

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



GRANGEROV TEST KAUZALITY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

## GRANGEROV TEST KAUZALITY

### DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie  
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Vedúci práce: Mgr. Martina Chvosteková, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Adela Gallóová  
**Študijný program:** ekonomicko-finančná matematika a modelovanie  
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Grangerov test kauzality  
*Granger causality test*

**Anotácia:** Grangerova kauzalita predstavuje základnú kvantitatívnu analýzu kauzality medzi časovými radmi. Vďaka zrozumiteľnej formulácii v kontexte vektorového autoregresného (VAR) modelu patrí medzi najpopulárnejšie kauzálne metódy. V práci sa budeme zaoberať spoľahlivosťou a silou Waldovho testu pre Grangerovu kauzalitu. Vplyv odhadnutých parametrov VAR modelu na výkonnosť Waldovho testu budeme analyzovať pre rôzne prepojenia časových radov a pre rôzny počet pozorovaní v simulačnej štúdii. VAR parametre budeme odhadovať Yuleovým-Walkerovým odhadcom a metódou najmenších štvorcov a stupeň VAR budeme odhadovať rôznymi informačnými kritériami.

**Vedúci:** Mgr. Martina Chvosteková, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.  
**Dátum zadania:** 11.01.2022

**Dátum schválenia:** 14.01.2022

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.  
garant študijného programu

---

študent

---

vedúci práce

**Podakovanie** Touto cestou by som sa chcela poďakovať mojej vedúcej diplomovej práce Mgr. Martine Chvostekovej, PhD., za jej odborné rady, podnetné pripomienky a čas, ktorý mi venovala. V neposlednom rade ďakujem mojej rodine, Adamkovi a kamarátom, ktorí ma aj v tých najťažších chvíľach podporovali a verili, že to zvládnem úspešne dokončiť.

## Abstrakt v štátnom jazyku

GALLÓOVÁ, Adela: Grangerov test kauzality [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Martina Chvosteková, PhD., Bratislava, 2023, 81 s.

V našej diplomovej práci sa venujeme Grangerovej kauzalite, ktorá predstavuje základnú kvantitatívnu analýzu kauzality medzi časovými radmi. Vďaka zrozumiteľnej formulácii v kontexte vektorového autoregresného (VAR) modelu patrí medzi najpopulárnejšie kauzálne metódy. V práci analyzujeme spoľahlivosť a silu Waldovho a Barnettovho-Sethovho testu pre Grangerovu kauzalitu. Vplyv odhadnutých parametrov VAR modelu na výkonnosť oboch testov skúmame pre rôzne silne prepojené časové rady. Rád VAR modelu je odhadovaný pomocou troch informačných kritérií a neznáme parametre modelu sú odhadované viacrozmernou metódou najmenších štvorcov a Morfovou verziou Levinson-Wiggins-Robinsonovho rekurzívneho algoritmu. Nezávislosť rezíduí z odhadnutých VAR modelov je testovaná pomocou Portmanteauovho testu. Všetky spomínané testovania sme realizovali pre štyri rôzne scenáre a porovnali dosiahnuté výsledky.

**Kľúčové slová:** Grangerova kauzalita, časové rady, vektorový autoregresný (VAR) model, Portmanteauov test, Waldov test

# Abstract

GALLÓOVÁ, Adela: Granger causality test [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Martina Chvosteková, PhD., Bratislava, 2023, 81 p.

In our master's thesis, we focus on Granger causality, which represents the fundamental quantitative analysis of causality between time series. Thanks to its understandable formulation in the context of the vector autoregressive (VAR) model, it is one of the most popular causal methods. We analyze the reliability and strength of Wald's and Barnett-Seth's tests for Granger causality. The influence of estimated parameters of the VAR model on the performance of both tests is examined for various strongly interconnected time series. The order of the VAR model is estimated using three information criteria, and unknown parameters of the model are estimated using the multivariate method of least squares and the Morf version of the Levinson-Wiggins-Robinson recursive algorithm. The independence of residuals from estimated VAR models is tested using the Portmanteau test. We have conducted all the aforementioned tests for four different scenarios and compared the obtained results.

