

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MATEMATICKÉ MODELOVANIE ZÁVISLOSTI
VÝNOSOVÝCH KRIVIEK POMOCO KOPULA FUNKCIÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**MATEMATICKÉ MODELOVANIE ZÁVISLOSTI
VÝNOSOVÝCH KRIVIEK POMOCO KOPULA FUNKCIÍ**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: Matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Gábor Szűcs, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Terézia Filová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Matematické modelovanie závislosti výnosových kriviek pomocou kopula funkcií
Mathematical modeling of yield curve dependence using copula functions

Anotácia: Výnosové krivky sú matematické objekty, ktoré v danom časovom bode zachytávajú štruktúru úrokových mier v závislosti od dĺžky doby viazanosti investície. Vo finančných, ekonomických či aktuárskych výpočtoch sa používajú napríklad pri oceňovaní budúcich peňažných tokov, pri diskontovaní budúcich záväzkov a aj pri posudzovaní výhodnosti investičných projektov. Ak zafixujeme dobu do splatnosti podkladového aktíva a uvažujeme vývoj daného výnosu v čase, dostaneme vlastne časový rad úrokových mier. Keď tento krok spravíme pre každú skúmanú dobu do splatnosti, získame taký viacrozmerný časový rad, ktorého komponenty sú v každom časovom bode spojené výnosovou krivkou. Takéto štruktúry viacrozmerných časových radov zvyčajne vykazujú nejakú mieru závislosti, ktorú môžeme modelovať napríklad pomocou kopula funkcií.

Vedúci: Mgr. Gábor Szűcs, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Dátum zadania: 11.01.2022

Dátum schválenia: 14.01.2022

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Abstrakt

Táto diplomová práca sa zaoberá modelovaním závislostí na globálnych finančných trhoch s využitím kopula funkcií, pričom sa zameriava na závislosti medzi spotovými výnosovými krivkami vybraných krajín. Súčasťou práce je aj teoretická kapitola venovaná poznatkom z oblasti výnosových kriviek, časových radov a tiež z teórie kopula funkcií. V predkladanom diele je detailne predstavený pracovný postup takéhoto výskumu. Práca ponúka aj ilustratívny spôsob implementácie hlavných krokov postupu v štatistickom softvéri R. Jej ďalšou časťou je prípadová štúdia modelovania závislosti medzi výnosovými krivkami odhadnutými na základe výnosov štátnych dlhopisov Austrálie, Číny, Indie, Kanady, Mexika, Nemecka a Spojených štátov amerických za obdobie medzi rokmi 2012 a 2022. Cieľom tejto práce je predstaviť metodiku takéhoto typu matematického modelovania a tiež poskytnúť prehľad o alternatívnych matematických technikách, ktoré je možné v jednotlivých bodoch výskumu využiť.

Kľúčové slová: kopula funkcie, modelovanie závislosti, časové rady, výnosové krivky, štátne dlhopisy.

Abstract

This Master Thesis deals with modeling dependencies in global financial markets using copula functions, while focusing on the dependence between spot yield curves of selected countries. It also includes a theoretic chapter dedicated to basics of yield curves, time series and theory of copula functions. A detailed procedure of the research is presented in this work. The work offers an illustrative example of implementation of main steps of the procedure in the statistical software R. Another part of the work is a case study of dependence modeling between yield curves estimated from government bond yields of Australia, Canada, China, Germany, India, Mexico and United States of America for the period between years 2012 and 2022. The main aim of this thesis is to present the methodology of this kind of mathematical modeling and also to provide an overview of alternative mathematical techniques which can be used in certain points of the research.

Keywords: copula functions, dependence modeling, time series, yield curves, government bonds.

Predhovor

Výnosové krivky, s ktorými som sa oboznámila počas bakalárskeho výskumu, ma fascinovali natolko, že som sa im chcela venovať aj v diplomovej práci. Kopula modelovanie bolo pre mňa na začiatku novinkou. Keďže ide o techniku, ktorá má široký záber a praktické využitie, chcela som sa vo vlastnom záujme dozvedieť viac. Nápad zaoberať sa kopula modelovaním závislostí medzi výnosovými krivkami, s ktorým prišiel vedúci práce, bol preto jasnou voľbou témy mojej diplomovej práce. Pri tvorení tejto práce som mala možnosť vyskúšať si komplexné matematické modelovanie prelínajúce niekoľko oblastí, navzájom prepojiť už nadobudnuté znalosti a obohatiť ich o mnohé ďalšie. Stretla som sa aj s niekoľkými, najmä technickými problémami, pričom hľadanie ich riešení bolo vždy obohacujúcou skúsenosťou. Na konci nášho výskumu môžem povedať, že práca na tomto diele sa stala nie mojou povinnosťou, ale na chvíľu aj novým koníčkom.

Touto cestou sa chcem srdečne poďakovať Mgr. Gáborovi Szűcsovi, PhD. za jeho profesionálny prístup pri vedení našej ďalšej práce; Mgr. Alexovi Babišovi za jeho podnety; Viliamovi za jeho priateľskú podporu, trpezlivosť a ochotu počúvať moje dlhopisové úvahy a milovanému bratovi Marekovi, ktorý je mojím vzorom vo vytrvalosti.

Obsah

Zoznam použitých symbolov	7
Úvod	9
1 Teoretické východiská práce	11
1.1 Výnosové krivky	11
1.2 Časové rady	14
1.3 Kopula funkcie a miery závislosti	19
1.3.1 Triedy kopula funkcií	22
1.3.2 Konštrukcia viacrozmernej kopula funkcie	25
2 Modelovanie závislosti výnosových kriviek	31
2.1 Dáta	32
2.2 Metodika výskumu a implementácia jednotlivých krokov	34
2.3 Posudzovanie presnosti modelov a vybrané štatistické testy	41
3 Prípadová štúdia	43
3.1 Numerické a grafické výsledky modelovania	43
3.2 Diskusia	60
Záver	64
Zoznam použitej literatúry	66
Prílohy	

Zoznam použitých symbolov

t_i	i -ty časový bod vyjadrený v daných časových jednotkách
$R(t_i, t_j)$	spojitá úroková miera platná na obdobie od t_i do t_j
r_{t_i}	okamžitá úroková sadzba, <i>short rate</i> , platná v časovom bode t_i
$\tilde{R}_{t_i}(z)$	odhadnutá spotová výnosová krivka platná v časovom bode t_i , pričom $z \in \langle 0; T_{\max} \rangle$ je funkčná premenná
y	realizácia časového radu
n	rozmer procesu časového radu y
$\tau(X, Y)$	Kendallovo tau pre náhodné premenné X a Y
λ_U, λ_L	index hornej a dolnej chvostovej závislosti
P	funkcia pravdepodobnosti
$\langle 0; 1 \rangle^d$	d -rozmerná kocka s marginálnym rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti
$C, \mathcal{C}$	kopula funkcia
k	rozmer kopula funkcie
Φ	distribučná funkcia jednorozmerného normálneho rozdelenia
Φ_Σ	distribučná funkcia viacrozmerného normálneho rozdelenia a korelačnou maticou Σ
$\mathcal{N}$	normálne rozdelenie
t_ν	Studentovo t rozdelenie s počtom stupňov voľnosti ν
$\text{Exp}(\lambda)$	exponenciálne rozdelenie s parametrom λ
$\Gamma(\kappa, \theta)$	gama rozdelenie s parametrom tvaru κ a škálovacím parametrom θ
χ_L^2	χ^2 rozdelenie s počtom stupňov voľnosti L
MSE	stredná kvadratická odchýlka
m	rozmer trhového vektora výnosov
$Q(L)$	testová štatistika portmanteau testu pre rezíduá modelu pre lag L
$Q^2(L)$	testová štatistika portmanteau testu pre druhé mocniny rezíduí modelu pre lag L

ℓ	dĺžka procesu časového radu y vzhľadom na počet časových bodov
ω	rozmer vektora argumentu kopula funkcie u
2Y	dáta vzťahujúce sa na dlhopis s dvojročnou dobou do splatnosti
5Y	dáta vzťahujúce sa na dlhopis s päťročnou dobou do splatnosti
10Y	dáta vzťahujúce sa na dlhopis s desaťročnou dobou do splatnosti
17Y	dáta vzťahujúce sa na dlhopis s sedemnásťročnou dobou do splatnosti
AUS	dáta prislúchajúce austrálskym štátnym dlhopisom
CHN	dáta prislúchajúce čínskym štátnym dlhopisom
IND	dáta prislúchajúce indickým štátnym dlhopisom
CAN	dáta prislúchajúce kanadským štátnym dlhopisom
MEX	dáta prislúchajúce mexickým štátnym dlhopisom
GER	dáta prislúchajúce nemeckým štátnym dlhopisom
USA	dáta prislúchajúce americkým štátnym dlhopisom

Úvod

Jednorozmerný prístup k modelovaniu vývoja (cien) na finančných trhoch neposkytuje kompletný obraz o globálnom finančnom trhu. Vzájomné vzťahy a korelácie medzi aktívami či komoditami, a všeobecne viacrozmerný pohľad na trh by postrádali nie len investori alebo rizikový manažment pri hedžovaní rizika, ale aj samotní ekonómovia a matematici, ktorí v posledných desaťročiach publikovali, a dodnes publikujú, odborné práce venované *viacrozmerným* finančným modelom a štúdiám závislosti. Ako príklad uvádzame publikáciu [2], ktorej autori sa venovali skúmaniu závislosti trhu s poľnohospodárskymi komoditami a akciovými indexmi, či výmenným kurzom. Autori práce [5] sa zas zaoberali dynamickými koreláciami medzi cenou ropy a americkým akciovým trhom. Ako ďalší príklad je možné uviesť nedávno publikovanú prácu [16], ktorej autori skúmali vzájomné závislosti medzi vybranými výmennými kurzami.

Matematické modelovanie viacrozmernej závislosti je v odbornej literatúre stále aktuálna téma a do popredia sa v posledných rokoch dostalo tzv. kopula modelovanie, o čom svedčí aj vyššie spomenutá literatúra. Táto technika má, prirodzene, využitie nie len vo finančnej sfére, ale aj mimo nej. Napríklad v práci [35] využili autori kopula funkcie na modelovanie združeného rozdelenia pravdepodobnosti smeru a rýchlosti vetra a uhlu jeho nárazov, publikácia [27] sa zas zaoberá kopula modelovaním v hydrologickom kontexte, ale dostupné sú aj publikácie z oblasti seizmológie, stavebného inžinierstva a ďalších.

Hlavným cieľom predkladanej diplomovej práce je predstaviť metodiku modelovania závislosti, a teda aj demonštrovať prepojenie a nadväznosť rôznych oblastí matematického modelovania. V našom prípade ide o oblasť výnosových kriviek, časových radov a kopula funkcií. Prístup predstavený v rámci tejto práce je len jeden z možných prístupov k modelovaniu závislosti. Bol vybraný a zostavený (aj) na základe našich znalostí a skúseností. Literatúra však ponúka spektrum rôznych matematických techník, ktoré môžu byť rovnako využité. Zároveň bolo preto našou snahou vytvoriť aj prehľad o niektorých týchto alternatívnych možnostiach, hoci nejde o ich kompletný zoznam, pretože to by bolo nad rámec diplomovej práce a výskumu.

Aby práca čo najprehľadnejším spôsobom dosiahla stanovený cieľ, štruktúrovaná je nasledovne. Prvá kapitola je úvodom do jednotlivých oblastí matematického modelovania,

ktoré sú v našom výskume prepojené. V prvej časti prvej kapitoly sú zhrnuté základné informácie o výnosových krivkách, a tiež o zvolenom spôsobe ich modelovania. V jej druhej časti sme predstavili tie jednorozmerné a viacrozmerné modely časových radov, ktoré sme využívali počas výskumu. Prvú kapitolu uzatvára výber poznatkov z teórie kopula funkcií. Rozsah tejto časti sme sa snažili zvoliť tak, aby pokrývala všetky stránky oblasti dôležité pre náš výskum, a tiež aby čitateľ získal jemný nadhľad nad touto oblasťou v prípade, že by bolo v jeho záujme použiť inú techniku kopula modelovania. Prvá kapitola teda nie je výberom výhradne tých teoretických poznatkov, ktoré sme priamo potrebovali v našom výskume, ale predstavuje akýsi obraz dotvárajúci výber z teórie, a súbežne tiež prehľad ďalšej literatúry. Druhá kapitola predstavuje podrobný súhrn krokov pracovného postupu pri našom výskume aj s ich odôvodnením na miestach, na ktorých sme to považovali za potrebné. Po prečítaní prvej a druhej kapitoly by teda čitateľ mal nadobudnúť ucelenú predstavu o matematických možnostiach pre modelovanie závislostí medzi výnosovými krivkami. Túto teoretickú predstavu dopĺňa praktický príklad, ktorému je venovaná celá tretia kapitola. Ide o prípadovú štúdiu skúmania závislostí medzi výnosovými krivkami vybraných štátov, ktorá má byť pridanou hodnotou našej diplomovej práce.

1 Teoretické východiská práce

Jedným z cieľov nášho výskumu bolo demonštrovať prepojenie techník z troch oblastí matematického modelovania – modelovanie výnosových kriviek, časových radov a kopula modelovanie. Uvedeným oblastiam prislúchajú preto nasledujúce podkapitoly, ktorých účelom je oboznámiť čitateľa s vybranými pojmami a metódami z jednotlivých oblastí, a to v takom rozsahu, aký bol potrebný pri našom výskume, a tiež aký je potrebný pre úplné pochopenie nášho výskumu a jeho záveru. Túto kapitolu preto nemožno považovať za prehľad všetkých základných poznatkov z daných oblastí, pretože vo všetkých troch prípadoch ide o skutočne rozsiahle oblasti, rozsiahle z hľadiska množstva známych teoretických poznatkov.

1.1 Výnosové krivky

Krivka, ktorá znázorňuje vzťah medzi dobou do splatnosti a výškou úrokovej miery, sa v ekonómii označuje prívlastkom výnosová. V časovej štruktúre úrokových mier¹ sú obsiahnuté očakávania investorov o budúcej ekonomickej výkonnosti a tiež konzekvencie menovej a hospodárskej politiky, vďaka čomu je výnosová krivka vo všeobecnosti dôležitým zdrojom informácií o finančných trhoch. Okrem toho, že výnosové krivky sú užitočné pri tvorbe predikcií o budúcom správaní sa ekonomiky, používajú sa aj pri oceňovaní rôznych finančných produktov, pretože sú efektívne pri diskontovaní budúcich hodnôt, čo sme načrtli už v našej bakalárskej práci (pozri [9]).

V našom výskume, ktorý prezentujeme v ďalších kapitolách tejto práce, sme sa zaoberali takzvanými spotovými výnosovými krivkami (nazývanými aj *zero-kupónové* výnosové krivky), ktoré sme odvodzovali z výnosov na trhu obchodovaných štátnych dlhopisov pre množinu vybraných krajín (ďalšie podrobnosti uvádzame v kapitole 2).

Definícia 1.1. [9] *Zero-kupónová krivka je taká výnosová krivka, ktorá je očistená od výšky kupónu a prípadného budúceho toku peňazí pochádzajúceho z daných dlhopisov.*

Základná interpretácia výnosovej krivky vychádza z analýzy tvaru tejto krivky. V pokojnom období ekonomického rastu sa totiž prirodzene očakáva, že krivka bude rastúca, pretože dlhšia doba do splatnosti prináša vyššiu mieru rizika, a preto investori očakávajú

¹Podrobnejšie sme tému úrokových mier opísali v práci [9].

vyššiu mieru zhodnotenia investovaných finančných prostriedkov. Takýto tvar sa považuje za *normálny* tvar výnosovej krivky. Príliš *strmo rastúci* tvar však zvykne symbolizovať inflačné očakávania, ktoré sa premietnu do výšky úrokových mier. Tá následne zapríčini väčší sklon krivky. Naopak, pokiaľ medzi hladinou krivky v krátkodobom a dlhodobom horizonte je veľmi malý rozdiel a tvar krivky je takpovediac *plochý*, tak s veľkou pravdepodobnosťou investori očakávajú spomalenie ekonomického rastu, prípadne inú zmenu v ekonomickej výkonnosti a kvôli neistote spojennej s blížiacou sa zmenou požadujú približne rovnaký výnos pre všetky doby do splatnosti. Občas je možné stretnúť sa aj s *prevráteným* tvarom, keď výnos v dlhodobom horizonte je nižší ako výnos v krátkodobom, resp. strednodobom horizonte. Takýto tvar väčšinou signalizuje blížiacu sa recesiú. [9]

Bod, v ktorom výnosová krivka akéhokoľvek tvaru začína², nazývame okamžitá úroková miera alebo tiež short rate a definovať ho môžeme nasledovne.

Definícia 1.2. [9] *Pojmom short rate označujeme takú úrokovú mieru, za ktorú je možné požičať si peniaze na „veľmi krátke“ obdobie, ktorého dĺžka limitne klesá k nule. Štandardne sa vyjadruje anualizovaná, t. j. p. a.*

Nech $R(t_i, t_j)$ označuje spojitú úrokovú mieru platnú na obdobie od t_i do t_j . Matematicky môže definíciu zapísať tak, ako uvádza vzťah (1):

$$r_{t_i} := \lim_{\Delta t \searrow 0} R(t_i, t_i + \Delta t). \quad (1)$$

Podotýkame, že ide len o teoretický koncept. V reálnom svete má k nemu najbližšie³ tzv. *overnight*, t. j. úroková miera, za ktorú si banka vie požičať od inej banky na konci dňa (tzv. overnight market), a to zvyčajne kvôli tomu, aby zachovala stanovenú výšku povinných minimálnych rezerv. [22]

Po jednoduchom vykreslení vektoru úrokových mier alebo výnosov do splatnosti väčšine z nás vedomie umožňuje empiricky vidieť výnosovú krivku. Existuje tiež niekoľko rôznych matematických techník, vďaka ktorým vieme modelovať výnosové krivky ako funkcie. Predstavenie modelov výnosových kriviek a ich charakteristík bolo hlavnou témou našej predchádzajúcej, bakalárskej práce [9].

²Výnosová krivka nemusí byť samozrejme vždy zobrazená od jej počiatku. Zvyčajne sa znázorňuje na obdobie od 3 mesiacov alebo 1 roka do 30 rokov.

³V zmysle, že ide o úrokovú mieru s najkratšou dobou do splatnosti.

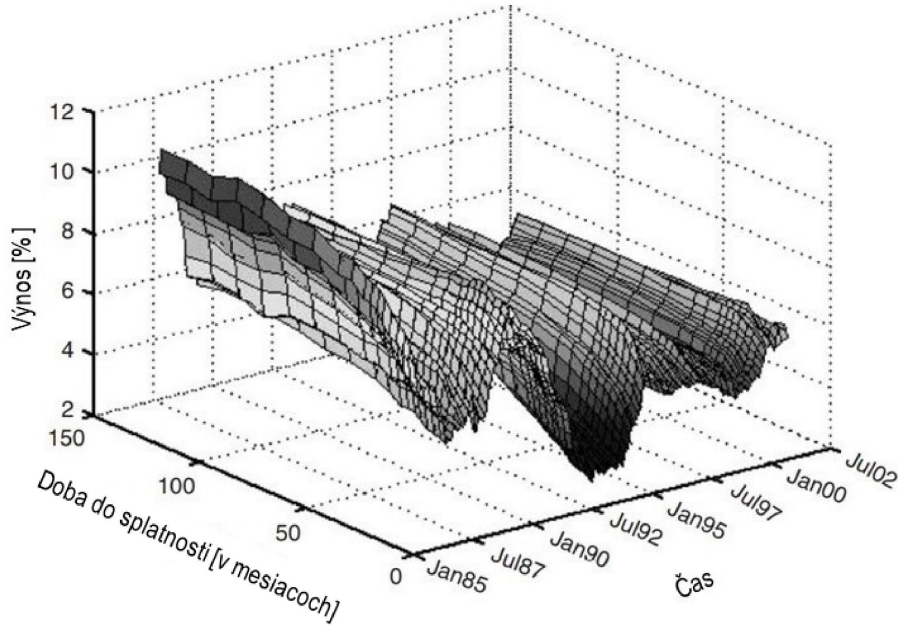
Majme dáta, množinu výnosov do splatnosti dlhopisov pre rôzne doby do splatnosti. Nech $\tilde{R}_0(z)$ označuje odhadovanú resp. modelovanú spotovú výnosovú krivku platnú v aktuálnom čase, v čase $t_i = 0$ pre $z \in (0; T_{\max})$, pričom doba do splatnosti $T_{\max}$ udáva dĺžku horizontu, na ktorom chceme výnosovú krivku modelovať. V rámci výskumu v predkladanej práci sme využívali **Svenssonov model** výnosovej krivky. Ide o parametricky daný funkčný predpis, predstavený v roku 1994, definovaný nasledovne:

$$\tilde{R}_0(z) := \beta_0 + \beta_1 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{z}{\alpha_1}}}{\frac{z}{\alpha_1}} \right) + \beta_2 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{z}{\alpha_1}}}{\frac{z}{\alpha_1}} - e^{-\frac{z}{\alpha_1}} \right) + \beta_3 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{z}{\alpha_2}}}{\frac{z}{\alpha_2}} - e^{-\frac{z}{\alpha_2}} \right) \quad (2)$$

a začiatok Svenssonovej výnosovej krivky je dodatočne určený predpisom

$$\tilde{r}_{t_0=0} \equiv \tilde{R}_0(0) := \beta_0 + \beta_1. \quad (3)$$

Parametre $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$, $j = 1, 2$ a $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, 3$ sa zvyknú odhadovať metódou najmenších štvorcov. O ekonomickej interpretácii týchto parametrov sme písali v už spomínanej bakalárskej práci (pozri [9]).



Obrázok 1.1: Príklad viacrozmerného objektu, ktoré boli predmetom nášho výskumu.

V smere osi s názvom *Doba do splatnosti* graf znázorňuje výnosové krivky odhadnuté na základe amerických štátnych dlhopisov a v smere osi *čas* predstavuje časový vývoj modelovaných výnosov pre jednotlivé doby do splatnosti. (Zdroj: [9])

Doposiaľ sme o výnosovej krivke písali ako o dvojrozmernom objekte, ktorý znázorňuje závislosť medzi dobou do splatnosti a výškou výnosu v jednom konkrétnom časovom okamihu. Predmetom nášho výskumu však boli viacrozmerné objekty – k dobám do splatnosti a výške výnosov je možné ako tretí rozmer pridať čas. Zvoľme si napríklad dlhopis Slovenskej republiky s dobou do splatnosti päť rokov, ktorý bol v uplynulom roku dostupný na trhu. Jeho dnešná výška výnosu môže byť iná ako bola včera alebo ako bola minulý týždeň. Inými slovami výnosy sú zviazané s príslušnými podkladovými aktívami, a zároveň tiež s dátumom (časom) ich platnosti. Grafické znázornenie takéhoto trojrozmerného objektu sa nachádza na obrázku 1.1. V našom výskume sme navyše skúmali vzájomné závislosti medzi niekoľkými takýmito objektmi, pričom každý prislúchal výnosom do splatnosti dlhopisov iného štátu.

1.2 Časové rady

Nadviažme na predstavu o slovenskom štátnom dlhopise, z predchádzajúceho odseku. Historický vývoj výšky jeho výnosov predstavuje jednorozmerný časový rad. Problematike časových radov vrátane ich modelov sa podrobnejšie venuje napríklad publikácia [33].

Nech y označuje vektor hodnôt procesu (časového radu), ktorý sa má modelovať. Počas nášho výskumu sme využívali kombináciu tzv. **ARMA**(p, q) modelu⁴, ktorý reprezentuje rovnica (4) a **GARCH**(P, Q) modelu⁵, všeobecne zapísaný rovnicou (6).

Poznámka: Pravý dolný index v rovniciach (4) – (6) predstavuje časový index. Pokiaľ sa v texte odvolávame na danú premennú bez časového indexu, odvolávame sa na celý rad hodnôt danej premennej.

$$y_t = \mu + \sum_{j=1}^p \alpha_j \cdot y_{t-j} + \sum_{j=1}^q \beta_j \cdot \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad (4)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t \quad (5)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^P \gamma_j \cdot \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^Q \delta_j \cdot \sigma_{t-j}^2 \quad (6)$$

Koeficienty $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j \in \mathbb{R}$ pre $\forall j$, spolu s $\mu \in \mathbb{R}$ a $\omega \in \mathbb{R}^+$ predstavujú parametre príslušných modelov. Argumenty p a q , resp. P a Q určujú rád modelu. Na parametre sú

⁴z angl. *autoregressive moving average* model

⁵z angl. *generalized autoregressive conditional heteroskedasticity* model

kladené nasledovné podmienky: $\omega > 0$; $|\alpha_j|, |\gamma_j| \geq 0$ pre $\forall j = 1, 2, 3, \dots, p-1$, resp. $P-1$ a tiež $|\beta_j|, |\delta_j| \geq 0$ pre $\forall j = 1, 2, 3, \dots, q-1$, resp. $Q-1$; a napokon $\alpha_p, \beta_q, \gamma_P, \delta_Q \neq 0$. Zvyčajne sa tiež uvažuje striktne $(\sum_{j=1}^P \gamma_j + \sum_{j=1}^Q \delta_j) < 1$, čím sa technicky zabezpečí kladnosť volatility v GARCH modeli.

Všeobecne povedané, ARMA model vysvetľuje dnešnú hodnotu procesu pomocou p predošlých pozorovaných hodnôt a posledných $q+1$ „nameraných“ hodnôt rezíduí – označujeme ε , ktoré, pokiaľ proces modelujeme iba využitím ARMA modelu, t. j. bez kombinácie s GARCH modelom, musia byť bielym šumom.

Podotýkame, že náhodný vektor je bielym šumom ak platí, že pochádza z rozdelenia s nulovou strednou hodnotou, konečnou disperziou, a jeho hodnoty sú navzájom nezávislé. Z predpokladu nezávislosti vyplýva, že takýto rad musí mať nulové autokorelácie, a zároveň aj nulové autokorelácie svojich druhých mocnín. Ide o nutnú, vo všeobecnosti nie postačujúcu podmienku nezávislosti. Nakoľko je známe, že pri finančných časových radoch zvyčajne pozorujeme obdobia s väčšou inokedy s menšou volatilitou (v anglickej literatúre označované slovným spojením *volatility clusters*), predpoklad nezávislosti zvykne zostať nenaplnený – napríklad v období s väčšou volatilitou často nasleduje po veľmi kladnej hodnote rezídua veľmi záporná hodnota rezídua, čo vykazuje známky nenulovej autokorelácie druhých mocnín rezíduí. Riešením tohto problému je kombinácia ARMA modelu s GARCH modelom, pretože GARCH model umožňuje zohľadniť nekonštantnosť disperzie rezíduí ε – označujeme σ^2 .

Spojenie spomenutých modelov predstavuje rovnica (5). Vektor ξ zo spomenutej rovnice, v angl. literatúre často označovaný pojmom *innovation*), sa riadi nejakým vopred vybraným rozdelením (normálnym, Studentovým, zošíkmeným Studentovým, ...). Rozdelenie sa vyberie tak, aby výsledný model čo najkvalitnejšie opisoval modelované dáta. Pri prepojení ARMA s GARCH modelom je bielym šumom nie vektor ε , ale vektor ξ , a preto ξ musí spĺňať všetky predpoklady uvedené na začiatku predchádzajúceho odseku.

Poznámka: Viac informácií o stacionarite a ďalších vlastnostiach všetkých modelov uvedených v tejto podkapitole je možné nájsť napríklad v spomenutej publikácii [33].

