

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



SYSTÉMY HROMADNEJ OBSLUHY S RÔZNYMI TYPMI
ZÁKAZNÍKOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**SYSTÉMY HROMADNEJ OBSLUHY S RÔZNYMI TYPMI
ZÁKAZNÍKOV**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: Matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Katarína Janková, CSc



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Klára Chabroňová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Systémy hromadnej obsluhy s rôznymi typmi zákazníkov
Queueing systems with different types of customers

Anotácia: Základné systémy hromadnej obsluhy predpokladajú jeden tok zákazníkov, pričom zákazníci prichádzajúci do systému sa správajú rovnakým spôsobom. V realite zákazníci netvorí homogénnu skupinu, každého možno charakterizovať viacerými parametrami, napríklad dobou obsluhy, ktorú vyžaduje alebo časom, ktorý je v systéme ochotný zotrvať. V práci sa budeme zaoberať vybranými systémami s rôznymi typmi zákazníkov, pričom sa sústredíme na výpočet stacionárneho rozdelenia analyticky alebo pomocou simulácií.

Vedúci: doc. RNDr. Katarína Janková, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
Dátum zadania: 11.01.2022

Dátum schválenia: 14.01.2022
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať doc. RNDr. Kataríne Jan-
kovej za ochotu, pomoc a mnoho cenných rád pri vedení tejto diplomovej práce.

Abstrakt v štátnom jazyku

CHABROŇOVÁ, Klára: Systémy hromadnej obsluhy s rôznymi typmi zákazníkov [Diplo-mová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informa-tiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, školiteľ: doc. RNDr. Katarína Janková, CSc, Bratislava, 2023, 64 s.

V tejto práci rozoberáme problematiku systémov hromadnej obsluhy s rôznymi typmi zákazníkov, pričom sa na tieto systémy pozeráme diskkrétne. Cieľom je reagovať na fakt, že v realite zákazníci prichádzajúci do systému netvoria homogénnu skupinu, ale na základe ich charakteristických vlastností ich možno zaradiť do viacerých skupín. Diskrét-ným pohľadom na takéto systémy zároveň reagujeme na zvyšujúcu sa digitalizáciu vo svete. V práci sa najskôr budeme venovať základnej teórii hromadnej obsluhy. Následne oboznámime čitateľa s jednoduchým systémom hromadnej obsluhy s diskrétnym časom, zostavíme všeobecný matematický model, analyticky odvodíme jeho stacionárne rozdele-nie a uvedieme príklady konkrétnych diskrétnych modelov. V ďalšej časti práce do nášho všeobecného modelu zahrnieme predpoklad nehomogénnej skupiny zákazníkov v systéme, pričom sa opäť zameriame na analytické odvodenie stacionárneho rozdelenia a rôznych výkonnostných parametrov. V závere práce uvedieme numerické výpočty stacionárneho rozdelenia pre rôzne hodnoty parametrov. Okrem toho budeme pomocou simulácií sledo-vať, ako dochádza k ustáleniu pravdepodobnostného rozdelenia stavu systému hromadnej obsluhy s dvoma typmi zákazníkov pre rôzne hodnoty parametrov. Na simulácie a nume-rické výpočty budeme využívať softvér R.

Kľúčové slová: teória hromadnej obsluhy, Markovove reťazce, vytvárajúce funkcie, stacionárne rozdelenie, Bernoulliho rozdelenie

Abstract

CHABROŇOVÁ, Klára: Queueing systems with different types of customers [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Katarína Janková, CSc, Bratislava, 2023, 64 p.

In this paper, we examine the issue of queueing systems with different types of customers, with a discrete approach to analyzing such systems. The goal is to address the fact that customers in real systems do not form a homogeneous group, but can be categorized into multiple groups based on their characteristic traits. The discrete approach also responds to the increasing digitalization in the world. We first focus on the fundamental theory of queueing systems. We then introduce the reader to a simple queueing system with discrete time, construct a general mathematical model, derive its steady-state distribution analytically, and provide examples of specific discrete models. In the next part of the paper, we incorporate the assumption of a non-homogeneous customer group in the system into our general model, again focusing on the analytical derivation of the steady-state distribution and various performance parameters. Finally, we present numerical calculations of the stationary distribution for different parameter values. In addition, using simulations, we observe how the probability distribution of the state of a queueing system with two types of customers behaves for different parameter values. We use R software for simulations and numerical calculations.

Keywords: queueing theory, Markov chains, probability generating functions, steady-state distribution, Bernoulli distribution

Obsah

Úvod	8
1 Jednoduchý úvod do teórie hromadnej obsluhy	10
1.1 Teória hromadnej obsluhy	10
1.1.1 Základné parametre SHO	11
1.1.2 Kendallova klasifikácia úloh THO	13
1.1.3 Výkonnostné parametre	14
1.2 Markovove reťazce	14
2 Úvod do systémov hromadnej obsluhy s diskretným časom	16
2.1 SHO s diskretným časom	16
2.2 $GI/G/1$ model	18
2.2.1 Matematický model	18
2.2.2 Stacionárne rozdelenie	21
2.2.3 Výkonnostné parametre	24
2.3 Konkrétne diskretné modely	28
2.3.1 Diskrétna analógia $M/M/1$ modelu	28
2.3.2 Diskrétna analógia $M/G/1$ modelu	33
3 Systémy HO s dvoma typmi zákazníkov	37
3.1 Základná charakteristika systému	38
3.2 Matematický model	39
3.3 Analýza systému	40
3.3.1 Obsadenosť systému v čase odchodu ľubovoľného zákazníka	40
3.3.2 Obsadenosť systému na začiatku ľubovoľného slotu	47
3.3.3 Výkonnostné parametre	48
4 Numerické výpočty a simulácie	50
4.1 Numerické výpočty pre diskretný model	50
4.1.1 Správanie systému vzhľadom na meniacu sa λ	51
4.1.2 Správanie systému vzhľadom na meniacu sa α	53
4.2 Numerické výpočty pre spojitý model	54

4.3 Simulácie procesu	56
Záver	59
Zoznam použitej literatúry	61

Úvod

Systémy hromadnej obsluhy sú dôležitou súčasťou modernej spoločnosti, pretože umožňujú efektívne a rýchlo spracovať veľké množstvo žiadostí či objednávok nie len v oblasti služieb, ale rovnako aj v priemyselnej výrobe, pri prenose dát či v mnohých ďalších odvetviach. Takéto systémy sú založené na matematických modeloch, ktoré umožňujú predpovedať a optimalizovať správanie systému v závislosti od predchádzajúcich potrieb a výkonu jednotlivých častí systému. Medzi príklady systémov hromadnej obsluhy patrí napríklad vybavovanie obsluhy pri pokladni v supermarkete, riadenie dopravy na križovatkách, riadenie výrobných procesov, určovanie kapacity letísk či riadenie distribúcie poštových zásielok. Využitie systémov hromadnej obsluhy môže viesť k významnému zlepšeniu efektivity práce, zníženiu nákladov, čo je dôležité nie len pre prevádzkovateľa služieb, ale aj pre spotrebiteľa. Dlhé čakanie vo fronte totiž vyvoláva v zákazníkoch pocity nervozity a nepohodlia, a tak je v záujme oboch strán tento čas čo najviac minimalizovať. Významnými osobnosťami, ktoré sa v minulosti venovali skúmaniu týchto systémov boli napríklad A.K. Erlang [7], [8], A.J.Chinčín, F. Pollaczek, D.G.Kendall [12] či J.Kingman [13].

Základné systémy hromadnej obsluhy však predpokladajú homogénnu skupinu zákazníkov. V realite sa ale často stretávame s prípadmi, kedy zákazníkov možno rozdeliť do viacerých skupín. Tie sa navzájom môžu líšiť napríklad dobou obsluhy, ochotou zotrvať v systéme, naliehavosťou požiadavky či prioritou, s akou musia byť jednotliví zákazníci obslužení. Systémy HO, ktoré predpokladajú viaceré typy zákazníkov, sú navrhnuté s ohľadom na tieto rozdiely a umožňujú nám tak efektívnejšiu obsluhu zákazníkov s rôznymi potrebami a požiadavkami. Príkladmi takýchto systémov sú napríklad letiská, v ktorých sa nachádzajú rôzne triedy cestujúcich či zdravotnícke zariadenia, v ktorých je potrebné najskôr riešiť naliehavé prípady, ale zároveň zabezpečiť rovnaké práva na čakanie pre všetkých pacientov.

Väčšina modelov systémov hromadnej obsluhy bola v 90. rokoch 20. storočia založená na spojitom čase. Diskrétné modely boli často využívané len ako aproximácie týchto spojitých modelov. So zvyšujúcou sa mierou digitalizácie vo svete a prechodu z analógových technológií na digitálne však začína čoraz viac rásť záujem pozerieť sa niektoré systémy, akými sú napríklad telekomunikačné systémy, ako na systémy HO s diskretným časom. Tie

sa od spojitých líšia tým, že požiadavky zákazníkov prichádzajú v diskretných časových intervaloch.

V tejto diplomovej práci, ktorú sme rozdelili do 4 kapitol sa budeme venovať systémom hromadnej obsluhy s rôznymi typmi zákazníkov, pričom sa na tieto systémy budeme pozeráť diskretné. V prvej kapitole vysvetlíme základnú teóriu hromadnej obsluhy. Oboznámime sa so základnými pojmi, vlastnosťami či fungovaním systémov hromadnej obsluhy. Zároveň si v stručnosti zhrnieme teóriu Markovových procesov, ktorých porozumenie je kľúčové vzhľadom na to, že sú ústredným bodom teórie hromadnej obsluhy. Najviac budeme vychádzať z [11], [22] a [18]. V druhej kapitole sa oboznámime s jednoduchými systémami hromadnej obsluhy s diskretným časom. Vysvetlíme si charakteristické vlastnosti takýchto systémov, predstavíme si všeobecný diskretný model a odvodíme jeho stacionárne rozdelenie, pričom najviac budeme vychádzať z článkov [2] a [3]. Na záver kapitoly uvedieme aj niektoré konkrétne diskretné analógie spojitých modelov. Pri ich odvádzaní budeme najviac vychádzať z článkov [4] a [14]. V tretej kapitole sa pozrieme na systémy hromadnej obsluhy s dvoma typmi zákazníkov, pričom stále budem predpokladať diskretný čas. Vysvetlíme rôzne prístupy ku analýze takýchto systémov, zastavíme všeobecný matematický model, odvodíme stacionárne rozdelenie a rôzne ďalšie výkonnostné parametre takéhoto systému. Najviac budeme vychádzať z článku [20]. V poslednej kapitole sa budeme venovať numerickým výpočtom stacionárneho rozdelenia odvodeného v 3. kapitole. Okrem toho uvedieme stochastické simulácie a budeme sledovať, ako v danom modeli dochádza k ustáleniu systému pre rôzne hodnoty parametrov. Na numerické výpočty a simulácie budeme využívať softvér *R*.

1 Jednoduchý úvod do teórie hromadnej obsluhy

V tejto kapitole sa budeme venovať všeobecnej teórii hromadnej obsluhy. Oboznámime sa so základnými pojmami, delením, charakteristikami či fungovaním systémov hromadnej obsluhy. Najviac budeme vychádzať z [11], [22] a [18].

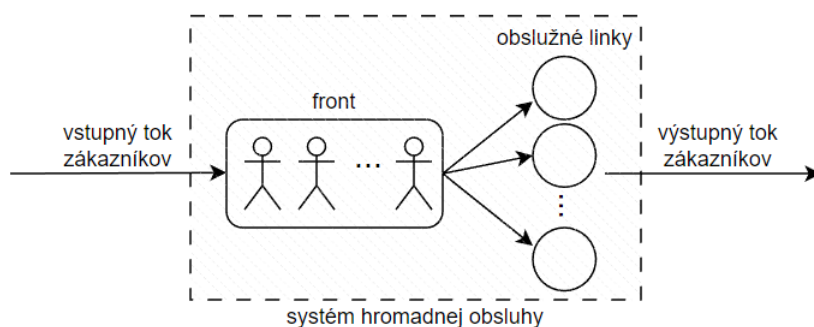
1.1 Teória hromadnej obsluhy

Teória hromadnej obsluhy (skr. THO, angl. *Queueing Theory*) je vedecká disciplína, ktorá skúma systémy, do ktorých opakovane vstupujú nejaké požiadavky (zákazníci). Tie následne pristupujú k určitými zariadeniam a vyžadujú od nich istý druh obsluhy. Na analýzu takýchto systémov sa využívajú rôzne matematické metódy, ako je napríklad teória pravdepodobnosti, matematická štatistika či teória vytvárajúcich funkcií. Výsledky analýz nám potom pomáhajú pri rozhodovaní, ako takéto systémy nastaviť tak, aby čo najoptimálnejšie fungovali aj z pohľadu zákazníka, aj z pohľadu prevádzkovateľa systému.

Táto matematická disciplína vznikla začiatkom 20. storočia a jej základy položil dánsky matematik a vedec A. K. Erlang (1828 – 1929). Ako zamestnanec kodanskej telefónnej ústredne chcel analyzovať a optimalizovať procesy v tejto spoločnosti. Jeho cieľom bolo určiť, koľko okruhov je potrebných na poskytnutie prijateľnej úrovne telefónnej služby tak, aby ľudia nečakali na prepojenie príliš dlho. Taktiež chcel zistiť, koľko operátorov je potrebných na vybavenie určitého objemu hovorov a vymyslieť tak spôsob, ako v jednom okamihu umožniť hovor čo najväčšiemu počtu volajúcim. V roku 1909 tak publikoval článok, v ktorom sa zaoberal preťažením telekomunikačných sietí [7]. Neskôr, v roku 1918, publikoval prácu, v ktorej odvodil vzorce pre počet odmietnutých hovorov a dobu čakania zákazníkov [8].

Systémy, ktoré skúma THO, vo všeobecnosti nazývame systémy hromadnej obsluhy (skr. SHO, angl. *queueing systems*) a tvorí ich front a obslužná linka (server). Zákazník vchádza do tohto systému a požaduje určitý druh servisu - má určitú požiadavku. Obsluha tohto zákazníka trvá istý čas, počas ktorého blokuje obslužnú linku. Po ukončení obsluhy zákazník linku uvoľňuje a systém opúšťa. Ak v momente príchodu zákazníka do systému nie je žiadna z obslužných liniek voľná, zaradí sa do frontu, v ktorom čaká na uvoľnenie niektorej z liniek. Príchody alebo doba obsluhy, vo väčšine prípadov oboje, sú náhodnými

procesmi. Základná štruktúra SHO je znázornená na Obr. 1:



Obr. 1: Základná štruktúra SHO (zdroj: vlastné spracovanie)

Systémy hromadnej obsluhy sú bežnou súčasťou nášho každodenného života. Stretávame sa s nimi v bankách, obchodoch, na pošte či vo verejnej doprave. Práve preto pomenovanie ako zákazník, obslužná linka či obsluha chápeme veľmi všeobecne. V Tabuľke 1 je uvedených pár príkladov SHO:

zákazník	obslužná linka	obsluha
volajúci	centrála	spojenie
pacient	lekár	vyšetrenie
pokazený stroj	opravár	oprava
kupujúci	pokladňa	účet
cestujúci	autobusy	preprava
balík	kuriér	doručenie
žiadosť na tlač	počítačová sieť	tlač dokumentu

Tabuľka 1: Príklady SHO

1.1.1 Základné parametre SHO

Všetky modely hromadnej obsluhy sú charakterizované parametrami:

- **vstupný tok zákazníkov** - postupnosť príchodov zákazníkov do systému. Zákazníci môžu prichádzať jednotlivo alebo v skupinách, ich počet môže byť ohraničený alebo neohraničený, časové intervaly medzi príchodmi (ďalej ozn. ako medzery toku)

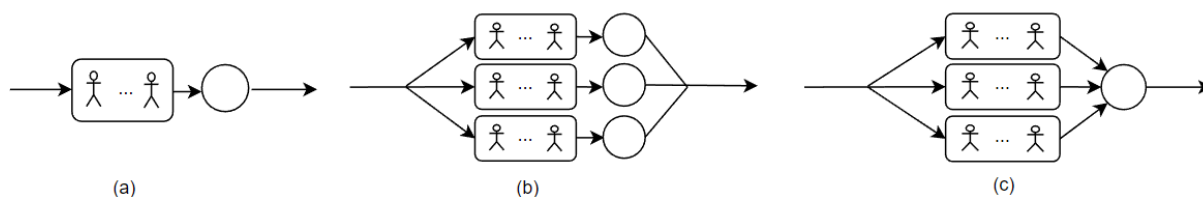
môžu byť pravidelné (deterministický tok) alebo náhodné (stochastický tok), charakterizované nejakým pravdepodobnostným rozdelením. Počet zákazníkov za jednotku času je väčšinou náhodný. Napríklad pri $M/M/1$ modeli je intenzita vstupného toku stredný počet zákazníkov za jednotku času.

- **front** - miesto, kde čakajú zákazníci v prípade, ak systém nebol prázdny, tzn. žiadna z obslužných liniek nebola v čase jeho príchodu voľná. Front môže byť neohraničný alebo ohraničený (počet miest vo fronte je obmedzený). V prípade, že front dosiahol svoju maximálnu dĺžku (systém je plný), prichádzajúci zákazník je odmietnutý bez obsluhy.
- **obslužná linka (server)** - zariadenie, ktoré poskytuje obsluhu. V systéme sa môže vyskytovať jeden alebo viacero serverov. V prípade viacserverového systému môže byť front spoločný alebo samostatný pre každý server. Pravidlo, podľa ktorého sa vyberá, ktorý zákazník z frontu bude obslužený skôr, sa nazýva disciplína výberu. Medzi základné patria:

- FIFO (*first-in-first-out*) - kto príde skôr, ten bude skôr obslužený
- LIFO (*last-in-first-out*) - najskôr bude obslužený ten, ktorý príde posledný
- PRI (*priority*) - k obsluhe je prednostne vybraný zákazník s vyššou prioritou
- SIRO (*selection in random order*) - zákazníci sú obsluhovaní v náhodnom poradí.

- **výstupný tok** - postupnosť odchodov zákazníkov zo systému po tom, ako bola dokončená ich obsluha. Vo všeobecnosti závisí od vstupného toku, doby obsluhy a typu disciplíny.

Na Obr. 2 môžeme vidieť grafické znázornenie niektorých základných typov SHO.



