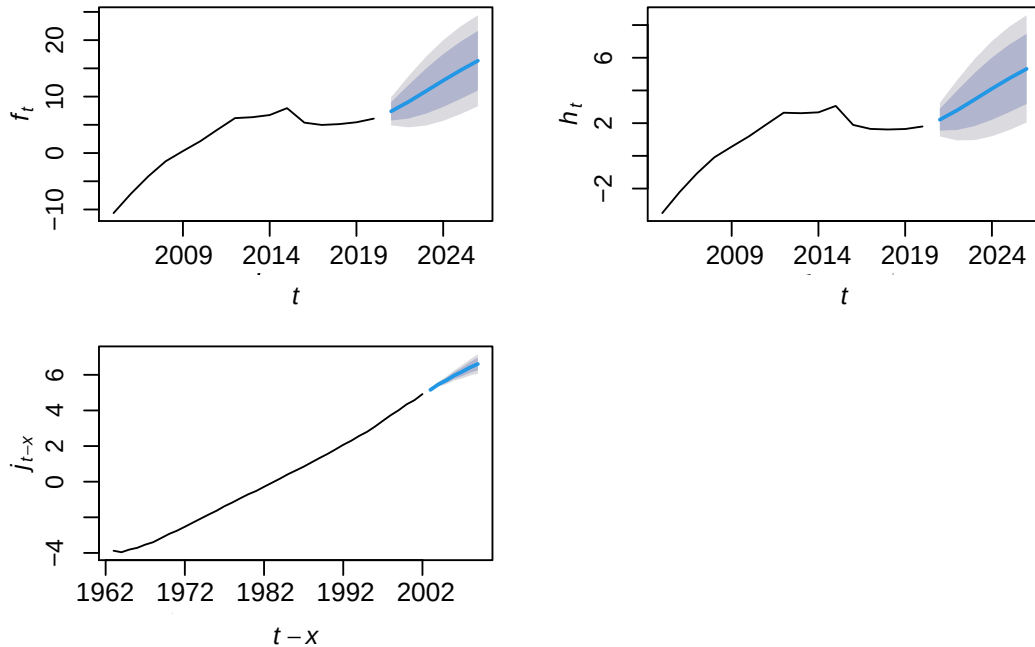
4.2 Predikovanie budúcich špecifických mier plodnosti

Pre predikovanie budúcich hodnôt špecifickej miery plodnosti v slovenskej populácii sme použili softvér R [11], konkrétne balík `demography` [14] a funkcie `iarima()`, `forecast()`. Predikovali sme časovo špecifické parametre f_t , h_t a kohortný parameter j_{t-x} . Časovo špecifické parametre f_t , h_t sme predikovali spoločne, ako dvojrozmerný časový rad, pomocou automatickej funkcie `iarima()`. Následne, pomocou odhadnutého modelu sme vytvorili predikcie pomocou automatickej funkcie `forecast()` pre budúce obdobie rokov 2020, 2021, ..., 2025. Predikcie parametrov f_t , h_t a j_{t-x} modelu M6B označené modrou čiarou a 80-percentné resp. 90-percentné predikčné intervaly pre hodnoty uvedených parametrov (znázornené sivými pásmi) sú zobrazené na Obr. 15.

Použitím odhadnutých predikovaných hodnôt parametrov, za predpokladu, že v ženskej populácii pôsobia nulové miery úmrtnosti, sme vypočítali vekovo špecifickú mieru

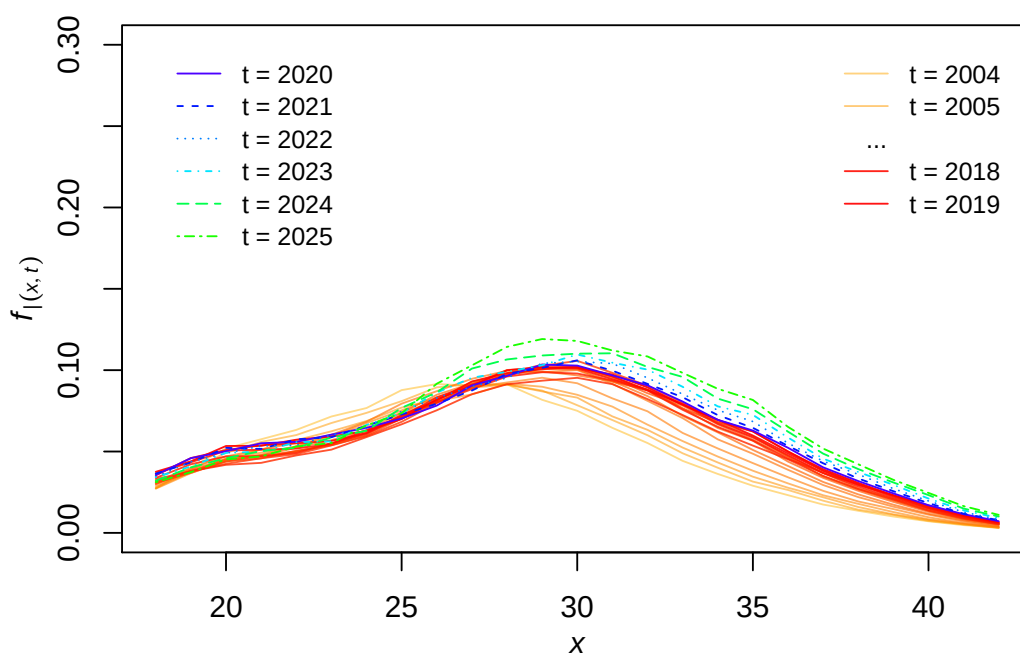


Obr. 14: Hodnoty odhadnutých parametrov modelu M6B na dátach v rozmedzí rokov 2004, 2005, ..., 2019 (zdroj: vlastné spracovanie)