Vyššie opísaný prístup však nie je postačujúci pre modelovanie viacrozmerného časového radu, akým môže byť simultánny historický vývoj výnosov dvojročného, päťroč-

ného, desaťročného a dvadsaťročného štátneho dlhopisu zároveň. Výnosy pre jednotlivé doby do splatnosti môžu totiž byť dynamicky korelované, čo by nebolo možné zohľadniť, keby v uvedenom príklade využijeme štyri jednorozmerné ARMA-GARCH modely jednotlivo pre každú dobu do splatnosti.

Na modelovanie viacrozmerných časových radov sme preto využívali **VARMA**(p, q) model⁶, ktorý má nasledovnú formuláciu. Nech $n \in \mathbb{N}$. Majme n -rozmerný vektor $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)^\top$, ktorý nech predstavuje viacrozmerný proces, ktorý sa má modelovať. Ako odkaz na časový index t používame ďalej značenie typu $y_t = (y_{1,t}; y_{2,t}; y_{3,t}; \dots; y_{n,t})^\top$. Vzťah z rovnice (4) sa vo svojej podstate zachováva s tým, že μ a ε už reprezentujú n -rozmerné vektory a koeficienty α_j pre $\forall j = 1, 2, 3, \dots, p$ a β_j pre $\forall j = 1, 2, 3, \dots, q$ sa zmenia na p resp. q štvorcových matíc rozmeru $n \times n$.

Matica α_j (pre β_j platí analogicky) zapísaná po zložkách má tvar

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} \alpha_{j,1.1} & \alpha_{j,1.2} & \alpha_{j,1.3} & \dots & \alpha_{j,1.n} \\ \alpha_{j,2.1} & \alpha_{j,2.2} & \alpha_{j,2.3} & \dots & \alpha_{j,2.n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{j,n.1} & \alpha_{j,n.2} & \alpha_{j,n.3} & \dots & \alpha_{j,n.n} \end{pmatrix}.$$

Mimodiagonálne zložky tejto matice vyjadrujú mieru lineárnej závislosti medzi jednorozmernými premennými modelovaného procesu (v prípade matíc β_j ide o lineárnu závislosť medzi rezíduami modelu). Čiže zložky v i -tom riadku matice α_j reprezentujú lineárnu závislosť medzi $y_{i,t}$ a vektorom y_{t-j} . Konkrétne napríklad zložka $\alpha_{1,1.2}$ predstavuje mieru lineárnej závislosti medzi $y_{1,t}$ a $y_{2,t-1}$. Z toho vyplýva, že pokiaľ by všetky matice α_j , β_j boli diagonálnymi maticami pre $\forall j = 1, 2, 3, \dots, p$, resp. q , tak zložky procesu y_t , ktoré v uvedenom príklade predstavovali výnosy dlhopisov s rôznou dobou do splatnosti, by bolo možné modelovať samostatne, t. j. ako n jednorozmerných časových radov.

Podobne ako pri jednorozmernom ARMA modeli, aj pri VARMA je možné využiť prepojenie s viacrozmerným GARCH modelom, a to z rovnakého dôvodu, ako v jednorozmernom prípade. Ako sme už spomenuli, okrem heteroskedasticity bolo v našom záujme modelom zachytiť aj dynamiku korelácie dát. Zvoleným modelom je v anglickej literatúre tzv. *dynamic conditional correlation* GARCH model, skrátene **DCC-GARCH**. Poznamenávame, že informácie o tomto modeli sme čerpali z publikácie [33, podkapitola 7.7].

⁶z angl. *vector autoregressive moving average* model

Tak ako názov modelu napovedá, jeho snahou je aj zachytiť v čase meniace sa korelácie medzi jednotlivými jednorozmernými časovými radmi, resp. medzi (štandardizovanými) rezíduami jednotlivých časových radov. Hovoríme preto o podmienenej korelácii. Korelačnú maticu – ozn. ρ_t , je z definície možné rozložiť na súčin tak, ako znázorňuje rovnica (7):

$$\rho_t = D_t^{-1} \cdot \Sigma_t \cdot D_t^{-1}. \quad (7)$$

Matica D_t vystupujúca v rovnici (7) je diagonálna matica odmocnín disperzií prislúchajúcich jednotlivým jednorozmerným procesom $(y_{1,t}; y_{2,t}; y_{3,t}; \dots; y_{n,t})^\top$, matematicky zapísané

$$D_t = \begin{pmatrix} \sigma_{t,1.1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{t,2.2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{t,3.3} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{t,n.n} \end{pmatrix},$$

a matica Σ_t predstavuje kovariančnú maticu rezíduí ε_t pri filtrácii ⁷ $\mathcal{F}_{t-1}$.

Najskôr je potrebné získať odhady $\sigma_{t,i.i}$, pre $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Tie sa v praxi zvyknú odhadnúť využitím jednorozmerných GARCH modelov. Potom sa vypočítava samotná dynamika závislosti korelačných matíc ρ_t . Predpis DCC-GARCH modelu má dva varianty. V našom výskume sme využívali variant, ktorý v roku 2002 publikoval Robert F. Engle⁸.

Označme marginálne štandardizované rezíduá $\eta_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$ a nech $\bar{O}$ je nepodmienená kovariančná matica η_t . Potom predpis DCC-GARCH modelu vo zvolenom variante má tvar

$$\begin{aligned} O_t &= (1 - \theta_1 - \theta_2) \cdot \bar{O} + \theta_1 \cdot O_{t-1} + \theta_2 \cdot \eta_{t-1} \cdot \eta_{t-1}^\top, \\ \rho_t &= J_t \cdot O_t \cdot J_t, \end{aligned} \quad (8)$$

pričom $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+$ sú parametre modelu zodpovedné za dynamiku, ktoré musia spĺňať podmienku $0 < \theta_1 + \theta_2 < 1$, O_t je pozitívne semidefinitná matica a J_t je normalizačná,

⁷Filtrácia $\mathcal{F}_t$ je usporiadaný systém σ -algebier, ktoré sa používajú na modelovanie informácií, ktoré sú dostupné v časovom bode t .

⁸Alternatívne je možné využiť postup navrhnutý autormi A. Tse a Y. Tsui, publikovaný tiež v roku 2002.

diagonálna matica, ktorá má tvar

$$J_t = \begin{pmatrix} o_{t,1.1}^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & o_{t,2.2}^{-\frac{1}{2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & o_{t,3.3}^{-\frac{1}{2}} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & o_{t,n.n}^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Rozšírením DCC-GARCH modelu je tzv. *asymmetric generalized DCC-GARCH* model, ktorý bol navrhnutý z toho dôvodu, že vo veľkých rozmeroch skalárne parametre jednoduchého DCC-GARCH modelu θ_1, θ_2 nedostatočne zachytávajú dynamiku korelácie. Viac informácií o tomto modeli je možné nájsť v [10].

Podobne ako pri prepojení jednorozmerných modelov časových radov, výsledným spojením viacrozmerných modelov je kombinácia rovníc (4), (5), (6) (prípadne (9)) a (8), avšak narozdiel od jednorozmernej kombinácie modelov rovnica (4) predstavuje VARMA model, tak ako bol opísaný vyššie v tejto časti práce a rovnica (5) sa viaže na jednotlivé premenné viacrozmerného procesu, čiže platí $\varepsilon_{t,i} = \sigma_{t,i.i} \cdot \xi_{t,i}$ pre $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Na záver tejto časti by sme radi poznamenali, že predstavený spôsob modelovania časových radov nemusí byť pre niektoré dátové súbory dostatočný. K dispozícii sú však rozšírenia štandardného GARCH modelu, pomocou ktorých je niekedy možné docieľť lepší fit. Ako je možné vidieť v tabuľke 3.2, naše dáta sme niekedy potrebovali modelovať **GJR-GARCH** modelom, ktorého predpis je

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^P \left(\gamma_j \cdot \varepsilon_{t-j}^2 + \gamma'_j \cdot I_{t-j} \cdot \varepsilon_{t-j}^2 \right) + \sum_{j=1}^Q \delta_j \cdot \sigma_{t-j}^2, \quad (9)$$

kde I_{t-j} je indikátor definovaný ako

$$I_{t-j} = \begin{cases} 1, & \varepsilon_{t-j} > 0, \\ 0, & \varepsilon_{t-j} \leq 0, \end{cases}$$

vďaka čomu je umožnené modelovať asymetriu šokov podmienenej volatility [11] a γ'_j , pre $j = 1, 2, 3, \dots, P$ sú pridané parametre. Okrem uvedeného však môže byť niekedy vhodný aj tzv. exponenciálny GARCH model a iné. Viac informácií o asymetrických GARCH modeloch je možné nájsť napríklad v publikácii [3].

1.3 Kopula funkcie a miery závislosti

Tak, ako je snahou DCC-GARCH modelu ukázať, korelácia je vzťah, ktorý nemusí vždy byť invariantný v čase. Pod vplyvom rôznych faktorov môže korelácia (napríklad korelácia dvoch časových radov) narastať alebo naopak, klesať. Takúto súhlasnosť medzi premennými vieme v jednotlivých časových bodoch „merať“ rôznymi mierami závislosti, napríklad korelačnými koeficientami, ktoré číselne vyjadrujú akúsi veľkosť alebo silu závislosti medzi dvomi náhodnými premennými. Ďalšou možnosťou sú koeficienty chvostovej závislosti, ktoré sa zameriavajú na korelácie dvoch náhodných premenných medzi ich extrémnymi hodnotami.

Na meranie korelácií sme sa rozhodli využívať **Kendallovo tau** – značíme τ , pretože ide o korelačný koeficient, ktorý, podobne ako Spearmanovo ρ , je invariantný vzhľadom na monotónne transformácie dát, keďže sa vypočítava na základe poradia nadobudnutých hodnôt. Vďaka tomu výsledná korelácia nezávisí od marginálnych rozdelení náhodných premenných, a preto sú oba spomenuté korelačné koeficienty vhodné pre náš výskum. Definíciu Kendallovho tau môžeme formulovať nasledovne.

Definícia 1.3. *Kendallovo tau definujeme ako pravdepodobnosť konkordancie mínus pravdepodobnosť diskordancie dvoch spojitých náhodných premenných X, Y a značíme $\tau(X, Y)$.*

Kendallovo tau nadobúda hodnoty z intervalu $\langle -1; 1 \rangle$. Ak sú náhodné premenné X, Y dokonale nezávislé, potom je hodnota $\tau(X, Y)$ nulová. Ďalej platí, že korelácia náhodnej premennej so sebou samou je $\tau(X, X) = 1$ a podobne platí aj $\tau(X, -X) = -1$. Kendallovo τ je symetrické vzhľadom na X, Y , t. j. platí $\tau(X, Y) = \tau(Y, X)$. Pre úplnosť poznamenávame, že vzťahy uvedené v tomto odseku platia pre Spearmanovo ρ v rovnakom znení. Pre viac informácií – napríklad pre matematickú definíciu pojmov konkordancia a diskordancia, odporúčame pozrieť [7, podkapitola 2.2].

Obzvlášť od čias hospodárskej krízy, ktorá začala v roku 2008, sa pri finančnom modelovaní, a predovšetkým v rizikovom manažmente, kladie dôraz na dôkladné modelovanie chvostov pravdepodobnostných rozdelení a tiež skúmanie zmien korelácií medzi premennými, keď niektorá z premenných začne nadobúdať extrémne hodnoty. V predkladanom výskume sme využívali dve miery pochádzajúce z teórie extrémnych hodnôt, a to **index** (niekedy tiež koeficient) hornej a dolnej **chvostovej závislosti**.

Nech X a Y sú náhodné premenné s príslušnými kvantilovými funkciami, ktoré označíme F_X^{-1} a F_Y^{-1} . Potom definície indexov chvostovej závislosti môžu mať nasledovné znenie.

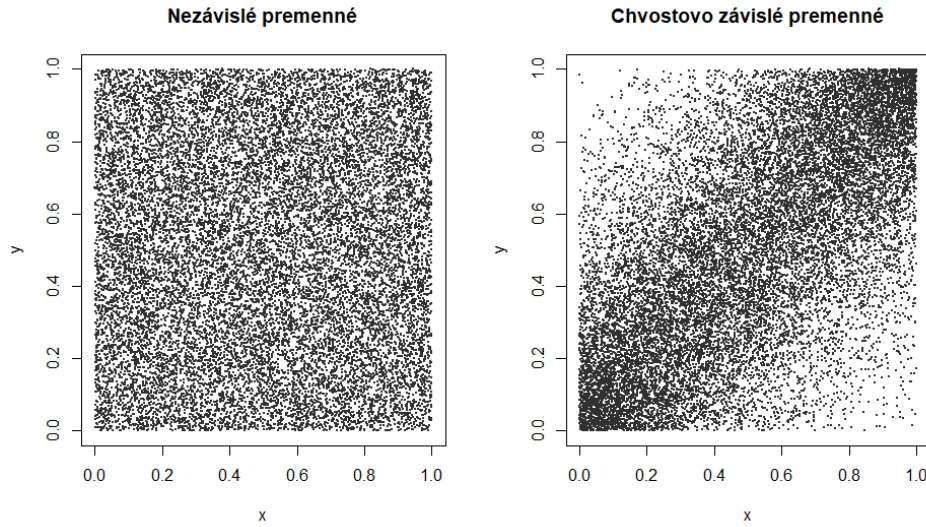
Definícia 1.4. [34] *Index hornej chvostovej závislosti (angl. upper tail dependence (index)), značíme λ_U , je číslo z intervalu $(0; 1)$, ktoré je dané vzťahom*

$$\lambda_U := \lim_{u \rightarrow 1^-} P(Y > F_Y^{-1}(u) | X > F_X^{-1}(u)).$$

Definícia 1.5. [34] *Index dolnej chvostovej závislosti (angl. lower tail dependence (index)), značíme λ_L , je číslo z intervalu $(0; 1)$, ktoré je dané vzťahom*

$$\lambda_L := \lim_{u \rightarrow 0^+} P(Y \leq F_Y^{-1}(u) | X \leq F_X^{-1}(u)).$$

Náhodné premenné X a Y považujeme, jednoducho povedané, za chvostovo závislé práve vtedy, keď ich korelácia narastá smerom k veľmi malým alebo veľkým hodnotám – napríklad tak, ako je graficky znázornené na obrázku 1.2. Platí, že čím je bližšia hodnota koeficientu λ k hodnote 1, tým je závislosť silnejšia.



Obrázok 1.2: Porovnanie nezávislých a chvostovo závislých náhodných premenných v dvojrozmere. Náhodne vygenerované body – na obrázku vľavo X a Y z rovnomerného rozdelenia na štvorci so stranami $\langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle$; na obrázku vpravo generované z Frankovej kopuly s parametrom 5. Chvostovú závislosť na obrázku spozorujeme vďaka väčšej hustote bodov v ľavom dolnom a pravom hornom rohu štvorca. (Zdroj: vlastné spracovanie)

Trendom posledných desaťročí je modelovať závislosť pomocou tzv. kopula funkcií, pretože kopula funkcia všeobecne povedané spojí individuálne marginálne rozdelenia tak, že výsledkom bude celé združené rozdelenie pravdepodobnosti, a zároveň zvolená kopula funkcia zachytí štruktúry závislosti medzi jednotlivými časťami viacrozmerného objektu. Všeobecná definícia kopula funkcie môže mať nasledovnú formuláciu.

Definícia 1.6. [34] Funkciu $C : \langle 0; 1 \rangle^k \rightarrow \langle 0; 1 \rangle$ nazývame k -rozmernou kopula funkciou, ak pre $\forall u \in \langle 0; 1 \rangle^k$ platí, že

- (i) $C(u) = 0$, ak aspoň jedna zložka vektora u je nulová,
- (ii) $C(u) = u_i$, ak všetky zložky vektora u okrem zložky u_i sú jednotky,
- (iii) pre všetky n -rozmerné kvádre $B = \prod_{i=1}^k (x_i; y_i) \subseteq \langle 0; 1 \rangle^k$ platí, že objem daný vektorom u vzhľadom na funkciu C je nezáporný, t. j. $\int_B dC(u) \geq 0$.

Keďže definíciu 1.6 spĺňa nekonečne veľa funkcií, existuje delenie kopula funkcií do tried (*angl. copula families*). Vybrané triedy sú predstavené v časti 1.3.1.

Kopula funkcia je nástroj, ktorý nám umožňuje prepojiť združené rozdelenie náhodného vektora s jednorozmernými marginálnymi rozdeleniami, pričom sa zohľadňuje a zachováva závislosť medzi náhodnými premennými. O vzťahoch medzi kopulami a distribučnými funkciami hovorí veta 1.7 a jej dôsledok.

Veta 1.7. Sklarova veta: *Nech $X = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)^\top$, $k \in \mathbb{N}$ je k -rozmerný spojitý náhodný vektor s marginálnymi distribučnými funkciami $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k$. Nech H je k -rozmerná združená distribučná funkcia náhodného vektora X . Potom existuje k -rozmerná kopula funkcia C taká, že platí:*

$$H(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), F_3(x_3), \dots, F_k(x_k)). \quad (10)$$

Funkcia C je navyše určená jednoznačne⁹.

Sklarova veta ekvivalentne hovorí, že ak C je k -rozmerná kopula a $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k$ sú distribučné funkcie náhodných premenných $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$, potom funkcia $H(x)$

⁹Zdôrazňujeme, že jednoznačnosť platí všeobecne len za predpokladu, že vektor X je *spojitý* náhodný vektor.

definovaná vzťahom (10) je k -rozmerná združená distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k$. Dôkaz vety 1.7 je možné nájsť napríklad v publikácii [23, strana 8].

Poznámka: Vo vete 1.7 sme sa obmedzili na spojité náhodné vektory, avšak vzťah v podobnom znení platí aj pre diskkrétne, resp. čiastočne spojité a čiastočne diskkrétne náhodné vektory (pozri [23, podkapitola 1.3]).

Navyše vzťah (10) zo Sklarovej vety je možné invertovať. „Invertovaná verzia“ Sklarovej vety môže byť užitočná napríklad pri hľadaní kopula funkcie pre premenné, ktorých predpis distribučných funkcií je známy a invertovateľný.

Dôsledok 1.8. *Nech platia všetky doposiaľ zavedené označenia a tiež nech F_i^{-1} pre $i = 1, 2, 3, \dots, k$ označujú príslušné kvantilové funkcie k marginálnym distribučným funkciám zo Sklarovej vety. Potom pre $\forall x \in \langle 0; 1 \rangle^k$ je kopula funkcia C rovná*

$$C(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = H\left(F_1^{-1}(x_1), F_2^{-1}(x_2), F_3^{-1}(x_3), \dots, F_k^{-1}(x_k)\right). \quad (11)$$

1.3.1 Triedy kopula funkcií

V tejto podkapitole stručne predstavíme dve populárne triedy kopula funkcií, a to eliptické a archimedovské kopuly. Navyše uvádzame aj niekoľko konkrétnych kopula funkcií patriacich do jednotlivých tried. V tejto časti sa obmedzíme na dvojrozmerný, teda nech $k = 2$. Väčším rozmerom kopula funkcií sa podrobnejšie zaoberáme v časti 1.3.2.

Ako už bolo spomenuté, jednou z tried kopula funkcií sú takzvané **eliptické kopuly**. Ako názov tejto triedy napovedá, ide o skupinu kopula funkcií, ktoré sú odvodené z takých rozdelení, ktorých hustota má vrstevnice eliptického tvaru – napríklad normálne alebo Studentovo t rozdelenie.

Zástupcom tejto triedy môže byť *Gaussova kopula*, ktorá je daná parametricky Pearsonovým korelačným koeficientom – značíme ρ medzi náhodnými premennými U a V , tak, ako uvádza nasledovný vzťah:

$$C(u, v, \rho) = \Phi_\rho\left(\Phi_1^{-1}(u), \Phi_2^{-1}(v)\right) = \int_{-\infty}^{\Phi_1^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi_2^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{s^2-2\rho st+t^2}{2(1-\rho^2)}} ds dt,$$

kde Φ označuje distribučnú funkciu normálneho rozdelenia a Φ^{-1} jeho inverznú, t. j. kvantilovú funkciu.

Počas nášho výskumu sme stretli aj s tzv. *Studentovou kopulou*, niekedy nazývaná aj *t kopula*, ktorá okrem parametra ρ využíva aj parameter, ktorý vyjadruje počet stupňov voľnosti – značíme ν . Nech t_ν označuje distribučnú funkciu Studentovho t rozdelenia s počtom stupňov voľnosti ν a nech t_ν^{-1} označuje príslušnú kvantilovú funkciu. Potom Studentova kopula má tvar

$$C(u, v, \rho, \nu) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{\nu(1-\rho^2)} \right)^{-\frac{\nu+2}{2}} ds dt.$$

Vidíme, že v oboch prípadoch je Sklarova veta využitá priamo, resp. tak, ako uvádza vzťah (11).

V tomto bode považujeme za dôležité podotknúť, že využitie kopula funkcií značne rozširuje triedu spomenutých, takzvaných eliptických pravdepodobnostných rozdelení, a to tým, že nám umožňuje meniť marginálne rozdelenia pri zachovaní eliptickej kopula funkcie, prípadne naopak. [28] Dôkazom toho môže byť aj obrázok 1.3, ktorý zobrazuje náhodne vygenerované usporiadané dvojice $[u, v]$ zo Studentovej kopuly s rôznymi hodnotami jej parametrov, prípadne pre konštantné hodnoty parametrov, ale meniace sa marginálne rozdelenia.

Na rozdiel od eliptických kopúl, pri konštrukcii **archimedovských kopúl** sa vzťah (11) nevyužíva priamo. Archimedovské kopuly sú konštruované pomocou tzv. generátorov. Definíciu archimedovskej kopuly môžeme formulovať nasledovne.

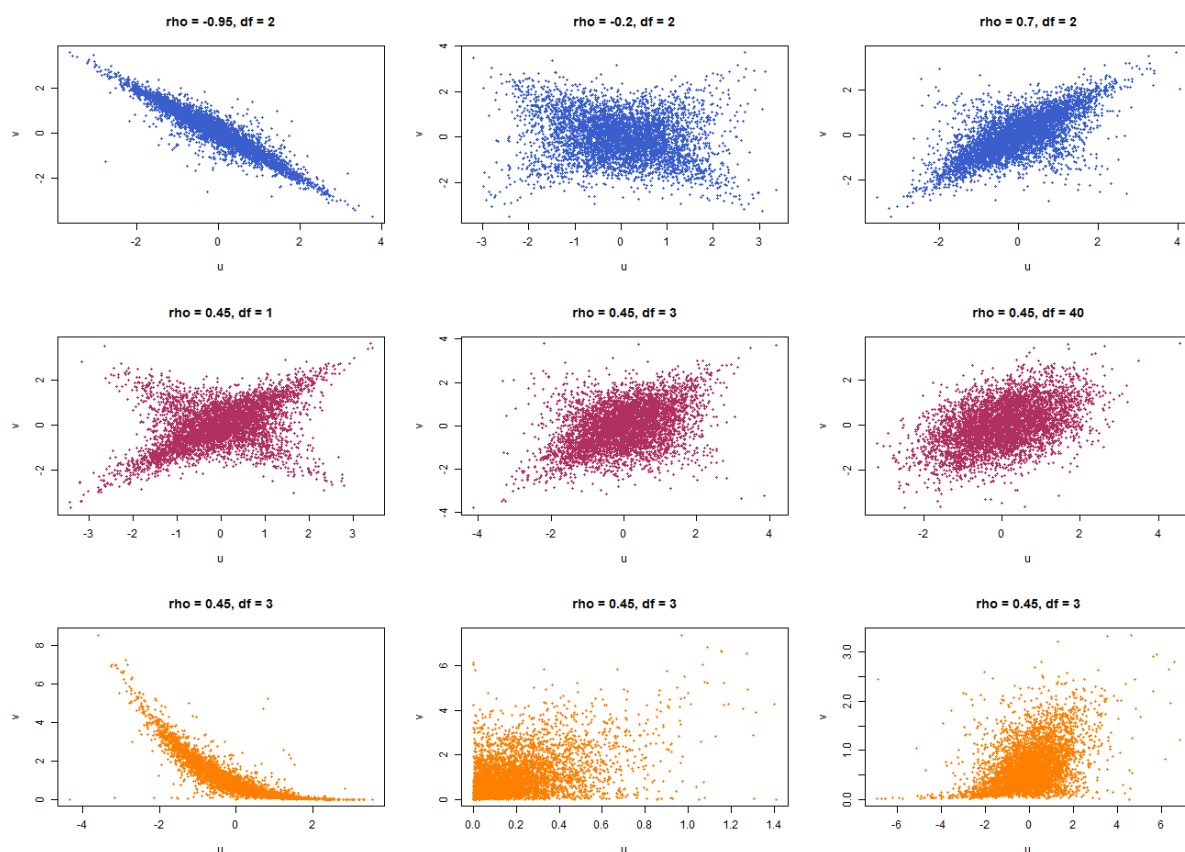
Definícia 1.9. [34] *Nech $\psi : \langle 0; 1 \rangle \times \Theta \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$ je spojitá rýdzo-klesajúca a konvexná funkcia taká, že $\psi(1, \theta) = 0$, pričom θ je parameter z priestoru parametrov Θ . Ďalej nech*

$$\psi^{[-1]}(t, \theta) := \begin{cases} \psi^{-1}(t, \theta), & \text{pre } 0 \leq t \leq \psi(0, \theta), \\ 0, & \text{pre } \psi(0, \theta) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Funkciu ψ nazývame generátorom kopula funkcie a funkciu $\psi^{[-1]}$ jej pseudoinverznou funkciou. Potom dvojrozmerná¹⁰ kopula funkcia C sa nazýva archimedovská, ak ju vieme zapísať v tvare

$$C(u, v, \theta) = \psi^{[-1]}(\psi(u, \theta) + \psi(v, \theta), \theta).$$

¹⁰Pri viacrozmerných funkciách je funkcia C kopulou vtedy a len vtedy, ak je funkcia ψ^{-1} takzvané d -monotónna (pozri [34] pre kľúčové slovo *copula*).



Obrázok 1.3: Ukážky náhodného generovania zo Studentovej kopuly. V prvom riadku s konštantným parametrom ν (na obrázku označené ako df) a meniacim sa parametrom ρ (na obrázku označené ako rho); v druhom riadku s konštantným parametrom ρ a meniacim sa ν a v oboch prípadoch pre marginálne rozdelenia $U, V \sim \mathcal{N}(0; 1)$; v treťom riadku pre konštantné parametre Studentovej kopuly a meniace sa marginálne rozdelenia – konkrétne v poradí zľava: $U \sim \mathcal{N}(0; 1), V \sim \text{Exp}(\lambda = 1)$; ďalej $U \sim \text{Exp}(\lambda = 5), V \sim \text{Exp}(\lambda = 1)$ a napokon $U \sim t_5$ so strednou hodnotou 0 a $V \sim \Gamma(\kappa = 2, \theta = 3)$. (Zdroj: vlastné spracovanie)

Poznámka: Niektorí autori označujú pojmom generátor práve spomenutú pseudoinverznú funkciu $\psi^{[-1]}$, a definície sa potom líšia aj v značení (pozri [28], [29]).

V tabuľke 1.1 uvádzame niekoľko známych a často využívaných kopula funkcií z archimedovskej triedy. Navyše, do tejto triedy sa zaraďuje aj funkcia $C(u, v) = uv$. Jej generátorom je funkcia $\psi(t) = \ln(t)$. Pomocou tejto kopula funkcie vieme najlepšie modelovať nezávislé náhodné premenné. V anglickej literatúre je preto možné stretnúť sa s pomenovaním *independence copula*.

Tabuľka 1.1: Vybraný zástupcova archimedovskej triedy kopúl a definičný obor priestoru ich parametrov – Θ . Príslušné generátory $\psi(t, \theta)$ a ich pseudoinverzné funkcie je možné nájsť na stránke [34] po zadaní kľúčového slova *copula*.