Obr. 2: Typy SHO (zdroj: vlastné spracovanie)

1.1.2 Kendallová klasifikácia úloh THO

Úlohy THO sú veľmi rozmanité. Na ich základné rozlíšenie sa používa symbolika, ktorú zaviedol anglický štatistik a matematik D. G. Kendall v r. 1953. Na všeobecné značenie týchto úloh sa používa trojica písmen $X/Y/n$, ktorá charakterizuje tri hlavné vlastnosti daného systému:

- X - proces príchodov zákazníkov do systému,
- Y - pravdepodobnostné rozdelenie doby obsluhy,
- n - počet obslužných liniek v systéme.

Ak chceme SHO bližšie špecifikovať, môžeme použiť rozšírené značenie $X/Y/n/B/K/SD$, kde:

- B - maximálny prípustný počet zákazníkov v systéme,
- K - veľkosť celkovej populácie (potenciálni zákazníci, kt. môžu prísť do systému),
- SD - disciplína obsluhy.

Pri skrátenom zápise teda predpokladáme neohraničený systém ($m = \infty$), neohraničenú veľkosť populácie ($K = \infty$) s disciplínou FIFO ($SD = \text{FIFO}$). V Tabuľke 2 sú uvedené príklady so základnými typmi príchodov X a doby obsluhy Y :

Ozn.	X	Y
M	Poissonov proces príchodov	exponenciálne rozdelenie
E_k	Erlangovo rozdelenie medzier toku	Erlangovo rozdelenie
D	konštantné medzery toku	konštantná doba obsluhy
G	všeobecné rozdelenie	všeobecné rozdelenie

Tabuľka 2: Typy procesu príchodu X a procesu obsluhy Y

Matematicky najjednoduchšími modelmi hromadnej obsluhy sú $M/M/1$, $M/M/1/m$ alebo viaclinkový $M/M/n$ model. Detailnú analýzu týchto systémov môžeme nájsť napríklad v [11] či [23].

1.1.3 Výkonnostné parametre

Pri SHO nás vo všeobecnosti zaujíma ich výkonnosť. Tú vieme charakterizovať pomocou rôznych veličín:

- **dĺžka frontu** (angl. *queue length*) - počet zákazníkov, ktorí čakajú na obsluhu. Dlhý rad indikuje slabú obsluhu alebo potrebu väčšej čakárne. Veľmi malý front zas môže indikovať nadbytočné množstvo obslužných liniek.
- **pravdepodobnosť odmietnutia** (angl. *loss probability*) - pravdepodobnosť, s akou bude prichádzajúci zákazník odmietnutý z dôvodu preplnenia systému (za predpokladu, že systém je ohraničený). Všetkých odmietnutých zákazníkov považujeme za „stratených“.
- **doba čakania** (angl. *waiting time/delay*) - čas, ktorý zákazník strávi vo fronte. Čím dlhšia doba obsluhy, tým horšia výkonnosť systému.
- **doba v systéme** (angl. *system time*) - koľko času celkovo strávi zákazník v systéme od momentu, keď do neho vstúpi až do momentu, keď ho opustí.
- **doba nečinnosti** (angl. *idle period*) - doba nečinnosti serveru medzi odchodom zákazníka, ktorý zanecháva systém prázdny a príchodom nového zákazníka.
- **doba činnosti** (angl. *busy period*) - doba medzi dvoma dobami nečinnosti.

Na vyššie spomínané výkonnostné parametre má vplyv množstvo rôznych faktorov. Niektoré z nich určuje zákazník (napríklad koľko je ochotný čakať vo fronte), iné naopak prevádzkovateľ. Ten určuje, akú konfiguráciu bude mať systém – napr. počet obslužných liniek, disciplínu obsluhy zákazníkov, obmedzenie na dĺžku frontu atď..

1.2 Markovove reťazce

Keďže systémy hromadnej obsluhy patria medzi aplikácie teórie Markovových reťazcov, v skratke sa s nimi a ich základnými vlastnosťami oboznámime v tejto podkapitole. Rozsiahlejšiu teóriu k Markovovým procesom a ich aplikáciám môžeme nájsť napríklad v literatúre [11] alebo [9]

Markovove procesy, pomenované po A. A. Markovovi, patria medzi najpoužívannejšie zo všetkých náhodných procesov. Sú špeciálnou triedou stochastických procesov medzi ktorými sa vyznačujú tým, že sú „bez pamäte“. To znamená, že vývoj procesu do budúcnosti nezávisí od minulosti ale len od prítomnosti. Táto vlastnosť sa nazýva Markovova vlastnosť (angl. *the Markov property*). V prípade ak je množina stavov diskretná, Markovove procesy sú známe ako Markovove reťazce. Teraz si uvedieme pár základných definícií:

- **Náhodný proces** - množina náhodných premenných $\{X_t\}_{t \in T} = \{X(w, t) : w \in \Omega, t \in T\}$, kde Ω je množina elementárnych udalostí a T je množina nezáporných reálnych čísel. V prípade ak $T = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$, ide o proces s diskretným časom. Ak $T = [0, \infty)$ ide o proces so spojitým časom. Hodnoty, ktoré nedobúdajú náhodné premenné $X_t, t \in T$ nazývame stavmi. Množinu stavov označujeme S . Náhodný proces $\{X_t\}_{t \in T}$ nazývame náhodným reťazcom (angl. *chain*), ak je množina stavov S konečná alebo spočítateľná množina.

- **Markovova vlastnosť** - hovoríme, že reťazec $\{X_t\}, t \in T$ spĺňa Markovovu vlastnosť, ak pre akékoľvek kladné celé číslo n , akékoľvek možné stavy $i_0, \dots, i_{n+1}$ z množiny S a akýkoľvek čas $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1}$, kde $t_0, \dots, t_{n+1} \in T$ platí:

$$P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_0} = i_0) = P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n). \quad (1)$$

Teda ak platí, že $X_{t_n} = i_n$, potom je $X_{t_{n+1}} = i_{n+1}$ nezávislé od X_{t_k} , kde $k = 0, \dots, n-1$.

Markovovu vlastnosť teda možno interpretovať nasledovne: ak si označíme časový okamih n ako prítomnosť, $n+1$ ako budúcnosť a $0, 1, \dots, n-1$ ako minulosť, potom pravdepodobnosť budúceho stavu systému je v prípade, že poznáme súčasný stav aj stavy minulé rovnaká, ako keď poznáme len súčasný stav systému. Teda len prítomný stav systému má vplyv na budúci vývoj. Náhodný reťazec, ktorý spĺňa Markovovu vlastnosť nazývame Markovovým reťazcom.

2 Úvod do systémov hromadnej obsluhy s diskretným časom

V tejto kapitole diplomovej práce sa pozrieme na jednoduché systémy hromadnej obsluhy s diskretným časom. Pod jednoduchým systémom budeme rozumieť systém s jedným serverom, jednou frontou, homogénnou skupinou zákazníkov (jedným typom zákazníkov) a s typom obsluhy FIFO. Vysvetlíme si základné vlastnosti takýchto systémov, predstavíme si všeobecný diskretný model $GI/G/1$ a na záver uvedieme aj niektoré konkrétne diskretné verzie spojitých modelov.

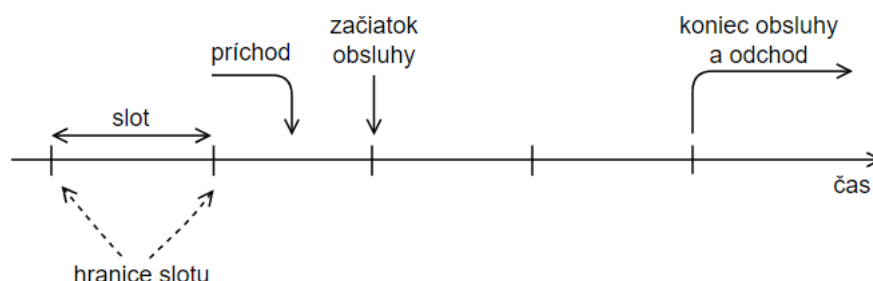
2.1 SHO s diskretným časom

V 90. rokoch 20. storočia bola väčšina modelov hromadnej obsluhy založená na spojitom čase. Tie diskretné boli primárne využívané len v počítačových a telekomunikačných sieťach (napr. [3], [10]), ale často len ako aproximácie spojitých modelov. Medzi prvé diskretné modely HO patrili napr. [16], [17] alebo [19]. To sa však v posledných rokoch mení. Počítače či telekomunikačné systémy začínajú na prenos informácií čoraz viac využívať digitálny signál namiesto analógového. Zatiaľ čo analógový signál je reprezentovaný spojitými vlnami (napr. sinusovou vlnou), digitálny signál je diskretný signál reprezentovaný štvorcovými vlnami, ktoré prenášajú informácie binárne - pomocou núl a jednotiek. Je teda diskretný v hodnote aj v čase.

Napríklad v telekomunikačných systémoch v súčasnej dobe využívajú siete B-ISDN (širokopásmové digitálne siete s integrovanými službami) na prenos informácií asynchrónny prenosový režim ATM (angl. *Asynchronous Transfer Mode*). V tomto režime sú informácie rozdelené do tzv. buniek s konštantnou pevnou dĺžkou. K prenosu buniek dochádza v pravidelných časových úsekoch a ak nie sú prítomné žiadne dátové bunky, prenášajú sa prázdne bunky. Detailnejšie popísanie a analýzu takýchto systémov nájdeme napríklad v [3], [15] alebo [26]. So zvyšujúcou sa digitalizáciou vo svete preto rastie aj záujem pozerať sa na systémy, do ktorých patria aj spomínané telekomunikačné systémy, ako na systémy HO s diskretným časom.

Ak teda uvažujeme SHO s diskretným časom, uvažujeme systém, v ktorom je časová os rozdelená na intervaly rovnakej dĺžky nazývaných sloty. Okrem tzv. slotového času je

ich ďalšou charakteristickou črtou synchronizovaná obsluha, teda, že obsluha zákazníka môže začať jedine na hranici slotu. Ako takáto časová os vyzerá, môžeme vidieť na Obr. 3.



Obr. 3: Slotová časová os (zdroj: vlastné spracovanie)

Pre diskrétny systémy platia predpoklady:

- časová os je rozdelená do postupnosti rovnakých intervalov s pevnou dĺžkou, tzv. slotov (s označením $0., 1., \dots, m$ -ty slot),
- čas (napr. obsluhy, celkovej prevádzky obslužnej linky a pod.) je vyjadrený v počte slotov,
- zákazník môže do systému prísť kedykoľvek počas slotu,
- obsluha zákazníka môže začať a skončiť jedine na hranici slotu,
- počas jedného slotu môže jeden server obslúžiť najviac jedného zákazníka,
- v rámci jedného slotu sa môže súčasne odohrať viacero druhov udalostí (napr. jeden zákazník príde, iný odíde).

Zákazník teda vchádza do systému a ak systém nie je prázdny postaví sa do frontu. Ako už bolo spomenuté vyššie, jeho obsluha môže začať najskôr na začiatku ďalšieho slotu. Práve v tom spočíva hlavný rozdiel medzi spojitými modelmi, v ktorých zákazník pristupuje k obsluhu v momente, kedy sa uvoľní obslužná linka.

Modely SHO môžu byť pomerne zložité v závislosti od takých faktorov, ako je rozdelenie pravdepodobnosti príchodov zákazníkov, rozdelenie pravdepodobnosti doby obsluhy, počet serverov či správanie zákazníkov v prípade, že sú všetky servery zaneprázdnené. My si teraz uvedieme všeobecný diskrétny model, odvodíme si jeho stacionárne pravdepodobnostné rozdelenie a niektoré základné výkonnostné parametre.

2.2 $GI/G/1$ model

V tejto časti uvažujeme diskretný model $GI/G/1$, v ktorom počet príchodov za jeden slot a rovnako aj doba obsluhy má všeobecné rozdelenie. V systéme sa nachádza jeden server, máme nekonečne veľkú čakaciu miestnosť, zákazníci sa zaraďujú do jedného spoločného frontu a k obsluhu prístupujú podľa disciplíny FIFO. Najviac budeme vychádzať z [2] a [3].

Pri odvodzovaní stacionárneho pravdepodobnostného rozdelenia nášho systému budeme využívať techniku vytvárajúcich funkcií (angl. *probability generating functions*, skr. PGF). Tá je veľmi užitočná práve pri práci s náhodnými navzájom nezávislými diskretnými premennými, pretože PGF jednoznačne určuje ich pravdepodobnostnú funkciu rozdelenia pravdepodobnosti (skr. PDF). Ak si označíme X ako nezápornú diskretnú náhodnú premennú a $p(x) = P(X = n)$ je jej príslušná PDF, potom PGF tejto pravdepodobnosti je definovaná ako nekonečný mocninový rad v tvare:

$$G(z) = E[z^n] = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot z^n, z \in \mathbf{C}.$$

Keďže vieme, že pre súčet pravdepodobností platí: $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = 1$, potom mocninový rad konverguje len ak premenná z nadobúda hodnoty $|z| \leq 1$. Súčet takéhoto radu je analytická funkcia, pre ktorú platí $|A(z)| \leq 1$.

Medzi dôležité vlastnosti vytvárajúcich funkcií patrí aj vzťah pre odvodenie strednej hodnoty $G'(1) = E[X]$ a vzťah $G(1) = 1$. Tie využijeme pri odvodzovaní nášho modelu. Viac o PGF, ich vlastnostiach a základných operáciach s nimi sa môžete dočítať napríklad v [21] alebo v [24].

2.2.1 Matematický model

Hlavné predpoklady nášho modelu sú nasledovné:

- ak je front na začiatku slotu prázdny, potom počas nasledujúceho slotu príde náhodný počet nových zákazníkov,
- ak je front na začiatku slotu neprázdny, jeden zákazník prístupuje k obsluhu a počas nasledujúceho slotu príde náhodný počet nových zákazníkov.

Proces príchodov - počet nových zákazníkov prichádzajúcich do systému v jednotlivých slotoch vytvára postupnosť diskretných navzájom nezávislých rovnako rozdelených náhodných premenných so spoločnou pravdepodobnostnou funkciou $a(n)$ a vytvárajúcou funkciou $A(z)$:

- PDF: $a(n) = P(n \text{ príchodov počas } k\text{-teho slotu}), n \geq 0$
- PGF: $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \cdot z^n$
- $A'(1) = \lambda$ - stredný počet prichádzajúcich zákazníkov za 1 slot (intenzita príchodov)

Doba obsluhy - doba, ktorú jednotliví zákazníci potrebujú na svoju obsluhu, vytvára postupnosť diskretných navzájom nezávislých rovnako rozdelených náhodných premenných so spoločnou pravdepodobnostnou funkciou $b(n)$ a vytvárajúcou funkciou $B(z)$:

- PDF: $b(n) = P(\text{obsluha } i\text{-teho zákazníka zaberie } n \text{ slotov})$
- PGF: $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n) \cdot z^n$
- $B'(1) = \frac{1}{\mu}$ - stredná doba obsluhy
- μ - intenzita odchodov

Doba obsluhy a proces príchodov sú navzájom nezávislé. Stav systému na začiatku k -teho slotu je charakterizovaný celkovým počtom zákazníkov prítomných v systéme na začiatku tohto slotu, ozn. u_k . Avšak v tomto prípade reťazec $\{u_k\}$ pre $k = 0, 1, \dots, m$ nespĺňa Markovovu vlastnosť (1) a netvorí tak Markovov reťazec. Použitie takéhoto modelu by bolo značne problematické. Aby sme si počítanie zjednodušili, musíme si preto definovať pomocnú premennú h_k , ktorá nám bude vyjadrovať, v akom štádiu je obsluha práve obsluhovaného zákazníka. Zavedieme si značenie:

- u_k - celkový počet zákazníkov v systéme na začiatku slotu k ,
- a_k - počet príchodov počas slotu k ,
- s_i - počet slotov potrebných na obsluhu i -teho zákazníka,
- h_k - zostávajúci počet slotov potrebných na dokončenie obsluhy zákazníka, ktorý je na začiatku k -teho slotu pri obsluhu,

- B^* - doba obsluhy zákazníka, ktorý je ďalší v poradí.

Dostávame tak dvojrozmerný reťazec $\{(h_k, u_k)\}$, ktorý nám popisuje stav systému na začiatku slotu k . Správanie systému môžeme potom opísať pomocou nasledujúcich rovníc (slovný popis je uvedený nižšie):

- a) Ak $h_k = 0$ ($u_k = 0$)

$$u_{k+1} = a_k,$$

$$h_{k+1} = \begin{cases} 0, & \text{ak } a_k = 0, \\ B^*, & \text{ak } a_k > 0 \end{cases}$$

- b) Ak $h_k = 1$ ($u_k > 0$)

$$u_{k+1} = u_k - 1 + a_k,$$

$$h_{k+1} = \begin{cases} 0, & \text{ak } a_k = 0 \text{ a } u_k = 1 \\ B^*, & \text{ak } a_k > 0 \text{ alebo } u_k > 1 \end{cases} \quad (2)$$

- c) Ak $h_k > 1$ ($u_k > 0$)

$$u_{k+1} = u_k + a_k,$$

$$h_{k+1} = h_k - 1$$

Slovne môžeme rovnice popísať nasledovne:

a) Ak je na začiatku slotu k systém prázdny ($h_k = 0$ a $u_k = 0$), teda nikto nie je vo fronte ani pri obsluhu, tak na začiatku slotu $k + 1$ bude v systéme len toľko zákazníkov, koľko príde počas trvania slotu k . V prípade, že počas slotu k nikto nepríde ($a_k = 0$), na začiatku slotu $k + 1$ opäť nikto nepristupuje k obsluhu, a teda aj zostávajúca doba obsluhy je rovná 0. Ak však do systému počas slotu k príde aspoň jeden zákazník ($a_k > 0$), na začiatku ďalšieho slotu pristupuje k obsluhu a čas na dokončenie jeho obsluhy je rovný B^* .

b) Ak je na začiatku slotu k obsluhovaný zákazník, pričom na dokončenie jeho obsluhy zostáva už len 1 slot ($h_k = 1$), tak na začiatku $(k + 1)$ -ho slotu tento zákazník odchádza zo systému. Zároveň pribudnú zákazníci, ktorí prišli počas slotu k . V prípade, že nikto nepríde ($a_k = 0$) a jediný zákazník v systéme v slote k je

ten pri obsluhu ($u_k = 1$), potom systém zostáva v čase $k + 1$ prázdny. Ak ale počas slotu k príde aspoň jeden zákazník ($a_k > 0$) alebo front nebol prázdny ($u_k > 1$), tak potom na začiatku slotu $k + 1$ pristupuje k obsluhu ďalší zákazník a zostávajúci počet slotov na dokončenie jeho obsluhy je rovný B^* .

c) Ak je na začiatku slotu k pri obsluhu zákazník, pričom jeho obsluha zaberie ešte viac ako 1 slot ($h_k > 1$), tak na začiatku slotu $(k + 1)$ bude v systéme rovnaký počet zákazníkov, ako bolo na začiatku slotu k a zároveň pribudnú noví zákazníci, ktorí prišli počas trvania tohto slotu. Zostávajúci čas obsluhy zákazníka pri obslužnej linke sa zníži o 1 slot.