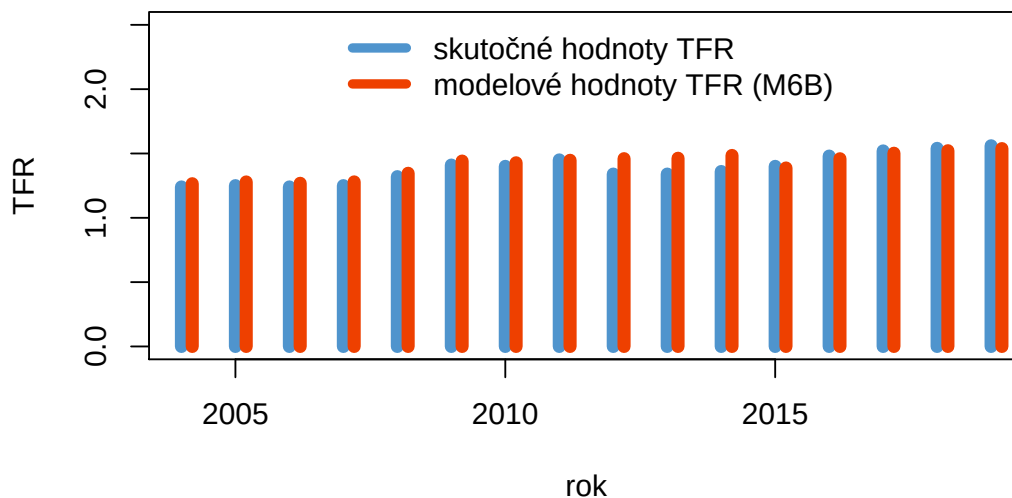
Obr. 15: Odhady parametrov modelu M6B, ich predpovedané hodnoty pre roky 2020, ..., 2025 a ich 80-percentné resp. 90-percentné predikčné intervaly (zdroj: vlastné spracovanie)

plodnosti pre roky 2020, 2021, ..., 2025, ktorú sme normovali populačnými početnosťami. Modelová špecifická miera plodnosti pre roky 2004, 2005, ..., 2019 pre slovenskú populáciu vo veku 18, 19, ..., 42 a predikcie vývoju špecifickej miery plodnosti pre roky 2020, 2021, ..., 2025 sú zobrazené na Obr. 16. Na Obr. 16 pozorujeme, že naše predikcie na najbližších 5 rokov nepredpokladajú výrazný posun vo veku, v ktorom špecifická miera plodnosti nadobúda maximálne hodnoty. Rovnako nepredpokladáme výrazný nárast alebo pokles špecifickej miery plodnosti v slovenskej populácii.



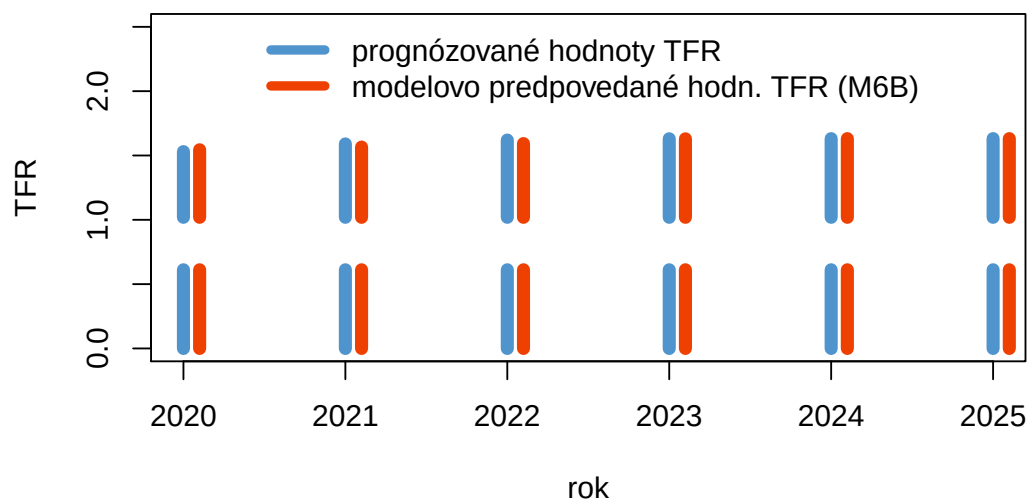
Obr. 16: Modelová špecifická miera plodnosti pre roky 2004, 2005, ..., 2019 a predikovaná špecifická miera plodnosti pre roky 2020, 2021, ..., 2025 (zdroj: vlastné spracovanie)

Pre overenie správnosti modelových hodnôt modelu M6B sme vypočítali modelové hodnoty úhrnnej plodnosti, ktoré sme vzhľadom na upravený vekový interval 18, 19, ..., 42 rokov zvýšili o 5 bázičných bodov v každom veku. Tieto hodnoty sme porovnali so skutočnými hodnotami úhrnnej plodnosti za roky 2004, 2005, ..., 2019, ktoré sú dostupné na stránke Infostatu [18]. Porovnanie modelovej a skutočnej úhrnnej plodnosti je zobrazené na Obr. 17. Je možné pozorovať, že skutočné a modelové hodnoty úhrnnej plodnosti sú približne rovnaké. Môžeme teda tvrdiť, že náš model dostatočne presne zachytáva celkovú úroveň plodnosti v slovenskej populácii.