Meno kopuly	Predpis pre $C(u, v, \theta)$	Θ
<i>Claytonova</i>	$\max\{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0\}^{-\frac{1}{\theta}}$	$\langle -1; \infty \rangle \setminus \{0\}$
<i>Frankova</i>	$-\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
<i>Gumbelova</i>	$e^{-\left((-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}}$	$\langle 1; \infty \rangle$
<i>Joeova</i>	$1 - \left((1 - u)^\theta + (1 - v)^\theta - (1 - u)^\theta (1 - v)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}$	$\langle 1; \infty \rangle$

(Zdroj: vlastné spracovanie)

1.3.2 Konštrukcia viacrozmernej kopula funkcie

V predchádzajúcej podkapitole sme uviedli niekoľko formulácií dvojrozmerných kopula funkcií. Podľa vzťahu (11) je teoreticky možné skonštruovať aj k -rozmernú kopula funkciu. Napríklad pre spojité náhodné premenné $U_1, U_2, U_3, \dots, U_k$, pričom U_i sa riadi rovnomerným rozdelením na intervale $(0; 1)$ pre $\forall i = 1, 2, 3, \dots, k$, a Σ je ich korelačná matica, je k -rozmerná Gaussova kopula daná ako

$$C(u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, \Sigma) = \Phi_\Sigma \left(\Phi_1^{-1}(u_1), \Phi_2^{-1}(u_2), \Phi_3^{-1}(u_3), \dots, \Phi_k^{-1}(u_k) \right).$$

Avšak je dôležité uvedomiť si, že kvantilové funkcie poznáme nie vždy explicitne (presne tak, ako je tomu v prípade Gaussovej kopuly), a preto môže byť modelovanie viacrozmernej závislosti s využitím kopula funkcií – tak ako sme ich doposiaľ predstavili, ťažko uskutočniteľné. Navrhnuté boli preto iné, praktickejšie spôsoby konštrukcie viacrozmerných kopúl, ako napríklad vnorené archimedovské kopuly alebo tzv. párové kopuly.

Vnorené archimedovské kopuly sa v literatúre často označujú len skrátené ako NAC (z angl. *nested Archimedean copula*) alebo tiež HAC (z angl. *hierarchical Archimedean copula*). Ako názov napovedá, ide o konštrukciu viacrozmernej kopuly z archimedovskej triedy. Priamočiare rozšírenie dvojrozmernej archimedovskej kopuly (pozri definíciu (1.9)) je síce možné (tak ako udáva vzťah (12)), ale nie vždy je aj užitočné.

$$C(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \theta) = \psi^{[-1]}(\psi(u_1, \theta) + \psi(u_2, \theta) + \psi(u_3, \theta) + \dots + \psi(u_n, \theta), \theta) \quad (12)$$

Ako autori práce [28] podotýkajú, pri viacrozmernom modelovaní je v tomto prípade limitujúcim faktorom nie len využitie jediného parametera. Limitujúci je aj samotný súčet generátorov vystupujúci v uvedenej formulácii. Keďže súčet ako taký je komutatívny, tak potom združené rozdelenie náhodných premenných $(U_1, U_2, U_3, \dots, U_k)$ je podľa vzťahu (12) také isté ako združené rozdelenie ich ľubovoľnej permutácie. Táto skutočnosť je však pre prax príliš obmedzujúca.

Konštrukcia viacrozmernej HAC funkcie spočíva v postupnom skladaní generátorov v zmysle zložených funkcií namiesto ich súčtu. Pri hľadaní tzv. *úplne¹¹ vnorenej* (angl. *fully nested*) kopula funkcie sa postupuje nasledovne.

1. Najskôr sa nájde dvojrozmerná kopula funkcia

$$w_1 \triangleq C(u_1, u_2, \theta_1) = \psi_1^{[-1]} \{ \psi_1(u_1, \theta_1) + \psi_1(u_2, \theta_1), \theta_1 \}.$$

2. V druhom kroku sa hľadá ďalšia kopula funkcia z archimedovskej triedy, ktorá opisuje závislosť medzi w_1 a u_3 , čiže

$$\begin{aligned} w_2 \triangleq C(u_1, u_2, u_3, \theta_2) &= \psi_2^{[-1]} \{ \psi_2(w_1, \theta_2) + \psi_2(u_3, \theta_2), \theta_2 \} = \\ &= \psi_2^{[-1]} \{ \psi_2 \circ C(u_1, u_2, \theta_1) + \psi_2(u_3, \theta_2), \theta_2 \}, \end{aligned}$$

pričom generátor ψ_2 s parametrom θ_2 (automaticky teda aj jeho pseudoinverzná funkcia) sa môžu líšiť od generátora, ktorý bol využitý v prvom kroku (pozri [29]).

3. Ďalej sa postupuje analogicky ako v druhom kroku, teda hľadá sa kopula, ktorá opisuje závislosť $C(w_2, u_4)$, atď.

⋮

- k–1. Napokon sa dopracujeme k maximálnemu rozmeru, ku kopula funkcii $C(w_{k-1}, u_k)$, čiže výsledkom iteračného procesu je zložená funkcia

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, \theta_{k-1}) &= \psi_{k-1}^{[-1]} \{ \psi_{k-1}(w_{k-2}, \theta_{k-1}) + \psi_{k-1}(u_k, \theta_{k-1}), \theta_{k-1} \} = \\ &= \psi_{k-1}^{[-1]} \{ \psi_{k-1} \circ C(u_1, u_2, u_3, \dots, u_{k-1}, \theta_{k-2}) + \psi_{k-1}(u_k, \theta_{k-1}), \theta_{k-1} \} = \dots = \\ &= \psi_{k-1}^{[-1]} \left\{ \psi_{k-1} \circ \left(\psi_{k-2}^{[-1]} \{ \dots \} \right) + \psi_{k-1}(u_k) \right\} \end{aligned}$$

¹¹Existujú tiež tzv. *čiasťočne vnorené archimedovské kopuly*, ktoré kombinujú skladanie a súčet funkcií – pozri [1, str. 307] alebo [28, str. 12].

z priestoru $\langle 0; 1 \rangle^k \times \Theta^{k-1} \rightarrow \langle 0; 1 \rangle$, pričom $\Theta^{k-1} := \Theta_1 \times \Theta_2 \times \Theta_3 \times \cdots \times \Theta_{k-1}$.

Poznámka: Pre zlepšenie prehľadnosti zápisu sme v poslednom kroku vynechali parametre.

Podrobnejšie je téma hierarchických archimedovských kopúl spracovaná napríklad v publikácii [29]. Tento prístup k viacrozmernému modelovaniu závislostí je možné využiť napríklad pri oceňovaní kreditných derivátov (pozri [20]), pri výpočte *Value at Risk* (pozri [30]) alebo pri bayesovskej klasifikácii (pozri [17]). V našom výskume sme prístup HAC nevyužívali. Rozhodli sme sa využiť nižšie predstavenú metódu označovanú skrátené PCC, ktorá umožňuje modelovať štruktúry závislosti s väčšou flexibilitou než HAC.

K viacrozmernej kopula funkcii sa vieme dopracovať aj konštrukciou tzv. **párových kopúl** (angl. *Pair Copula Construction*, často tiež skrátené PCC). Tento prístup je, všeobecne povedané, založený na rozklade k -rozmernej združenej hustoty na $\binom{k}{2}$, t. j. na $\frac{k \cdot (k-1)}{2}$ dvojrozmerných kopúl, z ktorých je $(k-1)$ takpovediac nepodmienených, a zvyšné sú podmienené (pozri definíciu 1.10) [1]. Vďaka využitiu podmienených rozdelení v určitom poradí sa zachováva istá hierarchia medzi náhodnými premennými a ich závislosťami.

Definícia 1.10. *Nech X, Y, Z sú ľubovoľné náhodné premenné a nech $F_{X|Z}$ a $F_{Y|Z}$ sú distribučné funkcie podmienených náhodných premenných – X za podmienky Z a Y za podmienky Z . Nech C je dvojrozmerná kopula funkcia. Potom ak jej argumentami sú distribučné funkcie podmienených rozdelení, tak funkciu C budeme nazývať podmienenou kopulou.*

Najmä v anglickej literatúre zaoberajúcej sa témou PCC je možné naraziť na pojmy *R-vine*, *C-vine* a *D-vine*. Spoločný základ týchto slov, *vine*, ktoré v anglickom jazyku označuje tiež viničový ker, je pomenovanie grafického znázornenia viacrozmerných párových kopula modelov a vzniklo práve vďaka ich podobnosti so spomenutou rastlinou. Pojmom *vine* v kopula kontexte označujeme teda množinu vnorených grafov, ktorých hrany predchádzajúceho grafu sú vrcholmi alebo inak povedané uzlovými bodmi toho nasledovného. Špeciálne k -rozmerný **R-vine** (skrátené z angl. *regular vine*) je taký vine, ktorého hrany na j -tom grafe, pre $j = 1, 2, 3, \dots, k-2$, sú spojené hranou aj na nasledovnom grafe vtedy a len vtedy, ak na j -tej úrovni majú spoločný vrchol. Podrobnejšie sa téme vine venuje napríklad publikácia [6].

C-vine (skrátene z angl. *canonical vine*) označuje taký R-vine model, ktorého uzly majú na každej úrovni najväčší možný stupeň. Ako autori práce [18] výstižne poznamenali, C-vine modely je možné interpretovať ako faktorové modely, pretože na grafe každej úrovne je stredobodom jeden vrchol, a preto hovoríme, že zohráva úlohu akéhosi faktoru. V našom výskume sme však nevyužívali ani tento prístup k modelovaniu, a to z rovnakého dôvodu, ako uvádzajú A. Heinen a A. Valdesogo vo svojej práci (pozri [18, str. 336]) – nedisponujeme žiadnym ekonomickým argumentom, ktorý by nás viedol k tomu, že medzi výnosmi štátnych bezkupónových dlhopisov, ktoré boli predmetom nášho modelovania, existuje takáto faktorová závislosť.

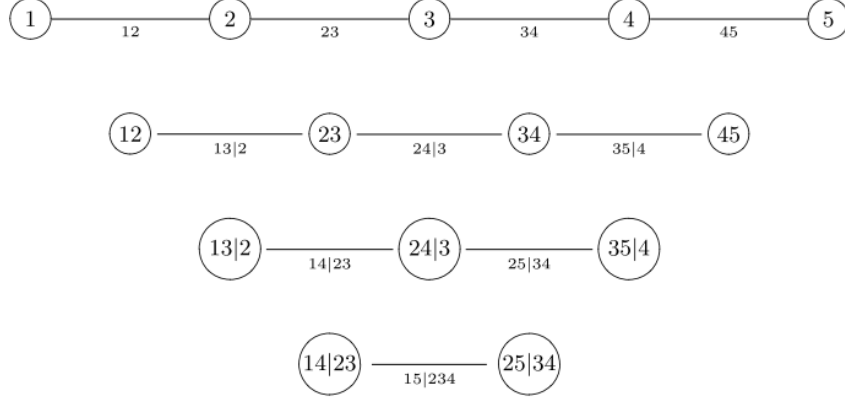
V našom výskume sme pracovali s modelmi typu **D-vine**. Na rozdiel od predchádzajúcich dvoch pojmov, písmeno D nie je skrátеныm označením žiadneho anglického slova¹². Všeobecne, pre ľubovoľné $k > 2, k \in \mathbb{N}$, pojmom D-vine označujeme taký R-vine model, ktorého uzly na každej úrovni majú stupeň nanajvýš rovný 2, a zároveň na j -tej úrovni grafu, pre $j = 1, 2, 3, \dots, k - 1$, existuje $(k + 1 - j)$ uzlov a $k - j$ hrán.

Obmedzme sa na D-vine kopula modely. Vstupnými premennými – označujeme $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k$, sú v nejakom zmysle hierarchicky zoradené (pozri podkapitolu 2.2) pozorovania, ktorých štruktúru závislosti chceme modelovať. Nakoľko tieto premenné sú argumentami kopula funkcií v ďalšom kroku výpočtu, pozorovania musia pochádzať z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ a byť marginálne rovnomerne rozdelené. V našom výskume boli takýmito pozorovaniami transformované rezíduá z modelov časových radov, ktoré boli zoradené podľa veľkosti súčtu korelácií s ostatnými premennými (detailnejšie opísané v podkapitole 2.2). Na prvom vnorenom grafe sa nachádza, ako už bolo spomenuté, $k - 1$ príslušných dvojrozmerných združených distribučných resp. kopula funkcií (pozri vzťah (10)). Na všetkých ďalších úrovniach sú uzlovými bodmi vždy dvojrozmerné podmienené kopula funkcie, pričom s narastajúcou úrovňou grafu sa jednotlivé podmienky obohacujú.

Pre vysvetlenie slovného spojenia „obohacujúcich sa podmienok“, ako sme túto skutočnosť nazvali na konci predošlého odseku, a tiež pre lepšiu predstavu množiny vnorených grafov, prikladáme obrázky 1.4 a 1.5, ktoré zobrazujú dva rôzne spôsoby grafického znázornenia schémy konštrukcie viacrozmernej kopula funkcie. Obrázok 1.4, ktorý je prevzatý

¹²Toto pomenovanie navrhli D. Kurowicka a R. M. Cooke v roku 2006. Ako sa v práci [6, str. 39] píše, písmeno D je po písmene C nasledovným písmenom v abecede a tiež modely tohto typu je možné prehľadne zakresliť (pozri [6, obrázok 3.2] alebo [32, obrázok 1]), čiže sú po anglicky takpovediac *drawable*.

od autorov práce [18], pri zobrazení kladie dôraz na to, že ide o vnorené grafy, pričom vrcholmi alebo uzlovými bodmi sú hrany z predchádzajúcej úrovne; zatiaľ čo schéma na obrázku 1.4 necháva vyniknúť skôr skutočnosť, že spolu s úrovňou narastá filtrácia, ktorou sú kopuly podmienené.



Obrázok 1.4: Schéma konštrukcie 5-rozmernej párovej D-vine kopuly. (Zdroj: [18])

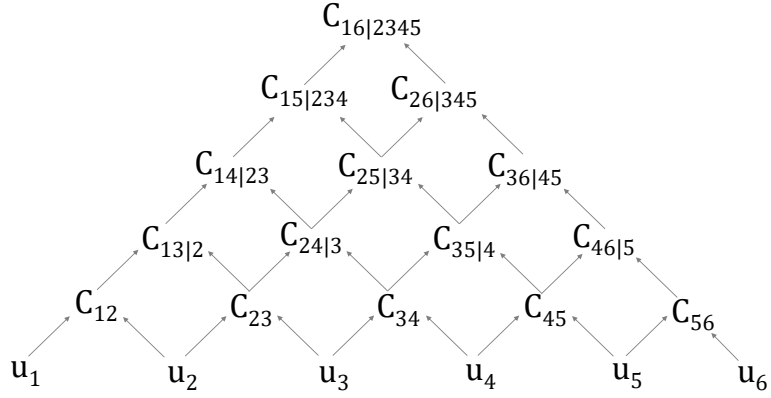
Výslednú k -rozmernú kopula funkciu získame z D-vine modelu ako súčin všetkých funkcií vystupujúcich na miestach uzlových bodov (toto tvrdenie platí aj pre C-vine). Nech $\mathcal{C}_i^{(j)}$ označuje kopula funkciu na i -tej pozícii (na obrázku 1.5 zľava) na j -tej úrovni D-vine (na obrázku 1.5 zdola). Matematicky vieme všeobecne zapísať nasledovne:

$$C(u_1, u_2, u_3, \dots, u_k) = \prod_{j=1}^{(k-1)} \prod_{i=1}^{(k+1-j)} \mathcal{C}_i^{(j)}. \quad (13)$$

Konkrétne pre 6-rozmerný príklad uvedený na obrázku 1.5 by výsledná kopula funkcia mala tvar

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) &= \prod_{i=1}^5 C_{i,i+1}(u_i, u_{i+1}) \cdot \prod_{i=2}^5 C_{i-1,i+1|i}(F(u_{i-1}|u_i), F(u_{i+1}|u_i)) \cdot \\ &\cdot \prod_{i=3}^5 C_{i-2,i+1|i-1,i}(F(u_{i-2}|u_{i-1}, u_i), F(u_{i+1}|u_{i-1}, u_i)) \cdot \\ &\cdot C_{15|234}(F(u_1|u_2, u_3, u_4), F(u_5|u_2, u_3, u_4)) \cdot \\ &\cdot C_{26|345}(F(u_2|u_3, u_4, u_5), F(u_6|u_3, u_4, u_5)) \cdot \\ &\cdot C_{16|2345}(F(u_1|u_2, u_3, u_4, u_5), F(u_6|u_2, u_3, u_4, u_5)). \end{aligned} \quad (14)$$

Výhodou využitia PCC narozdiel od HAC je fakt, že každá kopula môže byť z inej triedy kopula funkcií, čo výrazne prispieva k flexibilitě viacrozmerného modelu.



Obrázok 1.5: Schéma konštrukcie 6-rozmernej párovej D-vine kopuly. Argumenty jednotlivých funkcií sú uvedené vo vzťahu (14). (Zdroj: vlastné spracovanie podľa [32])

Pre úplnosť dodávame, že v literatúre boli opísané aj ďalšie typy PCC, ako napríklad M-vine či COPAR (viac informácií je možné nájsť napríklad v publikácii [25]). Na záver poznamenávame, že kopula funkcie, ako sme ich predstavili v tejto kapitole, sú časovo invariantné, t. j. ich odhad neobsahuje žiadnu časovú dynamiku, nevysvetľuje žiaden (časový) vývoj, naopak, opisuje zadaný dátový súbor ako jeden celok.

2 Modelovanie závislosti výnosových kriviek

Spojenie troch oblastí, ktorým sme sa vo výskume zaoberali (prepojenie oblasti výnosových kriviek, časových radov a kopula modelovania) nie je v literatúre novinkou, o čom svedčí aj publikácia [32], ktorá bola našou inšpiráciou pri budovaní metodiky určenej pre náš výskum. Autori spomenutej publikácie [32] modelovali D-vine kopula štruktúru denných logaritmických výnosov, pričom sa zamerali na americké dlhopisy s dobami do splatnosti 1, 2, 3, 5, 7 a 10 rokov, čo je technicky vzaté modelovanie závislostí resp. združeného rozdelenia v rámci výnosovej krivky Spojených štátov amerických.

Náš výskum oproti publikácii [32] pokrýva väčší rozmer – cieľom nebolo modelovať závislosť medzi výnosmi jednotlivých aktív s rôznou dobou do splatnosti, ale predovšetkým medzi aktívami rôznych krajín. Navyše náš výskum zahŕňa aj oblasť modelovania samotných výnosových kriviek.

Nižšie uvádzame stručný prehľad toho, ako sme pri modelovaní postupovali. Jednotlivé body sú detailnejšie rozpísané ďalej v rámci podkapitol 2.1 až 2.3.

0. Stanovenie cieľu – skúmanie akej závislosti je predmetom modelovania?
1. Výber a príprava dát – pozri podkapitolu 2.1.
2. Modelovanie výnosových kriviek jednotlivých krajín v čase – pozri podkapitolu 2.2.
Modelované na základe trhových výnosov do splatnosti dlhopisov.
3. Modelovanie časových radov pre denné relatívne zmeny výnosov dlhopisov jednotlivých krajín. Modelované na základe odhadnutých výnosov zo spotových výnosových kriviek – pozri podkapitolu 2.2.
4. Validácia modelov časových radov – pozri podkapitolu 2.3.
5. Získanie hodnôt rezíduí časových radov a ich následná príprava na kopula modelovanie – pozri podkapitolu 2.2.
6. Odhad D-vine štruktúry – pozri podkapitolu 2.2.

V našom záujme bolo pozrieť sa na *globálne* závislosti, a preto sme pre prípadové štúdiu vybrali nasledovné krajiny: Austrália, Čína, India, Kanada, Mexiko, Nemecko, Spojené štáty americké. Závislosti sme skúmali medzi výnosmi do splatnosti štátnych dlhopisov týchto krajín v časovom horizonte do 20 rokov. Neuvažovali sme skúmať dlhší horizont, a to z toho dôvodu, že výšky výnosov dlhopisov pre veľmi dlhé doby do splatnosti

ako napríklad 30 či 50 rokov sú v porovnaní s krátkodobým a strednodobým horizontom vo väčšej miere ovplyvnené históriou politických rozhodnutí danej krajiny a sentimentom investorov, či ich dôverou v hospodársku stabilitu danej krajiny.

Čo sa týka skúmaného časového obdobia (v historickom zmysle), pre náš výskum sme vybrali desaťročné obdobie, konkrétne dáta so začiatkom na konci roka 2012 (historické dáta od 1. decembra 2012), teda tak, aby sme neuvažovali obdobie globálneho ekonomického šoku z roku 2008, až po koniec roka 2022 (dáta do 1. decembra 2022). Neskôr sme však rozdelili toto obdobie na tri podobdobia – pokrízové, pokojné a krízové obdobie. Týmto krokom sme sa snažili predísť tomu, že by údajov vstupujúcich do kopula modelovania bolo príliš veľa v tom zmysle, že by algoritmus pre výber kopula funkcie neobjavil žiadnu významnú závislosť, pretože by sa jednotlivé údaje „vyvážili“. Navyše nám takéto rozdelenie umožňuje porovnať si výsledky modelovania pre jednotlivé hospodárske okolnosti.

2.1 Dáta

Internetovým zdrojom dát, ktorými boli výnosy do splatnosti štátnych dlhopisov, bol portál *Investing.com* [21], na ktorom sú dostupné historické údaje pre všetky zvolené krajiny. Ako sme už vyššie načrtli, cieľom bolo skúmať, či sa dajú v trhových dátach nájsť (a modelovať) preukázateľné závislosti.

Samotné podkladové aktíva sme vyberali z množiny tých dlhopisov, ktoré boli obchodované počas celého vybraného časového okna. Konkrétny výber dôb do splatnosti dlhopisov pre jednotlivé krajiny zobrazuje tabuľka 2.1. Hoci vybrané podkladové aktíva boli obchodované počas celého zvoleného obdobia, nie všetky boli obchodované vždy v rovnaký deň. Pred samotným modelovaním bolo teda potrebné nejakým spôsobom dosiahnuť konzistentnosť v dátach. Pre jednoduchosť sme sa rozhodli uvažovať len tie dni, pre ktoré boli dostupné všetky potrebné dáta.

Pred modelovaním výnosových kriviek jednotlivých krajín sme preto spravili prienik stiahnutých údajov vzhľadom na časové body v rámci aktív jednotlivých krajín. Pre Austráliu sme dostali vektory výnosov dĺžky 3307 pozorovaní, pre Čínu 2477, pre Indiu 2505, pre Kanadu 2581, pre Mexiko 2494, pre Nemecko 2617, a napokon pre Spojené štáty americké 3033 časových bodov. Z týchto údajov sa namodelovali výnosové krivky. Rovnako

Tabuľka 2.1: Prehľad dôb do splatnosti štátnych bezkupónových dlhopisov pre vybrané krajiny, na základe ktorých boli modelované výnosové krivky. Vybraná doba do splatnosti označená znakom $\times$. *Poznámka:* 0,5 označuje dlhopis s dobou do splatnosti 6 mesiacov.

Vybrané doby do splatnosti (v rokoch):	0,5	1	3	5	7	10	15	19	20	30
<i>Austrália</i>		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			
<i>Čína</i>		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	
<i>India</i>	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		
<i>Kanada</i>	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			$\times$	
<i>Mexiko</i>	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			$\times$	
<i>Nemecko</i>	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	
<i>Spojené štáty americké</i>	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$				$\times$

(Zdroj: vlastné spracovanie)

pred modelovaním časových radov sme spravili prienik navzájom medzi krajinami. Napokon mali modelované dáta dĺžku 1953 časových bodov. Tie sa však prerozdělili do spomínaných troch období: pokrízové obdobie obsahovalo 614 časových bodov, pokojné obdobie 794 a krízové obdobie 545 časových bodov.

Je jasné, že takýmto prienikom sa stráca časť informácie – napríklad v prípade Austrálie či Spojených štátov amerických sme stratili viac ako tisíc z pôvodných pozorovaní. Východiskovým predpokladom našej práce bolo, že globálne trhy reagujú v tak krátkom čase, že zmeny výnosov sa prejavujú v ich pozorovaniach viazaných k navzájom rovnakým dňom. Navyše sme počas nášho výskumu pracovali s *open* hodnotami výnosov do splatnosti a matematické denné výnosy sme vypočítavali až po urobení prieniku medzi krajinami, čím sme v dátach zachovali aspoň informáciu o absolútnej zmene výšky výnosu. Tiež by sme chceli podotknúť, že cieľom tejto práce bolo v prvom rade predstaviť metodiku modelovania závislostí, ktorú ilustrujeme na opisovaných dátach. V tomto bode preto poukazujeme na toto miesto praktickej časti, v ktorom je možné zvoliť aj iný prístup.

2.2 Metodika výskumu a implementácia jednotlivých krokov

Výnosové krivky. Modelovanie výnosových kriviek predchádzalo samotnému modelovaniu ich závislosti. Z trhových dát, o ktorých sme písali v predchádzajúcej podkapitole 2.1, sme pre každú z vybraných krajín a pre každý časový bod zo skúmaného obdobia odhadli výnosovú krivku. Hoci následné modelovanie závislosti je možné vykonať aj bez počiatočného odhadu výnosovej krivky, túto oblasť sme sa rozhodli do výskumu zahrnúť z toho dôvodu, aby sme predstavili, zdôrazňujeme, všeobecný prístup k modelovaniu závislosti výnosov štátnych dlhopisov.

Kopula modelovanie, ako podrobnejšie opisujeme neskôr v tejto časti práce, vyžaduje vstupné hodnoty, ktoré v prípade tohto typu výskumu pochádzajú z predtým modelovaných časových radov. Aby výsledok kopula modelovania mal požadovanú výpovednú hodnotu, časové rady musia byť medzi vybranými krajinami navzájom konzistentné – to v našom prípade znamená, že majú byť modelované na základe výnosov štátnych dlhopisov s rovnakými dobami do splatnosti naprieč zvoleným spektrom krajín. Výnosová krivka nám teda umožňuje najskôr sa rozhodnúť závislosť medzi ktorými štátmi je v našom záujme skúmať, a až následne hľadať, sťahovať a spracúvať príslušné trhové dáta. Pokiaľ by sme oblasť výnosových kriviek do výskumu nezahrnuli, boli by sme nútení obmedziť sa len na také množiny krajín, ktoré majú na trhu dostupné dlhopisy s rovnakými dobami do splatnosti, a to počas celého skúmaného obdobia. To však môže v niektorých prípadoch predstavovať príliš silné obmedzenie výberu.

Zvoleným matematickým nástrojom na modelovanie výnosových kriviek bol, ako je uvedené v podkapitole 1.1, Svenssonov model, ktorý je definovaný vzťahmi (2) a (3). Vybraný bol na základe výsledkov našej predchádzajúcej práce [9], pretože za predpokladu, že nemodelujeme anomálne tvary výnosových kriviek, model sa ukazuje byť stabilný, primerane flexibilný a robustný zároveň, pričom všetky uvedené vlastnosti de facto vyplývajú z jeho funkčného predpisu¹³. Z tohto dôvodu nebolo potrebné špeciálne validovať výsledný model. Pre kontrolu nám slúžil predovšetkým grafický výstup modelovania výnosových

¹³Ako uvádzame v práci [9, podkapitola 2.1.4 a kapitola 4], stabilitu zabezpečuje dlhodobý faktor modelu – parameter β_0 ; flexibilitu zabezpečuje primeraný počet parametrov spolu s vhodne navrhnutými členmi funkčného predpisu, ktorých sila vplyvu na hladinu krivky sa mení s meniacou sa dobou do splatnosti; a napokon robustnosť je aj výsledkom využitia regresných metód na odhad hodnôt parametrov.

kriviek, ale taktiež sme vypočítavali strednú kvadratickú odchýlku (pozri definíciu 2.1) odhadnutých modelov.