Vidíme, že budúci vývoj systému, teda stav systému v čase $k + 1$ už závisí len od prítomnosti, teda od času k . Reťazec $\{(h_k, u_k)\}$ spĺňa Markovovu vlastnosť a je Markovovým reťazcom.

2.2.2 Stacionárne rozdelenie

Pre Markovov reťazec s maticou prechodu $P = (p_{ij})$ je stacionárne rozdelenie také rozdelenie pravdepodobnosti, pre ktoré platí

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}.$$

Ak v nejakom čase sú pravdepodobnosti stavov rovné stacionárnemu rozdeleniu, tak v nasledujúcich časoch zostanú také isté, teda reťazec sa ustáli. Zároveň pre stacionárne rozdelenie platí, že ak je splnená podmienka stability (5), potom v našom reťazci existuje jediné stacionárne π_j a $\lim_{k \rightarrow \infty} P(x_k = j) = \pi_j$. Stacionárne rozdelenie teda možno interpretovať ako ustálený stav systému, v ktorom sa už počet zákazníkov ani zostávajúci čas obsluhy v jednotlivých slotoch nemenia. Vývoj reťazca, ktorý nadobudne stacionárne rozdelenie je teda od istého momentu nezávislý od času.

Teraz si definujeme spoločnú vytvárajúcu funkciu nášho Markovovho reťazca $\{(h_k, u_k)\}$:

$$P_k(x, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P[h_k = i, u_k = n] \cdot x^i z^n = E[x^{h_k} z^{u_k}],$$

pričom vieme, že $h_k = 0$ iba ak $u_k = 0$ (tzn. niekto nie je obsluhovaný iba v prípade, že je systém prázdny), preto pre počiatočný stav platí:

$$P_k(x, 0) = P_k(0, 0) \quad \forall x. \quad (3)$$

Využitím rovnic (2) si odvodíme PGF pre reťazec $\{(h_{k+1}, u_{k+1})\}$:

$$\begin{aligned}
P_{k+1}(x, z) &= E[x^{h_{k+1}} \cdot z^{u_{k+1}}] \\
&= P[h_k = u_k = 0] \cdot E[x^{h_{k+1}} z^{a_k} \mid h_k = u_k = 0] \\
&\quad + P[h_k = 1] \cdot E[x^{h_{k+1}} \cdot z^{u_k - 1 + a_k} \mid h_k = 1] \\
&\quad + P[h_k > 1] \cdot E[x^{h_{k+1}} \cdot z^{u_k + a_k} \mid h_k > 1] \\
&= P[h_k = u_k = 0] \cdot P[a_k = 0] \cdot E[x^0 z^{a_k} \mid a_k = 0] \\
&\quad + P[h_k = u_k = 0] \cdot P[a_k > 0] \cdot E[x^{B^*} \cdot z^{a_k} \mid a_k > 0] \\
&\quad + P[h_k = 1] \cdot P[a_k = 0] \cdot P[u_k = 1] \\
&\quad + P[h_k = 1] \cdot P[u_k - 1 + a_k > 0] \cdot E[x^{B^*} \cdot z^{u_k - 1 + a_k} \mid h_k = 1 \text{ a } u_k - 1 + a_k > 0] \\
&\quad + P[h_k > 1] \cdot E[x^{h_k - 1} \cdot z^{u_k + a_k} \mid h_k > 1].
\end{aligned}$$

Po dosadení príslušných PGF a ďalších úpravách dostávame:

$$\begin{aligned}
P_{k+1}(x, z) &= P(0, 0) \cdot A(0) \\
&\quad + P_k(0, 0) \cdot B(z) \cdot [A(z) - A(0)] \\
&\quad + P[h_k = u_k = 0] \cdot A(0) \\
&\quad + B(z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P[h_k = 1, u_k = n] \cdot P[a_k = j] \cdot z^{n-1+j} \\
&\quad - B(z) \cdot P[h_k = 1, u_k = 1] \cdot A(0) \\
&\quad + A(z) \cdot \frac{1}{x} \cdot (P_k(x, z) - \sum_{n=1}^{\infty} P[h_k = 1, u_k = n] \cdot x \cdot z^n - P_k(0, 0)) \\
&= A(0) \cdot [1 - B(x)] \cdot (P_k(0, 0) + R_k(0)) \\
&\quad + A(z) \cdot P_k(0, 0) \cdot \frac{x \cdot B(x) - 1}{x} \\
&\quad + A(z) \cdot R_k(z) \cdot [B(x) - z] \\
&\quad + \frac{A(z)}{x} \cdot P_k(x, z),
\end{aligned} \tag{4}$$

kde:

$$R_k(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} P[h_k = 1, u_k = n] \cdot z^{n-1}.$$

Ak je splnená podmienka stability (5), potom existuje jediné stacionárne rozdelenie takéhoto reťazca a pre jeho prislúchajúcu vytvárajúcu funkciu $P(x, z)$ platí:

$$P(x, z) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(x, z) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} P_{k+1}(x, z).$$

Podmienka stability je v tvare:

$$A'(1) \cdot B'(1) < 1, \quad (5)$$

a po dosadení hodnôt za $A'(1)$ a $B'(1)$ dostávame:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \rho < 1, \quad (6)$$

kde ρ označuje intenzitu prevádzky. Musí teda platiť, že intenzita príchodov do systému musí byť menšia ako intenzita odchodov zo systému ($\lambda < \mu$). Ak by táto podmienka splnená nebola, počet zákazníkov by sa v systéme donekonečna zvyšoval, čo by spôsobilo nestabilitu systému. Ďalej budeme predpokladať, že táto podmienka je splnená. Prenásobením rovnice (4) premennou x a zavedením limity dostávame:

$$\begin{aligned} x \cdot P(x, z) &= \lim_{k \rightarrow \infty} x \cdot P_{k+1}(x, z) \\ &= x \cdot A(0)[1 - B(x)] \cdot (P(0, 0) + R(0)) \\ &\quad + A(z)P(0, 0) \cdot (x \cdot B(x) - 1) + x \cdot A(z) \cdot R(z)[B(x) - z] + A(z) \cdot P(x, z). \end{aligned}$$

Vyjadríme si $P(x, z)$:

$$\begin{aligned} [x - A(z)] \cdot P(x, z) &= x \cdot A(0) \cdot [1 - B(x)] \cdot (P(0, 0) + R(0)) \\ &\quad + A(z) \cdot P(0, 0) \cdot (x \cdot B(x) - 1) + x \cdot A(z) \cdot R(z) \cdot [B(x) - z]. \end{aligned} \quad (7)$$

Zostáva nám už len určiť neznáme parametre $R(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k(z)$, $P(0, 0)$ a $R(0)$.

1) $P(0, 0)$ a $R(0)$:

Ak si definujeme počiatočný stav ako $P(x, 0)$ a využijeme podmienku (3), tak po dosadení do rovnice (7) dostávame:

$$\begin{aligned} [x - A(0)] \cdot P(0, 0) &= x \cdot A(0) \cdot [1 - B(x)] \cdot (P(0, 0) + R(0)) \\ &\quad + A(0) \cdot P(0, 0) \cdot (x \cdot B(x) - 1) + x \cdot A(0) \cdot R(0) \cdot B(x). \end{aligned}$$

Pomocou ďalších úprav si z tejto rovnice odvodíme vzťah medzi $P(0, 0)$ a $R(0)$:

$$P(0, 0) = A(0) \cdot [P(0, 0) + R(0)] \quad (8)$$

2) $R(z)$:

Keďže ide o vytvárajúce funkcie, musí platiť: $|x| \leq 1$, $|z| \leq 1$ a $|A(z)| \leq 1$, a teda že $x = A(z)$. Dosadením tejto podmienky a vzťahu (8) do (7) dostávame rovnicu pre $R(z)$:

$$A(z) \cdot R(z) = \frac{P(0,0) \cdot [A(z) - 1] \cdot B(A(z))}{z - B(A(z))}. \quad (9)$$

Nakoniec si ešte odvodíme vzťah pre $P(1,1)$, a to zderivovaním rovnice (7) podľa premennej x a dosadením $x = z = 1$:

$$P(1,1) = P(0,0) + R(1) \cdot B'(1). \quad (10)$$

Zderivovaním rovnice (9) za využitia L'Hopitalovho pravidla si odvodíme $R(1)$:

$$R(1) = \frac{A'(1)}{1 - A'(1) \cdot B'(1)} \cdot P(0,0)$$

a následne dosadíme do (10):

$$\begin{aligned} P(1,1) &= P(0,0) + \frac{A'(1) \cdot P(0,0)}{1 - A'(1) \cdot B'(1)} \cdot B'(1) \\ &= P(0,0) \cdot \left[\frac{1 - A'(1) \cdot B'(1) + A'(1) \cdot B'(1)}{1 - A'(1) \cdot B'(1)} \right] \\ &= \frac{P(0,0)}{1 - A'(1) \cdot B'(1)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Z vlastností vytvárajúcich funkcií pravdepodobnosti zároveň vieme, že platí $P(1,1) = 1$. Dosadením tejto podmienky do rovnice (11) dostávame ďalší vzťah pre $P(0,0)$:

$$P(0,0) = 1 - A'(1) \cdot B'(1). \quad (12)$$

Následným dosadením vzťahov (8), (9) a (12) do rovnice (7) tak dostávame tvar vytvárajúcej funkcie pre ustálený stav systému na začiatku ľubovoľného slotu:

$$P(x,z) = [1 - A'(1) \cdot B'(1)] \cdot \left\{ 1 - xz \cdot \frac{[1 - A(z)][B(x) - B(A(z))]}{[x - A(z)][z - B(A(z))]} \right\}. \quad (13)$$

2.2.3 Výkonnostné parametre

V tejto podkapitole si odvodíme niektoré z výkonnostných parametrov všeobecného modelu $GI/G/1$, pričom budeme predpokladať, že systém je ustálený.

u - obsadenosť systému na začiatku ľubovoľného slotu

- u - náhodná premenná, ktorá vyjadruje počet zákazníkov v ustálenom systéme na začiatku ľubovoľného slotu
- PGF: $U(z)$

Z prechádzajúcich výpočtov a odvodení už vieme, že vektor $(h, u) = \lim_{k \rightarrow \infty} (h_k, u_k)$ predstavuje ustálený stav nášho systému a $P(x, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(x, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} E[x^{h_k} z^{u_k}]$ je prislúchajúca PGF takéhoto ustáleného systému. Vytvárajúcu funkciu $U(z)$ náhodnej premennej u teda vieme jednoducho získať tak, že v rovnici (13) pre $P(x, z)$ položíme $x = 1$. Dostávame:

$$\begin{aligned} U(z) &= P(1, z) \\ &= [1 - A'(1)B'(1)] \cdot [1 - z] \cdot \frac{1 - B(A(z))}{z - B(A(z))} \\ &= \frac{(z - 1) \cdot B(A(z))}{z - B(A(z))} \cdot (1 - A'(1)B'(1)). \end{aligned} \tag{14}$$

d - obsadenosť systému v čase odchodu ľubovoľného zákazníka

- d - náhodná premenná, ktorá vyjadruje počet zákazníkov v ustálenom systéme v čase odchodu ľubovoľného zákazníka zo systému. Ako sme už definovali vyššie (2), zákazník na konci slotu opúšťa systém iba v prípade, že na začiatku tohto slotu bol zostávajúci čas jeho obsluhy práve 1 slot (tzn. $h = 1$).
- PGF: $D(z)$

Náhodnú premennú d si definujeme ako:

$$d = u_1 - 1 + a,$$

kde:

- u_1 - počet zákazníkov na začiatku slotu, v ktorom $h = 1$; PGF: $U_1(z)$,
- a - počet nových zákazníkov, ktorí prišli počas trvania tohto slotu; PGF: $A(z)$.

Premenné u_1 a a sú navzájom nezávislé. Vytvárajúcu funkciu $D(z)$ si potom môžeme odvodiť nasledovne:

$$D(z) = E[z^{u_1-1+a}] = \frac{1}{z} \cdot E[z^{u_1} z^a] = \frac{1}{z} \cdot U_1(z) \cdot A(z), \tag{15}$$

kde:

$$\begin{aligned}
U_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} P[u_1 = n] \cdot z^n = \sum_{n=1}^{\infty} P[u = n \mid h = 1] \cdot z^n \\
&= \frac{1}{P[h = 1]} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P[u = n, h = 1] \cdot z^n = \frac{1}{R(1)} \cdot z \cdot R(z).
\end{aligned} \tag{16}$$

Dosadením (16) do (15) potom dostávame:

$$\begin{aligned}
D(z) &= \frac{R(z)A(z)}{R(1)} = \frac{P(0,0) \cdot [A(z) - 1] \cdot B(A(z))}{z - B(A(z))} \cdot \frac{1 - A'(1)B'(1)}{A'(1) \cdot P(0,0)} \\
&= \frac{[A(z) - 1] \cdot B(A(z)) \cdot [1 - A'(1)B'(1)]}{[z - B(A(z))] \cdot A'(1)}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Ak dosadíme (17) do rovnice (14), potom dostávame vzťah medzi vytvárajúcimi funkciami $D(z)$ a $U(z)$:

$$D(z) = \frac{A(z) - 1}{(z - 1) \cdot A'(1)} \cdot U(z). \tag{18}$$

Z tohto vzťahu vidíme, že PGF pre obsadenosť systému v čase odchodu zákazníka $D(z)$ vieme získať prenásobením PGF pre obsadenosť systému na začiatku ľubovoľného slotu $U(z)$ výrazom závislým len od procesu príchodov. Vzťah (18) platí pre všetky diskkrétne modely hromadnej obsluhy s 1 serverom a nezávislými príchodmi [3].

w - nedokončená práca

- w_k - diskrétna nezáporná náhodná premenná, ktorá vyjadruje zostávajúci počet slotov, potrebných na obsluhu všetkých zákazníkov prítomných v systéme na začiatku k -teho slotu.
- PGF: $W(z)$

Ak je systém prázdny, nedokončená práca na začiatku slotu k je rovná 0. Ak však prázdny nie je, potom nedokončená práca w_k pozostáva z počtu slotov potrebných na dokončenie obsluhy práve obsluhovaného zákazníka (h_k) a z počtu slotov potrebných na obsluhu všetkých zákazníkov čakajúcich vo fronte. Náhodnú premennú w_k teda definujeme ako:

$$w_k = \begin{cases} 0, & \text{ak } h_k = 0 \\ h_k + \sum_{i=1}^{(u_k-1)} s_i, & \text{ak } h_k \geq 1, \end{cases}$$

pričom:

- s_i - doba obsluhy i -teho zákazníka,
- $(u_k - 1)$ - počet zákazníkov vo fronte na začiatku slotu k .

Pre prisluchajúcu PGF nedokončenej práce v ustálenom systéme platí:

$$W(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} W_k(z), \quad (19)$$

kde:

$$\begin{aligned} W_k(z) &= P[W_k = n] \cdot z^n = E[z^{W_k}] = P[h_k = 0] \cdot E[z^0 \mid h_k = 0] \\ &\quad + P[h_k \geq 1] \cdot E[z^{h_k + \sum_{i=1}^{u_k-1} s_i} \mid h_k \geq 1] \\ &= P_k(0, 0) + P[h_k \geq 1] \cdot E[z^{h_k + \sum_{i=1}^{u_k-1} s_i} \mid h_k \geq 1]. \end{aligned} \quad (20)$$

Dosadením (20) do (19) dostávame tvar $W(z)$:

$$\begin{aligned} W(z) &= P(0, 0) + \lim_{k \rightarrow \infty} (P[h_k \geq 1] \cdot \frac{1}{B(z)} \cdot E[z^{h_k} \cdot B(z)^{u_k} \mid h_k \geq 1]) \\ &= P(0, 0) + \frac{1}{B(z)} \cdot [P(z, B(z)) - P(0, 0)]. \end{aligned}$$

Na záver si ešte môžeme vyjadriť $P(z, B(z))$ dosadením do (13) a pomocou ďalších úprav dostaneme:

$$W(z) = P(0, 0) \cdot \frac{(z - 1)(A(B(z)))}{z - A(B(z))}. \quad (21)$$

Odvodili sme tak tvar vytvárajúcej funkcie $W(z)$ pre množstvo nedokončenej práce v ustálenom systéme na začiatku ľubovoľného slotu.

i^* - doba nečinnosti serveru (angl. *idle period*)

- i^* - náhodná premenná, ktorá vyjadruje počet za sebou idúcich slotov, počas ktorých bol systém prázdny, a teda server počas nich nikoho neobsluhoval. Začína sa odchodom zákazníka, ktorý necháva systém prázdny a končí sa príchodom aspoň jedného zákazníka do systému.
- PGF: $I^*(z)$

Najskôr si odvodíme príslušnú pravdepodobnostnú funkciu. Pravdepodobnosť, že doba nečinnosti serveru trvala práve k slotov sa rovná pravdepodobnosti, že počas $(k - 1)$ za

sebou idúcich slotov do systému nikto neprišiel a počas slotu k prišiel aspoň jeden zákazník. Obsluha tohto zákazníka teda začína v $k + 1$ slote. Matematicky zápis je nasledovný:

$$\begin{aligned} P[i^* = k] &= P[a_1 = 0] \cdot P[a_2 = 0] \cdot P[a_3 = 0] \dots P[a_{k-1} = 0] \cdot P[a_k > 0] \\ &= A(0)^{k-1} \cdot (1 - A(0)), k \geq 1. \end{aligned}$$

Tvar príslušnej PGF je potom:

$$\begin{aligned} I^*(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P[i^* = n] \cdot z^n = \sum_{n=1}^{\infty} z \cdot P[i^* = n] \cdot z^{n-1} \\ &= z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A(0)^{n-1} \cdot (1 - A(0)) \cdot z^{n-1} \\ &= \frac{(1 - A(0))z}{A(0)z - 1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Vidíme, že $I^*(z)$ má geometrické rozdelenie s parametrom $A(0)$. Stredná doba nečinnosti serveru je teda:

$$E[i^*] = I^{*'}(1) = \frac{1}{1 - A(0)}.$$

2.3 Konkrétne diskkrétne modely

V tejto časti si predstavíme diskkrétne analógie jedných z najznámejších spojitých modelov $M/M/1$ a $M/G/1$. Budeme vychádzať najmä z článkov [14] a [4].