Obr. 17: Porovnanie skutočných úhrnných plodností a úhrnných plodností vypočítaných modelovými hodnotami modelu M6B (zdroj: vlastné spracovanie na základe vypočítaných dát a dát z Infostatu [18])

Následne sme vypočítali hodnotu úhrnnej plodnosti na základe predikovaných hodnôt a tie porovnali s predikovanými hodnotami úhrnnej plodnosti pre roky 2020, ..., 2025, ktoré sú uverejnené v článku [15]. Úhrnnú plodnosť, ktorú sme vypočítali na základe nami predikovaných hodnôt, sme zvýšili o 5 základných bodov v každom roku z dôvodu rôzneho vekového intervalu, pre ktorý bola úhrnná plodnosť počítaná. Porovnanie je zobrazené na Obr. 18. Pozorujeme, že nami predikované úhrnné plodnosti a úhrnné plodnosti z článku [15] sú takmer identické. Na základe tohto porovnania môžeme naše predikcie považovať za použiteľné.



Obr. 18: Porovnanie predikovaných hodnôt úhrnných plodností z článku [15] a nami predikovaných úhrnných plodností (zdroj: *vlastné spracovanie na základe vypočítaných dát a dát z článku [15]*)

5 Poistné produkty pre budúce matky dostupné na slovenskom trhu

Podľa údajov Štatistického úradu Slovenskej republiky [17] celkový stredný stav žien na Slovensku vo vekovom rozpätí 15 až 49 rokov bola v roku 2020 na úrovni 1 275 265. Za predpokladu zachovania mier úmrtnosti pozorovaných v roku 2020 v ženskej populácii na Slovensku a nulového migračného salda vo vekovom intervale 15 až 49 rokov bude mať celkový stredný stav žien (v spomínanej vekovej skupine) mierne klesajúcu tendenciu. Úhrnný počet 15- až 49-ročných žien by sa mal pohybovať niekde medzi hodnotami 1 270 000 a 1 208 000.

V predchádzajúcej kapitole sme uviedli, že úhrnná plodnosť a špecifické miery plodnosti na Slovensku sa v priebehu nadchádzajúcich rokov (s pomerne vysokou pravdepodobnosťou) nebudú výrazne meniť, pričom môžu mať mierne rastúcu tendenciu. Celkovo teda môžeme očakávať, že absolútne počty pôrodov do roku 2025 budú pomerne stabilné a budú sa pohybovať v blízkosti súčasne pozorovaných hodnôt, t. j. zhruba medzi 56 000 až 58 000 pôrodov ročne.

Odkladanie tehotenstva do vyššieho veku môže priniesť pre matku aj pre dieťa zvýšené riziká. Poistenie slúži ako možnosť finančného zabezpečenia v prípade neočakávaných životných situácií. K takýmto situáciám patrí aj rizikové tehotenstvo či pôrodné alebo popôrodné komplikácie. V zákone č. 39/2015 Z. z. o poisťovníctve a o zmene a doplnení niektorých zákonov a jej prílohe č. 1 (klasifikácia poistných odvetví podľa poistných druhov, časť B – poistné odvetvia životného poistenia) je vymedzených niekoľko poistných odvetví, v ktorých môžu podnikáť poisťovne. S našim výskumom čiastočne súvisí bod 2. *Poistenie pre prípad narodenia dieťaťa, poistenie prostriedkov na výživu a poistenie pre prípad uzavretia manželstva*. Podľa orgánu dohľadu nad poisťovníctvom na Slovensku v poistnom odvetví časti B, číslo 2 môžu ku dňu 5.5.2022 podnikáť nasledovné poisťovne so sídlom na území Slovenska [13]:

- Allianz - Slovenská poisťovňa, a.s.,
- ČSOB Poisťovňa, a.s.,
- KOMUNÁLNA poisťovňa, a.s. Vienna Insurance Group,
- KOOOPERATIVA poisťovňa, a.s. Vienna Insurance Group,

- Union poisťovňa, a.s.,
- Wüstenrot poisťovňa, a.s.

Dopĺňame, že k 1. februáru 2022 na Slovensku celkovo pôsobilo 10 poisťovní so sídlom na území Slovenska, ďalších 18 poisťovní vo forme pobočky poisťovne z iného členského štátu a ďalších 571 poisťovní z iných členských štátov Európskej únie vykonávajúce činnosť na Slovensku na základe slobody poskytovania služieb. [13]

Na trhu existuje niekoľko typov životných poistení. Klasické životné poistenia v rámci tehotenstva kryjú predovšetkým práceneschopnosť, či hospitalizáciu, ktorá je spôsobená rizikovým tehotenstvom. Allianz - Slovenská poisťovňa ponúka komerčný poistný produkt Šťastný Život, kde zo životného poistenia matky môžu byť kryté aj prípady súvisiace s tehotenstvom. [1]

Medzi poisťovne, ktoré podnikajú na Slovensku formou pobočky poisťovne z iného členského štátu, patrí aj Generali poisťovňa. Táto poisťovňa ponúka poistný produkt s názvom *La Vita*, ktorý kryje riziká aj v týchto troch oblastiach [4]:

- tehotenské, pôrodné a popôrodné komplikácie,
- vážne ženské operácie a vybrané ochorenia,
- narodenia dieťaťa s vrodenou chybou – vážna vrodená chyba, nárok na plnenie je aj v prípade, ak je vrodená chyba diagnostikovaná už počas pôrodu.