V zásade pre túto časť výskumu môže byť použitý aj iný parametrický model, ktorý opisuje dáta s požadovanou presnosťou. Pri splajnových modeloch treba dopredu uvážiť, či nebude v niektorom prípade potrebná extrapolácia výnosovej krivky – vtedy by bolo potrebné zvoliť iný ako splajnový model. A napokon, rovnovážne modely by sme neodporučili použiť, pretože kvôli náročnejšej kalibrácii ich parametrov sa nám javia modely z tejto triedy ako neefektívne pre takýto výskum.

Na implementáciu Svenssonovho modelu v softvéri R [31] sme využili balík s názvom `YieldCurve`, ktorý sme využívali aj počas bakalárskeho výskumu. Keďže tentokrát bolo potrebné odhadnúť výnosovú krivku vo veľkom množstve časových bodov a pre viacero krajín (čo v našom prípade predstavuje niekoľko tisíc odhadov výnosových kriviek pre každý štát), vytvorili sme si vlastnú funkciu s názvom `yc_3d_estim`, ktorá efektívne zautomatizovala celú časť modelovania výnosových kriviek v prezentovanom výskume. Zdrojový kód našej funkcie je možné nájsť v prílohe A a tiež v repozitári [8] na stránke GitHub.

Úlohou funkcie `yc_3d_estim(tl, mat, y, ...)` je odhadnúť výnosovú krivku Svenssonovým modelom na základe výnosov z argumentu `y`, ktoré patria k príslušným dobám do splatnosti uvedeným v argumente `mat`. Spotová výnosová krivka sa odhadne v každom časovom bode zadaného časového okna z argumentu `tl`. Funkcia vráti vektor stredných kvadratických odchýlok a interaktívny trojrozmerný graf namodelovaného objektu pre horizont dôb do splatnosti od jedného roka po dobu tridsať rokov do splatnosti. Šírku tohto horizontu je však možné nastaviť zmenou hodnoty parametrov `T_min` a `T_max`. Ďalej funkcia vytvorí dva súbory vo formáte csv – v súbore *Coefficients.csv* sa nachádzajú číselné odhady parametrov Svenssonovho modelu pre každý časový bod; v súbore *YieldCurves.csv* zas odhadnuté funkčné hodnoty výnosovej krivky, opäť pre každý časový bod zo zadaného obdobia. Navyše pokiaľ užívateľ špecifikuje argument `mts`, funkcia vráti tiež objekt triedy `dataframe`, ktorý obsahuje funkčné hodnoty jednotlivých výnosových kriviek len pre vybrané doby do splatnosti (špecifikované parametrom `mts`).

Čo sa týka odhadu samotných výnosových kriviek, tak kľúčová funkcia je funkcia `Svensson` z už spomenutého balíka `YieldCurve`, ktorá nájde optimálne hodnoty para-

metrov Svenssonovho modelu. Funkcia `Srates` potom dosadí v predchádzajúcom kroku odhadnuté parametre do predpisu modelu a vráti funkčné hodnoty, t. j. výnosy odhadnuté krivkou pre zvolené doby do splatnosti.

Na záver časti venovanej implementácii výnosových kriviek v rámci nášho výskumu ešte raz podotýkame, že naša funkcia pracuje s funkciami z rôznych balíkov, ktoré je potrebné mať nainštalované. Sú to balíky `plotly`, `progress`, `xts` a `YieldCurve`. Pred použitím našej funkcie je možné pozrieť si komentár dostupný na stránke [8], kde je možné nájsť požadované triedy a rozmery jednotlivých argumentov funkcie, ale tiež niektoré nespomenuté parametre, ktorých hodnoty sú prednastavené.

Časové rady. Pri tomto type výskumu je potrebné pred kopula modelovaním závislosti medzi krajinami odstrániť z dát sériovú závislosť. Na to nám poslúžili modely časových radov. Z technických dôvodov sme pracovali s *logaritmicky transformovanými výnosmi*. Transformácia spočívala v posune údajov o konštantu. Dôvodom bolo, že pri niektorých dátových súboroch (pozri obrázky 3.1 až 3.7) prechádzala výnosová krivka do záporných čísel, a teda nebolo vždy možné vypočítať hodnotu logaritmu. Namiesto tradičných logaritmických výnosov (v zmysle logaritmovania denných relatívnych zmien), ktoré by sa vypočítavali ako $\ln\left(\frac{\tilde{R}_{0,t+1}(z)}{\tilde{R}_{0,t}(z)}\right)$, sme pracovali s log-výnosmi

$$y_{i,t+1} := \ln\left(\frac{\tilde{R}_{0,t+1}(z) + 1}{\tilde{R}_{0,t}(z) + 1}\right) = \ln(1 + \tilde{R}_{0,t+1}(z)) - \ln(1 + \tilde{R}_{0,t}(z))$$

pre $i = 1, 2, 3, 4$ a $z \in \{2, 5, 10, 17\}$. Následne sme tieto údaje rozdelili na už spomínané tri obdobia, pričom v modelovaní sme postupovali tak, ako píšeme ďalej v tejto časti práce, a to rovnako pre každé obdobie.

Poznámka: Ako sme už v podkapitole 2.1 spomenuli, pred výpočtom takýchto logaritmických výnosov sme opäť urobili prienik dát všetkých krajín vzhľadom na časové body. Je dôležité vypočítavať log-výnosy až po urobení takéhoto prieniku. Keby sme najskôr vypočítali log-výnosy jednotlivých aktív a až následne robili prienik vzhľadom na časové body, výsledky nášho modelovania by stratili požadovanú výpovednú hodnotu.

Na implementáciu VARMA a DCC-GARCH modelov sme využili tri rôzne balíky. Konkrétne išlo o balíky `MTS` (pozri [33]), `rugarch` (pozri [13], [11]) a `rmgarch` (pozri [12], [10]), ktoré sme využili nasledovným spôsobom. Vo väčšine prípadov sme pracovali čisto

len s VAR, čiže VARMA($p, 0$) modelom. Vtedy sme využívali funkciu `varxfit` z balíku `rmgarch`. Pokiaľ bola potrebná aj *moving average* časť modelu, využívali sme funkciu `VARMA` z balíku `MTS`. Rezíduá z odhadnutého modelu sme potom posunuli do funkcie `dccfit` z balíku `rmgarch`, ktorá vyžaduje špecifikáciu jednorozmerných GARCH modelov, na čo nám poslúžila funkcia `ugarchspec` z balíku `rugarch`.

Rád modelov časových radov, podmienené rozdelenie či typ GARCH modelu sme vyberali tak, aby model čo najlepšie opisoval dáta. Keďže časové rady nám mali slúžiť na odstránenie autokorelácií, hlavným kritériom vhodnosti modelu boli výsledky štatistických testov pre rezíduá a ich druhé mocniny, ktoré testovali hypotézu o ich sériovej nezávislosti. Použitý portmanteau test je bližšie opísaný v podkapitole 2.2. V zásade ide o viacrozmerné rozšírenie populárneho Ljungovej-Boxovho testu. Štandardizované rezíduá a ich druhé mocniny sme testovali pre vybrané lags, a to konkrétne 10, 20 a 30. Vybraný test je v prostredí R implementovaný napríklad v balíku `MTS` vo funkcii `MarchTest`. Výhodou využitia tejto funkcie je, že vykoná 4 testy naraz a ich výsledky zobrazí v spoločnom výstupe. Pre nás boli relevantné len spomenuté dva, a to test autokorelácie štandardizovaných rezíduí a ich druhých mocnín (prvý a tretí výsledok výstupu funkcie). Pokiaľ z pohľadu sériovej závislosti vyhovovalo viacero modelov, vyberali sme taký, ktorý mal lepšiu hodnotu Bayesovho informačného kritéria. Avšak poznamenávame, že je veľa kombinácií rádov VARMA a GARCH modelov, ďalej je tiež k dispozícii viac ako šesť podmienených rozdelení a k tomu aj niekoľko typov GARCH modelov. Prakticky je teda nemožné vyskúšať všetky existujúce kombinácie. Vybrané modely, ktoré sme sa rozhodli použiť a ktoré uvádzame v kapitole 3 v tabuľke 3.2, preto nemusia byť najoptimálnejšie zo všetkých možných.

Kombinácia VARMA a DCC-GARCH modelu bola vybraná na základe našich predchádzajúcich skúseností s modelovaním časových radov avšak dostupné je spektrum modelov, ktoré môžu byť rovnako použité, pokiaľ splnia úlohu¹⁴, ktorú v tomto výskume majú zohrávať. Ako príklad uvidíme tzv. BEKK model, ktorý má oproti zvolenému DCC-GARCH modelu viac parametrov, avšak, ako aj autor publikácie [33] uvádza, ich početnosť môže byť pre veľké rozmery z praktického hľadiska nevýhodou.

¹⁴Ako sme už viackrát uviedli, úlohou modelov časových radov je odstrániť autokorelácie z dát, aby sme kopula modelovanie vykonávali na dátach bez sériovej závislosti.

Kopula funkcie. Po odstránení sériovej závislosti z dát, ktorú nám pomohli vysvetliť modely časových radov, je možné prejsť k hlavnej časti nášho výskumu – k modelovaniu závislostí medzi vybranými krajinami, na čo nám slúžili kopula funkcie, ktoré sme predstavili v časti 1.3. Ako sme už v spomenutej časti uviedli, na modelovanie viacrozmernej kopuly sme sa rozhodli využiť algoritmický postup D-vine štruktúry, ktorý sa pre náš výskum ukázal byť výhodný okrem dôvodov uvedených v podkapitole 1.3.2, aj z praktického hľadiska. Vďaka rozkladu viacrozmernej kopuly na dvojrozmerné kopuly bolo modelovanie D-vine efektívne realizovateľné v softvéri R a vďaka symetrickej hierarchickej štruktúre a postupnému vnáraníu kopula funkcií bolo možné odhad robiť automatizovane (viac neskôr v tejto časti).

Predtým ako prejdeme k samotným kopula funkciám, zastavme sa najskôr pri ich vstupných hodnotách, ktoré sme v podkapitole 1.3.2 označovali u_i a všeobecne nech $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Nasledujúce odseky teda ponúkajú detailnejšie informácie k bodu 5 z pracovného postupu, ktorý sme uviedli na začiatku kapitoly 2. Ako sme už niekoľkokrát spomenuli, sériovú závislosť v rámci jednotlivých krajín sme teoreticky odstránili modelovaním časových radov. Závislosť medzi krajinami sme preto modelovali na základe štandardizovaných rezíduí časových radov.

Pri modelovaní výnosov resp. ich diferencií viacrozmerným časovým radom, sú rezíduá modelu technicky vzaté maticou, ktorá sa skladá z vektorov rezíduí jednotlivých dôb do splatnosti danej krajiny. Pre každú krajinu, pre ktorú sme odhadovali viacrozmerný časový rad, máme teda jednu takúto maticu. Do D-vine štruktúry však vstupujú pozorovania u_i , dohromady k vektorov. V tomto bode sa teda ponúkajú dva prístupy: jednou možnosťou je, expresívne povedané, „rozbiť“ matice rezíduí jednotlivých krajín na vektory rezíduí, z ktorých sú matice zložené, alebo, druhá možnosť, tieto matice zvektORIZOVAŤ. V prvej spomenutej alternatíve by k bolo rovné súčinu počtu krajín a rozmeru viacrozmerných časových radov (v tejto práci označujeme písmenom n). V takomto prípade by ale v konečnom dôsledku nešlo o modelovanie závislostí medzi krajinami, pretože D-vine štruktúra je symetrická štruktúra, a teda by sa v rámci D-vine odhadovali aj také dvojrozmerné kopuly, ktoré by predstavovali združené a podmienené rozdelenia medzi dobami do splatnosti tej istej krajiny alebo, síce medzi rôznymi krajinami navzájom, ale nekonzistentne, t. j. medzi rôznymi dobami do splatnosti. Pre účely naplnenia sta-

noveného cieľa sme si preto vybrali druhý spomenutý prístup a jednotlivé matice rezíduí sme jednoducho zvektorizovali. Dĺžka časového obdobia bola rovnaká naprieč modelmi časových radov, takže vektorizovaním sme dostali k po zložkách konzistentných vektorov (na i -tej zložke každého vektora je rezíduum prislúchajúce rovnakej dobe do splatnosti a rovnakému obchodovaciemu dňu), pričom k je dané počtom krajín v skúmanej množine.

Poznámka: Skutočnosť, že vektorizáciou v podstate strácame časovú dynamiku (v tom zmysle, že samotný vektor prestáva byť časovým radom pozorovaní), nepredstavuje v našom prípade prekážku, a to z toho dôvodu, že neskôr odhadované kopula funkcie sa nemenia v čase a odhadujú sa na základe všetkých pozorovaní dohromady, bez ohľadu na ich vývoj v čase (ten bol zohľadnený pri hľadaní sériovej závislosti). Naš výskum ďalej teda v každom prípade vyžaduje len usporiadané hodnoty pozorovaní, čo takýto vektor spĺňa.

Vektory premenných vstupujúce do kopula funkcií navyše musia spĺňať nasledovné tri podmienky: ich zložky pochádzajú z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$; marginálne sú tieto vektory rovnomerne rozdelené a navyše do D-vine štruktúry musia vstupovať už v nejakom zmysle hierarchicky zoradené. To však rezíduá vo všeobecnosti nespĺňajú, a preto je potrebné ich ešte ďalej transformovať. Prvé dve vlastnosti sme zabezpečili využitím funkcie `pobs`, ktorá je k dispozícii v balíkoch `copula` a `VineCopula` a transformuje vektory, ktoré do nej vstupujú nasledovne. Nech $v_i := (\varepsilon_{i1}^\top, \varepsilon_{i2}^\top, \varepsilon_{i3}^\top, \dots, \varepsilon_{in}^\top)^\top$ označuje už vektorizované matice rezíduí časových radov pre $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Dĺžka tohto vektora – označíme ω je teda rovná súčinu dĺžky sledovaného obdobia – označujeme ℓ a rozmeru procesu – n . Zložky vektora v_i následne orankujeme. Každéj zložke teda prislúcha nejaká hodnota rank_{ij} , pričom j označuje index danej zložky, čiže $j = 1, 2, 3, \dots, \omega$. Podelením všetkých hodnôt rank_{ij} o jednotku zväčšenou dimenziou vektora v_i (pozri rovnicu (15), [26]) napokon získavame transformované pozorovania – označíme u_i , pričom opäť $i = 1, 2, 3, \dots, k$, ktoré spĺňajú všetky technické predpoklady na vstup do kopula modelovania:

$$u_{ij} = \frac{\text{rank}_{ij}}{(\omega + 1)}. \quad (15)$$

Posledným, ale stále dôležitým krokom, ktorý v tomto type výskumu zvykne predchádzať kopula modelovaniu (pozri [32]), je, že sme vektory u_i , $i = 1, 2, 3, \dots, k$, zoradili podľa absolútnej veľkosti súčtu korelácií s ostatnými vektormi. Vypočíta sa matica hodnôt Kendallovho tau a poradie jej riadkových (ekvivalentne stĺpcových) súčtov určí poradie

vektorov, v ktorom vstupujú do D-vine štruktúry.

Čo sa týka výberu kopula funkcie a odhadu jej parametrov, využívali sme funkciu z balíka `VineCopula` s názvom `BiCopSelect(u1, u2, ...)`, ktorá pre zadané dvojrozmerné dáta `u1`, `u2` vyberie z viac ako 40 rôznych¹⁵ kopula funkcií takú, ktorá má po fite na zadané dáta najnižšiu hodnotu Akaikeho informčného kritéria (pokiaľ užívateľ nezvolí inak, pozri argument `selectioncrit`). Vyššie uvedený balík obsahuje množstvo elementárnych funkcií, ktoré sú užitočné pri PCC kopula modelovaní. Hoci D-vine je všeobecný algoritmický postup, funkcia, ktorá by za používateľa odhadla celú štruktúru, nie je dostupná v tomto balíku. Plne automatizovaný odhad rôznych vine štruktúr, vrátane D-vine, je dostupný v balíku `svines`. Ide o balík, ktorý bol prvý raz zverejnený v marci 2022, čiže počas toho, ako vznikala táto práca. Aj to je dôvod, prečo sme si vytvorili vlastnú funkciu pre automatizovaný odhad D-vine štruktúry s názvom `dvine_estim`. Zdrojový kód tejto funkcie je možné nájsť v prílohe B a tiež na stránke [8]. V porovnaní s našou funkciou poskytujú používateľovi funkcie zo spomínaného balíka `svines` (v ich aktuálnej verzii) menší prehľad o jednotlivých stupňoch odhadnutej štruktúry, ale na druhej strane viac možností nastavení ich fungovania. Tento balík navyše obsahuje aj funkcie, ktoré umožňujú priamo z odhadnutého viacrozmerného objektu simulovať nové dátové súbory. Preto rovnako ako aj pri iných oblastiach matematického modelovania, v závislosti od potrieb modelára, odporúčame zvážiť výber balíka určeného na kopula modelovanie.

Funkcia `dvine_estim(u, indt = TRUE)`, kde u je $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_k)$, t. j. matica zložená zo skúmaných pozorovaní, vráti jednotlivé odhadnuté kopuly $\mathcal{C}_i^{(j)}$ (pozri rovnicu (13)) ako `BiCop` objekty. Výstup teda obsahuje názov a odhadnuté parametre jednotlivých kopúl, ale aj Kendallovo tau, hodnoty indexu hornej aj dolnej chvostovej závislosti a ďalšie (pozri [26]). Výstup sme pre prehľadnosť doplnili o vlastné označenie kopula funkcií, ktoré sa viaže na príslušné argumenty a informácie v podmienke konkrétnej kopula funkcie, vďaka čomu je možné jednoducho určiť, na ktorú pozíciu (a na ktorú úroveň) D-vine sa daný odhad viaže. Takéto označenia funkcia vyrobí z názvov stĺpcov vstupných dát alebo všeobecne z označení stĺpcov matice ako $u_i, i = 1, 2, 3, \dots, k$. Pre lepšiu orientáciu sa do konzoly vypíše náčrt D-vine vnoreného grafu, ktorý je analogický obrázku 1.5. Pre úplnosť dodávame, že funkcia je navrhnutá pre univerzálny rozmer $k \in \mathbb{N}$.

¹⁵vrátane rotovaných verzií niektorých kopúl

Do samotného algoritmu výberu najvhodnejšej kopula funkcie, či do optimalizačného algoritmu pre výpočet jej parametrov nie je aktuálne možné zasahovať prostredníctvom nastavení funkcie `dvine_estim`. Výnimkou je možnosť vybrať si, či funkcia `BiCopSelect` má pri každom výbere kopula funkcie otestovať hypotézu, že dané premenné sú navzájom nezávislé. Pokiaľ test túto hypotézu nezamieta, funkcia `BiCopSelect` pre príslušnú pozíciu v D-vine vráti tzv. *independence* kopulu (pozri podkapitolu 1.3.1, časť archimedovské kopuly). Test nezávislosti tak, ako je v rámci funkcie implementovaný, je bližšie matematicky opísaný v podkapitole 2.3. V našej funkcii `dvine_estim` je pre test nezávislosti určený argument `indt` s prednastavenou hodnotou `TRUE`, čiže test nezávislosti sa automaticky vykoná.

2.3 Posudzovanie presnosti modelov a vybrané štatistické testy

Vybranou metrikou na meranie kvality odhadov výnosových kriviek bola **stredná kvadratická odchýlka** (pozri definíciu 2.1) krivky, vďaka ktorej sme mohli navzájom porovnávať odhadnuté výnosové krivky rôznych krajín.

Definícia 2.1. [9] *Pojem stredná kvadratická chyba alebo tiež stredná kvadratická odchýlka – označíme MSE (z angl. mean squared error), vyjadruje priemerný kvadratický rozdiel medzi odhadovanými a skutočnými hodnotami.*

Strednú kvadratickú odchýlku výnosovej krivky teda vypočítame ako

$$\text{MSE} := \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \left(\tilde{R}_0(i) - R(0, i) \right)^2,$$

kde m je veľkosť vstupného dátového súboru, v našom prípade teda počet dôb do splatnosti, ktorých výnosy vstupujú do funkcie `yc_3d_estim`.

Ako sme už uviedli v predošlej podkapitole, výpočet stredných kvadratických odchýlok sme realizovali vrámci funkcie `yc_3d_estim`, ktorá automaticky vracia objekt `MSE`, ktorý predstavuje vektor stredných kvadratických odchýlok v čase. Konkrétne výsledky uvádzame v podkapitole 3.1.

V prípade jednorozmerných modelov časových radov je zvykom validovať modely **Ljungovej-Boxovým testom**, ktorý testuje hypotézu o nulovej autokorelácii. Nasledujúci portmanteau test je viacrozmerným rozšírením tohto testu. Ako sme už v predošlých

častiach práce naznačili, je potrebné otestovať nielen autokorelácie rezíduí modelu, ale aj autokorelácie ich druhých mocnín.

Nech ℓ je všeobecne veľkosť testovanej vzorky – v našom prípade dĺžka časového radu a $\hat{\rho}_i$ je matica krížových korelácií (angl. *cross-correlation matrix*) testovaných rezíduí procesu pre i -ty lag. Potom testovú štatistiku vypočítame ako

$$Q(L) := \ell^2 \cdot \sum_{i=1}^L \frac{1}{\ell - i} \left(\text{vec}(\hat{\rho}_i^\top) \right)^\top \cdot \left[\hat{\rho}_0^{-1} \otimes \hat{\rho}_0^{-1} \right] \cdot \text{vec}(\hat{\rho}_i^\top),$$

pričom $\otimes$ označuje *Kroneckerov súčin*. Za platnosti nulovej hypotézy sa $Q(L)$ asymptoticky pre $\ell \rightarrow \infty$ riadi χ^2 rozdelením s Ln^2 stupňami voľnosti (pripomíname, že n označuje rozmer viacrozmerného časového radu). [33]

Poznámka: Ďalej v práci pri odvolávaní sa na uvedenú testovú štatistiku používame značenie $Q(L)$ pre test štandardizovaných rezíduí a $Q^2(L)$ pre ich druhé mocniny.

Ako sme uviedli v podkapitole 2.2, v rámci funkcie `dvine_estim` sa realizuje **test nezávislosti** náhodných premenných (pokiaľ používateľ funkcie nezmení prednastavenú hodnotu parametra `indt`). Tento test je implementovaný vo funkcii `BiCopSelect`. V nasledovnom odseku predstavíme tento test v takej podobe, v akej ho realizujú spomenuté funkcie.

Nech sú zachované všetky doposiaľ zavedené označenia. Bez ujmy na všeobecnosti nech U_1, U_2 reprezentujú testovanú dvojicu náhodných premenných, ktorých dĺžku označujeme ω . Ďalej nech $\hat{\tau}(u_1, u_2)$ označuje empirickú hodnotu Kendallovho tau pre zvolené náhodné premenné. Potom podľa [14] je možné ukázať, že za platnosti určitých podmienok regularity a za platnosti nulovej hypotézy, t. j. že premenné U_1 a U_2 sú nezávislé, testová štatistika T , ktorej hodnotu vypočítame ako:

$$\hat{T} = \sqrt{\frac{9\omega \cdot (\omega - 1)}{2 \cdot (2\omega + 5)}} \cdot |\hat{\tau}(u_1, u_2)|,$$

sa pre $\omega \rightarrow \infty$ (asymptoticky) riadi normálnym rozdelením s nulovou strednou hodnotou a disperziou $\frac{2 \cdot (2\omega + 5)}{9\omega \cdot (\omega - 1)}$. Pokiaľ na zvolenej hladine významnosti test nulovú hypotézu nezamietne, funkcia `BiCopSelect` vráti kopulu $C(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2$.

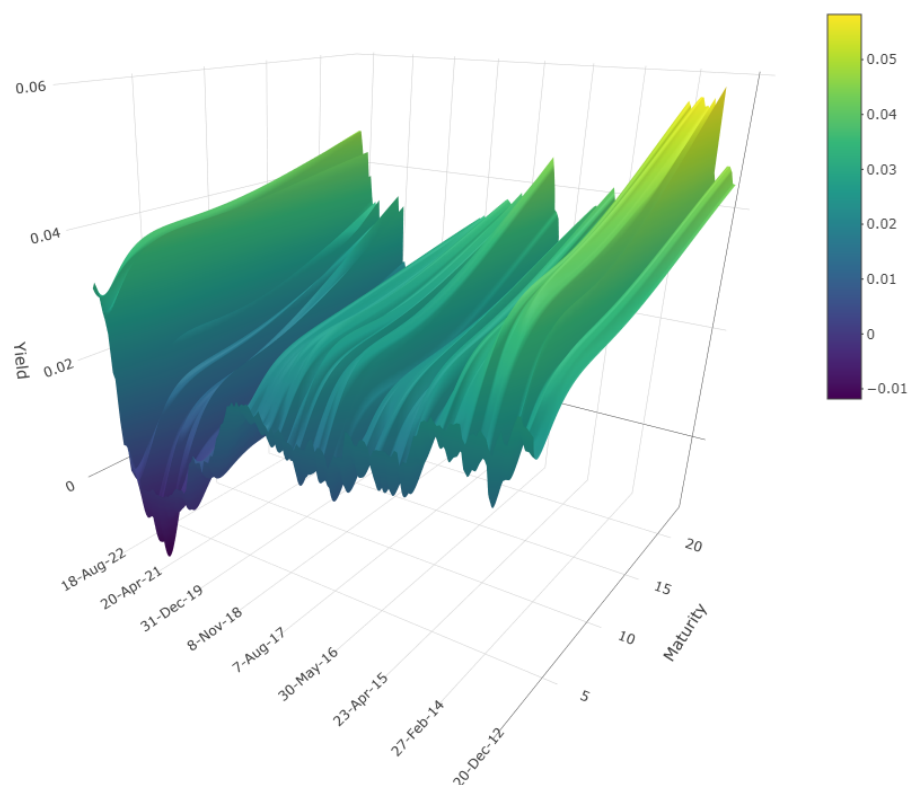
3 Prípadová štúdia

Motiváciou prípadovej štúdie, ktorej výsledky uvádzame ďalej v tejto kapitole, bolo analyzovať závislosti na trhoch štátnych dlhopisov, počas uplynulých desiatich rokov. Na začiatku sledovaného obdobia boli vo väčšine z analyzovaných krajín kvôli ekonomickej kríze so začiatkom v roku 2008 v platnosti rôzne opatrenia na stabilizáciu finančnej situácie. Po niekoľkoročnom období mierneho ekonomického rastu sme sa ocitli v pandemickej situácii, ktorá so sebou priniesla rôzne šoky pre ekonomiky takmer všetkých štátov. Jednou z charakteristík konca sledovaného obdobia je signifikantný nárast miery inflácie, ktorá v posledných časových bodoch nášho skúmaného obdobia nadobúdala maximálne hodnoty za sledovaný časový úsek. Pandemická situácia však priamo či nepriamo zapríčinila aj iné nestability na finančných trhoch, a preto sa o tomto období hovorí aj ako o krízovom období. Z pohľadu skúmania a modelovania závislostí ide preto o vhodný časový úsek na to, aby sa prejavili rozdiely v správaní sa výnosov jednotlivých krajín.