2.3.1 Diskrétna analógia $M/M/1$ modelu

Model $M/M/1$ je jedným z najjednoduchších a najpoužívanějších modelov v teórii hromadnej obsluhy. Zákazníci vchádzajúci do systému tvoria Poissonov proces príchodov, tzn. že intervaly medzi príchodmi zákazníkov majú exponenciálne rozdelenie. Doba obsluhy má taktiež exponenciálne rozdelenie a v systéme sa nachádza jedna obslužná linka. Diskrétnou analógiou tohto modelu bude $Geom/Geom/1$ model.

V $Geom/Geom/1$ modeli predpokladáme, že náhodná premenná a_k , ktorá predstavuje počet zákazníkov, ktorí vstúpia do systému počas k -teho slotu, môže nadobudnúť len dve hodnoty, a to:

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{ak v } k\text{-tom slote príde jeden zákazník,} \\ 0, & \text{ak v } k\text{-tom slote nikto nepríde,} \end{cases} \tag{23}$$

pričom:

$$P[a_k = 1] = \lambda,$$

$$P[a_k = 0] = 1 - \lambda, \text{ kde } \lambda \in [0, 1].$$

Bernoulliho proces:

Postupnosť náhodných premenných $\{a_k\}$, ktoré môžu nadobudnúť len dve hodnoty (0 a 1), pričom členy postupnosti sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné premenné nazývame Bernoulliho procesom. Každý člen tejto postupnosti má alternatívne, inak nazývané aj Bernoulliho rozdelenie: $a_k \sim \text{Alt}(p)$. Toto rozdelenie popisuje tzv. Bernoulliho/binomický pokus, teda náhodný pokus, pri ktorom môžeme dosiahnuť len dva možné výsledky, často označované ako úspech a neúspech. Opakovaním Bernoulliho pokusu dostávame spomínaný Bernoulliho proces. Na základe neho vieme odvodiť niektoré náhodné iid premenné aj ich pravdepodobnostné rozdelenia. Ak si označíme p ako pravdepodobnosť úspechu, potom platí :

- počet úspechov za prvých n Bernoulliho pokusov má binomické rozdelenie
 $\sim \text{Bin}(n, p)$
- počet úspechov v jednom Bernoulliho pokuse má alternatívne rozdelenie
 $\sim \text{Alt}(p) = \text{Bin}(1, p)$
- počet neúspechov potrebných k dosiahnutiu r úspechov má negatívne binomické rozdelenie
 $\sim \text{NegBin}(r, p)$
- počet neúspechov potrebných k dosiahnutiu prvého úspechu má geometrické rozdelenie
 $\sim \text{Geom}(p) = \text{NegBin}(1, p),$

Premenné s negatívnym binomickým rozdelením možno interpretovať ako náhodné doby čakania.

Proces príchodov:

Ak teda predpokladáme, že proces príchodov zákazníkov do systému $\{a_k\}$ tvorí tzn. Bernoulliho proces s parametrom λ , dostávame pravdepodobnostné rozdelenia pre iid nezáporné náhodné premenné N_i , τ_i a a_k :

- N_i - počet príchodov za prvých i slotov má binomické rozdelenie s pp. λ
 $\sim Bin(i, \lambda)$
- a_k - počet príchodov počas k -teho slotu má Bernoulliho rozdelenie s pp. λ
 $\sim Alt(\lambda)$
- τ_i - intervaly medzi príchodmi (angl. *interarrival times*) majú geometrické rozdelenie s pp. λ
 $\sim Geom(\lambda)$

Pravdepodobnosť, že v priebehu m slotov do systému vstúpi práve n zákazníkov môžeme spočítať ako:

$$P[N_{m+i} - N_i = n] = \binom{m}{n} \cdot \lambda^n \cdot (1 - \lambda)^{m-n},$$

pričom $\binom{m}{n}$ je kombinačné číslo, ktoré udáva počet spôsobov, ako k týmto n príchodom môže dôjsť.

Pravdepodobnosť, že medzi príchodom i -teho zákazníka a zákazníka, ktorý príde hneď za ním prejde práve k slotov definujeme ako:

$$P[\tau_i = k] = \lambda(1 - \lambda)^{k-1}, \text{ kde } k \in [1, \infty).$$

Doba obsluhy:

Rovnako predpokladáme, že doby obsluhy jednotlivých zákazníkov $\{s_i\}$ sú nezávislé rovnako rozdelené nezáporné náhodné premenné s geometrickým rozdelením s parametrom μ ($s_i \sim Geom(\mu)$). Pravdepodobnosť, že doba obsluhy i -teho zákazníka zaberie práve k slotov bude:

$$P[s_i = k] = \mu(1 - \mu)^k, \text{ kde } k \in [0, \infty)$$

a stredná doba obsluhy je:

$$E[s] = \frac{1}{\mu}.$$

Odvodenie stacionárneho rozdelenia:

Rovnako ako exponenciálne rozdelenie (intervaly medzi príchodmi a doba obsluhy v Poissonovom procese) aj geometrické rozdelenie (intervaly medzi príchodmi a doba obsluhy v

Bernoulliho procese) má tzv. zabúdaciú vlastnosť (angl. *memoryless property*). Táto vlastnosť nám hovorí, že pravdepodobnosť, že sa niečo stane v budúcnosti nezávisí od toho, či sa to stalo alebo nestalo v minulosti. Vďaka zabúdacej vlastnosti potom nie je pri modeli *Geom/Geom/1* potrebné definovať žiadne pomocné premenné, ako tomu bolo v prípade všeobecného *G/GI/1* modelu. Na opísanie stavu systému nám postačí jednorozmerný reťazec $\{u_k\}$ pre $k = 0, 1, \dots, m$, kde u_k vyjadruje celkový počet zákazníkov v systéme v slotu k . Tento reťazec spĺňa Markovovu vlastnosť a tvorí tak Markovov reťazec.

Ďalej vieme, že pravdepodobnosť, že počas slotu k do systému príde zákazník je λ a pravdepodobnosť, že počas tohto slotu zákazník odíde je μ . Na základe týchto pravdepodobností vieme potom odvodiť príslušnú maticu prechodu P :

$$P = \begin{bmatrix} 1 - \lambda + \lambda\mu & \lambda(1 - \mu) & 0 & 0 & \dots \\ \mu(1 - \lambda) & \lambda\mu + (1 - \mu)(1 - \lambda) & \lambda(1 - \mu) & 0 & \dots \\ 0 & \mu(1 - \lambda) & \lambda\mu + (1 - \mu)(1 - \lambda) & \lambda(1 - \mu) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Následným vyriešením systému $\pi \cdot P = \pi$ dostávame systém rovníc $\pi_k = \rho^k \pi_0$ pre $\forall k \geq 1$, kde $\rho = \frac{\lambda(1-\mu)}{\mu(1-\lambda)}$. Využitím vzťahu $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$ a za predpokladu, že je splnená podmienka stacionarity $\rho < 1$, dostávame príslušné stacionárne rozdelenie *Geom/Geom/1* modelu:

$$\begin{aligned} P[u = 0] &= \pi_0 = 1 - \rho, \\ P[u = k] &= \pi_k = (1 - \rho)\rho^k. \end{aligned} \tag{24}$$

Rovnako ako pri *M/M/1* modeli si potom vieme jednoducho odvodiť niektoré výkonnostné parametre ako napríklad stredný stav systému:

$$E[u] = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Odvodenie pravdepodobností, že v systéme *M/M/1* je v ustálenom stave práve k zákazníkov môžeme nájsť napríklad v [11]. Počet zákazníkov má v takomto prípade geometrické pravdepodobnostné rozdelenie s parametrom $(1 - \rho)$:

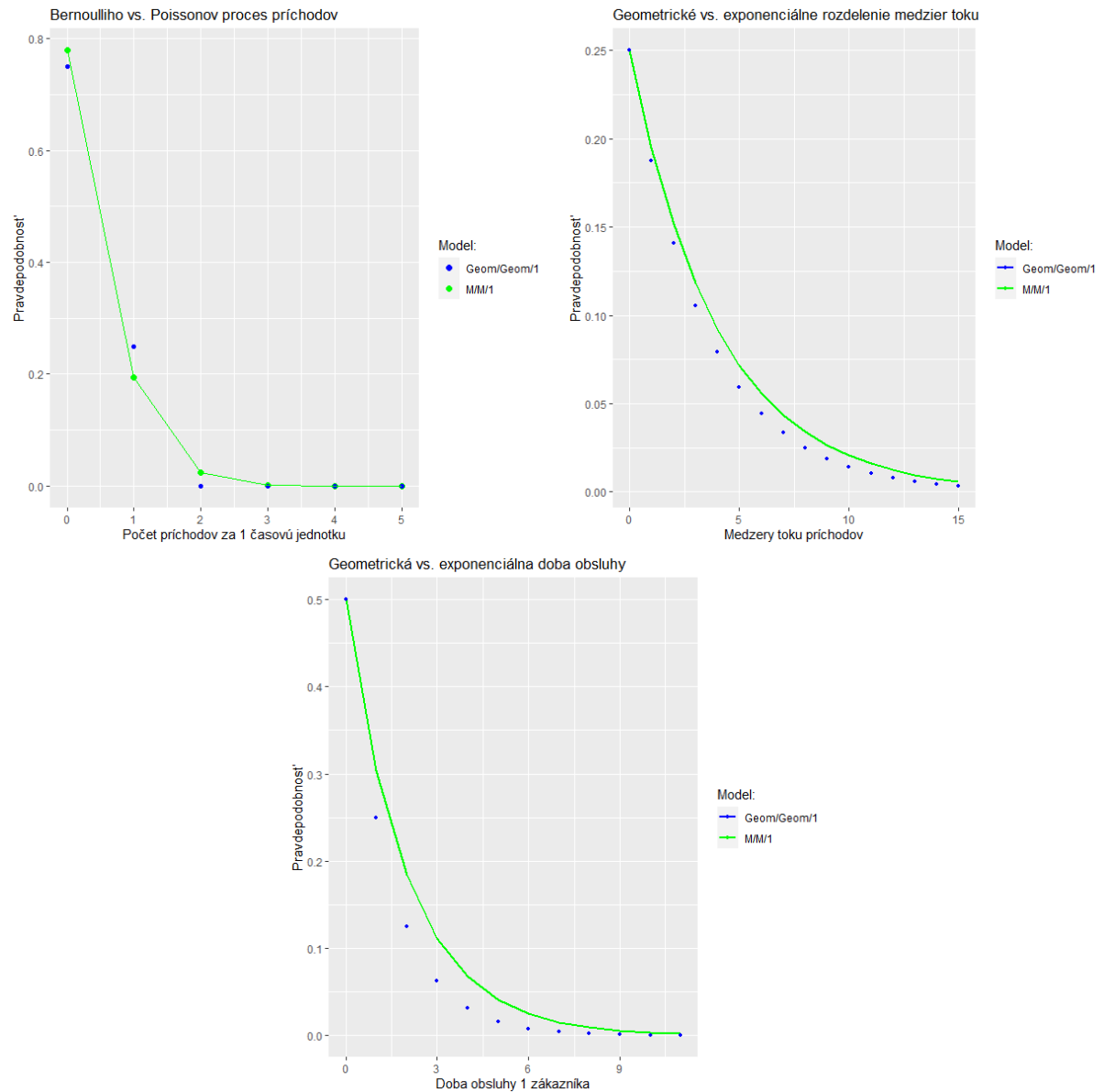
$$\begin{aligned} P[u = 0] &= 1 - \rho, \\ P[u = k] &= (1 - \rho)\rho^k \end{aligned} \tag{25}$$

a priemerný počet zákazníkov v systéme je rovný:

$$E[u] = \frac{\rho}{1 - \rho},$$

kde $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Vidíme teda, že stacionárne rozdelenie modelu $Geom/Geom/1$ je rovnaké ako stacionárne rozdelenie v spojitom modeli $M/M/1$.

Na Obr. 4 môžeme vidieť grafické porovnanie modelov $M/M/1$ a $Geom/Geom/1$. Pričom ako vstupné parametre sme zvolili $\lambda = 0.25$ a $\mu = 0.5$, teda tak, aby $\rho < 1$.



Obr. 4: Grafické porovnanie $M/M/1$ a $Geom/Geom/1$ modelov

Na prvom grafe môžeme vidieť porovnanie Bernoulliho vs. Poissonovho procesu príchodov zákazníkov do systému. Teda s akou pravdepodobnosťou vstúpi nejaký počet zákazníkov do systému za 1 časovú jednotku. Na druhom grafe vidíme porovnanie geometrického a exponenciálneho rozdelenia medzier toku príchodov. Teda s akou pravdepodobnosťou

budú intervaly medzi za sebou idúcimi zákazníkmi rovné hodnotám na osi x. Na poslednom, treťom grafe, vidíme porovnanie geometrickej a exponenciálnej doby obsluhy. Teda s akou pravdepodobnosťou bude doba obsluhy 1 zákazníka rovná hodnotám na osi x.

2.3.2 Diskrétna analógia $M/G/1$ modelu

Ďalším často používaným spojitým modelom, z ktorého sa dá pomerne jednoducho odvodiť jeho diskretná verzia, je model $M/G/1$. Pri ňom predpokladáme Poissonov proces príchodov, dobu obsluhy so všeobecným rozdelením a jednu obslužnú linku v systéme. Diskrétnou analógiou tohto modelu bude *Geom/G/1* model.

Proces príchodov v tomto modeli opäť definujeme ako Bernoulliho proces s parametrom λ , a teda že s pravdepodobnosťou λ príde do systému jeden zákazník a s pravdepodobnosťou $1 - \lambda$ nepríde nikto. Definujeme:

- a_k - počet príchodov za k -ty slot ($\sim \text{Alt}(\lambda)$)
- PDF : $a(n) = P(n \text{ príchodov za } k\text{-ty slot}) = P(a_k = n) = \lambda^n(1 - \lambda)^{1-n}, n \geq 0$
- PGF : $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n)z^n = 1 - \lambda(1 - z)$
- stredný počet príchodov: $E[a] = A'(1) = \lambda$

Doba obsluhy má v tomto modeli všeobecné rozdelenie. Definujeme:

- s_i - náhodný počet slotov potrebných k obsluhu i -teho zákazníka
- PDF : $b(n) = P(\text{obsluha } i\text{-teho zákazníka zaberie } n \text{ slotov}) = P(s_i = n), n \geq 0$
- PGF : $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)z^n$
- stredná doba obsluhy: $E[s] = B'(1) = \frac{1}{\mu}$

Podmienka stability je v tvare:

$$\rho = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} < 1.$$

Odvodenie stacionárneho rozdelenia:

Definujeme:

- u_k - počet zákazníkov v systéme rovno po dokončení obsluhy k -teho zákazníka (teda v čase jeho odchodu); PGF: $P(z)$
- g_k - počet príchodov počas doby obsluhy k -teho zákazníka; PGF: $G(z)$

pričom náhodné premenné u_k a g_k sú navzájom nezávislé. Správanie systému vyjadríme pomocou rovníc:

$$u_{k+1} = \begin{cases} g_{k+1}, & \text{ak } u_k = 0, \\ u_k - 1 + g_{k+1}, & \text{ak } u_k > 0. \end{cases}$$

Slovne:

Ak v čase odchodu k -teho zákazníka zostáva systém prázdny ($u_k = 0$), tak po skončení obsluhy ďalšieho zákazníka, ktorý do systému prišiel neskôr, sa v systéme bude nachádzať len toľko zákazníkov, koľko prišlo počas trvania jeho obsluhy (g_{k+1}). Ak však systém nezostáva prázdny ($u_k > 0$), tak po skočení obsluhy ďalšieho zákazníka budú v systéme tí zákazníci, ktorí už stáli v rade ($u_k - 1$) a zároveň pribudnú zákazníci, ktorí prišli počas jeho doby obsluhy.

Tak ako v prípade *Geom/Geom/1* modelu, vďaka zabúdacej vlastnosti geometrického rozdelenia, reťazec $\{u_k\}$ spĺňa Markovovu vlastnosť a tvorí Markovov reťazec, čo nám značne zjednodušuje odvodenie stacionárneho rozdelenia. Definujeme si teda príslušnú PGF pre stav systému v čase odchodu k -teho zákazníka:

$$P_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P[u_k = n]z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = E[z^{u_k}],$$

$$P_{k+1}(z) = E[z^{u_{k+1}}] = \dots = P_k(0)G(z) + \frac{1}{z}G(z)(P_k(z) - P_k(0)).$$

PGF $P(z)$ v ustálenom systéme má tvar:

$$P(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} P[u_k = n]z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = \lim_{k \rightarrow \infty} E[z^{u_k}]$$

a zároveň vieme, že musí platiť aj:

$$P(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{k+1}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} E[z^{u_{k+1}}].$$

Po dosadení $P_{k+1}(z)$ a ďalších výpočtoch dostávame tvar $P(z)$:

$$P(z) = \frac{P(0)G(z)(z-1)}{(z-G(z))}, \quad (26)$$

kde:

$$P(0) = 1 - \rho.$$

Ďalej si definujeme PGF pre počet príchodov za dobu obsluhy ľubovoľného zákazníka. Vieme, že doba obsluhy $(k+1)$ -vého zákazníka je s_{k+1} a trvá náhodný počet slotov, ktorý má vytvárajúcu funkciu $B(z)$. Nech a_j je počet zákazníkov, ktorí prídu počas j -teho slotu tejto obsluhy. Potom a_j sú náhodné premenné s PGF $A(z)$. Pre vytvárajúcu funkciu celkového počtu zákazníkov g_{k+1} , ktorí prídu počas tejto doby obsluhy dostaneme:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{r=0}^{\infty} P[g_{k+1} = r] \cdot z^r = \sum_{r=0}^{\infty} P\left[\sum_{j=1}^{s_{k+1}} a_j = r\right] \cdot z^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P\left[\sum_{j=1}^{s_{k+1}} a_j = r \mid s_{k+1} = m\right] P[s_{k+1} = m] \cdot z^r \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} P[s_{k+1} = m] \sum_{r=0}^{\infty} P\left[\sum_{j=1}^m a_j = r\right] \cdot z^r \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} P[s_{k+1} = m] \cdot A(z)^m = B(A(z)) = B(1 - \lambda + \lambda z), \end{aligned} \quad (27)$$

kde sme využili, že vytvárajúca funkcia súčtu nezávislých náhodných premenných $\sum_{j=1}^m a_j$ je súčin vytvárajúcich funkcií, teda $A(z)^m$. Po dosadení do (26) dostávame tvar vytvárajúcej funkcie pre celkový počet zákazníkov v ustálenom systéme v čase odchodu ľubovoľného zákazníka zo systému:

$$P(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)B(1 - \lambda + \lambda z)}{B(1 - \lambda + \lambda z) - z}. \quad (28)$$

Rovnaký tvar by sme získali dosadením príslušných pravdepodobnostných a vytvárajúcich funkcií tohto modelu do rovnice $U(z)$ (14), ktorú sme si odvodili pre všeobecný $GI/G/1$ model.