Budúce matky sa môžu poistiť aj na diaľku (napr. cez internet) v zahraničnej poisťovni, vykonávajúcej činnosť v SR, ktorá ponúka komplexné krytie všetkých možných prípadov súvisiacich s budúcim tehotenstvom a pôrodom. Ponuky týchto poisťovní sme v rámci našej práce neskúmali.

Záver

V našej práci sme sa venovali hľadaniu najvhodnejšieho stochastického modelu, ktorý popisuje špecifickú mieru plodnosti vo vybraných populáciách. Základné teoretické poznatky a definície z demografickej štatistiky sme uviedli v prvej kapitole. V druhej kapitole sme predstavili našu motiváciu modelovania a popísali modely, ktorými sme špecifickú mieru plodnosti modelovali. Ďalej sme uviedli spôsoby, akými sme vyhodnocovali kvalitu a efektivitu modelov.

Pri hľadaní najvhodnejšieho stochastického modelu pre špecifickú mieru plodnosti sme vychádzali zo základného Leeho modelu. Parametre tohto modelu majú peknú interpretáciu. Modely vyššieho rádu, ktoré sme dostali pridávaním rôznych kombinácií časových, vekových a kohortných parametrov, už takú jasnú interpretáciu nemajú, nakoľko dochádza k rozloženiu ich efektov. Podarilo sa nám však v našom výskume ukázať, že aj napriek veľmi vysokému počtu parametrov týchto modelov a strate ich interpretácie je potrebnú používať práve takéto komplexnejšie konštrukcie. Problémom základného Leeho modelu bolo, že trojica jeho parametrov nedokázala zachytiť niektoré časti informácie, ktoré sa v dátach skrývajú. Časť informácie zostala vo zvyškovom člene, ktorý by však pri tomto type modelu mal mať charakteristiku náhodného bieleho šumu. Pri Leeho modeli sme ukázali, že tomu tak nie je a zvyškový člen obsahoval veľa informácie. Práve preto sa ukázalo ako potrebné rozšíriť Leeho model o ďalšie vektory parametrov, ktorými je túto informáciu možné zachytiť. Takýto rozšírený a vhodne nastavený model sa dá potom používať napríklad pri predikovaní budúcich špecifických mier plodnosti.

Pri predikovaní je potrebné správne zvoliť obdobie, na ktorom kalibrujeme náš model. Navyše, modelmi nedokážeme zachytiť širší kontext, ktorý sa vzťahuje na proces ľudskej plodnosti. Môže sa preto stať, že predikované špecifické miery plodnosti dosiahnu nereálne hodnoty.

Pre nami zvolené krajiny – Slovensko, Česko, Maďarsko, Rakúsko a Holandsko – sa nám podarilo nájsť modely, ktoré zachytávajú vývoj špecifickej miery plodnosti v týchto populáciách. Model, ktorý vyšiel ako najvhodnejší pre slovenskú populáciu, sme použili na krátkodobú predikciu. Podarilo sa nám predikovať vývoj špecifickej miery plodnosti pre obdobie piatich rokov, nakoľko predikcie na dlhšie obdobie dosahovali hodnoty, ktoré podľa nášho posúdenia nezodpovedali možnému budúcemu vývoju.