3.1 Numerické a grafické výsledky modelovania

Po úspešnom stiahnutí a úprave trhových dát, ktorým sme sa venovali v podkapitole 2.1, nasledovala časť modelovania výnosových kriviek. Na obrázkoch 3.1 až 3.7 sa nachádza grafický výstup ich modelovania – pohľad na výnosové krivky jednotlivých štátov v stanovenom časovom okne. Os s názvom *Maturity* zobrazuje dobu do splatnosti a os s názvom *Yields* odhad výnosu do splatnosti dlhopisu. Ako sme uviedli v podkapitole 2.2, presnosť odhadov sme merali priemernou kvadratickou odchýlkou (pozri definíciu 2.1). Tabuľka 3.1 ponúka prehľad priemerných hodnôt MSE za modelované obdobie aj údaj o maximálnej odchýlke – jej hodnotu a časový bod, ku ktorému prislúcha. Informáciu o maximálnej odchýlke uvádzame na jednej strane pre porovnanie jej veľkosti s nameraným priemerom, ale tiež pre zaujímavosť a možnosť porovnania s grafickým výstupom.

Obrázok 3.8 ponúka izolovaný pohľad na výnosovú krivku s najväčšou odchýlkou – maximálnou z odhadnutých výnosových kriviek Mexika, ale zároveň aj maximálnou zo všetkých prezentovaných odhadov. Napriek tomu, že podľa MSE metriky ide o najmenej presný odhad, táto odchýlka nie natolko významná, aby ovplyvnila kvalitu výstupov nášho ďalšieho modelovania.

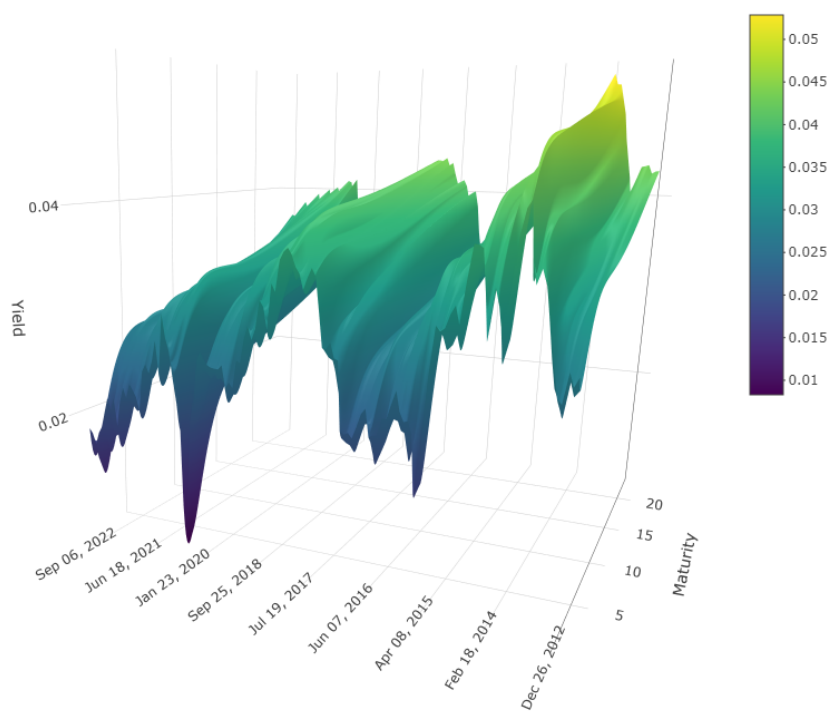


Obrázok 3.1: Austrálske výnosové krivky v čase od 1. decembra 2012 do 1. decembra 2022.
(Zdroj: vlastné spracovanie)

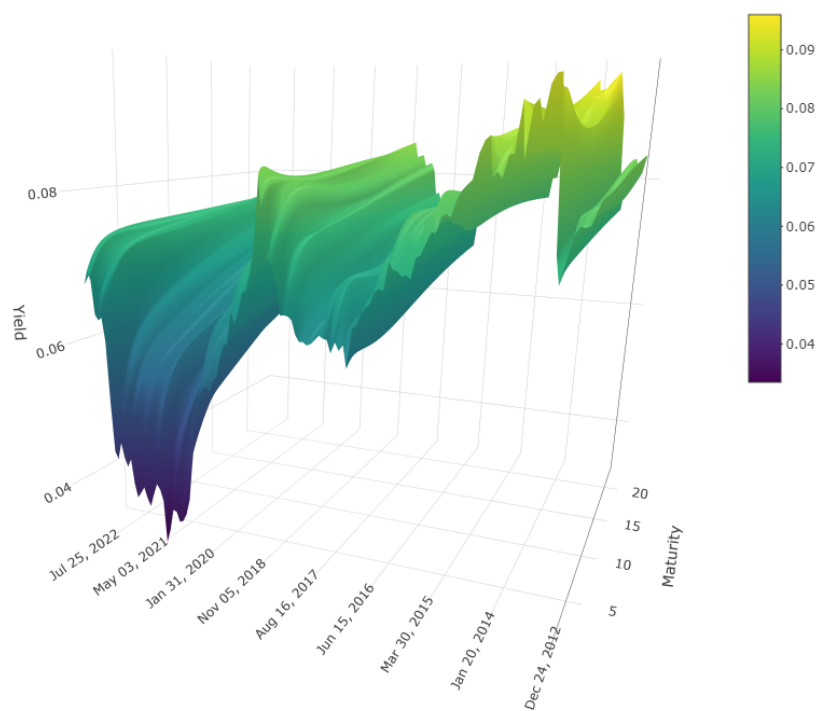
Tabuľka 3.1: Priemerná a maximálna stredná kvadratická odchýlka prezentovaných výnosových kriviek (pozri obrázky 3.1 až 3.7).

Výnosová krivka štátu	Priemerná MSE	Maximálna MSE odchýlka; dátum
<i>Austrália</i>	$1,020310 \cdot 10^{-27}$	$8,455116 \cdot 10^{-25}$ 24. marec 2022
<i>Čína</i>	$3,603517 \cdot 10^{-30}$	$8,923716 \cdot 10^{-27}$ 24. apríl 2013
<i>India</i>	$1,065248 \cdot 10^{-3}$	$4,797979 \cdot 10^{-3}$ 17. júl 2020
<i>Kanada</i>	$2,431372 \cdot 10^{-4}$	$3,546031 \cdot 10^{-3}$ 21. október 2022
<i>Mexiko</i>	$1,905468 \cdot 10^{-3}$	$1,333210 \cdot 10^{-2}$ 24. október 2022
<i>Nemecko</i>	$3,934900 \cdot 10^{-4}$	$1,786202 \cdot 10^{-3}$ 21. október 2022
<i>Spojené štáty americké</i>	$6,966127 \cdot 10^{-4}$	$6,238566 \cdot 10^{-3}$ 8. november 2022

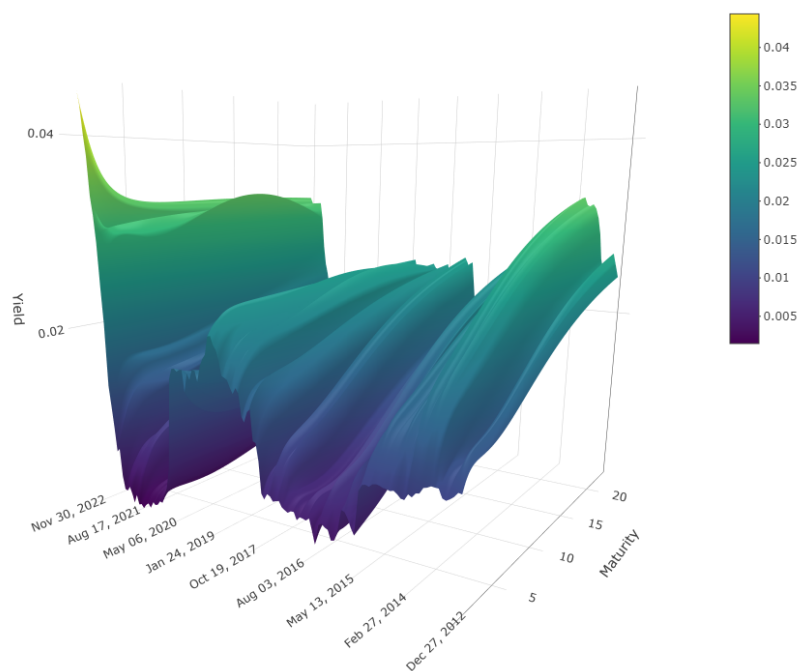
(Zdroj: vlastné spracovanie)



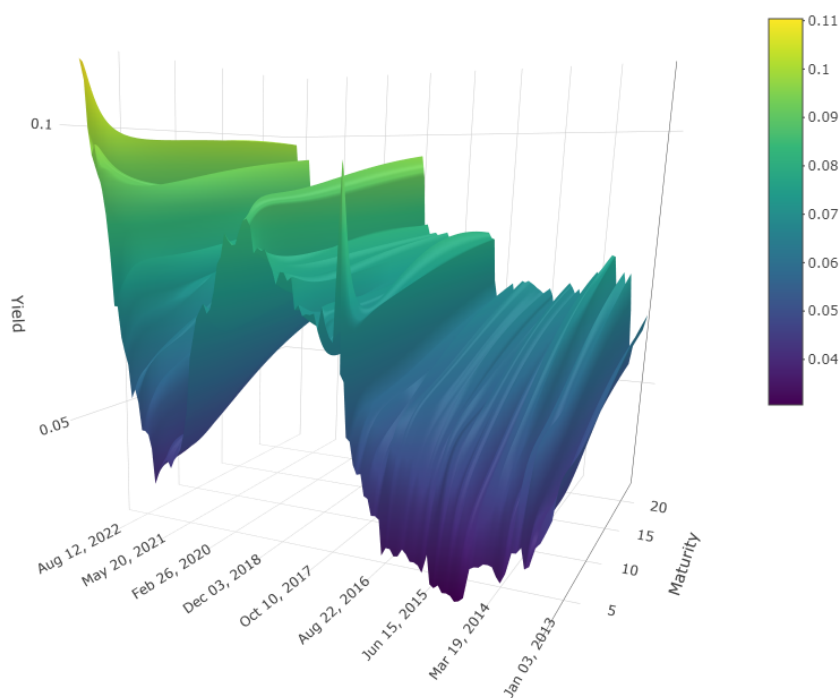
Obrázok 3.2: Výnosové krivky Číny v čase od 3. decembra 2012, do 1. decembra 2022.
(Zdroj: vlastné spracovanie)



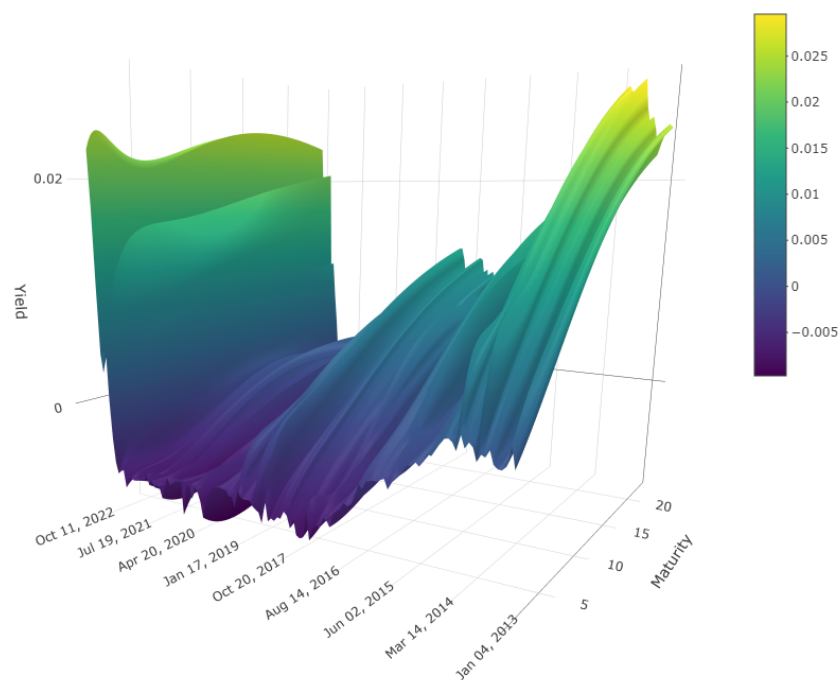
Obrázok 3.3: Výnosové krivky Indie v čase od 1. decembra 2012 do 1. decembra 2022.
(Zdroj: vlastné spracovanie)



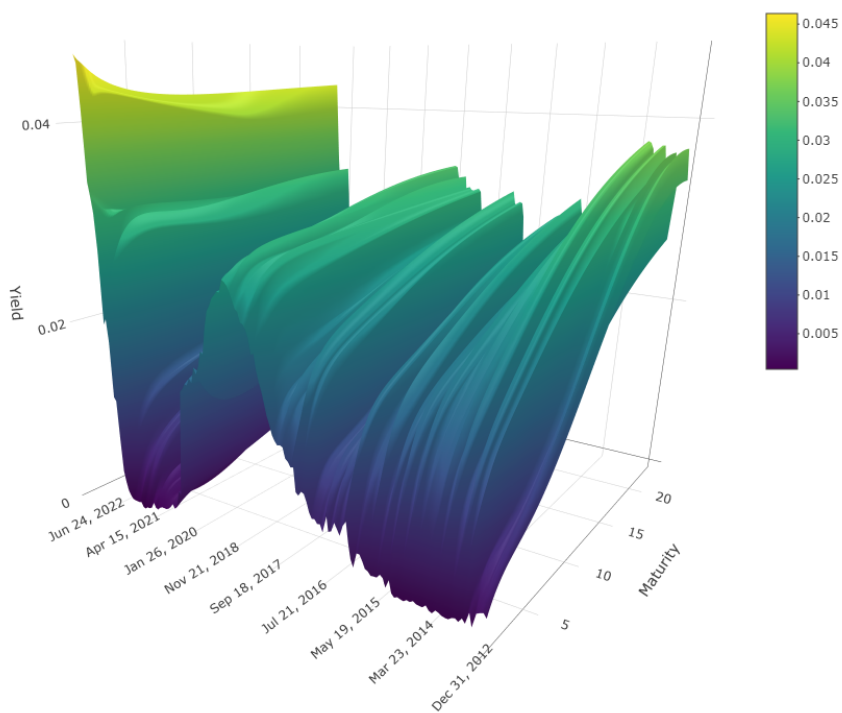
Obrázok 3.4: Výnosové krivky Kanady v čase od 3. decembra 2012 do 1. decembra 2022.
(Zdroj: vlastné spracovanie)



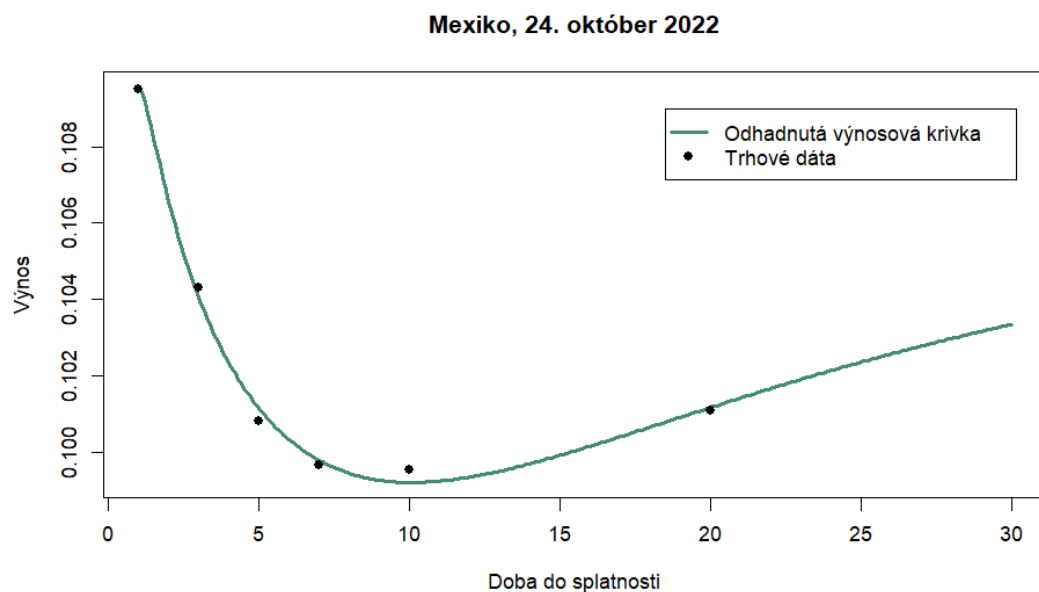
Obrázok 3.5: Výnosové krivky Mexika v čase od 3. decembra 2012 do 30. novembra 2022.
(Zdroj: vlastné spracovanie)



Obrázok 3.6: Výnosové krivky Nemecka v čase od 3. decembra 2012 do 1. decembra 2022.
(Zdroj: vlastné spracovanie)



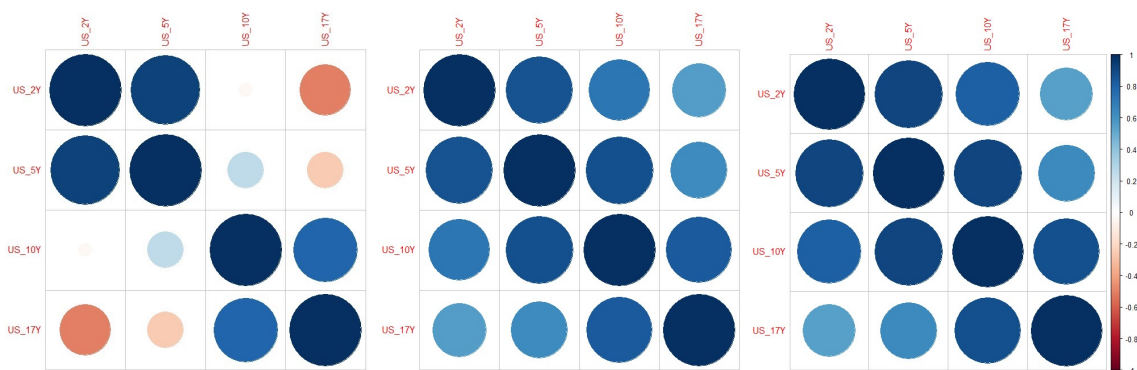
Obrázok 3.7: Výnosové krivky Spojených štátov amerických v čase od 3. decembra 2012 do 1. decembra 2022. (Zdroj: vlastné spracovanie)



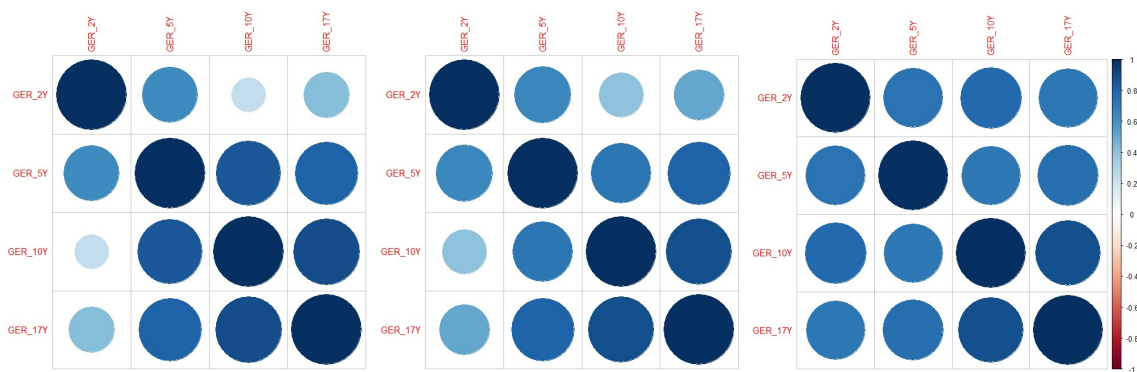
Obrázok 3.8: Výnosová krivka Mexika platná dňa 24. októbra 2022, odhadovaná Svenssonovým modelom. Výnosová krivka s najväčšou MSE odchýlkou spomedzi výnosových kriviek prezentovaných v našom výskume. (Zdroj: vlastné spracovanie)

Tiež by sme radi poznamenali, že značný rozdiel v presnosti medzi dvojicou Austrália, Čína a zvyškom krajín je zapríčinený skutočnosťou, že pre uvedené dve krajiny sme na odhad výnosovej krivky nepoužili dlhopis so 6-mesačnou dobou do splatnosti. Napríklad keby sme v prípade Nemecka rovnako nepoužili polročný dlhopis, odhadnutá výnosová krivka by mala priemernú hodnotu MSE rovnú $2,587313 \cdot 10^{-28}$. Z numerického hľadiska ide o veľký rozdiel, no napriek tomu nebolo v našej snahe ujednotiť presnosť všetkých odhadov výnosových kriviek, pretože by to nemalo vplyv na ďalšie výsledky modelovania.

Ako sme už uviedli v kapitole 2, v našej prípadovej štúdii závislostí sme sa zamerali na časový horizont do 20 rokov. Pre modelovanie časových radov sme preto vybrali štyri doby do splatnosti dlhopisov: dva, päť, desať a sedemnášť rokov, ktoré v práci označujeme aj 2Y, 5Y, 10Y a 17Y. Sedemnásťročnú dobu do splatnosti sme vybrali práve na ukážku prepojenia výnosových kriviek s ostatnými oblasťami, keďže technicky dlhopis s takouto dobou do splatnosti na trhu neexistuje ani pre jednu zo vybraných krajín. Následne sme pre každú krajinu namodelovali 3 viacrozmerné modely časových radov zvlášť pre každé

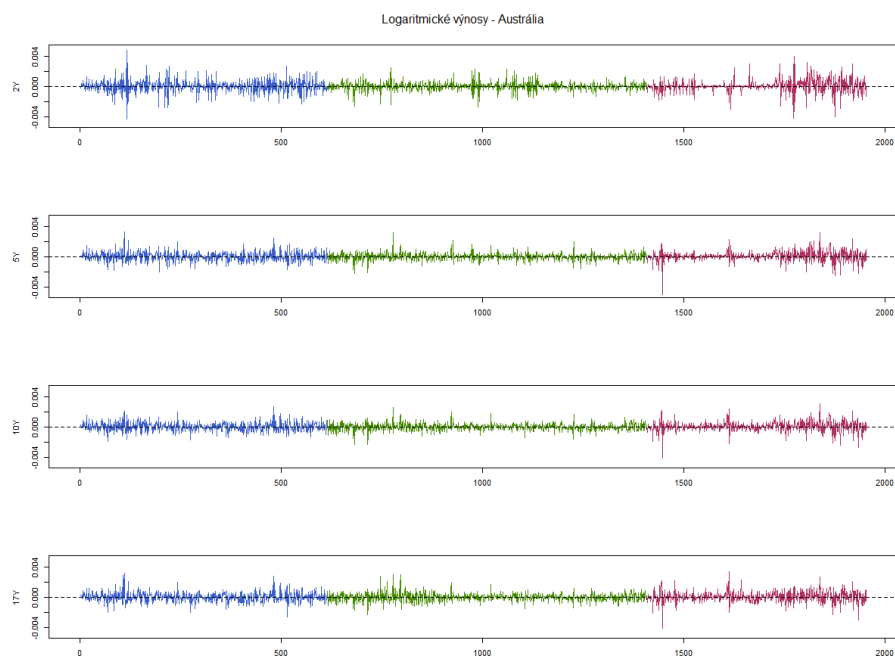


Obrázok 3.9: Korelácie medzi zložkami procesu y^{USA} v (zľava) pokrízovom, pokojnom a pandemickom období. (Zdroj: vlastné spracovanie)

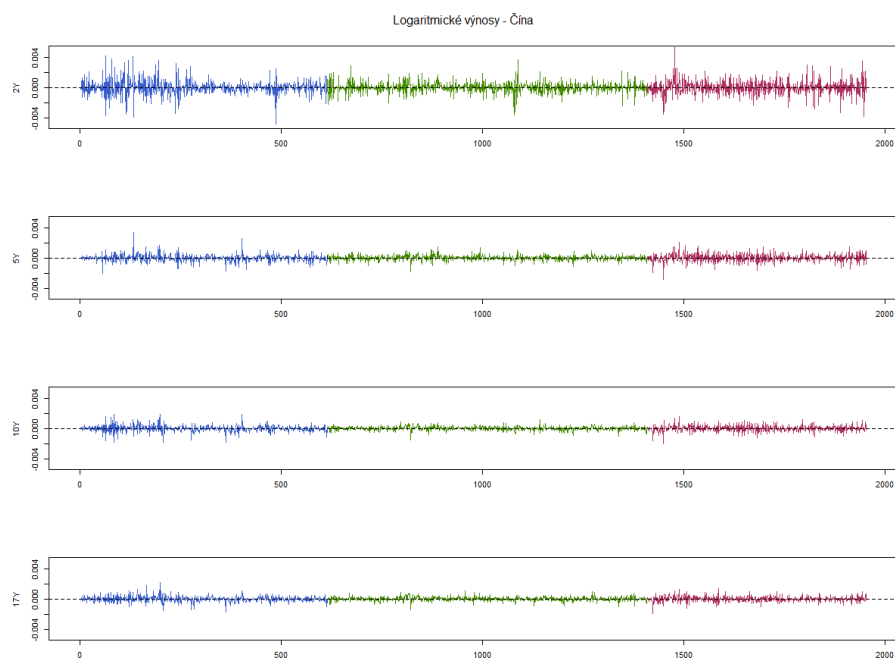


Obrázok 3.10: Korelácie medzi zložkami procesu y^{GER} v (zľava) pokrízovom, pokojnom a pandemickom období. (Zdroj: vlastné spracovanie)

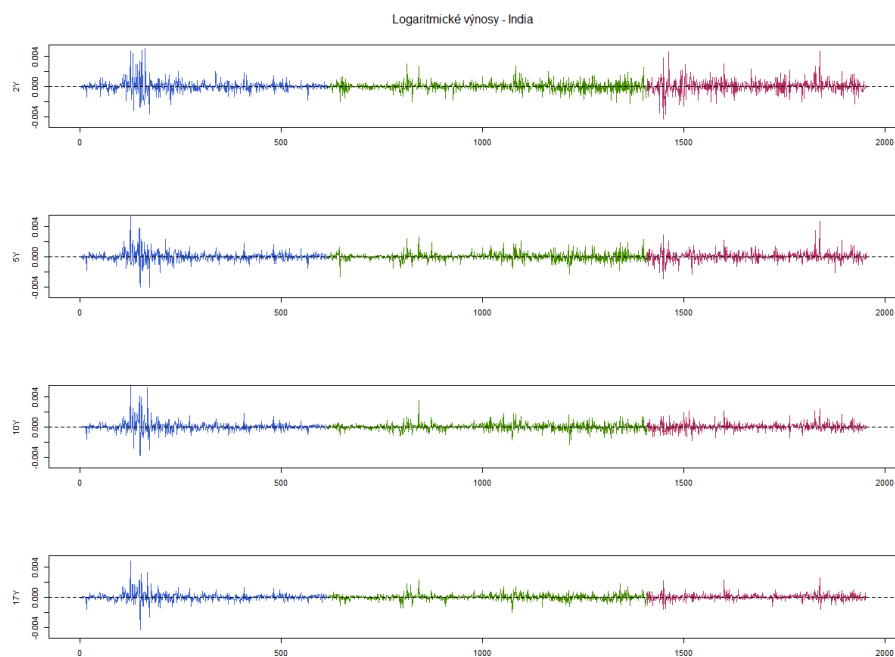
obdobie (pokrízové/pokojné/krízové) tak, ako uvádzame v kapitole 2. Na obrázkoch 3.11 až 3.17 je znázornené delenie skúmaného časového úseku na uvedené tri obdobia: modrá – pokrízové obdobie (1. december 2012 až 31. december 2015), zelená – pokojné obdobie hospodárskeho rastu (1. január 2016 až 31. december 2019), purpurová – krízové pandemické obdobie (1. január 2020 až 1. december 2022). Poznamenávame tiež, že mierka na obrázkoch 3.11 až 3.17 obrázkoch je rovnaká, aby umožnila aj vzájomné porovnanie časových radov medzi krajinami. Na obrázkoch 3.9 a 3.10 je zas graficky znázornená korelačná matica medzi zložkami amerického a nemeckého procesu, na ukážku toho, že v jednotlivých obdobiach sa korelácie menili.