Ododenie tvaru stacionárneho rozdelenia spojitého $M/G/1$ modelu nájdeme napríklad v [11]. Stredný počet zákazníkov tohto spojitého modelu v ustálenom systéme má tvar:

$$E[u] = \frac{K''(1)}{2(1 - \rho)} + \rho,$$

pričom vieme, že ide o tzv. Chinčín-Pollaczekovu formulu. Prislúchajúca vytvárajúca funkcia pre počet zákazníkov v systéme je v tvare:

$$P(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)K(z)}{K(z) - z}, \quad (29)$$

kde $K(z)$ je vytvárajúcou funkciou doby obsluhy. Vidíme, že stacionárne rozdelenie spojitého $M/G/1$ modelu má rovnaký tvar ako stacionárne rozdelenie diskrétného $Geom/G/1$ modelu (28).

3 Systémy HO s dvoma typmi zákazníkov

V tejto kapitole diplomovej práce sa pozrieme na systémy hromadnej obsluhy s dvoma typmi zákazníkov. Takéto systémy má zmysel uvažovať práve preto, lebo v realite často zákazníci netvorí homogénnu skupinu a možno ich zaradiť do rôznych podskupín (typov). Tie sa navzájom môžu líšiť napríklad dobou obsluhy alebo časom, ktorý je ochotný daný typ zákazníka zotrvať v systéme.

Práve odlišná doba obsluhy komplikuje analýzu SHO s viacerými typmi zákazníkov. Vzniká totiž otázka, akým spôsobom majú jednotliví zákazníci pristupovať k obsluhu. Zoberme si napríklad disciplínu výberu FIFO. Podľa nej zákazníci pristupujú k obsluhu presne v takom poradí, v akom prišli do systému, a teda zákazníci, ktorí prišli napr. v slotu k budú obslužení skôr ako zákazníci, ktorí prišli v slotu $k + 1$. Ako však určiť poradie zákazníkov, ktorí prišli počas jedného, toho istého slotu? Pri homogénnych zákazníkoch sme túto otázku riešiť nemuseli. Všetci zákazníci, a teda aj tí, ktorí prišli v rámci jedného slotu sa navzájom v ničom nelíšili (ani trvaním obsluhy), a tak mohol byť ich výber k obsluhu náhodný. Aj v prípade heterogénnych zákazníkov by sme mohli predpokladať FIFO disciplínu s náhodným výberom zákazníkov, ktorí prišli v rámci jedného slotu, avšak takýto systém by bol veľmi komplikovaný [5].

Existuje viacero prístupov ako si s týmto problémom poradiť. Jedným z nich je nastavenie deterministickej doby obsluhy, rovnakej pre oba typy zákazníkov, ktorá trvá napríklad 1 slot [25]. V tomto prípade však ide o veľké zjednodušenie modelu, v ktorom zanedbávame práve to, v čom sa jednotlivé typy medzi sebou najčastejšie líšia.

Ďalšou možnosťou je nastavenie systému tak, že v rámci jedného slotu môže prísť len jeden typ zákazníka. Takýmto spôsobom nám vznikne systém čisto s FIFO disciplínou. Takýto predpoklad však môžeme považovať za trochu umelý.

Častým riešením je zavedenie tzv. HoL disciplíny (angl. *head-of-the-line priority*), v ktorej je jeden typ zákazníka prioritne obslužený a druhý typ sa k obsluhu dostane až v momente, keď sa už v systéme nenachádza žiaden zákazník prvého typu [25].

Ako posledný príklad uvedieme kombináciu HoL a FIFO disciplíny, tzv. SBO disciplínu (angl. *slot-bound priority service rule*). V nej zákazníci, ktorí prišli v rámci toho istého slotu pristupujú k obsluhu podľa disciplíny HoL. Po obslužení všetkých týchto zákazníkov prídu na rad tí, ktorí prišli v ďalšom slotu. Ak máme teda napríklad systém s dvoma typmi

zákazníkov a ako prioritný je určený prvý typ, potom spomedzi všetkých zákazníkov, ktorí prišli v rámci slotu k , budú najskôr obslužení všetci zákazníci typu 1 a po ich obslužení prídu na rad zákazníci typu 2. Po dokončení obsluhy všetkých týchto zákazníkov pristúpia k obsluhu zákazníci, ktorí prišli v rámci $(k+1)$ -ho slotu. Tí budú opäť pristupovať k obsluhu podľa HoL disciplíny [6].

V našom modeli, ktorý budeme analyzovať v tejto kapitole zvolíme iný prístup. Zavedieme predpoklad, že doba obsluhy sa nebude líšiť podľa toho, do akej skupiny daný zákazník patrí, ale podľa toho, či zákazník, ktorý v danom momente pristupuje k obsluhu, je rovnakého typu ako predchádzajúci zákazník. Detailnejší popis bude uvedený v nasledujúcej podkapitole. Pri odvodzovaní matematického modelu a stacionárneho rozdelenia budeme najviac vychádzať z článku [20].

3.1 Základná charakteristika systému

Náš model z 2. kapitoly rozšírime o predpoklad, že do systému prichádzajú dva typy zákazníkov, ktoré si označíme ako typ C_1 a typ C_2 . Pravdepodobnosť, že zákazník je typu C_1 označíme ako α a pravdepodobnosť, že zákazník je typu C_2 označíme ako $1 - \alpha$. Ich príchody do systému sú nezávislé (nekorelované) a úplne náhodne so všeobecným rozdelením.

Ako sme už spomínali v úvode tejto kapitoly, zákazníci budú pristupovať k obsluhu podľa disciplíny FIFO a ich doba obsluhy bude závisieť len od toho, či dvaja za sebou idúci zákazníci sú rovnakého alebo rôzneho typu, tzn. oba typy majú rovnakú dobu obsluhy a platia pre ne rovnaké pravidlá (angl. *typeless service time*). Ak sú obaja rovnakého typu, ich doba obsluhy bude deterministická a bude rovná 1 slotu. Ak sa však bude ich typ líšiť, doba obsluhy bude mať všeobecné rozdelenie a môže trvať 1 alebo viac slotov.

Jedným z hlavných dôvodov prečo ma zmysel takýto predpoklad v systéme uvažovať je fakt, že každý typ vyžaduje iný druh obsluhy, a teda je potreba prispôbiť server na obsluhu daného typu zákazníka. Ak k obsluhu pristupujú zákazníci rovnakého typu, server pracuje rovnako a nie je potrebné ho prenastavovať. Doba obsluhy teda trvá 1 slot. Avšak v momente, kedy k obsluhu pristúpi druhý typ, požadujúci iný druh obsluhy, server treba prenastaviť, čo zaberie istý čas a doba obsluhy daného zákazníka sa môže predĺžiť.

S takýmto SHO sa môžeme stretnúť vo viacerých sférach bežného života. Jedným

z príkladov môže byť ukladanie tovaru do regálov v obchodnom reťazci. Ak pracovník (server) vyberá z košíka produkty z rovnakej sekcie, doba obsluhy, teda doba vykladania jednotlivých produktov sa výrazne nelíši a môžeme ju považovať za konštantnú. Ak však z košíka vytiahne produkt zo sekcie na opačnom konci obchodu, doba obsluhy sa predĺži o dobu, ktorú pracovník stráví presunom na dané miesto. Ďalším príkladom je prenasťavanie obslužnej linky pri spracovávaní rôznych druhov polotovarov, prenasťavanie tlačiarne pri požiadavke na iný typ tlače a podobne.

3.2 Matematický model

Budeme predpokladať, že platia všetky predpoklady pre SHO s diskretným časom uvedené v podkapitole 2.1 a opäť si definujeme proces príchodov a dobu obsluhy.

Proces príchodov:

Celkový (agregovaný) počet zákazníkov prichádzajúcich do systému v jednotlivých za sebou idúcich slotoch vytvára postupnosť nezávislých rovnako rozdelených nezáporných diskretných náhodných premenných so spoločnou pravdepodobnostnou funkciou $a(n)$ a spoločnou vytvárajúcou funkciou $A(z)$:

- PDF: $a(n) = P[n \text{ príchodov za 1 slot}], n \geq 0$
- PGF: $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \cdot z^n$
- intenzita príchodov: $A'(1) = \lambda$

Výskyt zákazníkov typu C_1 a C_2 v rámci prúdu príchodov je v tomto prípade nezávislý a úplne náhodný s pp. α resp. $1 - \alpha$ a tieto pravdepodobnosti možno zapísať nasledovne:

$$\alpha = P[t_{k+1} = C_1 \mid t_k = C_1] = P[t_{k+1} = C_1 \mid t_k = C_2] = P[t_k = C_1],$$

$$1 - \alpha = P[t_{k+1} = C_2 \mid t_k = C_1] = P[t_{k+1} = C_2 \mid t_k = C_2] = P[t_k = C_2],$$

pričom t_k označuje typ zákazníka k , teda zákazníka, ktorý do systému prišiel ako k -ty, a teda ako k -ty pristupuje k obsluhu. Rozdiel s modelom v 2. kapitole spočíva v tom, že tam index k označoval slot, počas ktorého daný zákazník prišiel do systému. Teraz však potrebujeme rozlíšiť poradie v akom zákazníci vstúpili do systému aj v rámci jedného slotu. Ďalej si označíme t_{C_1} a t_{C_2} ako pravdepodobnosti, že Markovov reťazec v ustálenom

režime nájdeme v stave C_1 resp. C_2 :

$$\begin{aligned} t_{C_1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} P[t_k = C_1] = \alpha, \\ t_{C_2} &= \lim_{k \rightarrow \infty} P[t_k = C_2] = 1 - \alpha. \end{aligned} \tag{30}$$

Doba obsluhy:

Ako sme už spomínali, doba obsluhy je pre oba typy rovnaká a mení sa len v závislosti od toho, či dvaja, za sebou idúci zákazníci sú rovnakého alebo rôzneho typu. Ak rovnakého, doba obsluhy je rovná 1 slotu. Ak sa však ich typy líšia, doba obsluhy môže trvať viac ako 1 slot a definujeme ju pomocou pravdepodobnostnej funkcie $b(n)$ a vytvárajúcej funkcie $B(z)$:

- PDF: $b(n) = P[\text{obsluha zákazníka zaberie } n \text{ slotov}], n \geq 1$
- PGF: $B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n).z^n$
- stredná doba obsluhy: $B'(1) = \frac{1}{\mu} > 1$

3.3 Analýza systému

3.3.1 Obsadenosť systému v čase odchodu ľubovoľného zákazníka

Zavedieme si značenie:

- d_k - počet zákazníkov v systéme hneď po ukončení obsluhy k -teho zákazníka, teda v čase jeho odchodu

Spolu s typom daného zákazníka dostávame dvojrozmerný Markovov reťazec $\{(t_k, d_k)\}$.

Príslušné systémové rovnice (slovný popis rovníc je uvedený nižšie):

$$d_{k+1} = \begin{cases} d_k - 1 + g_{k+1}, & \text{ak } d_k > 0, \\ m_k, & \text{ak } d_k = 0, \end{cases} \tag{31}$$

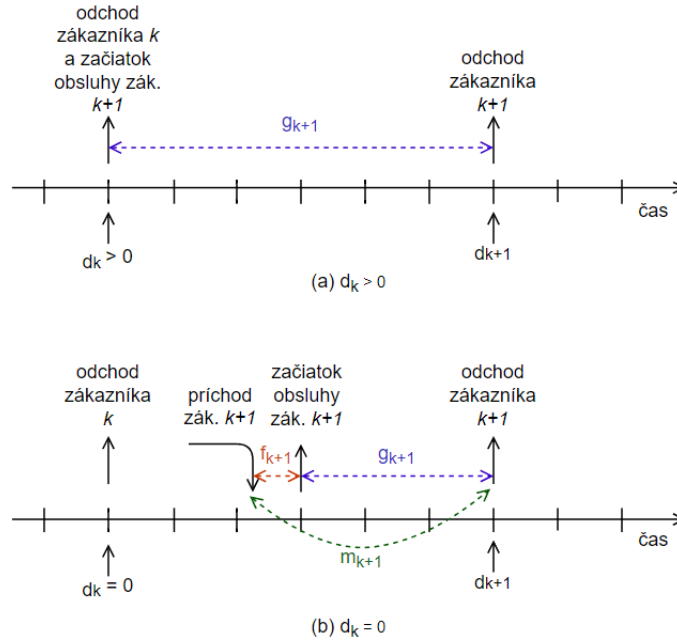
kde:

- g_{k+1} - celkový počet príchodov počas doby obsluhy $(k+1)$ -ho zákazníka
- $m_{k+1} = g_{k+1} + f_{k+1}$ - počet zákazníkov, kt. do systému vstúpili medzi príchodom a odchodom $(k+1)$ -ho zákazníka

- f_{k+1} - celkový počet zákazníkov, kt. prišli v slotu príchodu $(k+1)$ -ho zákazníka

Slovne môžeme správanie systému opísať nasledovne:

Ak v čase odchodu k -teho zákazníka nezostáva systém prázdny ($d_k > 0$), tak k obsluhu rovno pristupuje $(k+1)$ -vý zákazník. Potom počet zákazníkov v systéme po dokončení jeho obsluhy bude rovný počtu zákazníkov, ktorí boli okrem neho v systéme pri odchode k -teho zákazníka ($d_k - 1$) a pribudnú zákazníci, ktorí prišli počas trvania jeho obsluhy (g_{k+1}). Ak však v čase odchodu k -teho zákazníka zostáva systém prázdny ($d_k = 0$), potom $(k+1)$ -vý zákazník do systému vstúpi až v priebehu nejakého ďalšieho slotu. Z predpokladov modelu vieme, že jeho doba obsluhy sa však môže začať najskôr až na začiatku nasledujúceho slotu. Potom počet zákazníkov v systéme po dokončení jeho obsluhy bude rovný počtu zákazníkov, ktorí prišli medzi jeho príchodom a odchodom zo systému. Ten pozostáva zo zákazníkov, ktorí prišli v tom istom slotu, teda ešte pred začatím jeho obsluhy (f_{k+1}) a zo zákazníkov, ktorí prišli v priebehu jeho obsluhy (g_{k+1}). Grafické zobrazenie:



Obr. 5: Grafické zobrazenie systému (zdroj: vlastné spracovanie)

Ďalej si určíme PGF pre tieto náhodné premenné:

1) f_{k+1}

Najskôr si odvodíme tvar pravdepodobnostnej funkcie:

$$f(n) = P[n \text{ ďalších príchodov v danom slotu} \mid \text{aspoň 1 príchod}] = \frac{a(n+1)}{1 - A(0)}, n \geq 0.$$

Potom tvar vytvárajúcej funkcie premennej f_{k+1} je:

$$\begin{aligned} F(z) &= E[z^{f_{k+1}}] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(n+1)}{1-A(0)} z^n = \frac{1}{1-A(0)} \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} a(n)z^n \\ &= \frac{A(z) - A(0)}{z(1-A(0))}. \end{aligned} \quad (32)$$

Táto PDF a PGF platí pre oba typy zákazníkov a nezávisí ani od toho, či sú dvaja za sebou idúci zákazníci toho istého alebo rôzneho typu. Avšak náhodná premenná g_{k+1} , a teda aj m_{k+1} od tohto faktoru závisia, pretože to, akého typu je zákazník, vplýva na dĺžku doby obsluhy, a teda aj na počet zákazníkov, ktorí počas nej prídu do systému. Príslušné PGF pre tieto premenné si odvodíme nasledovne:

2) g_{k+1}

Ak sú dvaja za sebou idúci zákazníci rovnakého typu, ich doba obsluhy je rovná 1 slotu, a teda vytvárajúca funkcia pre počet príchodov počas doby obsluhy $(k+1)$ -vého zákazníka bude rovná vytvárajúcej funkcii pre počet príchodov počas 1 slotu $A(z)$:

$$E[z^{g_{k+1}} \mid t_{k+1} = t_k] = A(z).$$

Ak sú zákazníci rôzneho typu, potom s_{k+1} je doba obsluhy $(k+1)$ -vého zákazníka. Táto doba trvá náhodný počet slotov, ktorý má vytvárajúcu funkciu $B(z)$. Nech a_j je počet zákazníkov, ktorí prídu počas j -teho slotu tejto obsluhy, a teda a_j sú náhodné premenné s vytvárajúcou funkciou $A(z)$. Pre vytvárajúcu funkciu celkového počtu zákazníkov g_{k+1} , ktorí prídu počas tejto doby obsluhy dostaneme rovnakými úpravami ako v (27) pri odvádzaní $G(z)$ v modeli $Geom/G/1$ tvar:

$$E[z^{g_{k+1}} \mid t_{k+1} \neq t_k] = \sum_{r=0}^{\infty} P[g_{k+1} = r] \cdot z^r = \sum_{r=0}^{\infty} P\left[\sum_{j=1}^{s_{k+1}} a_j = r\right] \cdot z^r = B(A(z)).$$

3) m_{k+1}

Využitím vytvárajúcich funkcií navzájom nezávislých náhodných premenných g_{k+1} a f_{k+1} , ktoré sme si odvodili vyššie, dostávame vytvárajúce funkcie náhodnej premennej m_{k+1} :

$$\begin{aligned} E[z^{m_{k+1}} \mid t_{k+1} = t_k] &= E[z^{g_{k+1}+f_{k+1}} \mid t_{k+1} = t_k] = A(z) \cdot F(z), \\ E[z^{m_{k+1}} \mid t_{k+1} \neq t_k] &= E[z^{g_{k+1}+f_{k+1}} \mid t_{k+1} \neq t_k] = B(A(z)) \cdot F(z). \end{aligned}$$