Zoznam použitej literatúry

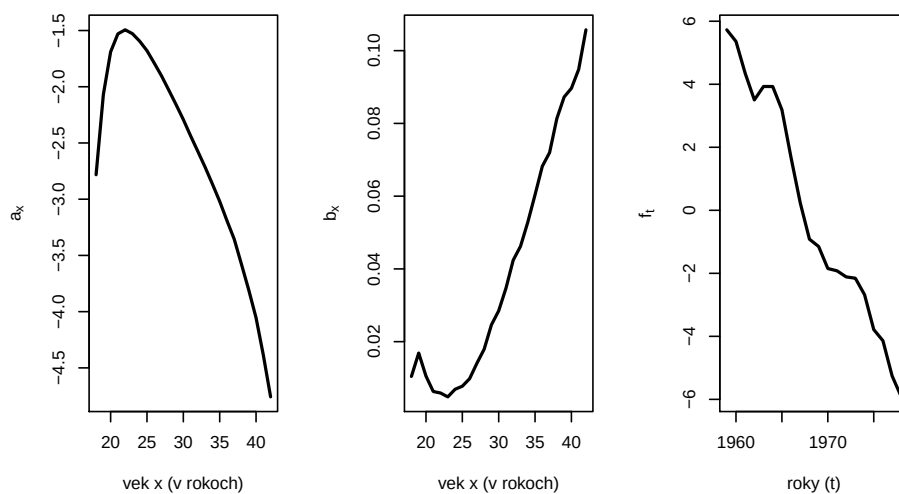
- [1] Allianz [online]. *Poistné podmienky pre program Šťastný život* . [cit. 04.05.2022] Dostupné na adrese: https://www.allianz.sk/content/dam/onemarketing/cee/azsk/Zivot/C5A1C5A5astnC3BD-C5BEivot/ALLIANZ-Stastny-zivot-PP2BOT-01-2-2kor_final.pdf.
- [2] Brisudová, M.: *Aktuárske modelovanie mier úmrtnosti vo vysokých vekoch*. Diplomová práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, Bratislava, 2019.
- [3] Dowd, K., Cairns, A., Blake, D., Coughlan, G., Epstein, D., Khalaf-Allah, M.: Evaluating the Goodness of Fit of Stochastic Mortality Models. *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 47, 2010, pp. 255–265.
- [4] Generali [online]. *Životné poistenie La Vita* . [cit. 04.05.2022] Dostupné na adrese: https://www.generali.sk/wp-content/uploads/2020/10/VPP-LAaVita-START_2020.pdf.
- [5] HFD [online]. *The Human Fertility Database*. [cit. 15.02.2022] Dostupné na adrese: <https://www.humanfertility.org/>.
- [6] Infostat.sk [online]. *Rozšírené tabuľky základných údajov SR*. INFOSTAT – Inštitút informatiky a štatistiky, Výskumné demografické centrum (VDC), Demografické údaje. [cit. 15.02.2022] Dostupné na adrese: http://www.infostat.sk/vdc/sk/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=13&Itemid=58.
- [7] Jurčová, D.: *Slovník demografických pojmov*, INFOSTAT – Inštitút informatiky a štatistiky, Výskumné demografické centrum, Edícia: Akty, Bratislava, 2005, ISBN 80-85659-40-9. Dostupné na adrese: http://www.infostat.sk/vdc/pdf/slovník_2verdd.pdf.
- [8] Lee, R. D.: *Modeling and forecasting the time series of US fertility: Age distribution, range, and ultimate level*, Journal of the American Statistical Association, vol. 87, no. 419, 1993, pp. 659–671. Dostupné na adrese: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0169207093900047>.

- [9] Lee, R. D., Carter, L. R.: Modeling and Forecasting U. S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 87, no. 419, 1992, pp. 659–671.
- [10] Microsoft Corporation [online]. *Excel help & learning*. [cit. 15.02.2022] Dostupné na adrese: <https://support.microsoft.com/en-us/excel>.
- [11] R Core Team: *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2020. [cit. 15.02.2022] Dostupné na adrese: <https://www.R-project.org/>.
- [12] RDocumentation [online]. *Website of the RDocuementation*. [cit. 05.01.2022] Dostupné na adrese:
<https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.2/topics/optim>.
- [13] NBS [online]. *Subjekty finančného trhu*. Webové sídlo Národnej banky Slovenska, Dohľad nad finančným trhom, Zoznamy subjektov, Poistovníctvo. [cit. 04.05.2022] Dostupné na adrese: <https://subjekty.nbs.sk/?s=985>.
- [14] RDocumentation [online]. *Website of the RDocuementation*. [cit. 05.01.2022] Dostupné na adrese: <https://cran.r-project.org/web/packages/demography/demography.pdf>.
- [15] Sivašová, D.: *Aplikácia demografických prognóz na analýzu pôrodnosti*, Ekonomika a informatika, vol. 19, no. 2, 2021, pp. 95. Dostupné na adrese:
<https://www.ei.fhi.sk/index.php/EAI/article/view/248>.
- [16] Šprocha, B., Tišliar, P.: *Transformácia plodnosti žien Slovenska v 20. a na začiatku 21. storočia*, Historický atlas obyvateľstva Slovenska (18. – 1. pol. 20. storočia), ISBN 978-80-89881-02-4, 2016, pp. 19. Dostupné na adrese:
<http://www.infostat.sk/vdc/pdf/transformacia.pdf>.
- [17] ŠÚ SR [online]. *Úmrtnostné tabuľky (roky 1996 - 2020) – Slovenská republika*. Webové sídlo Štatistického úradu Slovenskej republiky, Štatistiky, Obyvateľstvo a migrácia, Ukazovatele, Tabuľky života. [cit. 03.05.2022] Dostupné na adrese:
<http://www.statistics.sk/>.
- [18] VDC [online]. *Prierezové tabuľky plodnosti pre Slovenskú republiku, INFOSTAT – Inštitút informatiky a štatistiky, Výskumné demografické centrum*. [cit. 24.04.2022] Dostupné na adrese: <http://www.infostat.sk/vdc/pdf/TabulkyplodnostiSR.pdf>.