Obrázok 3.11: Austrálske denné logaritmicke výnosy – vstupné dáta modelov časových radov. Jednotlivé doby do splatnosti špecifikované pri zvislej osi. (Zdroj: vlastné spracovanie)

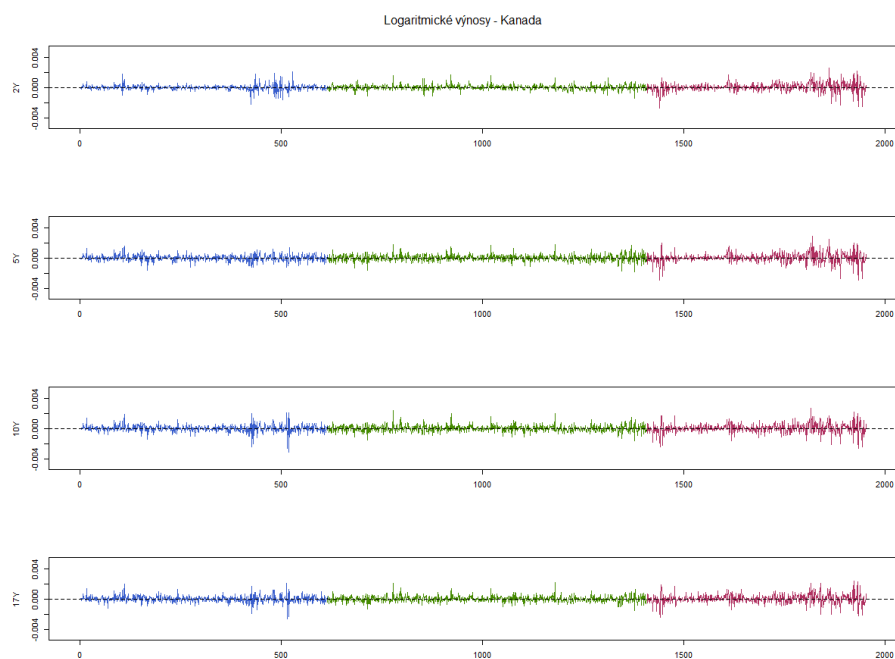


Obrázok 3.12: Čínske denné logaritmicke výnosy – vstupné dáta modelov časových radov. Jednotlivé doby do splatnosti špecifikované pri zvislej osi. (Zdroj: vlastné spracovanie)



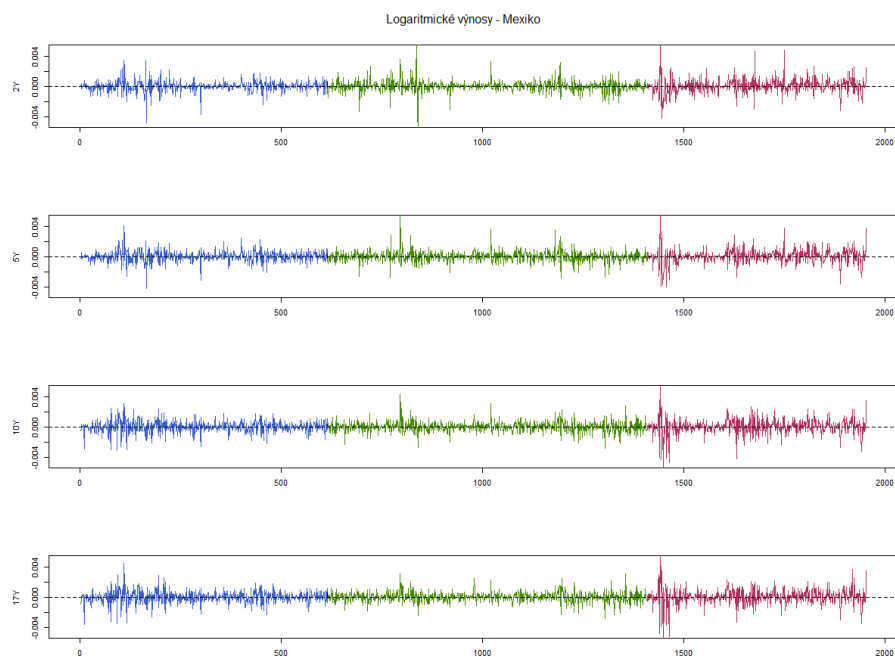
Obrázok 3.13: Indické denné logaritmické výnosy – vstupné dáta modelov časových radov.

Jednotlivé doby do splatnosti špecifikované pri zvislej osi. (Zdroj: vlastné spracovanie)

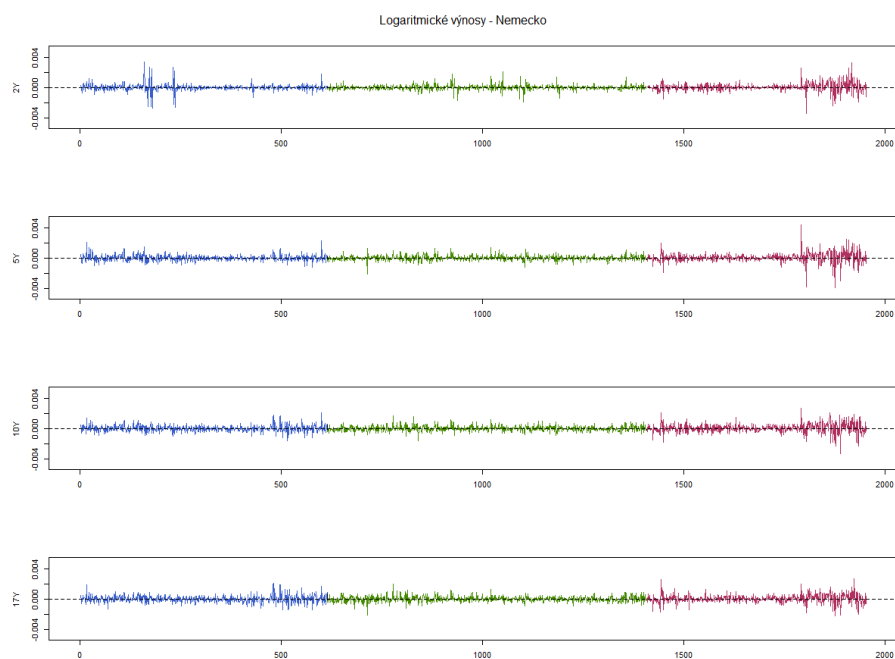


Obrázok 3.14: Kanadské denné logaritmické výnosy – vstupné dáta modelov časových radov.

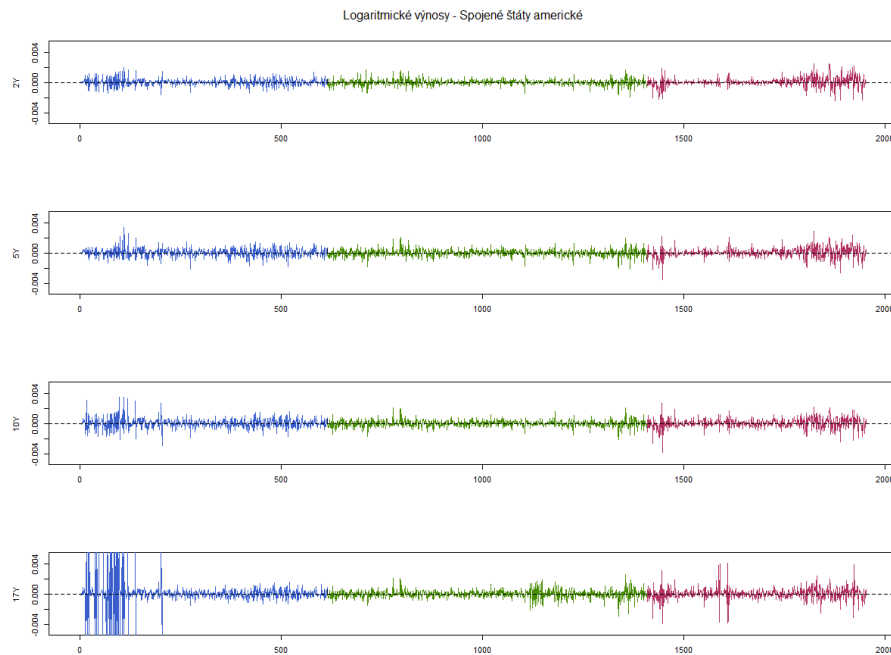
Jednotlivé doby do splatnosti špecifikované pri zvislej osi. (Zdroj: vlastné spracovanie)



Obrázok 3.15: Mexické denné logaritmické výnosy – vstupné dáta modelov časových radov. Jednotlivé doby do splatnosti špecifikované pri zvislej osi. (Zdroj: vlastné spracovanie)



Obrázok 3.16: Nemecké denné logaritmické výnosy – vstupné dáta modelov časových radov. Jednotlivé doby do splatnosti špecifikované pri zvislej osi. (Zdroj: vlastné spracovanie)



Obrázok 3.17: Americké denné logaritmické výnosy – vstupné dáta modelov časových radov. Jednotlivé doby do splatnosti špecifikované pri zvislej osi. (Zdroj: vlastné spracovanie)

Výsledné modely časových radov uvádzame v tabuľke 3.2. Vo všetkých prípadoch ide o **VARMA modely bez konštantného člena**. Výsledky testov použitých na validáciu týchto modelov je možné nájsť v prílohe D. V niektorých prípadoch, aby sa nám podarilo v dostatočnej miere odstrániť z dát sériovú závislosť, bolo nutné zvoliť iný ako základný typ GARCH modelu. Konkrétne sme využili **GJR-GARCH model** (pozri rovnicu (9)). Tieto špeciálne prípady sú v tabuľke označené písmenom g stojacim pred rádom daného modelu.

Poznámka: V tabuľke 3.2 názov podmieneného rozdelenia uvádzame v rovnakej forme ako boli implementované v prostredí R: std – Studentovo t rozdelenie, sstd – zošíkmené Studentovo t rozdelenie, ged – zovšeobecnené chybové rozdelenie (angl. *generalized error distribution*).

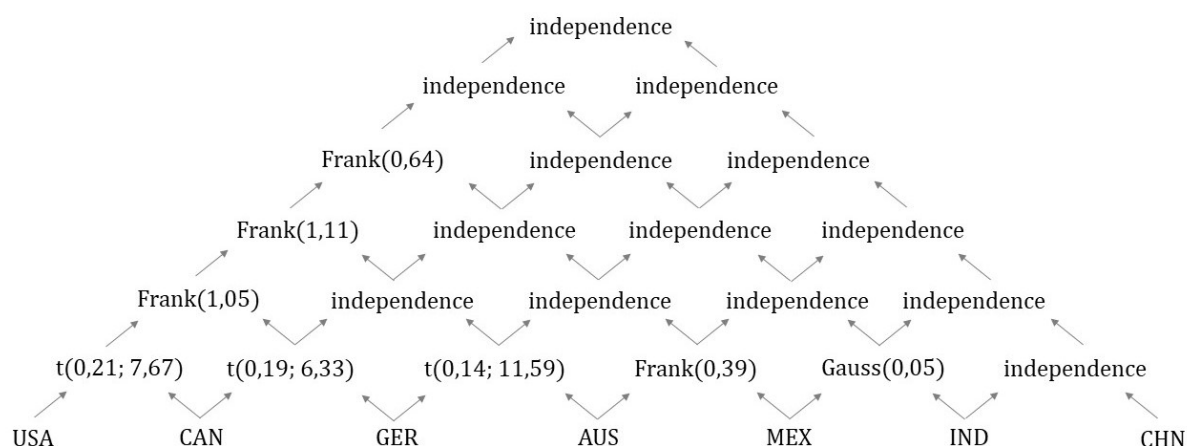
Dlhopis	VARMA		GARCH(P, Q) a rozdelenie ξ_t								BIC
	p	q	2Y		5Y		10Y		17Y		
Pokrízové obdobie (1. december 2012 – 31. december 2015)											
<i>Austrália</i>	2	0	1,1	sstd	1,1	sstd	1,1	sstd	1,1	sstd	−53,323
<i>Čína</i>	1	0	g: 2,1	std	1,1	std	1,1	std	g: 2,1	std	−52,123
<i>India</i>	1	0	1,1	std	1,1	std	1,1	std	1,1	std	−54,098
<i>Kanada</i>	0	0	g: 1,1	ged	g: 1,1	ged	g: 1,1	ged	g: 1,1	ged	−61,669
<i>Mexiko</i>	1	0	1,1	ged	1,1	std	1,1	std	1,1	std	−51,914
<i>Nemecko</i>	1	0	1,1	std	1,1	std	1,1	std	1,1	std	−57,630
<i>USA</i>	1	0	1,1	ged	1,1	std	1,1	std	1,1	std	−55,248
Pokojné obdobie (1. január 2016 – 31. december 2019)											
<i>Austrália</i>	2	0	1,1	std	1,1	std	1,1	std	1,1	std	−55,003
<i>Čína</i>	1	0	1,1	std	1,1	std	1,1	std	1,1	std	−54,818
<i>India</i>	4	0	1,1	ged	1,1	ged	1,1	ged	1,1	ged	−53,416
<i>Kanada</i>	1	0	1,1	std	1,1	std	1,1	std	1,1	std	−58,503
<i>Mexiko</i>	1	0	1,1	ged	1,1	std	1,1	std	1,1	std	−51,871
<i>Nemecko</i>	1	0	1,1	std	1,1	std	1,1	std	1,1	std	−57,748
<i>USA</i>	1	0	1,1	sstd	1,1	sstd	1,1	sstd	1,1	sstd	−57,601
Krízové obdobie (1. január 2020 – 1. december 2022)											
<i>Austrália</i>	0	1	1,1	ged	1,1	std	1,1	std	1,1	std	−52,744
<i>Čína</i>	4	0	g: 1,1	ged	g: 1,1	ged	g: 1,1	ged	g: 1,1	ged	−52,328
<i>India</i>	3	0	1,1	std	1,1	std	1,1	std	1,1	std	−51,350
<i>Kanada</i>	5	0	1,1	sstd	2,4	std	1,2	sstd	1,2	std	−53,702
<i>Mexiko</i>	1	0	1,1	ged	1,1	ged	1,1	ged	1,1	sged	−49,525
<i>Nemecko</i>	2	0	g: 1,1	sged	g: 1,1	sged	g: 1,1	sged	g: 1,1	sged	−52,603
<i>USA</i>	3	0	1,1	std	1,1	std	1,1	std	1,1	ged	−56,340

Tabuľka 3.2: Výsledné modely časových radov denných log-výnosov jednotlivých krajín – rád VARMA modelu (p, q), rád jednorozmerných GARCH modelov a vybrané podmienené štatistické rozdelenie premennej ξ_t pre jednotlivé doby do splatnosti; hodnota Bayesovho informačného kritéria (BIC) pre DCC-GARCH model. (Zdroj: vlastné spracovanie)

Po odstránení sériovej závislosti z dát sme postupovali ďalej tak, ako sme uviedli v podkapitole 2.2. Po transformácii štandardizovaných rezíduí modelov z tabuľky 3.2 sme získali odhady D-vine štruktúr, ktoré uvádzame na obrázkoch nižšie, opäť zvlášť pre jednotlivé obdobia. Prezentované výsledky sú výsledky funkcie `dvine_estim` (pozri prílohu B), pričom argument `indt` bol nastavený na hodnotu `TRUE`. Čiže ak sa pre dvojicu premenných nezamietla hypotéza o nezávislosti, vybraná bola automaticky *independence* kopula. Pre zaujímavosť je možné v prílohe E nájsť výsledky D-vine modelovania pre hodnotu argumentu `indt = FALSE`.

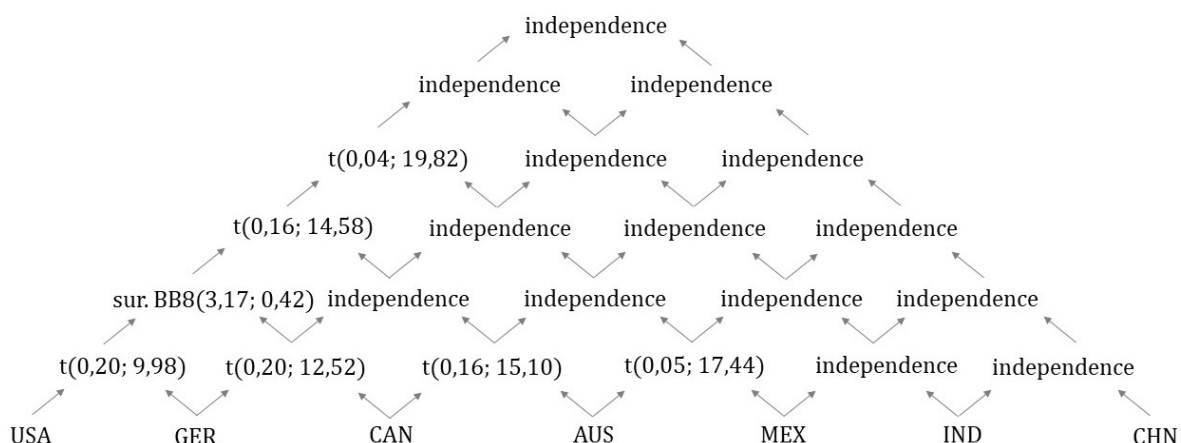
Poznámka: Na obrázkoch 3.18 – 3.20 a rovnako aj na ďalších miestach v nasledujúcich častiach práce sa pre prehľadnosť odvolávame na premenné prislúchajúce jednotlivým štátom skrátené, a to nasledovným spôsobom: AUS – Austrália, CHN – Čína, IND – India, CAN – Kanada, MEX – Mexiko, GER – Nemecko, USA – Spojené štáty americké.

V prípade pokojného a pandemického obdobia sa na niektorých pozíciách D-vine štruktúry (pozri obrázky 3.19 a 3.20) objavili kopula funkcie, ktoré v rámci tejto práce neboli doposiaľ predstavené. Sú to *survival* BB7, BB8, *survival* BB8 kopula funkcie a *Tawnova* kopula. Ide o modifikácie alebo inak povedané rozšírenia už predstavených kopula funkcií, a aj preto sa niekedy tieto funkcie označujú ako zovšeobecnené kopula funkcie. Prívlastkom „survival“ sa všeobecne zvykne označovať o 180° rotovaná verzia danej kopula funkcie.

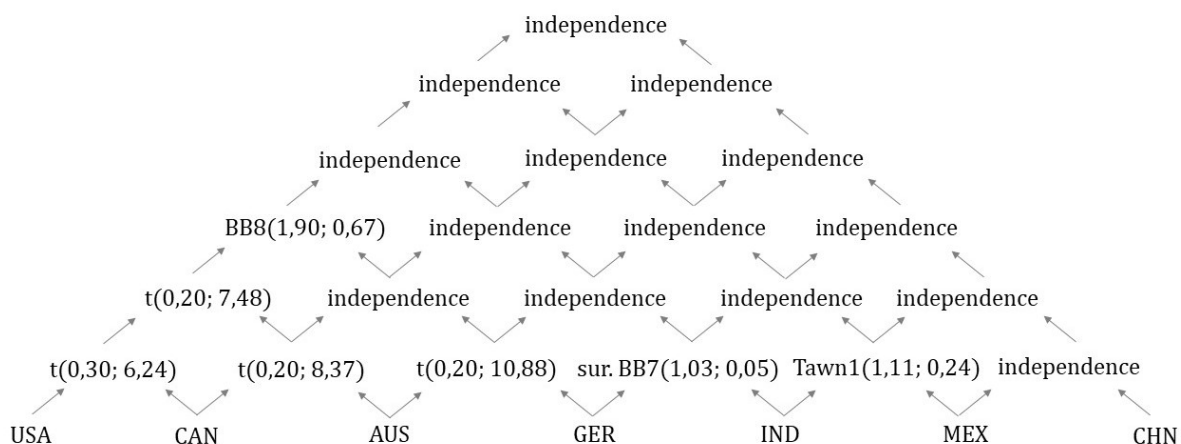


Obrázok 3.18: Odhadnutá D-vine štruktúra pre *pokrízové* obdobie. Príslušné parametre jednotlivých kopúl uvedené v zátvorkách, zaokrúhlené na dve desatinné miesta.

(Zdroj: vlastné spracovanie)



Obrázok 3.19: Odhadnutá D-vine štruktúra pre *pokožné* obdobie. Príslušné parametre jednotlivých kopúl uvedené v zátvorkách, zaokrúhlené na dve desatinné miesta. Odhadnutá kopula na pozícii $C_{USA.CAN|GER}$ je tzv. *survival* BB8 kopula. (Zdroj: vlastné spracovanie)



Obrázok 3.20: Odhadnutá D-vine štruktúra pre *krízové* obdobie. Príslušné parametre jednotlivých kopúl uvedené v zátvorkách, zaokrúhlené na dve desatinné miesta. Odhadnutá kopula na pozícii $C_{GER.IND}$ je tzv. *survival* BB7 kopula a $C_{IND.MEX}$ tzv. Tawnova kopula typu 1. (Zdroj: vlastné spracovanie)

Konkrétne BB8 kopula je vďaka pridanému parametru funkciou, ktorá môže byť zhodná s Joe-ovou, ale aj Frankovou kopulou, čo môžeme vidieť z jej predpisu v nasledovnej rovnici:

$$C(u, v, \theta, \varphi) = \varphi^{-1} \cdot \left[1 - \left(1 - \left[1 - (1 - \varphi)^\theta \right]^{-1} \cdot \left[1 - (1 - \varphi u)^\theta \right] \cdot \left[1 - (1 - \varphi v)^\theta \right] \right)^{\frac{1}{\theta}} \right],$$

pretože pre $\varphi = 1$ dostaneme predpis Joe-ovej kopuly a pre $\theta \rightarrow \infty$ dostaneme Frankovu kopulu (pozri tabuľku 1.1). Pre úplnosť dodávame obory hodnôt parametrov, ktoré sú $\theta \geq 1$ a $0 \leq \varphi \leq 1$. [4]

BB7 kopula funkcia kombinuje schopnosť Joe-ovej kopuly modelovať hornú chvostovú závislosť a Claytonovej kopuly (uvedené v tabuľke 1.1), ktorá vie zas zachytiť dolnú chvostovú závislosť. Predpis BB7 kopuly má tvar:

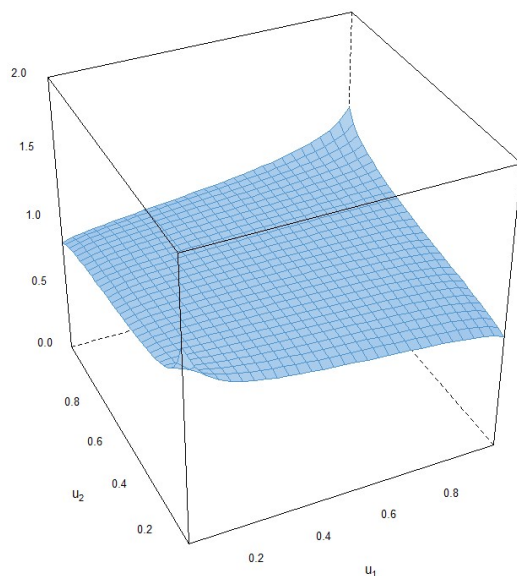
$$C(u, v, \theta, \varphi) = 1 - \left[1 - \left((1 - u^\theta)^{-\varphi} - (1 - v^\theta)^{-\varphi} - 1 \right)^{-\frac{1}{\varphi}} \right]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Podobne ako pri BB8, uvažujeme len $\theta \geq 1$ a $\varphi > 0$, pričom parameter θ reguluje hornú chvostovú závislosť a parameter φ dolnú. [24]

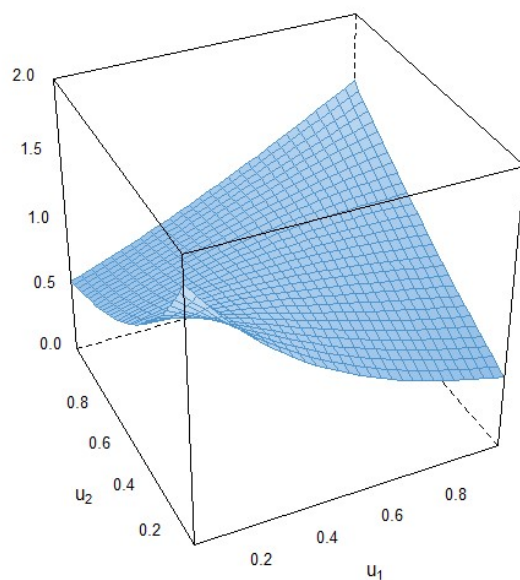
Pre jednoduchosť označme $z \triangleq \frac{\ln(v)}{\ln(uv)}$. Potom predpis Tawnovej kopuly je nasledovný:

$$C(u, v, \theta, \varphi_1, \varphi_2) = (1 - \varphi_1)z - (1 - \varphi_2) \cdot (1 - z) + \left[(\varphi_1(1 - z))^\theta + (\varphi_2 z)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}},$$

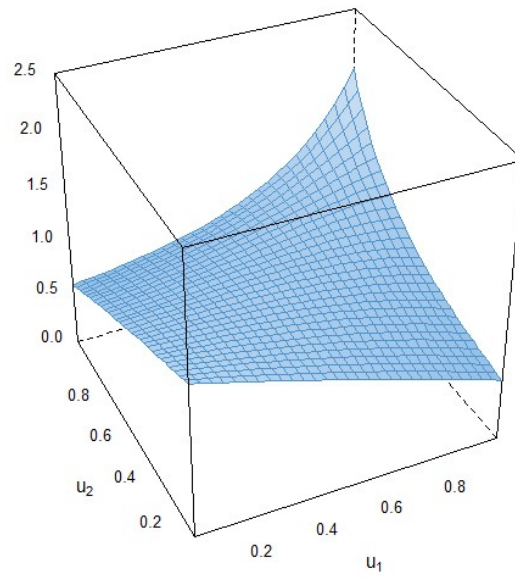
pričom $\theta \geq 1$ a $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 1$. Ak platí rovnosť $\varphi_1 = \varphi_2$, dostaneme Gumbelovu kopulu, preto hovoríme, že Tawnova kopula je rozšírením Gumbelovej kopuly. Parametre φ je možné interpretovať ako koeficienty zošikmenia. Z toho dôvodu sa Tawnova kopula delí na dva typy podľa toho, ktorý z parametrov je zafixovaný na hodnotu 1. Tawnovou kopulou *typu 1* nazývame prípad pre $\varphi_1 = 1$ a Tawnovou kopulou *typu 2* prípad, keď $\varphi_2 = 1$. [4] Pre lepšiu predstavu prikladáme obrázky 3.21 až 3.24, na ktorých sa nachádzajú ukážky týchto zovšeobecnených kopula funkcií, pričom hodnoty ich parametrov sú nastavené tak, aby sa zhodovali s odhadnutými hodnotami parametrov pre naše dáta.