Pri odvodzovaní obsadenosti systému v čase odchodu zákazníka budeme predpokladať, že je splnená podmienka stability:

$$\rho = \lambda \cdot E[s] < 1, \quad (33)$$

kde s je doba obsluhy ľubovoľného zákazníka v ustálenom systéme. Jej strednú dobu potom môžeme zapísať ako:

$$E[s] = t_A \cdot 1 + t_B \cdot \frac{1}{\mu}, \quad (34)$$

kde:

$$t_A = \alpha \cdot t_{C_1} + (1 - \alpha) \cdot t_{C_2},$$

$$t_B = (1 - \alpha) \cdot t_{C_1} + \alpha \cdot t_{C_2},$$

pričom t_A je ustálená pravdepodobnosť, že dvaja za sebou idúci zákazníci sú rovnakého typu (stredná doba obsluhy = 1 slot) a t_B je ustálená pravdepodobnosť, že dvaja za sebou idúci zákazníci sú rôznych typov (stredná doba obsluhy = $\frac{1}{\mu}$). Dosadením vzťahov (30) pre t_{C_1} a t_{C_2} dostávame:

$$t_A = \alpha^2 + (1 - \alpha)^2,$$

$$t_B = 2\alpha(1 - \alpha).$$

Dosadením t_A a t_B do (34) a následným dosadením do (33) dostávame po úpravách tvar podmienky stability:

$$\begin{aligned} \rho &= [\lambda^2 + (1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\frac{1}{\mu}] \\ &= \lambda[1 + 2\alpha(1 - \alpha)(\frac{1}{\mu} - 1)]. \end{aligned} \quad (35)$$

Za predpokladu, že je táto podmienka stability splnená, definujeme si spoločné pravdepodobnostné funkcie pre Markovov reťazec $\{(t_k, d_k)\}$:

$$p_{C_1}(i) = \lim_{k \rightarrow \infty} P[t_k = C_1, d_k = i], \forall i \geq 0,$$

$$p_{C_2}(i) = \lim_{k \rightarrow \infty} P[t_k = C_2, d_k = i], \forall i \geq 0$$

a rovnako aj príslušné vytvárajúce funkcie tohto reťazca:

$$\begin{aligned} P_{C_1}(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{C_1}(i) \cdot z^i, \\ P_{C_2}(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{C_2}(i) \cdot z^i. \end{aligned}$$

Pričom PGF pre celkový stav systému v ustálenom stave dostaneme ako súčet týchto funkcií:

$$P(z) = P_{C_1}(z) + P_{C_2}(z). \quad (36)$$

Pre Markovov reťazec $\{(t_{k+1}, d_{k+1})\}$, teda stav systému v čase odchodu $(k+1)$ -ho zákazníka, je pravdepodobnosť $p_{C_1}(j)$ v tvare:

$$\begin{aligned} p_{C_1}(j) &= \lim_{k \rightarrow \infty} P[t_{k+1} = C_1, d_{k+1} = j] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} P[t_k = C_1, d_k = i] \cdot P[t_{k+1} = C_1, d_{k+1} = j \mid t_k = C_1, d_k = i] \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} P[t_k = C_2, d_k = i] \cdot P[t_{k+1} = C_1, d_{k+1} = j \mid t_k = C_2, d_k = i] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{C_1}(i) \cdot \alpha \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} P[d_{k+1} = j \mid t_k = C_1, t_{k+1} = C_1, d_k = i] \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} p_{C_2}(i) \cdot \alpha \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} P[d_{k+1} = j \mid t_k = C_2, t_{k+1} = C_1, d_k = i]. \end{aligned}$$

Dosadením do PGF dostaneme:

$$\begin{aligned} P_{C_1}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{C_1}(j) \cdot z^j \\ &= \alpha \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p_{C_1}(i) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} P[d_{k+1} = j \mid t_k = C_1, t_{k+1} = C_1, d_k = i] \cdot z^j \\ &\quad + \alpha \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p_{C_2}(i) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} P[d_{k+1} = j \mid t_k = C_2, t_{k+1} = C_1, d_k = i] \cdot z^j \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} p_{C_1}(i) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} E[z^{d_{k+1}} \mid t_k = C_1, t_{k+1} = C_1, d_k = i] \\ &\quad + \alpha \sum_{i=0}^{\infty} p_{C_2}(i) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} E[z^{d_{k+1}} \mid t_k = C_2, t_{k+1} = C_1, d_k = i]. \end{aligned}$$

Dosadením rovníc (31) a vytvárajúcich funkcií pre f_{k+1}, m_{k+1} a g_{k+1} si odvodíme limity v rovnici pre $P_{C_1}(z)$. Ak $d_k > 0$, a teda $i > 0$, potom:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E[z^{d_{k+1}} \mid t_k = C_1, t_{k+1} = C_1, d_k = i] &= \lim_{k \rightarrow \infty} E[z^{d_k - 1 + g_{k+1}} \mid t_k = C_1, t_{k+1} = C_1, d_k = i] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} E[z^{i-1+g_{k+1}} \mid t_k = t_{k+1} = C_1] \\ &= z^{i-1} \cdot E[z^{g_{k+1}} \mid t_k = t_{k+1} = C_1] \\ &= z^{i-1} \cdot A(z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} E[z^{d_{k+1}} \mid t_k = C_2, t_{k+1} = C_1, d_k = i] &= \lim_{k \rightarrow \infty} E[z^{d_k - 1 + g_{k+1}} \mid t_k = C_2, t_{k+1} = C_1, d_k = i] \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} E[z^{i-1+g_{k+1}} \mid t_k = C_2, t_{k+1} = C_1] \\
&= z^{i-1} \cdot E[z^{g_{k+1}} \mid t_k = C_2, t_{k+1} = C_1] \\
&= z^{i-1} \cdot B(A(z)).
\end{aligned}$$

Ak $d_k = i = 0$, potom:

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} E[z^{d_{k+1}} \mid t_k = t_{k+1} = C_1, d_k = 0] &= \lim_{k \rightarrow \infty} E[z^{h_{k+1}} \mid t_k = t_{k+1} = C_1] \\
&= F(z) \cdot A(z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} E[z^{d_{k+1}} \mid t_k = C_2, t_{k+1} = C_1, d_k = 0] &= \lim_{k \rightarrow \infty} E[z^{h_{k+1}} \mid t_k = c_2, t_{k+1} = C_1] \\
&= F(z) \cdot B(A(z)).
\end{aligned}$$

Následne dosadíme do $P_{C_1}(z)$:

$$\begin{aligned}
P_{C_1}(z) &= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} p_{C_1}(i) \cdot z^{i-1} \cdot A(z) + \alpha \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p_{C_1}(0) \cdot F(z) \cdot A(z) \\
&\quad + \alpha \sum_{i=1}^{\infty} p_{C_2}(i) \cdot z^{i-1} \cdot B(A(z)) + \alpha \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p_{C_2}(0) \cdot F(z) \cdot B(A(z)) \\
&= \alpha(P_{C_1}(z) - P_{C_1}(0)) \cdot \frac{1}{z} \cdot A(z) + \alpha \cdot P_{C_1}(0) \cdot F(z) \cdot A(z) \\
&= \alpha(P_{C_2}(z) - P_{C_2}(0)) \cdot \frac{1}{z} \cdot B(A(z)) + \alpha \cdot P_{C_2}(0) \cdot F(z) \cdot B(A(z))
\end{aligned}$$

a po ďalších úpravách dostávame vzťah medzi $P_{C_1}(z)$ a $P_{C_2}(z)$:

$$\begin{aligned}
(z - \alpha A(z)) \cdot P_{C_1}(z) &= \alpha B(A(z)) P_{C_2}(z) \\
&\quad + \alpha A(z)(zF(z) - 1) \cdot P_{C_2}(0) \\
&\quad + \alpha B(A(z))(zF(z) - 1) P_{C_2}(0).
\end{aligned} \tag{37}$$

Rovnakým postupom, teda dosadením $p_{C_2}(j)$ do $P_{C_2}(z)$ a odvodením limít si vieme odvodiť aj $P_{C_2}(z)$. Po úpravách dostaneme:

$$\begin{aligned}
(z - (1 - \alpha)A(z)) \cdot P_{C_2}(z) &= (1 - \alpha)B(A(z))P_{C_1}(z) \\
&\quad + (1 - \alpha)A(z)(zF(z) - 1) \cdot P_{C_2}(0) \\
&\quad + (1 - \alpha)B(A(z))(zF(z) - 1)P_{C_1}(0).
\end{aligned} \tag{38}$$

Prenásobením rovnice (37) výrazom $(z - (1 - \alpha)A(z))$ a následným dosadením vzťahu (38) si vyjadríme $P_{C_1}(z)$. Rovnako prenasobením rovnice (38) výrazom $(z - \alpha A(z))$ a následným dosadením vzťahu (37) si vyjadríme $P_{C_2}(z)$. Dosadením vzťahu (32) pre $F(z)$ a získaných $P_{C_1}(z)$, $P_{C_2}(z)$ do rovnice (36) pre $P(z)$ dostávame:

$$\begin{aligned} & [z^2 - zA(z) + \alpha(1 - \alpha)A(z)^2 - \alpha(1 - \alpha)B(A(z))^2]P(z) = \\ & = \frac{A(z) - 1}{1 - A(0)} \cdot P(0) \cdot [\alpha(1 - \alpha)B(A(z))^2 - \alpha(1 - \alpha)A(z)^2 \\ & + zA(z) \frac{\alpha P_{C_1}(0) + (1 - \alpha)P_{C_1}(0)}{P(0)} + zB(A(z)) \cdot \frac{(1 - \alpha)P_{C_1}(0) + \alpha P_{C_1}(0)}{P(0)}]. \end{aligned}$$

Vyjadríme si $P(z)$:

$$P(z) = \frac{A(z) - 1}{1 - A(0)} \cdot P(0) \cdot \left[\frac{z(p_A A(z) + p_B B(A(z))) - \alpha(1 - \alpha)A(z)^2 + \alpha(1 - \alpha)B(A(z))^2}{z^2 - zA(z) + \alpha(1 - \alpha)A(z)^2 - \alpha(1 - \alpha)B(A(z))^2} \right], \quad (39)$$

kde:

$$\begin{aligned} P(0) &= P_{C_1}(0) + P_{C_2}(0), \\ p_A &= \frac{\alpha P_{C_1}(0) + (1 - \alpha)P_{C_1}(0)}{P(0)}, \\ p_B &= \frac{(1 - \alpha)P_{C_1}(0) + \alpha P_{C_1}(0)}{P(0)} = 1 - p_A. \end{aligned}$$

Zároveň platí:

$$\begin{aligned} p_A &= \lim_{k \rightarrow \infty} P[t_{k+1} = t_k \mid d_k = 0], \\ p_B &= \lim_{k \rightarrow \infty} P[t_{k+1} \neq t_k \mid d_k = 0], \end{aligned} \quad (40)$$

čo sú ustálené pravdepodobnosti, že pri odchode k -teho zákazníka, ktorý zanecháva systém prázdny, príde do systému zákazník rovnakého typu (p_A) resp. rôzneho typu (p_B) ako k -ty zákazník. Vo vzťahu (39) pre $P(z)$ si musíme ešte vyjadriť tieto 3 neznáme.

1) $P(0)$:

Využitím podmienky normálizácie, ktorá platí pre vytvárajúce funkcie, tzn: $P(1) = 1$, využitím L'Hopitalovho pravidla a dosadením vzťahu (35) pre ρ dostávame:

$$P(0) = \frac{[1 - A(0)][1 - \lambda(1 + 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \frac{1}{\mu}))]}{\lambda} = \frac{(1 - A(0))(1 - \rho)}{\lambda}. \quad (41)$$

2) p_A a p_B :

Vieme, že pre tieto pravdepodobnosti platí:

$$p_A + p_B = 1. \quad (42)$$

Ďalej vieme, že vytvárajúce funkcie sú ohraňované v uzavretom jednotkovom kruhu $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Využitím Rouchého teórie (angl. *Rouché's theorem*) [1] vieme dokázať, že menovateľ vytvárajúcej funkcie $P(z)$ nadobúda presne dva korene vo vnútri tohto jednotkového kruhu. Táto vlastnosť ďalej hovorí, že tieto korene musia byť zároveň aj koreňami čitateľa vytvárajúcej funkcie $P(z)$. Vieme, že prvý koreň je rovný 1, pretože dosadením $z = 1$ do vzťahu (39) pre $P(z)$ dostávame $A(1) - 1 = 0$, čím sa nám čitateľ vynuluje. Druhý koreň si označíme ako $\tilde{z}$. Pre menovateľ $P(\tilde{z})$ teda platí, že je rovný nule a dostávame tak rovnicu:

$$\tilde{z}^2 - \tilde{z}A(\tilde{z}) = -\alpha(1 - \alpha)A(\tilde{z})^2 + \alpha(1 - \alpha)B(A(\tilde{z}))^2.$$

Následným dosadením tejto rovnice do čitateľa $P(\tilde{z})$, využitím vzťahu (42) a vyjadrením p_A dostávame:

$$p_A = \frac{A(\tilde{z}) - B(A(\tilde{z})) - \tilde{z}}{A(\tilde{z}) - B(A(\tilde{z}))}. \quad (43)$$

Rovnakým postupom si vyjadríme aj p_B :

$$p_B = \frac{\tilde{z}}{A(\tilde{z}) - B(A(\tilde{z}))}. \quad (44)$$

Konkrétnu hodnotu $\tilde{z}$, a teda aj p_A a p_B , vieme numericky dopočítať cez hľadanie koreňov funkcie napríklad v prostredí R.

3.3.2 Obsadenosť systému na začiatku ľubovoľného slotu

Z kapitoly 2 už vieme, že pre všetky diskkrétne modely hromadnej obsluhy s 1 serverom a nezávislými príchodmi platí vzťah (18):

$$P(z) = \frac{A(z) - 1}{\lambda(z - 1)}U(z),$$

teda vzťah medzi vytvárajúcou funkciou pre obsadenosť systému v čase odchodu zákazníka $P(z)$ a vytvárajúcou funkciou pre obsadenosť systému na začiatku ľubovoľného slotu $U(z)$. Po dosadení (39) do tohto vzťahu a ďalších úpravách teda dostávame tvar vytvárajúcej funkcie pre obsadenosť systému s viacerými typmi zákazníkov na začiatku ľubovoľného slotu:

$$U(z) = (1 - \rho)(z - 1) \cdot \left[\frac{z(p_A A(z) + p_B B(A(z))) - \alpha(1 - \alpha)A(z)^2 + \alpha(1 - \alpha)B(A(z))^2}{z^2 - zA(z) + \alpha(1 - \alpha)A(z)^2 - \alpha(1 - \alpha)B(A(z))^2} \right]. \quad (45)$$

Zo vzťahu pre $U(z)$ vieme potom odvodiť rôzne výkonnostné parametre.

3.3.3 Výkonnostné parametre

$E[u]$ - stredná obsadenosť systému na začiatku ľubovoľného slotu

- u - obsadenosť systému na začiatku ľubovoľného slotu v ustálenom systéme

Z vlastností vytvárajúcich funkcií vieme, že jej strednú hodnotu vypočítame ako:

$$E[u] = U'(1).$$

Pred samotným derivovaním $U(z)$ si ešte definujeme vytvárajúcu funkciu pre dobu obsluhy ľubovoľného zákazníka $S(z)$:

$$\begin{aligned} S(z) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (P[s_k = 1 | t_k = t_{k-1}] \cdot z + \sum_{n=1}^{\infty} P[s_k = n | t_k \neq t_{k-1}] \cdot z^n) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (P[t_k = t_{k-1}] \cdot P[s_k = 1] \cdot z + P[t_k \neq t_{k-1}] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P[s_k = n] \cdot z^n) \\ &= t_A \cdot z + t_B \cdot B(z). \end{aligned}$$

Využitím vytvárajúcej funkcie $S(z)$ a po ďalších úpravách dostávame konečný tvar $E[u]$:

$$\begin{aligned} E[u] &= \rho + \frac{\lambda^2 S''(1) + A''(1) \cdot S'(1)}{2(1 - \rho)} + 2\lambda(1 - \frac{1}{\mu})\alpha(1 - \alpha) \\ &\quad + p_B \lambda(\frac{1}{\mu} - 1) + \frac{\lambda^2(\frac{1}{\mu} - 1)^2 \alpha(1 - \alpha)(1 - 4\alpha(1 - \alpha))}{1 - \rho}. \end{aligned} \quad (46)$$

$E[o]$ - stredná doba zákazníka v systéme

- o - celková doba, ktorú ľubovoľný zákazník stráví v ustálenom systéme.

Z Littleho pravidla (angl. *Little's Law*) vieme, že v ustálenom systéme je stredný počet zákazníkov $E[u]$ rovný súčinu stredného počtu príchodov za 1 slot (λ) a strednej doby, ktorú zákazník strávi v systéme ($E[o]$). Preto platí:

$$E[o] = \frac{E[u]}{\lambda}. \quad (47)$$

$E[w]$ - stredná doba čakania

- w - celková doba, ktorú ľubovoľný zákazník strávi v ustálenom systéme čakaním na obsluhu.

Strednú dobu čakania dostaneme ako rozdiel strednej doby, ktorú zákazník strávi v systéme a strednej doby jeho obsluhy:

$$E[w] = E[o] - E[s]. \quad (48)$$

Dosadením (34), kde sme si odvodili tvar $E[s]$ a po ďalších úpravách dostávame:

$$\begin{aligned} E[w] = & \frac{\lambda^2 S''(1) + A''(1) \cdot S'(1)}{2\lambda(1 - \rho)} + 2\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\alpha(1 - \alpha) \\ & + p_B\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + \frac{\lambda\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2\alpha(1 - \alpha)(1 - 4\alpha(1 - \alpha))}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

4 Numerické výpočty a simulácie

V poslednej kapitole tejto práce uvidíme numerické výpočty stacionárneho rozdelenia odvodeného v predošlej kapitole s konkrétnymi pravdepodobnostnými rozdeleniami pre rôzne hodnoty parametrov. Zároveň si skonštruujeme stochastické simulácie procesu a budeme sledovať čas, v ktorom sa ustáli pravdepodobnostné rozdelenie pre obsadenosť systému v danom modeli. Budeme na to využívať softvér *R*.