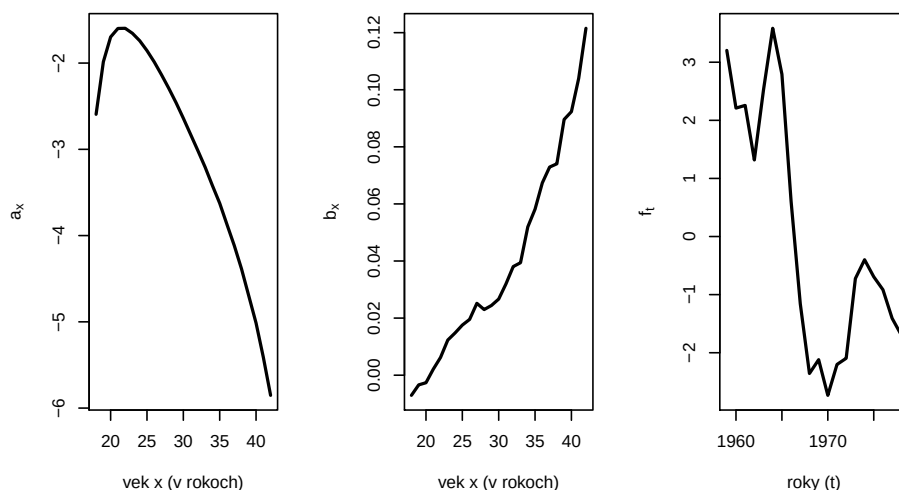
Prílohy

Príloha A.

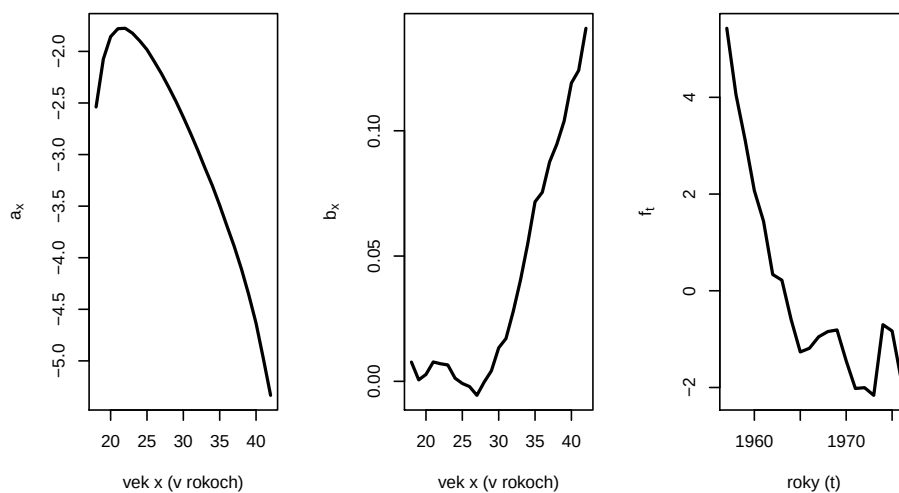
Vizualizácia odhadnutých vekovo špecifických parametrov a_x , b_x pre $x \in \{18, 19, \dots, 42\}$ a časovo premenlivých dynamických faktorov f_t pre $t \in \{1960, 1961, \dots, 2019\}$ Leeiho modelu použitých ako štartovacie hodnoty pre odhadovanie parametrov modelov pre sledované populácie:



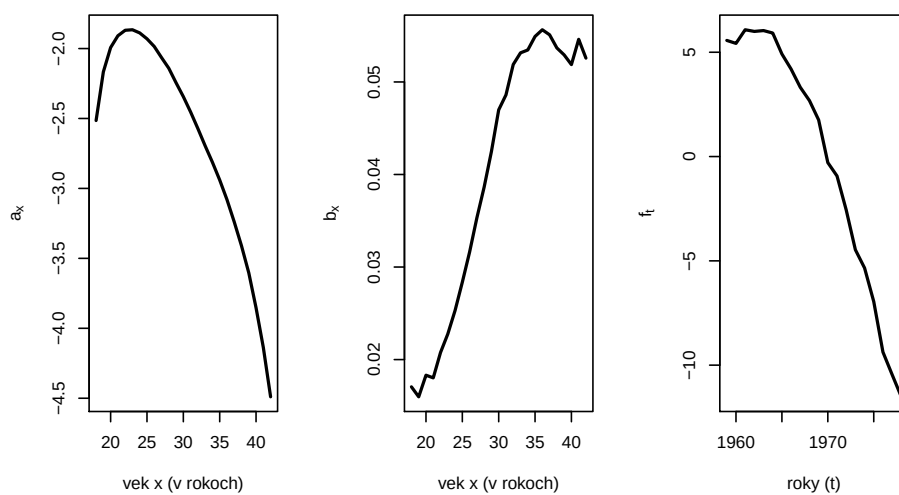
Obr. 19: Grafické znázornenie odhadnutých parametrov Leeiho modelu v prípade slovenskej populácie (zdroj: vlastné spracovanie v softvéri R [11])



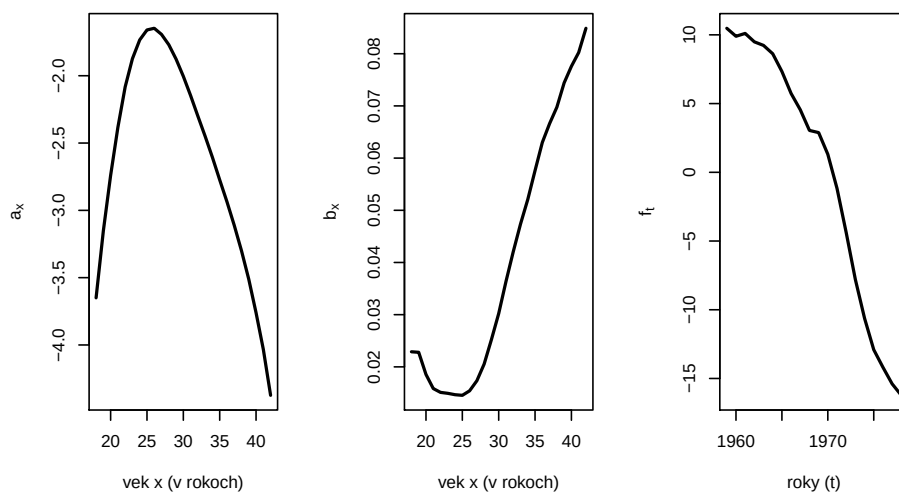
Obr. 20: Grafické znázornenie odhadnutých parametrov Leeiho modelu v prípade českej populácie (zdroj: vlastné spracovanie v softvéri R [11])