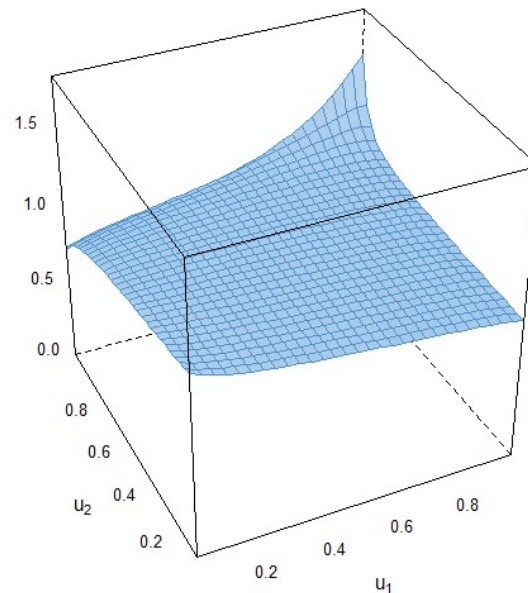
Obrázok 3.21: Grafické znázornenie dvojrozmernej hustoty rozdelenia pravdepodobnosti so štruktúrou závislosti podľa *survival* BB7 kopula funkcie s parametrami 1,032069 a 0,047963 pre $U_1, U_2 \sim \mathcal{N}(0; 1)$. (Zdroj: vlastné spracovanie)



Obrázok 3.22: Grafické znázornenie dvojrozmernej hustoty rozdelenia pravdepodobnosti so štruktúrou závislosti podľa *survival* BB8 kopula funkcie s parametrami 3,165542 a 0,418975 pre $U_1, U_2 \sim \mathcal{N}(0; 1)$. (Zdroj: vlastné spracovanie)



Obrázok 3.23: Grafické znázornenie dvojrozmernej hustoty rozdelenia pravdepodobnosti so štruktúrou závislosti podľa BB8 kopula funkcie s parametrami 1,901454 a 0,673120 pre $U_1, U_2 \sim \mathcal{N}(0; 1)$. (Zdroj: vlastné spracovanie)



Obrázok 3.24: Grafické znázornenie dvojrozmernej hustoty rozdelenia pravdepodobnosti so štruktúrou závislosti podľa Tawnovej kopula funkcie typu 1 s parametrami 1,112722 a 0,241880 pre $U_1, U_2 \sim \mathcal{N}(0; 1)$. (Zdroj: vlastné spracovanie)

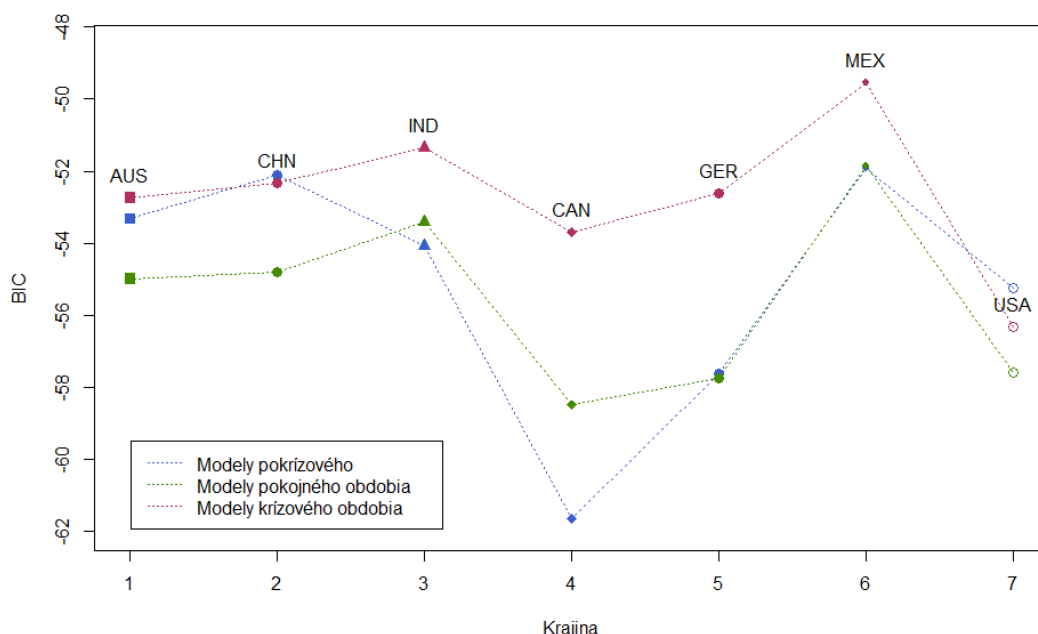
3.2 Diskusia

Na grafoch odhadnutých výnosových kriviek (obrázky 3.1 – 3.7) pozorujeme, že typicky v pokrízovom období boli miery výnosnosti pre dlhé doby do splatnosti v priemere vyššie ako v pokojnom období, keď sa väčšina krajín snažila nízkymi úrokovými mierami stimulovať svoj ekonomický rast. Najnižšie pozorované výnosy sa vo väčšine krajín dosahovali v roku 2020, prípadne 2021 pre krátke doby do splatnosti, čiže v krízových pandemických časoch charakteristických veľkou neistotou investorov. S výnimkou Číny však vo všetkých krajinách po pandemických minimách nasledoval značný nárast výnosnosti ako dôsledok nárastu miery inflácie. Kým na začiatku sledovaného časového obdobia sme pozorovali väčšinou normálne, rastúce tvary výnosových kriviek, pre koniec sledovaného obdobia bol skôr typický prevrátený tvar krivky, ktorý opäť súvisí s nárastom miery inflácie a s pretrvávajúcou neistotou.

Ako sme zhrnuli v predchádzajúcom odseku, počas sledovaných desiatich rokov sme pozorovali meniace sa okolnosti na globálnom finančnom trhu, čo nás priviedlo k rozdeleniu dát na tri podobdobia, ktoré sme si pracovne nazvali podľa ich hospodárskych charakteristík. Cieľom bolo, aby sme modelmi časových radov čo najspoľahlivejšie odstránili sériovú závislosť z dát, a tiež aby bolo možné pozrieť sa na prípadné zmeny vo viacrozmernej štruktúre závislosti. Pripomíname, že v tomto bode sme pracovali už s transformovanými dennými zmenami výnosov do splatnosti, na ktoré sa odvolávame ako na *denné výnosy*.

Na rozdiel od modelovania výnosových kriviek, v prípade modelovania časových radov nebolo rovnako jednoduché nájsť vhodný model pre každú z vybraných krajín. Ako sme pred samotným modelovaním očakávali, najlepší fit sme vo všetkých prípadoch dosiahli po využití bieleho šumu z pravdepodobnostných rozdelení s ťažkými chvostami. Avšak kým v pokrízovom a pokojnom období postačovali nízke rády VARMA modelu, v pandemickom období sme často museli siahnuť po vyššom ráde autoregresného procesu, čím sa potvrdzuje, že dynamika v dátach sa počas sledovaného obdobia naozaj menila. Napriek tomu na základe Bayesovho informačného kritéria môžeme povedať, že všetky odhadnuté modely sú porovnateľné, čo sa týka ich presnosti. V pokrízovom období hodnota Bayesovho informačného kritéria variuje v intervale $(-61,67; -51,92)$, v pokojnom období medzi $(-58,51; -51,88)$ a v krízovom období medzi $(-56,34; -49,53)$, čiže naprieč obdobiami sa drží na podobnej úrovni, a teda rozdiel v presnosti modelov časových

radov by nemal signifikantne ovplyvniť presnosť ďalších výpočtov. Grafické porovnanie spomenutých hodnôt je možné nájsť na obrázku 3.25.



Obrázok 3.25: Vzájomné porovnanie presnosti odhadnutých modelov časových radov na základe hodnoty Bayesovho informačného kritéria. (Zdroj: vlastné spracovanie)

Pri hľadaní vhodných modelov časových radov sme zvyčajne¹⁶ prihliadali aj na signifikantnosť odhadnutých parametrov. Výnimkou bol parameter ω , intercept jednorozmerných GARCH modelov. Podľa diagnostiky bol totiž v každom modeli štatisticky nevýznamný. Túto skutočnosť sme sa rozhodli spomenúť z toho dôvodu, že niektoré R-kovské balíky určené na GARCH-modelovanie, ako napríklad `fgarch`, sa nevedeli vysporiadať s numericky príliš malými hodnotami a hlásili problémy so singularitou pri vypočítavaní hľadaných odhadov. Všeobecne sa dá očakávať, že výnosy štátnych dlhopisov majú z dlhodobého hľadiska veľmi nízku volatilitu, a preto sa často odhadne aj veľmi nízka hodnota tohto parametra – od parametra ω totiž závisí očakávaná hodnota procesu volatility – $E[\sigma_t^2]$, čo sme ukázali v prílohe C. Z tohto dôvodu odporúčame používať napríklad balík `rugarch`, ktorý dokáže pracovať aj s numericky malými hodnotami tohto parametra. Na pokon dodávame, že napriek slabým výsledkom v testoch signifikantnosti parametra ω aj

¹⁶Výnimkou boli prípady, keď sa nám nedarilo odstrániť sériovú závislosť inak ako vyšším rádom modelu. Príkladom je kanadský model v krízovom období (pozri prílohu E).

ďalších, sme ich v našich modeloch ponechali.

Pri analýze a interpretácii výsledkov kopula modelovania uvedených na obrázkoch 3.18 až 3.20 treba mať na pamäti, že ide o odhady modelované na základe jednorazových pozorovaní. Zaujímali sme sa preto predovšetkým o smer závislosti či o náznaky chvostovej závislosti, a tiež o prípadné zmeny v štruktúre v skúmaných podobdobiach viac ako o konkrétne odhady jednotlivých typov kopula funkcií. Výnimkou je skutočnosť, že pri porovnaní odhadnutých Studentových kopúl vidíme, že v pokojnom období je odhadovaný počet stupňov voľnosti najvyšší spomedzi skúmaných troch podobdobií, čo indikuje, že dáta, najmä americké, kanadské, nemecké a austrálske výnosy mali v pokrízovom a krízovom období ťažšie chvosty, než tomu bolo v pokojnom období. Takýto výsledok je v súlade s ekonomickou teóriou.

Napriek tomu, že štruktúra závislosti sa v jednotlivých sledovaných podobdobiach sčasti menila, stabilné boli „krajné“ dáta D-vine štruktúry. Výnosy čínskych štátnych dlhopisov sú počas celého sledovaného obdobia v súčte najmenej korelované s dátami ostatných krajín a na druhej strane, americké výnosy sú v súčte najviac korelované s ostatnými krajinami. Mexické a indické dáta sa na rozdiel od kanadských, nemeckých či austrálskych dát radia k menej korelovaným v rámci skúmaných dátových súborov. Vo výsledku na všetkých troch reprezentáciách D-vine štruktúry pozorujeme, že na rozdiel od ľavej strany na pravej strane diagramu dominuje *independence* kopula.

V pokrízovom období sa v odhadnutej štruktúre na obrázku 3.18 okrem *independence* kopuly nachádzajú Studentove a Frankove kopula funkcie, či Gaussova kopula. Vo všetkých menovaných prípadoch ide o kopula funkcie, ktoré sú určené na modelovanie závislosti najmä v jadre združeného rozdelenia [19], nie na modelovanie chvostovej závislosti. Stredová závislosť je očakávaná práve v takejto fáze ekonomického cyklu (čiže práve v tomto z troch skúmaných podobdobií), keď sa finančné trhy postupne stabilizujú.

Ako sme už vyššie spomenuli, v pokojnom období dáta typicky nemali až také ťažké chvosty ako v krízovom či pokrízovom období. Napriek tomu v pokojnom období už pozorujeme aj chvostovú závislosť, a to medzi Spojenými štátmi americkými a Kanadou, pričom ide o podmienenú závislosť. Odhadnutá rotovaná BB8 kopula funkcia na pozícii $\mathcal{C}_{USA.CAN|GER}$ signalizuje závislosť medzi veľmi malými zmenami vo výnosnosti. Ide o vyspelé krajiny, od ktorých sa po stabilizácii v tejto dobe očakával ďalší ekonomický rast,

a teda ustálil sa aj trh s týmito vládnyimi dlhopismi, a preto nepozorujeme veľkú fluktuáciu v ich výnosnosti. Táto skutočnosť svedčí o tom, že išlo skutočne o relatívne pokojné obdobie, čo sa týka finančných trhov.

V krízovom období sa odhadli okrem *independence* a Studentových kopúl zovšeobecnené Joe-ove kopuly (BB8 a rotovaná BB7 kopula) indikujúce zväčšenú mieru chvostovej závislosti, či zovšeobecnená Gumbelova (Tawnova) kopula indikujúca asymetriu, na daných pozíciách v skúmanej viacrozmernej štruktúre oproti iným obdobiam. Podmienené rozdelenie pre dvojicu Spojené štáty americké a Nemecko – $\mathcal{C}_{\text{USA.GER}|\text{CAN.AUS}}$ ukazuje na hornú chvostovú závislosť medzi veľkosťou denných výnosov štátnych dlhopisov. Tawnova kopula na mieste združeného rozdelenia indických a mexických denných výnosov zas vyjadruje, že v prípade výnosov štátnych dlhopisov Indie a Mexika sme v pandemic kom období synchronne pozorovali veľké kladné denné zmeny. Okrem hornej chvostovej závislosti táto kopula funkcia poukazuje aj na asymetriu v dátach – keď sme v rámci pandemického obdobia pozorovali najmenšie zmeny v indických výnosoch, nezvykli sme súčasne pozorovať veľké zmeny v mexických výnosoch; opačne však, pre najmenšie zmeny v mexických výnosoch, mali veľké zmeny v indických výnosoch o niečo väčšiu hustotu (pozri obrázok 3.24, pričom $u_1 = \text{IND}$ a $u_2 = \text{MEX}$). Číselne na túto asymetriu upozorňuje odhad parametra $\varphi_2 = 0,24$, ktorý je rôzny od $\varphi_1 = 1$, a teda podľa takéhoto odhadu sa nedosahuje symetria Gumbelovej kopuly.

Záver

V rámci tejto diplomovej práce sme sa zaoberali kopula modelovaním závislostí medzi výnosmi štátnych dlhopisov vybraných krajín a z nich odvodených výnosových kriviek. Naším hlavným cieľom bolo predovšetkým predstaviť spôsob matematického modelovania takejto závislosti. Keďže pre naplnenie stanoveného cieľa je potrebné prepojiť znalosti z rôznych oblastí, v prvej kapitole sme prezentovali vybrané teoretické poznatky a modely príslušné pre náš výskum s cieľom predstaviť čitateľovi oblasť výnosových kriviek, časových radov a kopula funkcií. Ďalej, v jadre práce sme sa venovali samotnej metodike modelovania závislostí, ktorú sme doplnili prípadovou štúdiou, ktorá je predstavená v poslednej, tretej kapitole.

Výsledky našej prípadovej štúdie nepreukázali veľmi výraznú previazanosť medzi dlhopismi všetkých siedmich štátov navzájom, avšak zároveň dokazujú, že nie sú od seba úplne nezávislé. Závislosť sme pozorovali predovšetkým medzi štvoricou krajín Spojené štáty americké, Kanada, Nemecko a Austrália. Najmä prvé tri krajiny z menovaných sú si politicky aj hospodársky v niektorých smeroch podobné, podobnejšie ako so zvyškom vybraných krajín, a preto sa takéto výsledky dali očakávať.

V prezentovanej prípadovej štúdii sme využívali jeden špecifický postup modelovania, ale našou snahou bolo naznačiť čitateľovi aj iné možnosti a prístupy. Výnosové krivky sme modelovali Svenssonovým modelom, ale existujú rôzne ďalšie modely, ktoré by mohli nahradiť nami zvolený model. Potrebné je, aby mali dostatočne dobrý fit a/alebo vhodné vlastnosti pre vytváranie stabilných predikcií, pokiaľ je v záujme modelára modelovať závislosti v dlhodobom horizonte. Inou možnosťou, ako sme už uviedli na začiatku podkapitoly 2.2, je vynechať časť modelovania výnosových kriviek a skúmať závislosti priamo medzi trhovými dátami. Literatúra venovaná modelovaniu časových radov je tiež bohatá na modely a ich variácie, ktoré boli navrhnuté tak, aby mali schopnosť zachytávať rôzne typy sériovej závislosti, prípadne aby vedeli vysvetliť rôzne správanie sa dát. Vybraná kombinácia VARMA modelu a DCC-GARCH modelu preto tiež nie je univerzálne vhodnou voľbou pre všetky dátové súbory. Dôkazom toho je v našej prípadovej štúdii slabý fit modelu pre kanadské dáta v pandemickom období. Čo sa týka kopula modelovania, tak v rámci teoretických základov v podkapitole 1.3 bolo našou snahou ukázať čitateľovi, že aj tu je možné zvoliť iný prístup, či už iný typ tzv. vine štruktúry alebo spôsob hie-

rarchického vnárania kopula funkcií. Na všetky tieto alternatívy a ďalšie eventuality sme upozorňovali postupne počas teoretickej časti našej práce, a to aj s odôvodnením, prečo sme si napokon vybrali ten ktorý model či prístup. Veríme, že nie len spomenutý teoretický nadhľad a výsledky prípadovej štúdie, ale aj informácie o implementácii jednotlivých krokov v softvéri R [31] sú prínosom tejto práce.

V praktickej časti práce sú teda našim výsledkom D-vine štruktúry, ktoré opisujú závislosti medzi dennými zmenami výnosov vládnych dlhopisov siedmich štátov v čase od decembra 2012 do decembra 2022. Takýto D-vine nemusí byť finálnym výsledkom výskumu. Keďže, ako sme už písali, ide o odhady vytvorené na základe jednorazových pozorovaní a zároveň o odhady vybrané na základe porovnávania hodnôt Akaikeho informačného kritéria, pokračovať by sa dalo validáciou našich odhadov, presnejšie povedané testovaním senzitivity, prípadne aj robustnosti získaného odhadu. Pre akési posúdenie presnosti finálnych kopula odhadov je možné využiť napríklad štatistické *goodness-of-fit* testy založené na tzv. empirickom kopula procese. Touto témou sa podrobnejšie zaoberali napríklad autori publikácie [15]. Nieкто by tiež mohol uvažovať o inom delení skúmaného časového obdobia na podobdobia. Finálny model takéhoto, v našom prípade sedemrozmerného združeného rozdelenia, je ďalej možné využiť na modelovanie rôznych ekonomických scenárov.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Aas, K., Berg, D.: Modeling Dependence Between Financial Returns Using PCC, *Dependence Modeling, Vine Copula Handbook*, 2011, str. 305–328, ISBN 10 981-4299-87-1
- [2] Aloui, R., Ben Aissa, M. S., Nguyen, D. K.: *A Wavelet-based Copula Approach for Modeling Market Risk in Agricultural Commodity Markets*, Working Paper 2013/4, Development and Policies Research Center, Hanoi, 2013
- [3] Charles, A. and Darné, O.: The accuracy of asymmetric GARCH model estimation, *International Economics*, 157 (2019), str. 179-202
- [4] Cheng, Y., Du, J., Ji, H.: Multivariate Joint Probability Function of Earthquake Ground Motion Prediction Equations Based on Vine Copula Approach, *Mathematical Problems in Engineering* (2020), dostupné na internete (2. 4. 2023):
<https://www.hindawi.com/journals/mpe/2020/1697352/>
- [5] Chkili, W., Aloui, C., Nguyen, D. K.: Instabilities in the relationships and hedging strategies between crude oil and US stock markets: Do long memory and asymmetry matter?, *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money* 33 (2014), str. 354-366
- [6] Cooke, R. M., Joe, H., Aas K.: Vines Arise, *Dependence Modeling, Vine Copula Handbook*, 2011, str. 37–71, ISBN-10 981-4299-87-1
- [7] Czado, C.: Analyzing Dependent Data with Vine Copulas, *Lecture Notes in Statistics* 222, 2019, ISBN 978-3-030-13784-7
- [8] Filová, T.: Master-Thesis-2023, *GitHub* repozitár, dostupné na internete (22. 4. 2023):
<https://github.com/TerezFilova/Master-Thesis-2023>
- [9] Filová, T.: *Matematické modelovanie výnosových kriviek*, bakalárska práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, Bratislava, 2021

- [10] Galanos, A.: *The rmgarch models: Background and properties*, R-package vignette, verzia 1.3-0, 2022, dostupné na internete (21. 2. 2023): https://cran.r-project.org/web/packages/rmgarch/vignettes/The_rmgarch_models.pdf
- [11] Galanos, A.: *Introduction to the rugarch package*, R-package vignette, verzia 1.4-3, 2022, dostupné na internete (21. 2. 2023): https://cran.r-project.org/web/packages/rugarch/vignettes/Introduction_to_the_rugarch_package.pdf
- [12] Galanos, A.: *Multivariate GARCH Models*, R-package manuál, verzia 1.3-9, 2022, dostupné na internete (23. 2. 2023):
<https://cran.r-project.org/web/packages/rmgarch/rmgarch.pdf>
- [13] Galanos, A.: *Univariate GARCH Models*, verzia 1.4-9, 2022, R-package manuál, dostupné na internete (23. 2. 2023):
<https://cran.r-project.org/web/packages/rugarch/rugarch.pdf>
- [14] Genest, C., Favre, A. C.: Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask, *Journal of Hydrologic Engineering* 12 (2007), str. 347-368
- [15] Genest, C., Rémillard, B., Beaudoin, D.: Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study, *Insurance: Mathematics and Economics* 44 (2009), str. 199–213
- [16] Gong, Y., Ma, Ch., Chen, Q.: Exchange rate dependence and economic fundamentals: A Copula-MIDAS approach, *Journal of International Money and Finance* 123 (2022)
- [17] Górecki, J., Hofert, M., Holeňa, M.: An approach to structure determination and estimation of hierarchical Archimedean Copulas and its application to Bayesian classification, *Journal of Intelligent Information Systems* (2016) 46, str. 21–59
- [18] Heinen, A., Valdesogo, A.: Dynamic D-Vine Model, *Dependence Modeling, Vine Copula Handbook*, 2011, str. 329–353, ISBN-10 981-4299-87-1
- [19] Hernandez, J. A., Hammoudeh, S., Nguyen, D. K., Al Janabi, M. A. M., Reboredo, J. C.: Global financial crisis and dependence risk analysis of sector portfolios: a vine copula approach, *Applied Economics* (2017), str. 2409-2427, dostupné na internete (23. 3. 2023): https://www.researchgate.net/publication/310817027_Global_

financial_crisis_and_dependence_risk_analysis_of_sector_portfolios_a_vine_copula_approach

- [20] Hofert, M., Scherer, M.: CDO pricing with nested Archimedean copulas, *Quantitative Finance* (2011) 11, 775-787
- [21] Investing: *World Government Bonds*, dostupné na internete (1. 12. 2022):
<https://www.investing.com/rates-bonds/world-government-bonds>
- [22] Investopedia: *Overnight Rate Definition*, dostupné na internete (24. 7. 2022):
<https://www.investopedia.com/terms/o/overnightrate.asp>
- [23] Joe, H.: Dependence Modeling with Copulas, *Monographs on Statistics and Applied Probability* 143, 2015, ISBN 978-1-4665-8323-8
- [24] Kato, S., Yoshihara, T., Eguchi, S.: Copula-based measures of asymmetry between the lower and upper tail probabilities, *Statistical Papers* 63 (2022), str. 1907–1929
- [25] Nagler, T., Krüger, D., Min, A.: Stationary vine copula models for multivariate time series, *Journal of Econometrics* 227 (2022), str. 305-324
- [26] Nagler, T., Schepsmeier, U., Stoeber, J., Brechmann, E., Graeler, B., Erhardt, T.: *VineCopula: Statistical Inference of Vine Copulas*, R-package manuál, verzia 2.4-4, 2022, dostupné na internete (9. 1. 2023):
<https://cran.r-project.org/web/packages/VineCopula/VineCopula.pdf>
- [27] Nasr, I. B., Chebana, F.: Estimation method for mixture copula models in hydrological context, *Journal of Hydrology*, Volume 615 A (2022)
- [28] Okhrin, O., Ristig, A., Xu, Y. F.: *Copulae in High Dimensions: An Introduction*, 2017, ISBN 978-3-662-54485-3.
- [29] Okhrin, O., Okhrin, Y., Schmidt, W.: *Properties of Hierarchical Archimedean Copulas*, Discussion Paper SFB 649, Humboldt-Universität, Berlin, 2009
- [30] Okhrin, O., Tetereva, A.: The Realized Hierarchical Archimedean Copula in Risk Modelling, *Econometrics* (2017) 5

- [31] R Core Team: *R: A language and environment for statistical computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, 2022, <https://www.R-project.org>
- [32] Righi, M. B., Schlender, S. G., Ceretta, P. S.: Pair copula constructions to determine the dependence structure of Treasury bond yields, *IIMB Management Review* (2015) 27, str. 216-227
- [33] Tsay, R. S.: *Multivariate Time Series Analysis*, John Wiley & Sons, Inc. 2014, ISBN 978-1-118-61790-8
- [34] Wikipedia. The Free Encyclopedia, vybrané klíčové slova, dostupné na internete (18. 3. 2022): <https://en.wikipedia.org/>
- [35] Zhang, J., Zhang, M., Jiang, X., Wu, L., Qin, J., Li, Y.: Pair-Copula-based trivariate joint probability model of wind speed, wind direction and angle of attack, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 225 (2022)

Prílohy

Príloha A

Zdrojový kód funkcie yc_3d_estim v jazyku R

```
yc_3d_estim <- function(tl, mat, y, T_min = 1, T_max = 30, x_by = 0.05,
                        pd = 63, mts = NULL) {
  # logical checks - - - - -
  if (length(mat) != ncol(y)) {
    stop("Dimension mismatch - arguments y & mat.")}
  if (max(mat) > T_max) {
    warning("The resulting yield curve is not going to be extrapolated.")}
  if (max(y) > 1) {
    warning("Svensson's model needs input to be decimal - please enter e.g.
            20% as 0.2.")}
  x <- seq(T_min, T_max, by = x_by) # x axis of resulting yield curve
  if (sum(is.na(match(mts, x))) >= 1) {
    warning("Each mts component must be a multiple of x_by.")}
  # local variables - - - - -
  t_i <- length(tl) # time length
  m <- length(mat)
  coeff_memo <- matrix(NA, nrow = t_i, ncol = 6) # parameters memory
  rownames(coeff_memo) <- tl
  colnames(coeff_memo) <- c("beta_0", "beta_1", "beta_2", "beta_3",
                           "alpha_1", "alpha_2")
  yc_estim <- matrix(NA, nrow = t_i, ncol = length(x)) # estimated values
  rownames(yc_estim) <- tl
  colnames(yc_estim) <- x
  yc_plot <- matrix(NA, nrow = floor(t_i / pd), ncol = length(x)); j <- 1
  yc_plot_time <- c()
  r_tilde <- c()
  mse <- matrix(NA, nrow = t_i, ncol = 1) # memory of mean squared errors
  rownames(mse) <- tl
  pb <- progress::progress_bar$new(total = t_i) # progress bar initialization
  # yield curves estimation for given time points - - - - -
  for (i in 1:t_i) {
    coeff_i <- YieldCurve::Svensson(rate = y[i, ], maturity = mat)
    yc_i <- YieldCurve::Srates(xts(coeff_i, order.by = Sys.Date()),
                              maturity = x, whichRate = "Spot")
    coeff_memo[i, ] <- coeff_i; yc_estim[i, ] <- yc_i
```

```

if (i %% pd == 0) {
  yc_plot[j, ] <- yc_i; yc_plot_time[j] <- tl[i]
  j <- j + 1
}
# mean squared error - - - - -
if (min(mat) >= T_min && max(mat) <= T_max) {
  for (l in 1:m) {r_tilde[l] <- yc_estim[i, which(x == mat[l])]}
} else {
  # extrapolated values - beginning
  m_lower <- 0
  if (min(mat) < T_min) {
    x_plus <- mat[mat < T_min]; m_lower <- length(x_plus);
    for (ll in 1:m_lower) {
      r_tilde[ll] <- YieldCurve::Srates(xts(coeff_i, order.by = Sys.Date()),
                                         maturity = x_plus[ll], whichRate = "Spot")}
    }
  # interpolated values
  m_ok <- sum(mat <= T_max) - m_lower
  for (l in 1:m_ok) {
    r_tilde <- c(r_tilde, yc_estim[i, which(x == mat[l])])
  }
  # extrapolated values - tail
  if (max(mat) > T_max) {
    x_plus <- mat[mat > T_max]; m_higher <- length(x_plus)
    for (ll in 1:m_higher) {
      r_tilde <- c(r_tilde,
                   YieldCurve::Srates(xts(coeff_i, order.by = Sys.Date()),
                                         maturity = x_plus[ll], whichRate = "Spot"))
    }
  }
  mse[i] <- (1 / m) * (sum(r_tilde - y[i, ])^2); length(r_tilde)
  pb$tick()
}
# 3D plot - - - - -
fig_yc <- plotly::plot_ly(x = x, y = yc_plot_time, z = yc_plot)
fig_yc <- fig_yc %>% add_surface() %>% layout(scene = list(
  xaxis = list(title = "Maturity"),
  yaxis = list(title = ""),
  zaxis = list(title = "Yield")))
# results of estimation - - - - -
write.csv(coeff_memo, file = "Coefficients.csv", row.names = TRUE)