4.1 Numerické výpočty pre diskretný model

Máme teda model hromadnej obsluhy s dvoma typmi zákazníkov C_1 a C_2 , pričom pravdepodobnosť, že zákazník je typu C_1 sa rovná α . Proces príchodov sme nastavili ako Bernoulliho proces. Počet príchodov do systému za jeden slot má teda binomické rozdelenie s parametrom λ a prislúchajúca vytvárajúca funkcia je v tvare:

$$A(z) = 1 - \lambda + \lambda z.$$

Ak zákazník, ktorý prístupuje k obsluhu je iného typu ako jeho predchodca, jeho doba obsluhy bude mať geometrické rozdelenie s parametrom μ , s pravdepodobnostnou funkciou:

$$b(n) = \mu(1 - \mu)^n, n \in (0, \infty)$$

a prislúchajúcou vytvárajúcou funkciou:

$$B(z) = \frac{\mu z}{1 - (1 - \mu)z}.$$

Pri simuláciach sme menili hodnoty vstupných parametrov:

Označenie	Popis
λ	intenzita príchodov
$\frac{1}{\mu}$	stredná doba obsluhy, ak je zákazník iného typu
α	pravdepodobnosť, že zákazník je typu C_1

Tabuľka 3: Vstupné parametre

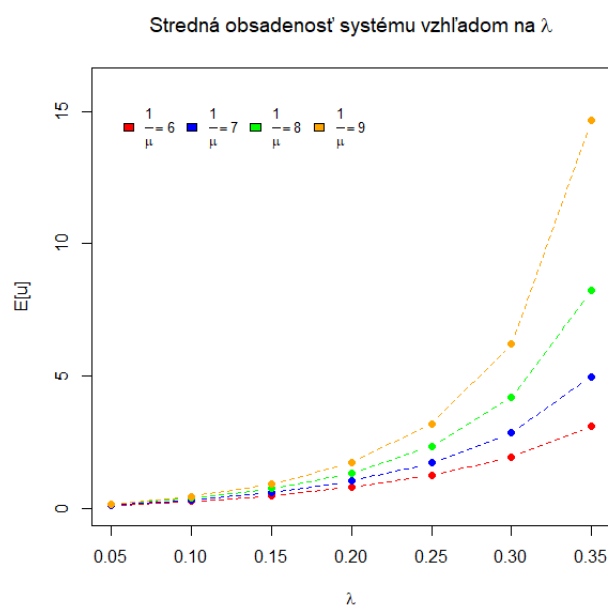
tak, aby intenzita prevádzky spĺňala podmienku stability, teda aby $\rho < 1$. Zároveň musela

byť splnená aj podmienka pre strednú dobu obsluhy zákazníka, ak ide po zákazníkovi iného typu, teda $\frac{1}{\mu} > 1$.

Pri numerických výpočtoch sme postupovali tak, že sme si postupne v softvéri *R* zadefinovali jednotlivé vytvárajúce funkcie a vzťahy, ktoré sme si odvodili v 3. kapitole. Na získanie hodnôt p_A a p_B sme potrebovali nájsť druhý koreň vytvárajúcej funkcie $P(z)$, ktorý sme si v 3. kapitole označili ako $\hat{z}$. Pri jeho hľadaní sme využili funkciu *uniroot* implementovanú v softvéri *R*. Keďže táto funkcia nájde vždy len 1 koreň na definovanom intervale, čo vyplýva aj z jej názvu, museli sme interval $(0, 1)$ rozdeliť na dva podintervaly. Na prvom podintervale nám našlo spomínaný prvý koreň $z = 1$. Na druhom podintervale nám už našlo hodnotu druhého koreňa $\hat{z}$. Následným dosadením do vzorcov (43) a (44) sme získali hodnoty p_A a p_B .

4.1.1 Správanie systému vzhľadom na meniacu sa λ

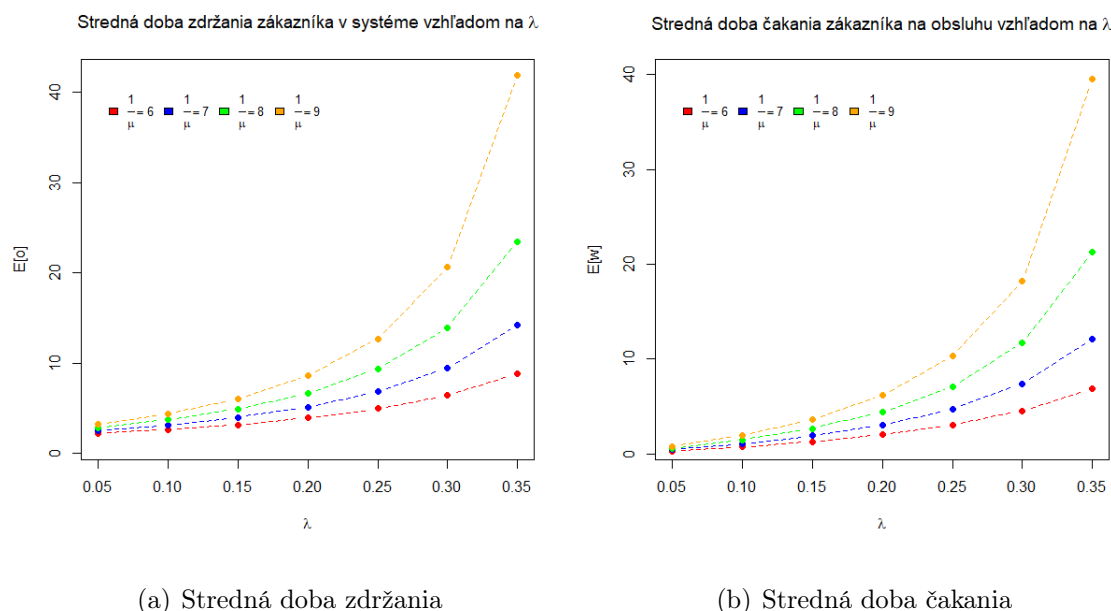
Na Obr. 6 a 7 je znázornené správanie systému pri pevne definovanej hodnote $\alpha = 0.9$, pevne definovanej hodnote strednej doby obsluhy $\frac{1}{\mu}$ a pri meniacej sa hodnote intenzity príchodov λ .



Obr. 6: Stredná obsadenosť systému $E[u]$ vzhľadom na meniacu sa λ

S takýmto systémom sa môžeme stretnúť napríklad na pošte, kde je poštová priehradka určená na vybavenie určitej služby. Niektorá je špecializovaná na platenie šekov, iná na

posielanie listov, ďalšia napríklad na vydávanie zásielok. Zákazníci, ktorí vyžadujú službu, na ktorú je pracovníčka pošty pri danej priehradke špecializovaná, predstavujú zákazníkov typu C_1 . Z času na čas však nejaký zákazník zabľúdi a so svojou požiadavkou (napr. výdaj balíka) príde k nesprávnej priehradke (napr. určenej na platenie šekov). Tento zákazník predstavuje zákazníkov typu C_2 . Ochotná pracovníčka mu síce balík vydá, ale tým, že na tento druh služby nie je špecializovaná, potrvá jej to dlhší čas. Zároveň sa o niečo predĺži doba obsluhy ďalšieho zákazníka, aj keď je pri správnej priehradke, pretože pracovníčka sa musí vrátiť späť do systému určeného na evidovanie zaplatených šekov. Pravdepodobnosť, že príde zákazník typu C_1 je teda pomerne vysoká, napr. 0.9 a doba obsluhy zabľúdeného zákazníka je napr. 6, 7, 8 resp. 9 slotov.



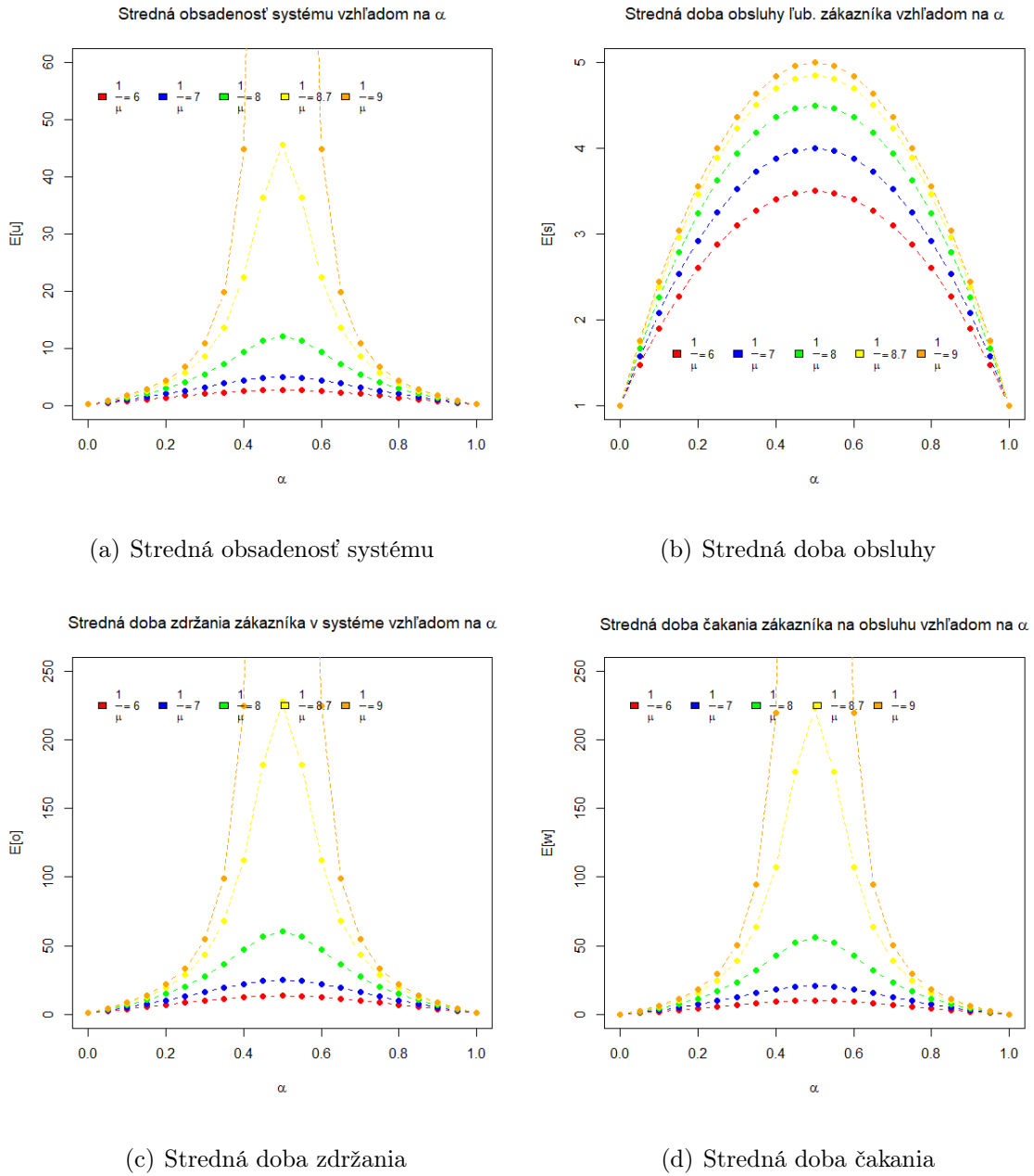
Obr. 7: Stredná doba zdržania $E[o]$ a čakania $E[w]$ vzhľadom na meniacu sa λ

Vidíme, že čím vyššia hodnota λ , teda čím je vyššia intenzita príchodov a čím je dlhšia stredná doba obsluhy $\frac{1}{\mu}$, tým je väčšia stredná obsadenosť systému $E[d]$, dlhšia doba zdržania $E[o]$ aj čakania $E[w]$ ľubovoľného zákazníka v systéme. Priemerná doba obsluhy ľubovoľného zákazníka $E[s]$ je:

$\frac{1}{\mu}$	6	7	8	9
$E[s]$	1.9	2.08	2.26	2.44

4.1.2 Správanie systému vzhľadom na meniacu sa α

Teraz sa pozrieme, ako sa obsadenosť systému, stredná doba obsluhy, zdržania a čakania ľubovoľného zákazníka v systéme menia v závislosti od zmeny pravdepodobnosti výskytu zákazníka prvého typu. V tomto prípade je intenzita príchodov pevne definovaná ako $\lambda = 0.2$. Správanie takéhoto systému môžeme vidieť na Obr. 8.



Obr. 8: Správanie systému pri meniaci sa α

Vidíme, že všetky výkonnostné parametre nadobúdajú najvyššie hodnoty ak $\alpha = 0.5$,

teda ak je pomer zákazníkov C_1 a C_2 v systéme vyrovnaný. Naopak, čím viac prevažuje nejaký typ zákazníka, tým sa ich hodnoty znižujú. Zároveň vidíme, že ak $\frac{1}{\mu} = 9$, potom pri pravdepodobnosti $\alpha = 0.5$ nie je splnená podmienka stability $\rho < 1$, a teda stredná obsadenosť systému, doba zdržania aj doba čakania rastú do nekonečna.

4.2 Numerické výpočty pre spojitý model

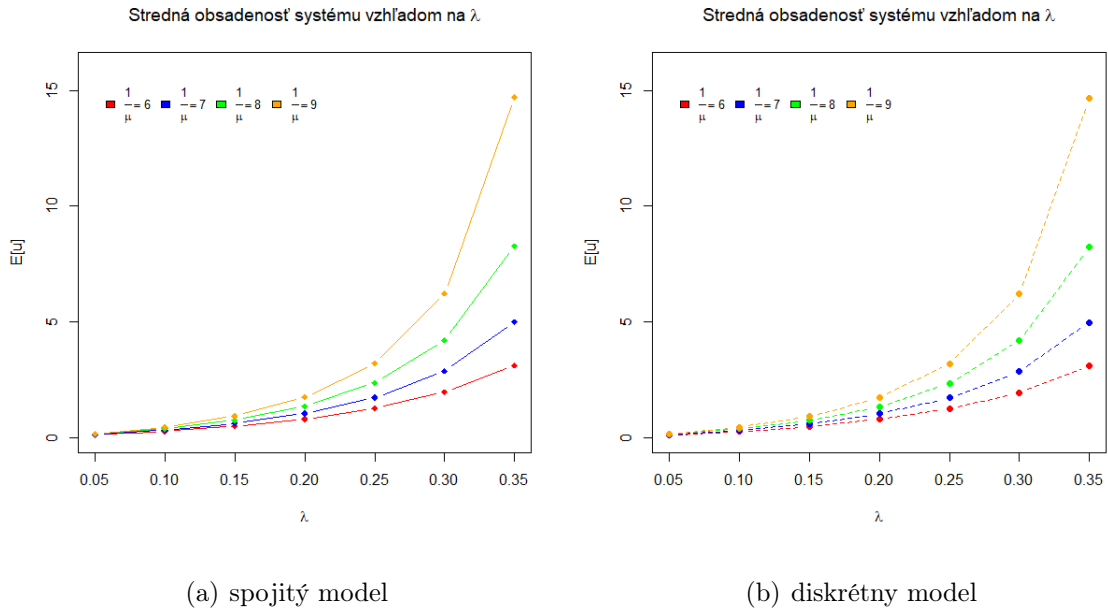
Teraz sa pozrieme na numerické výpočty v prípade ak si definujeme spojité rozdelenia charakteristík. Budeme postupovať rovnako ako pri diskretnom čase, avšak teraz si proces príchodov definujeme ako Poissonov proces s parametrom λ a PGF:

$$A(z) = e^{\lambda(z-1)}.$$

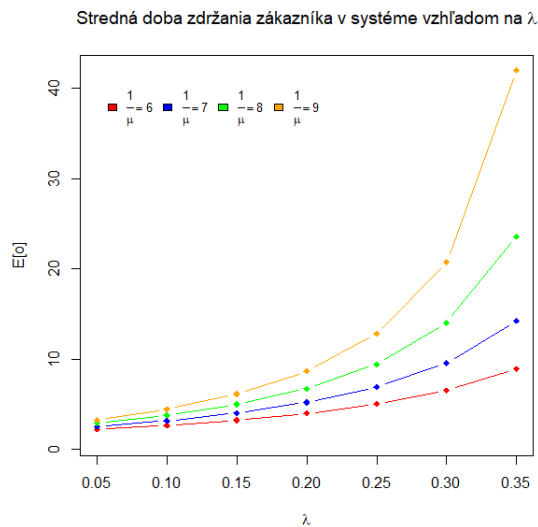
Zároveň, ak je zákazník, ktorý pristupuje k obsluhu iného typu ako jeho predchodca, potom jeho doba obsluhy bude mať exponenciálne rozdelenie s parametrom μ a s PDF:

$$b(n) = \mu e^{-\mu n}, n > 0.$$

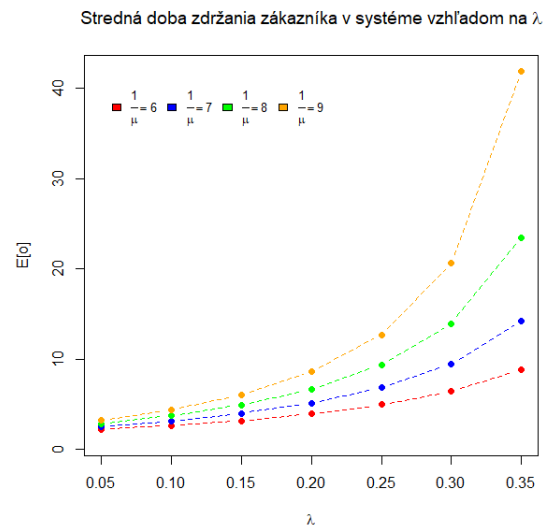
Numerické výsledky spojitého modelu si nakoniec porovnáme s numerickými výsledkami diskretného modelu z časti 4.1.1. Grafické porovnanie vidíme na Obr. 9 - 10.