Obr. 21: Grafické znázornenie odhadnutých parametrov Leeho modelu v prípade maďarskej populácie (zdroj: *vlastné spracovanie v softvéri R* [11])



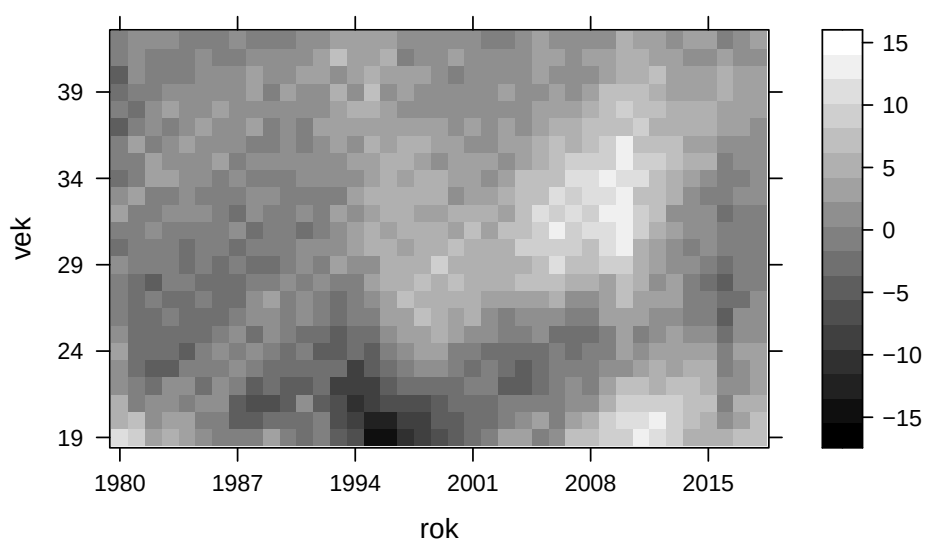
Obr. 22: Grafické znázornenie odhadnutých parametrov Leeho modelu v prípade rakúskej populácie (zdroj: *vlastné spracovanie v softvéri R* [11])



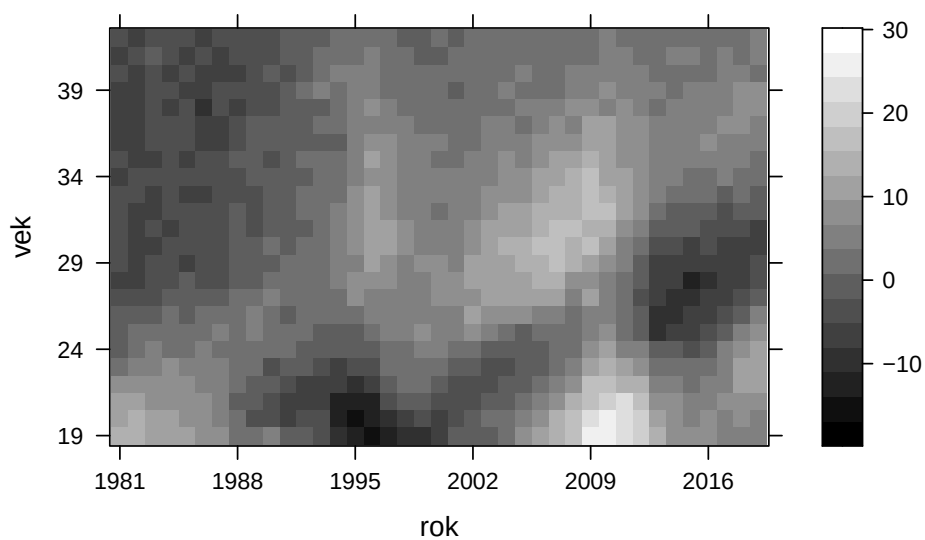
Obr. 23: Grafické znázornenie odhadnutých parametrov Leeho modelu
v prípade holandskej populácie (*zdroj: vlastné spracovanie v softvéri R [11]*)

Príloha B.