```

```

write.csv(yc_estim, file = "YieldCurves.csv", row.names = TRUE)
# output for multivariate time series - - - - -
if (is.null(mts) == FALSE) {
  n <- length(mts)
  mtsb <- matrix(NA, nrow = t_i, ncol = n)
  for (i in 1:n) {mts_b[, i] <- yc_estim[, which(x == mts[i])]}
  rownames(mtsb) <- t1; colnames(mtsb) <- mts
  return(list("YC_selection" = as.data.frame(mtsb),
             "MSE" = mse,
             "Plot 3d" = fig_yc))
} else {return(list("MSE" = mse, "Plot 3d" = fig_yc))}
}

```

Príloha B

Zdrojový kód funkcie `dvine_estim` v jazyku R

```
dvine_estim <- function(u, indt = TRUE) {  
  # local variables  
  L <- ncol(u) - 1 # dimension of the vine  
  col_nam <- c()  
  if (is.null(colnames(u))) {  
    col_nam <- c(col_nam, paste0("u", 1:ncol(u)))  
    colnames(u) <- col_nam  
  } else {col_nam <- colnames(u)}  
  attach(as.data.frame(u))  
  var_nam <- matrix(NA, ncol = L, nrow = L)  
  cdf_memory <- matrix(NA, ncol = L + 1, nrow = L)  
  cdf_memory[1, ] <- col_nam  
  #  
  # MAIN LOOP FOR D-VINE ESTIMATION =====  
  for (i in 1:L) {  
    print(paste("Calculating: D-vine - Level", i))  
    # level 1 of the vine  
    if (i == 1) {  
      for (j in 1:L) {  
        value <- VineCopula::BiCopSelect(u[, j], u[, j + 1], indeptest = indt)  
        var_nam[i, j] <- paste0(col_nam[j], ".", col_nam[j + 1])  
        assign(var_nam[i, j], value)  
      }  
    } else { # other levels of the vine  
      obj1 <- get(var_nam[i - 1, 1])  
      arg1 <- get(cdf_memory[i - 1, 1])  
      arg2 <- get(cdf_memory[i - 1, 2])  
      value <- VineCopula::BiCopHfunc2(u1 = arg1, u2 = arg2, obj = obj1)  
      cdf_memory[i, 1] <- paste0("F", col_nam[1],  
                                "_", paste0(col_nam[2:i], collapse = "."))  
      assign(cdf_memory[i, 1], value)  
      for (j in 1:(L + 1 - i)) {  
        # getting values from variable names  
        obj2 <- get(var_nam[i - 1, j + 1])  
        arg2 <- get(cdf_memory[i - 1, j + 1])  
        arg3 <- get(cdf_memory[i - 1, j + 2])  
        # constructing conditional distribution
```

```

cdf1 <- get(cdf_memory[i, j])
cdf2 <- VineCopula::BiCopHfunc1(u1 = arg2, u2 = arg3, obj = obj2)
cdf_memory[i, j + 1] <- paste0("F", col_nam[j + i],
                                "_", paste0(col_nam[(j + 1):(j + i - 1)],
                                              collapse = "."))

assign(cdf_memory[i, j + 1], cdf2)
# conditional copula selection
value <- VineCopula::BiCopSelect(cdf1, cdf2, indeptest = indt)
var_nam[i, j] <- paste0(col_nam[j], ".", col_nam[j + i],
                        "_", paste0(col_nam[(j + 1):(j + i - 1)],
                                      collapse = "."))

assign(var_nam[i, j], value)
}
}
} # =====
detach()
# results of the estimation
copula_nam <- as.vector(t(var_nam))
copula_nam <- copula_nam[!is.na(copula_nam)]
bicop_list <- c()
for (i in 1:length(copula_nam)) {
  bicop_list <- rbind(get(copula_nam[i]), bicop_list)
}
rownames(bicop_list) <- rev(copula_nam)
print("D-vine")
print(var_nam)
print("Bivariate Copulas")
return(bicop_list)
}

```

Príloha C

Odvodenie očakávanej volatility GARCH(P, Q) modelu

Nech zostanú zachované označenia zavedené v predkladanej práci. Majme všeobecne zadaný GARCH model rádu P, Q daný rovnicou $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^P \gamma_j \cdot \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^Q \delta_j \cdot \sigma_{t-j}^2$. Potom očakávanú volatilitu procesu – označíme s^2 , vypočítame ako strednú hodnotu volatility procesu, t. j. $s^2 = E[\sigma_t^2]$, čiže nasledovne.

$$\begin{aligned} s^2 &= E[\sigma_t^2] = E\left[\omega + \sum_{j=1}^P \gamma_j \cdot \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^Q \delta_j \cdot \sigma_{t-j}^2\right] \\ s^2 &= \omega + E\left[\sum_{j=1}^P \gamma_j \cdot \varepsilon_{t-j}^2\right] + E\left[\sum_{j=1}^Q \delta_j \cdot \sigma_{t-j}^2\right] \\ s^2 &= \omega + \sum_{j=1}^P \gamma_j \cdot E[\varepsilon_{t-j}^2] + s^2 \cdot \sum_{j=1}^Q \delta_j \\ s^2 &= \omega + \sum_{j=1}^P \gamma_j \cdot \left(\text{Var}[\varepsilon_{t-j}] + E[\varepsilon_{t-j}]\right) + s^2 \cdot \sum_{j=1}^Q \delta_j \\ s^2 &= \omega + \sum_{j=1}^P \gamma_j \cdot \left(\text{Var}[\varepsilon_{t-j}] + 0\right) + s^2 \cdot \sum_{j=1}^Q \delta_j \\ s^2 &= \omega + \sum_{j=1}^P \gamma_j \cdot \text{Var}[\sigma_{t-j} \cdot \xi_{t-j}] + s^2 \cdot \sum_{j=1}^Q \delta_j \\ s^2 &= \omega + s^2 \cdot \sum_{j=1}^P \gamma_j + s^2 \cdot \sum_{j=1}^Q \delta_j \end{aligned}$$

V prechode do posledného riadka v horeuvedenom systéme rovníc sme využili identitu

$$\begin{aligned} \text{Var}[\sigma_{t-j} \cdot \xi_{t-j}] &= E[\xi_{t-j}^2] \cdot \text{Var}[\sigma_{t-j}] + \text{Var}[\sigma_{t-j}] \cdot \text{Var}[\xi_{t-j}] + \text{Var}[\xi_{t-j}] \cdot E[\sigma_{t-j}]^2 \\ &= 0 + \text{Var}[\sigma_{t-j}] \cdot \text{Var}[\xi_{t-j}] + \text{Var}[\xi_{t-j}] \cdot \left(E[\sigma_{t-j}^2] - \text{Var}[\sigma_{t-j}]\right) \\ &= \text{Var}[\sigma_{t-j}] \cdot \text{Var}[\xi_{t-j}] - \text{Var}[\xi_{t-j}] \cdot \text{Var}[\sigma_{t-j}] + \text{Var}[\xi_{t-j}] \cdot E[\sigma_{t-j}^2] \\ &= 1 \cdot E[\sigma_{t-j}^2] \\ &= s^2. \end{aligned}$$

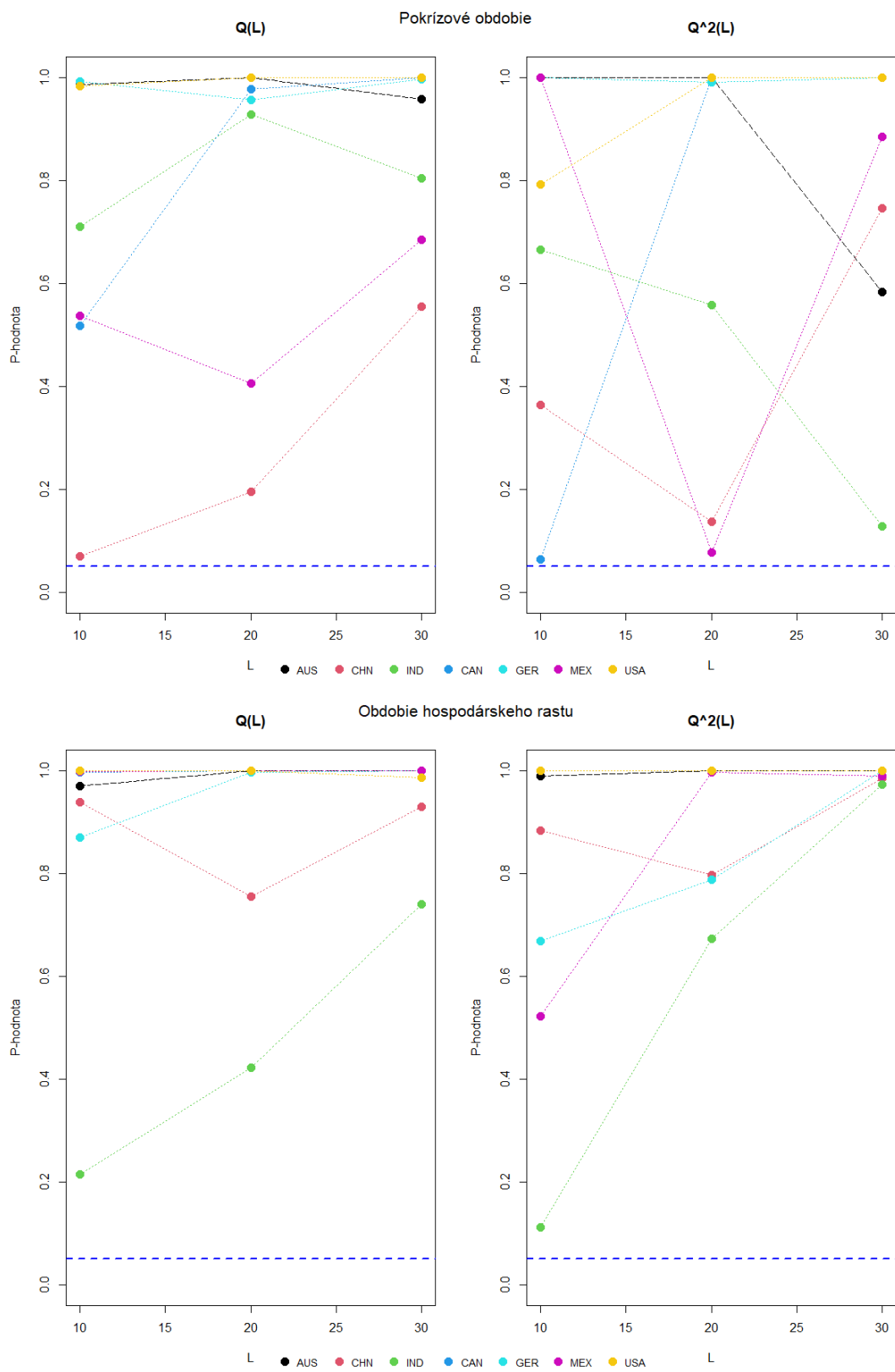
Po vyjadrení s^2 dostávame vzťah

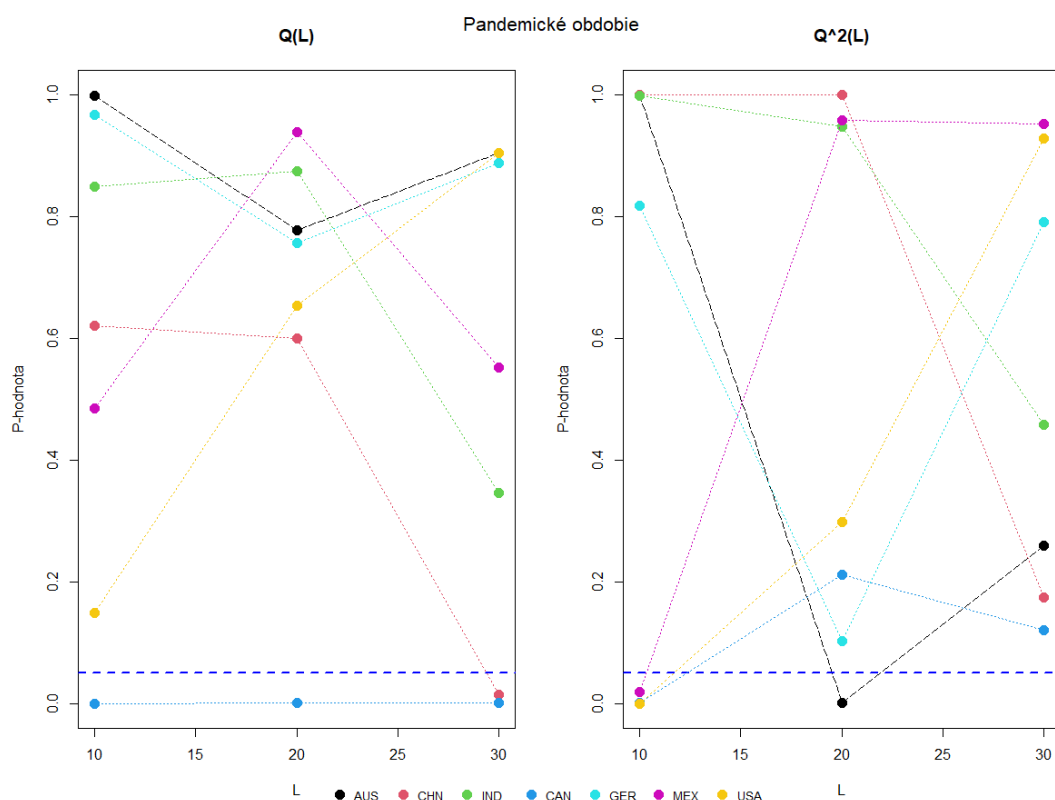
$$s^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{j=1}^P \gamma_j - \sum_{j=1}^Q \delta_j},$$

z čoho vyplýva, že ak by $\omega = 0$, tak v dlhodobom horizonte by mal proces nulovú volatilitu.



Výsledky validácie modelov časových radov

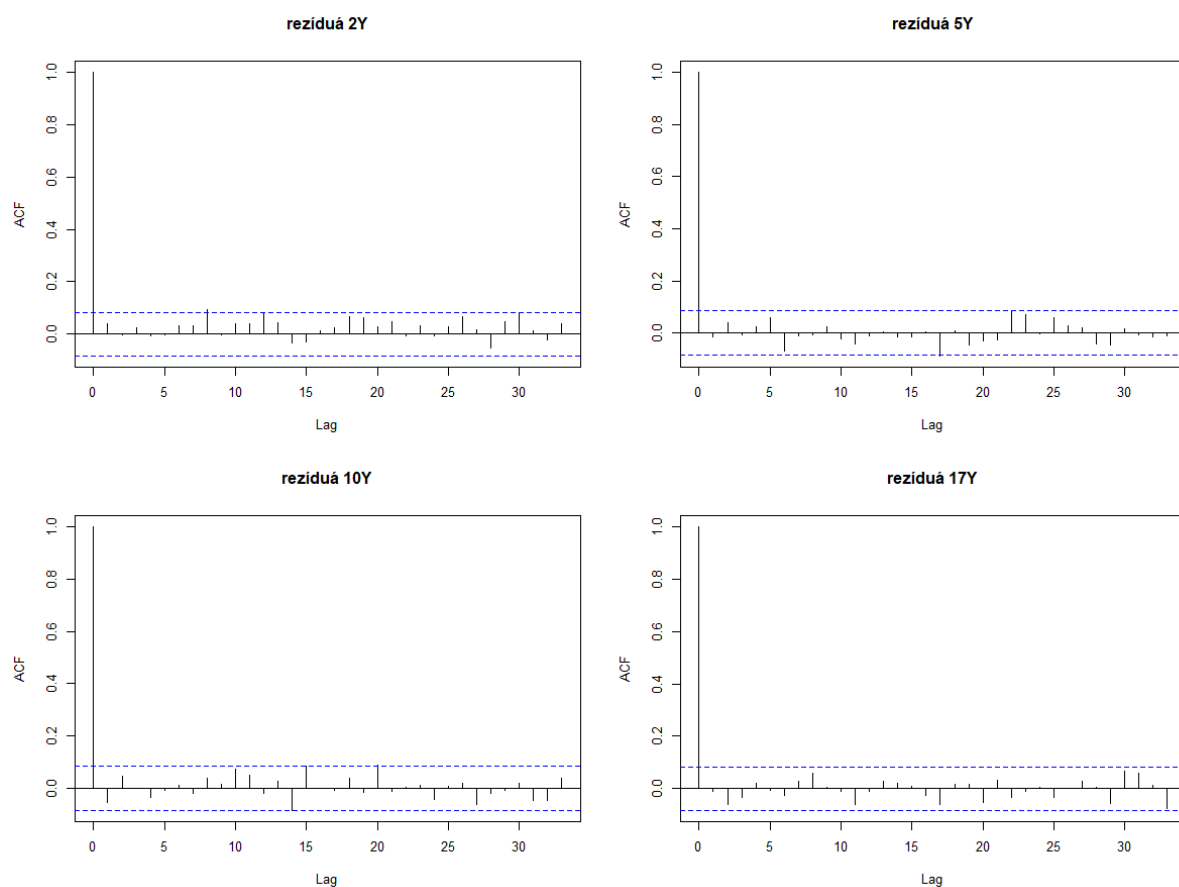




Obrázok D.26: P-hodnoty (znázornené farebnými krúžkami) viacrozmerného rozšírenia Ljungovej-Boxovho testu autokorelácie rezíduí – $Q(L)$ a autokorelácie ich druhých mocnín – $Q^2(L)$ pre lag $L = 10, 20, 30$. Krajiny v legende označené skrátené: AUS – Austrália, CHN – Čína, IND – India, CAN – Kanada, GER – Nemecko, MEX – Mexiko, USA – Spojené štáty americké. Pomocné čiary vykreslené pre prehľadnosť a navzájom ľahšiu rozlíšiteľnosť hodnôt rôznych krajín. (Zdroj: vlastné spracovanie)

Na obrázku D.26 vidíme, že v pandemickom období test niekoľkokrát zamietol hypotézu o nezávislosti štandardizovaných rezíduí, čo z pohľadu kopula modelovania vonkoncom nie je priaznivé. V prípade výsledkov $Q(L)$ pre Kanadu ide vskutku o zlé, na prvý pohľad neprijateľné výsledky. Zároveň ide o najlepšie výsledky modelu, aké sa nám podarilo nájsť (nechceli sme ísť do ešte vyšších rádov VARMA modelu, kvôli už aj tak slabej signifikantnosti parametrov). Preskúmali sme preto autokorelogram (pozri obrázok D.27) štandardizovaných rezíduí tohoto kanadského modelu. Autokorelácie rezíduí nie sú, takpovediac, extrémne. Usúdili sme preto, že napriek nepriaznivým výsledkom testu, použijeme daný model v ďalších častiach nášho výskumu.

V ostatných nevyhovujúcich prípadoch išlo vždy len o jeden lag zo všetkých testovaných lagov a keďže ani v týchto prípadoch sa nám nepodarilo nájsť lepšie modely, lepšie z pohľadu výsledkov portmanteau testu, pracovali s modelmi uvedenými v tabuľke 3.2, ktorým prislúchajú horeuvedené, nedokonalé výsledky testov.



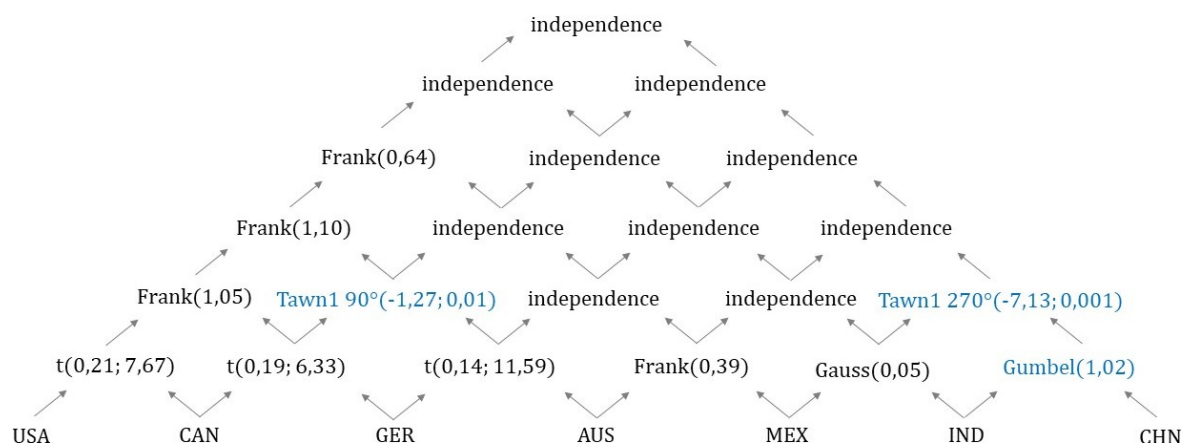
Obrázok D.27: Autokorelogram štandardizovaných rezíduí VARMA(5,0) DCC-GARCH modelu pre Kanadu v pandemickom období. (Zdroj: vlastné spracovanie)

Na záver tejto časti by sme chceli podotknúť, že ide o asymptotický test. V pandemickom období sme mali v porovnaní s ostatnými modelovanými obdobiami najmenej dát. Nevieme úplne vylúčiť možnosť, že horšie výsledky portmanteau testu pre pandemické obdobie je zapríčinené neskoršou konvergenciou k asymptotickému rozdeleniu. Navyše, tiež je potrebné si uvedomiť, že VARMA model vie zachytiť len lineárnu závislosť v dátach a nemôžeme preto očakávať, že bude dokonale fitovať všetky trhové dáta.

Príloha E

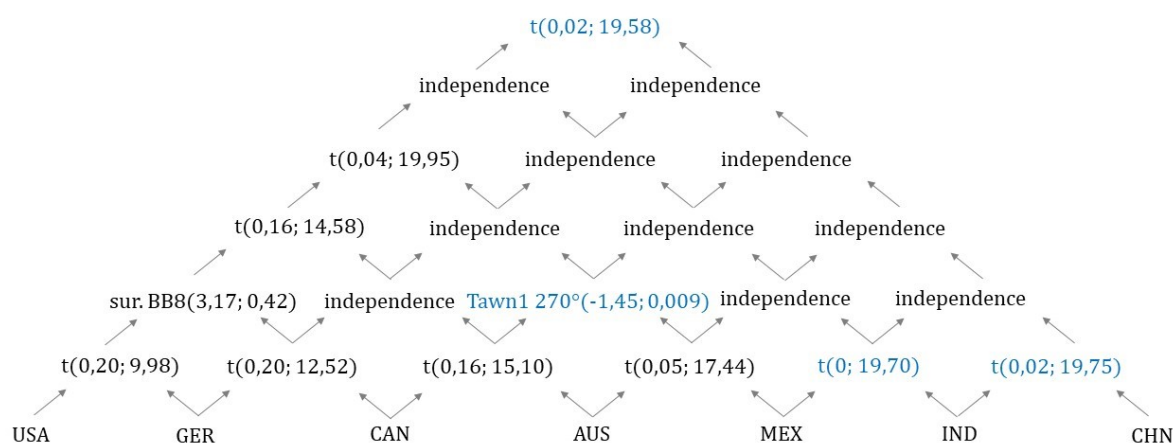
Odhady D-vine štruktúry bez testovania nezávislosti

Výsledky použitia funkcie `dvine_estim`. Farebne zvýraznené kopuly označujú tie kopula funkcie, ktoré sa pri testovaní nezávislosti zmenia na *independence* kopulu. Skratkou *sur.* označujeme prívlastok *survival*, ktorý reprezentuje rotáciu kopúl o 180 stupňov. Iné rotácie sú uvedené medzi názvom príslušnej kopula funkcie a jej parametrami.



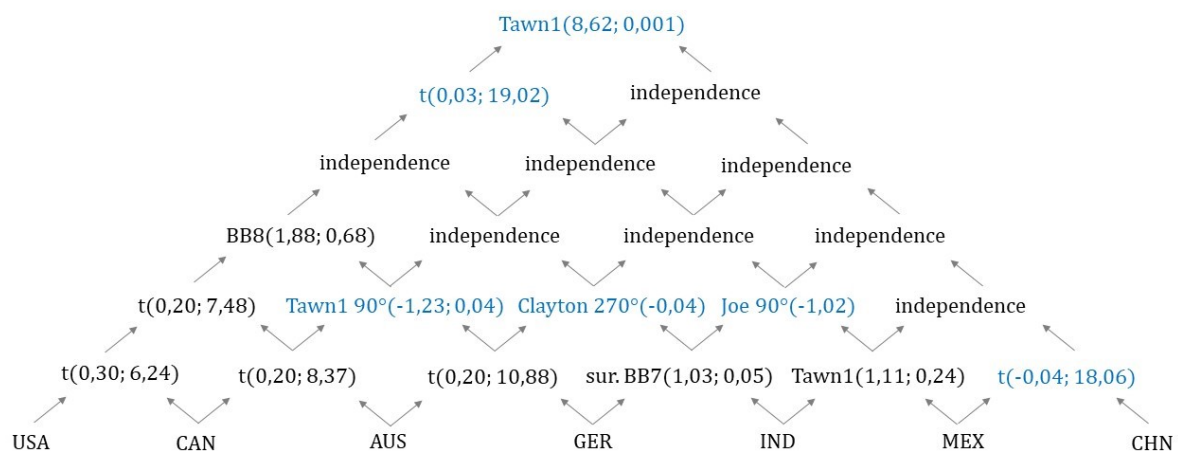
Obrázok E.28: Odhadnutá D-vine štruktúra pre *pokrízové* obdobie. Príslušné parametre jednotlivých kopúl uvedené v zátvorkách, zaokrúhlené na dve desatinné miesta.

(Zdroj: vlastné spracovanie)



Obrázok E.29: Odhadnutá D-vine štruktúra pre *pokojné* obdobie. Príslušné parametre jednotlivých kopúl uvedené v zátvorkách, zaokrúhlené na dve desatinné miesta.

(Zdroj: vlastné spracovanie)



Obrázok E.30: Odhadnutá D-vine štruktúra pre *pandemické krízové* obdobie. Príslušné parametre jednotlivých kopúl uvedené v zátvorkách, zaokrúhlené na dve desatinné miesta.
(Zdroj: vlastné spracovanie)