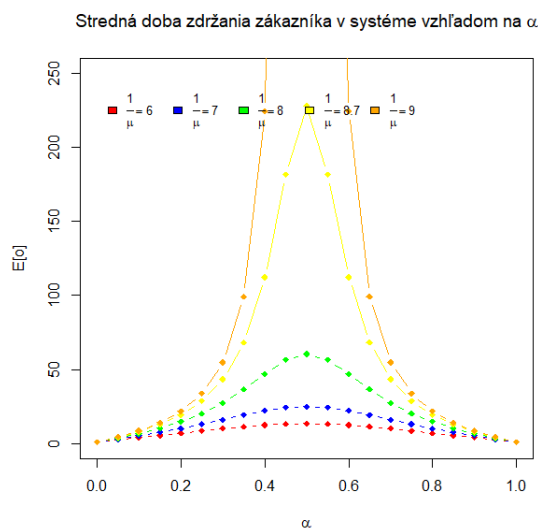
Obr. 9: Porovnanie obsadenosti systému pri meniacej sa λ



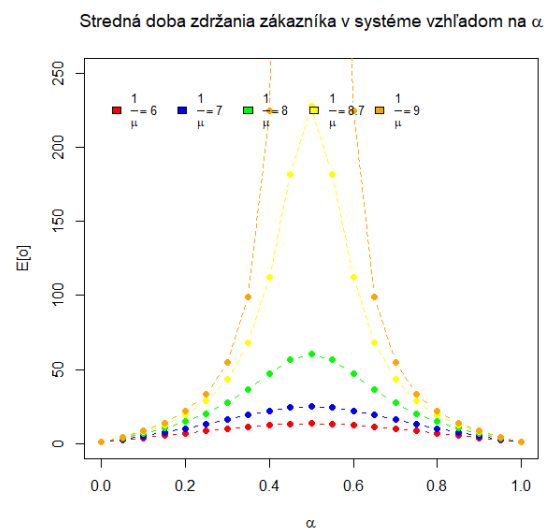
(a) spojitý model



(b) diskretný model



(c) spojitý model



(d) diskretný model

Obr. 10: Porovnanie doby zdržania zákazníka v systéme

Vidíme, že numerické výpočty pre takýto spojitý model vychádzajú takmer totožne s výpočtami diskrétného modelu. Priemerný rozdiel v dobe zdržania medzi realizáciami spojitého a diskrétného modelu bol približne 0.05. Pri obsadenosti systému 0.005.

4.3 Simulácie procesu

V tejto časti diplomovej práce sa budeme venovať stochastickým simuláciám, ktoré opisujú správanie nášho systému hromadnej obsluhy s dvoma typmi zákazníkov pri rôznych parametroch modelu. Pri simulovaní procesu budeme postupovať nasledovne:

1. Zdefinujeme konkrétne hodnoty vstupných parametrov α , λ a μ .
2. Zostrojíme simulačný model tak, aby čo najpresnejšie opisoval reálne správanie nášho systému HO s dvoma typmi zákazníkov. Keďže pri stochastických simuláciách je nutné poznať pravdepodobnostné rozdelenie náhodných veličín, definujeme si rovnako ako v časti 4.1 Bernoulliho proces príchodov a geometrickú dobu obsluhy v prípade rôznych typov zákazníkov. Po zbehnutí simulačného modelu, ktorý označíme ako funkciu $f(m)$, dostaneme počet zákazníkov v systéme na začiatku m -tého slotu.
3. V ďalšom kroku využijeme Monte Carlo metódu (skr. MC metódu), ktorá je všeobecnou metódou pri tvorbe stochastických modelov. MC metóda prebieha tak, že správanie systému niekoľkokrát simulujeme na skonštruovanom modeli, čím dostaneme náhodne vygenerované obsadenosti systému na začiatku slotu m . Výsledkom MC metódy je teda niekoľko realizácií funkcie $f(m)$. Nakoniec vypočítame, s akou pravdepodobnosťou bola obsadenosť systému na začiatku slotu m práve j zákazníkov. Tieto empiricky namerané pravdepodobnosti si označíme ako $\hat{P}_n(X_m = j)$, kde X_m je počet zákazníkov na začiatku slotu m , ak Monte Carlo simulácie opakujeme n -krát.

My chceme sledovať, ako dochádza k ustáleniu takéhoto systému HO, teda koľko krát musíme zopakovať Monte Carlo simulácie pre dané m , aby sa jeho pravdepodobnostné rozdelenie líšilo od stacionárneho o predpísanú hodnotu. Na to potrebujeme poznať stacionárne pravdepodobnostné rozdelenie pre počet zákazníkov na začiatku ľub. slotu. Všeobecný tvar prislúchajúcej vytvárajúcej funkcie $U(z)$ sme si už odvodili v časti 3.3.2. Dosadením konkrétnych vytvárajúcich funkcií pre Bernoulliho proces príchodov, kde $A(z) = 1 - \lambda + \lambda z$ a geometrickú dobu obsluhy, kde $B(z) = \frac{\mu z}{1 - \mu + \mu z}$, dostávame konkrétny tvar $U(z)$ nášho modelu. Pravdepodobnostné rozdelenie, ozn. π_j , potom vieme získať dosadením do vzťahov,

ktoré platia medzi PDF a PGF:

$$\pi_0 = U(0),$$

$$\pi_k = \frac{U^{(k)}(0)}{k!},$$

kde $U^{(k)}$ je k -ta derivácia vytvárajúcej funkcie $U(z)$. Nakoniec už len porovnávame empirické a stacionárne pravdepodobnostné rozdelenia a to tak, že pre daný počet slotov m opakujeme Monte Carlo simulácie dovtedy, dokým sa empirické pravdepodobnostné rozdelenie dostatočne nepriblíži k tomu stacionárnemu. Teda pre vopred stanovenú presnosť ϵ hľadáme také n , aby:

$$|\pi_j - \hat{P}_n(X_m = j)| < \epsilon.$$

Takéto n je náhodná premenná, ktorej následne nájdeme odhad $E_m[n]$, pričom $E_m[n]$ je priemerný počet opakovaní Monte Carlo simulácií pre daný počet slotov m . V Tabuľke 4 sú uvedené výsledky simulácií systému, ak hodnoty parametrov $\alpha = 0.8$, $\lambda = 0.3$, $\mu = \frac{1}{7}$ a presnosť $\epsilon = 0.01$.

Počet slotov m	$E_m[n]$
≤ 60	> 1000 (max n)
70	825.4
80	474.5
90	108.2
100	41.4
110	14.4
120	6.1
130	4.9
≥ 140	≈ 3

Tabuľka 4: Priemerný počet opakovaní MC simulácií $E_m[n]$

Môžeme vidieť, že pre malý počet slotov m sa ani pri niekoľkonásobnom opakovaní MC simulácií empirické pravdepodobnostné rozdelenie nepriblíži k tomu stacionárnemu na predpísanú presnosť. Simulácie sa zastavia až pri počte opakovaní $n = 1000$, ktorý sme

nastavili ako hraničný počet. Ďalej môžeme vidieť, že približne od 140 slotu sa stredný počet opakovaní ustáli približne na čísle 3.

V prípade, že sme zmenili hodnoty parametrov na $\alpha = 0.5$, $\mu = \frac{1}{7}$ a $\lambda = 0.2$, priemerný počet opakovaní MC simulácií sa zmenil nasledovne:

Počet slotov m	$E_m[n]$
≤ 100	> 1000 (max n)
120	662.3
130	323.1
150	152.8
170	87.8
190	32.1
200	16.1
300	6.6
≥ 400	≈ 3

Tabuľka 5: Priemerný počet opakovaní MC simulácií $E_m[n]$

V tomto prípade vidíme, že stredný počet opakovaní pre počet slotov m sa oproti predchádzajúcemu nastaveniu zvýšil. Ako by sme teda aj prirodzene čakali, ak sa typy zákazníkov C_1 a C_2 častejšie striedajú, potom trvá dlhší čas, kým dôjde k ustáleniu pravdepodobnostného rozdelenia obsadenosti systému.

Záver

V tejto diplomovej práci sme sa zaoberali modelovaním systémov hromadnej obsluhy s rôznymi typmi zákazníkov, pričom sme sa na tieto systémy pozerali v diskretných časových okamihoch. Cieľom bolo pochopiť fungovanie systémov s diskretným časom a rozšíriť základne modely HO, ktoré predpokladajú homogénnu skupinu zákazníkov o predpoklad, že v systéme sa nachádzajú zákazníci s rôznymi požiadavkami a vlastnosťami.

Vedomosti, ktoré sme nadobudli pri štúdiu tejto témy, rovnako ako aj naše vedomosti z teórie pravdepodobnosti, teórie Markovových reťazcov či teórie vytvárajúcich funkcií sme implikovali pri odvodzení modelu hromadnej obsluhy s diskretným časom $GI/G/1$, v ktorom proces príchodov ako aj doba obsluhy mali všeobecné pravdepodobnostné rozdelenie. Hlavný rozdiel medzi spojitými modelmi HO spočíva v tom, že v diskretnom modeli je časová os rozdelená na intervaly rovnakej dĺžky, ktoré nazývame sloty. Ako takáto časová os vyzerá, možno vidieť na Obr. 3.

Stav systému na začiatku slotu k nám v modeli $GI/G/1$ popisoval dvojrozmerný Markovov reťazec $\{(h_k, u_k)\}$, v ktorom h_k vyjadroval zostávajúci čas obsluhy práve obsluhovaného zákazníka a u_k vyjadroval počet zákazníkov v systéme na začiatku k -teho slotu. Správanie systému sme potom opísali pomocou sústavy rovníc (2) uvedených v časti 2.2.1. Využitím techniky vytvárajúcich funkcií sme následne odvodili tvar vytvárajúcej funkcie $P(x, z)$ pre ustálený stav systému na začiatku ľubovoľného slotu (13). Taktiež sme odvodili tvary vytvárajúcich funkcií pre výkonnostné parametre tohto modelu.

Po odvodení všeobecného diskretného modelu $GI/G/1$ sme v 3. kapitole do modelu zahrnuli predpoklad, že do systému prichádzajú dva typy zákazníkov s ozn. C_1 a C_2 . Ich príchody do systému boli navzájom nekorelované a úplne náhodne so všeobecným rozdelením. Doba obsluhy jednotlivých zákazníkov závisela len od toho, či dvaja za sebou idúci zákazníci boli rovnakého alebo odlišného typu. Stav systému nám v tomto modeli popisoval dvojrozmerný reťazec $\{(t_k, d_k)\}$, kde t_k označoval typ k -teho zákazníka a d_k vyjadroval počet zákazníkov v systéme po dokončení jeho obsluhy. Zostrojili sme si príslušné systémové rovnice (31) a opäť sme pomocou techniky vytvárajúcich funkcií odvodili stacionárne rozdelenie tohto reťazca s príslušnou vytvárajúcou funkciou $P(z)$ (39).

V poslednej kapitole sme uviedli numerické výpočty stacionárneho rozdelenia nášho diskretného modelu s dvoma typmi zákazníkov, pričom sme sledovali ako sa správanie

systému mení pri rôznych hodnotách parametrov a pri rôznych rozdeleniach charakteristík. Správanie systému je graficky znázornené na Obr. 6-10.

V závere práce sme v softvéri R skonštruovali stochastické simulácie systému hromadnej obsluhy s dvoma typmi zákazníkov a pomocou Monte Carlo simulácií sme sledovali, ako dochádza k ustáleniu takéhoto systému pre rôzne hodnoty parametrov. Výsledky sú uvedené v Tabuľke 4 a 5. Jedným z možných rozšírení simulačného modelu by mohlo byť napríklad zahrnutie istej korelácie medzi príchodmi jednotlivých typov do systému.

Výsledkom tejto diplomovej práce je prezentácia matematického modelu, ktorý sa na systém hromadnej obsluhy pozerá ako na systém s diskretným časom a dvoma typmi zákazníkov, pričom sme vychádzali z dostupnej literatúry. Taktiež sme doplnili viaceré odvodenia, príklady ako aj simulácie stacionárneho rozdelenia.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Adan, I., Leeuwaarden, J., Winands, E.: *On the application of Rouché's theorem in queueing theory*, Operations Research Letters, 34(3) (2006), 355-360, dostupné na internete (3.4.2023): <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167637705000726>
- [2] Bruneel, H.: *Performance of discrete-time queueing systems*, Computers & Operations Research, 20(3) (1993), 303-320, dostupné na internete (15.1.2023): [https://doi.org/10.1016/0305-0548\(93\)90006-5](https://doi.org/10.1016/0305-0548(93)90006-5)
- [3] Bruneel, H., Kim, B. G.: *Discrete-Time Models for Communication Systems Including ATM*, Springer Science & Business Media (2012), dostupné na internete (15.1.2023): <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-3130-2>
- [4] Bruneel, H., Rogiest, W., et al.: *Analysis of a discrete-time queue with general independent arrivals, general service demands and fixed service capacity*, Springer (2015), dostupné na internete (15.1.2023): <https://doi.org/10.1007/s00186-015-0515-z>
- [5] De Clercq, S., Laevens, K., Steyaert, B., Bruneel, H.: *A multi-class discrete-time queueing system under the FCFS service discipline*, Springer Science+Business Media (2012), dostupné na internete (20.2.2023): <https://link.springer.com/article/10.1007/s10479-011-1051-8>
- [6] De Clercq, S., Steyaert, B., Bruneel, H.: *Queue Content Analysis in a 2-Class Discrete-Time Queueing System under the Slot-Bound Priority Service Rule*, Mathematical Problems in Engineering (2012), dostupné na internete (12.2.2023): <https://www.hindawi.com/journals/mpe/2012/425630/>
- [7] Erlang, A.: *The Theory of Probabilities and Telephone Conversations*, Nyt Tidsskrift for Matematik B 20 (1909), 33-39, dostupné na internete (6.3.2023): <http://www.medicine.mcgill.ca/epidemiology/hanley/statbook/Erlang1909.pdf>

- [8] Erlang, A.: *Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges*, The Post Office Electrical Engineers' Journal, 10 (1918)
- [9] Fačevicová, K., Hron, K., Kunderová, P.: *Markovovy řetězce a jejich aplikace*, 2. vydání, Univerzita Palackého v Olomouci (2018), dostupné na internetu (30.3.2023): https://www.fd.cvut.cz/departament/k611/pedagog/K611TH0_soubory/skriptaUP.pdf
- [10] Gail, H. R., Hantler, S. L., Kosheim, A. G., Taylor, B. A.: *An analysis of a class of telecommunications models*, Performance Evaluation, 21 (1994), 151-161, dostupné na internetu (20.3.2023): https://www.academia.edu/48179401/An_analysis_of_a_class_of_telecommunications_models
- [11] Janková, K., Kilianová, S., Brunovský, P., Bokes, P.: *Markovove reťazce a ich aplikácie* (2014)
- [12] Kendall, D. G.: *Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain*, Ann. Math. Stat., 24(3) (1953), 338-354, dostupné na internetu (30.4.2023): <https://doi.org/10.1214/aoms/1177728975>
- [13] Kingman, J.: *The single server queue in heavy traffic*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 57(4) (1961), 902-904. , dostupné na internetu (30.4.2023): <https://doi.org/10.1017/S0305004100036094>
- [14] Kobayashi, H., Konheim, A.: *Queueing Models for Computer Communications System Analysis*, IEEE Transactions on Communications, 25(1) (1977), 2-29, dostupné na internetu (15.1.2023): <http://www.hisashikobayashi.com/papers/Communication%20System%20Performance%20Evaluation%20and%20Queueing%20Theory/Queueing%20Models%20for%20Computer%20Communications%20Systems%20Analysis.pdf>
- [15] Kuehn, P. J.: *Reminder on queueing theory for ATM networks* , Telecommunication Systems, 5 (1996), 1-24, dostupné na internetu (20.3.2023): <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02109724>

- [16] Miesling, T.: *Discrete-time queuing theory*, Operations Research, 6 (1958), 96–105, dostupné na internete (20.3.2023): https://www.academia.edu/48179401/An_analysis_of_a_class_of_telecommunications_models
- [17] Minh, T.: *The discrete-time single-server queue with time-inhomogeneous compound Poisson input and general service time distribution*, Journal of Applied Probability, 15(3) (1978), 590-601, dostupné na internete (20.3.2023): <https://doi.org/10.2307/3213121>
- [18] Morro, G.: *Queueing Theory*, The University of Barcelona (2018), dostupné na internete (6.3.2023): <https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/127366/3/memoria.pdf>
- [19] Neuts, M. F.: *The single server queue in discrete time-numerical analysis I*, Naval Research Logistics Quarterly, John Wiley & Sons, 20(2) (1973), 297-304, dostupné na internete (20.3.2023): <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nav.3800200210>
- [20] Reveil, B., Claeys, D., Maertens, T. et al : *Analysis of a FCFS Queue with Two Types of Customers and Order-Dependent Service Times*, ECMS 2014 Proceedings edited by: Flaminio Squazzoni, Fabio Baronio, Claudia Archetti, Marco Castellani European Council for Modeling and Simulation (2014), dostupné na internete (12.2.2023): <https://www.scs-europe.net/dlib/2014/2014-0551.htm>
- [21] Sedgewick, R., Flajolet, P.: *An Introduction to the Analysis of Algorithms, 2nd Edition*, Addison-Wesley Professional (2013), 91-150, dostupné na internete (20.3.2023): <https://aofa.cs.princeton.edu/30gf/>
- [22] Serfozo, R.: *Basics of Applied Stochastic Processes*, Probability and Its Applications (2009), dostupné na internete (15.1.2023): <https://doi.org/10.1007/978-3-540-89332-5>
- [23] Sztrik, J.: *Basic Queueing Theory*, University of Debrecen Faculty of Informatics (2016), dostupné na internete (6.3.2023): <https://www.semanticscholar.org/paper/r/Basic-Queueing-Theory-Sztrik/5df7784f5315f56c8d09a76dca57f3ec69890df0>

- [24] Voreková, J.: *Úlohy z diskrétní matematiky* , Bakalárska práca, Masarykova univerzita, Brno (2015), dostupné na internete (25.3.2023): <https://is.muni.cz/th/mdv8n/Final.pdf>
- [25] Walraevens, J., Fiems, D., Bruneel, H.: *Transient Analysis of a Discrete-time Priority Queue* , Proceedings of the 12th International Conference on ASMTA (2005), 17-24, dostupné na internete (12.2.2023):https://www.researchgate.net/publication/237331995_Transient_analysis_of_a_discrete-time_priority_queue
- [26] Wittevrongel, S., Bruneel, H.: *Discrete-time ATM Queues with Independent and Correlated Arrival Streams*, Performance Evaluation and Applications of ATM Networks, 557 (2000), dostupné na internete (20.3.2023): <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02109724>