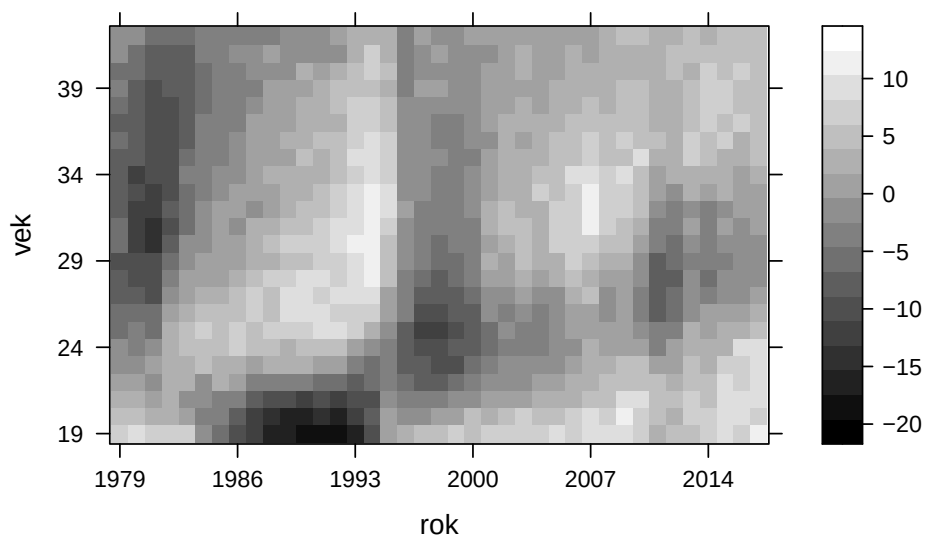
Tepelné mapy rezíduí modelu M1A pre všetky sledované populácie.



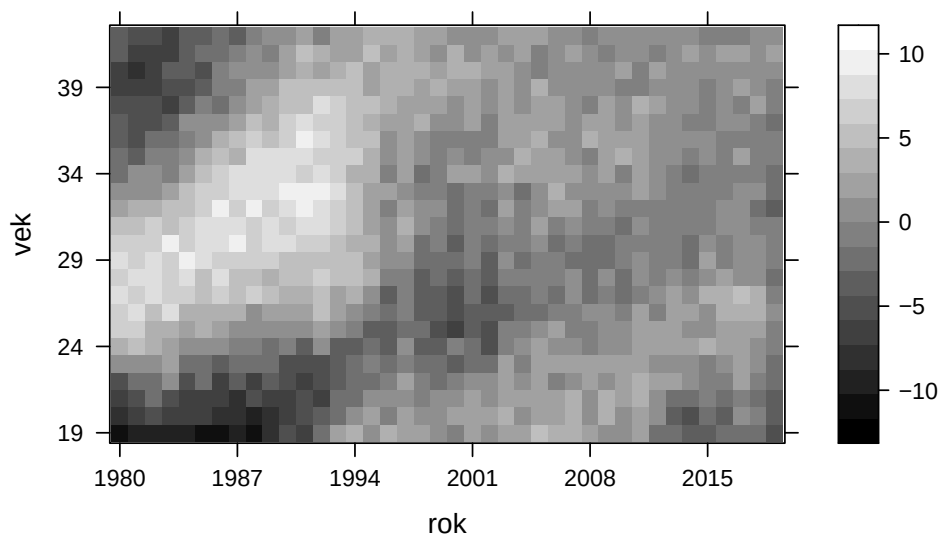
Obr. 24: Tepelná mapa rezíduí modelu M1A pre slovenskú populáciu (zdroj: *vlastné spracovanie v softvéri R [11]*)



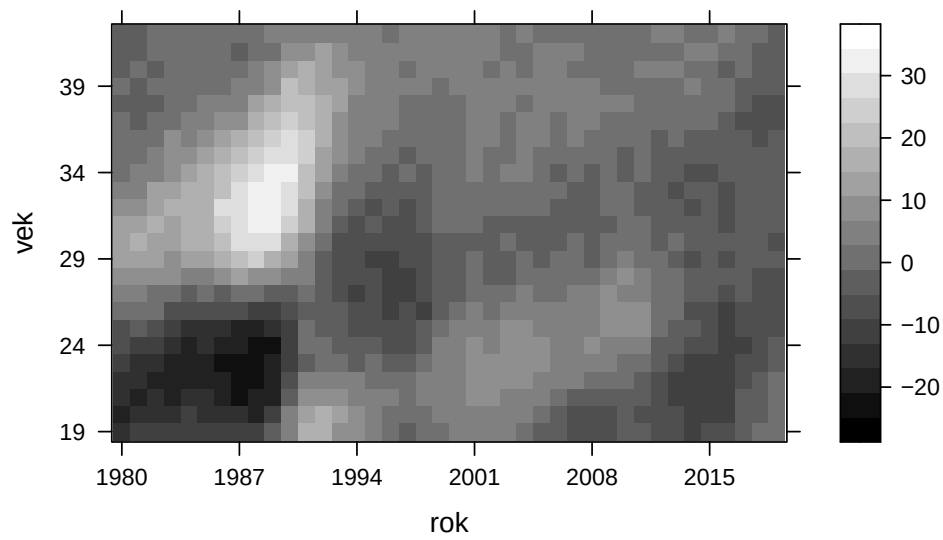
Obr. 25: Tepelná mapa rezíduí modelu M1A pre českú populáciu (zdroj: *vlastné spracovanie v softvéri R [11]*)



Obr. 26: Tepelná mapa rezíduí modelu M1A pre maďarskú populáciu (*zdroj: vlastné spracovanie v softvéri R [11]*)



Obr. 27: Tepelná mapa rezíduí modelu M1A pre rakúsku populáciu (*zdroj: vlastné spracovanie v softvéri R [11]*)



Obr. 28: Tepelná mapa rezíduí modelu M1A pre holandskú populáciu (*zdroj: vlastné spracovanie v softvéri R [11]*)