**Keywords:** Granger causality, time series, vector autoregressive (VAR) model, Portmanteau test, Wald test

# Obsah

|                                                                        |           |
|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Úvod                                                                   | 8         |
| <b>1 Základné predpoklady a vlastnosti <math>VAR(p)</math> modelov</b> | <b>10</b> |
| 1.1 $VAR(p)$ model . . . . .                                           | 10        |
| 1.2 Stabilita $VAR(p)$ . . . . .                                       | 11        |
| 1.3 Stacionarita $VAR(p)$ . . . . .                                    | 13        |
| 1.4 Nekorelovanosť rezíduí $VAR(p)$ . . . . .                          | 14        |
| <b>2 Odhad parametrov</b>                                              | <b>16</b> |
| 2.1 Odhad rádu $p$ . . . . .                                           | 16        |
| 2.2 Viacrozmerná metóda najmenších štvorcov . . . . .                  | 17        |
| 2.3 Morfov (LWR) rekurzívny algoritmus . . . . .                       | 19        |
| <b>3 Testy Grangerovej kauzality</b>                                   | <b>21</b> |
| 3.1 Waldov test . . . . .                                              | 21        |
| 3.2 Barnettov-Sethov prístup . . . . .                                 | 23        |
| 3.2.1 Autokovariancie $VAR(p)$ . . . . .                               | 24        |
| 3.2.2 Whittleov algoritmus . . . . .                                   | 25        |
| 3.2.3 Barnettov-Sethov test . . . . .                                  | 26        |
| <b>4 Simulačná štúdia</b>                                              | <b>28</b> |
| 4.1 Portmanteauov test . . . . .                                       | 28        |
| 4.1.1 Sila Portmanteauovho testu . . . . .                             | 33        |
| 4.2 Grangerov test kauzality . . . . .                                 | 37        |
| <b>Záver</b>                                                           | <b>60</b> |
| <b>Zoznam použitej literatúry</b>                                      | <b>62</b> |
| <b>Príloha A</b>                                                       | <b>64</b> |
| <b>Príloha B</b>                                                       | <b>68</b> |
| <b>Príloha C</b>                                                       | <b>75</b> |

# Úvod

Grangerova kauzalita („G-kauzalita“) je štandardným nástrojom na skúmanie kauzálneho prepojenia medzi časovými radmi [5]. Sir Clive William John Granger ju definoval na základe myšlienky matematika Norberta Wienera [13]. (Wiener-)Grangerova kauzalita je založená na skúmaní predikcie hodnôt premenných. Ak je odhad premennej  $x$  založený len na jej minulých hodnotách ale možno ho zlepšiť uvažovaním minulých hodnôt premennej  $y$ , vtedy hovoríme, že  $y$  kauzálne vplyva na  $x$  v Grangerovom zmysle. Granger navrhol použiť predpovede z VAR modelu [5].

Pôvodne bola Grangerova kauzalita vyvinutá v kontexte ekonometrickej teórie, no odvtedy dosiahla široké uplatnenie. Stala sa populárnou v rôznych iných vedných oblastiach, najväčšie spektrum jej aplikácií možno nájsť v neurovede [2], [10] a [11].

Cieľom našej práce je simulačnou štúdiou určiť vplyv 1.) odhadu parametrov VAR, 2.) testu významnosti kauzálneho prepojenia, 3.) počtu pozorovaní na výsledok kauzálnej analýzy. Neznáme parametre VAR odhadneme viacrozmernou metódou najmenších štvorcov a pomocou Morfovej verzie Levinson-Wiggins-Robinsonovho rekurzívneho algoritmu. Významnosť kauzálneho prepojenia v Grangerovom zmysle testujeme pomocou Waldovho testu a Barnettovým-Sethovým prístupom. Jedným z dôležitých znakov korektného odhadnutia VAR modelu je aj nekorelovanosť rezíduí. Portmanteauov test na testovanie nekorelovanosti rezíduí je tiež v práci simulačne analyzovaný pre uvažované, rôzne hodnoty parametrov.

Práca je delená do štyroch kapitol. V prvej kapitole sa zameriavame na VAR modely a ich vlastnosti. Zdefinujeme stabilitu, stacionaritu a nekorelovanosť rezíduí. Druhá kapitola obsahuje teóriu potrebnú na odhad jednotlivých parametrov VAR modelov. Uvádzame v nej tri informačné kritériá na odhad rádu modelu. Viacrozmerný odhad najmenších štvorcov a Morfov (LWR) rekurzívny algoritmus, ktorými odhadujeme matice koeficientov a kovariančnú maticu. V tretej kapitole približujeme testy Grangerovej kauzality, Waldov test a Barnettov-Sethov test s ktorými v praktickej časti pracujeme. V závereč-



nej kapitole uvádzame dosiahnuté výsledky z našej simulačnej štúdie, ktorú vykonávame prostredníctvom softvéru *MATLAB*. Štúdiu sme vykonali na štyroch rôznych modeloch, ktoré v práci predstavujeme.

# 1 Základné predpoklady a vlastnosti $VAR(p)$ modelov

V prvej kapitole uvádzame vektorový autoregresný ( $VAR$ ) model s konečným rádom  $p$ . Ďalej sa oboznámime s jeho základnými predpokladmi ako stabilita, stacionarita a nekorelovanosť rezíduí. Predpoklad nekorelovanosti rezíduí testujeme pomocou viacrozmerného, Portmanteauovho testu. Uvedené výsledky v prvej kapitole boli čerpané najmä z [7].

## 1.1 $VAR(p)$ model

Predmetom nášho záujmu je predstavenie a zadefinovanie  $VAR(p)$  modelu, kde  $p$  reprezentuje rád modelu. V maticovom zápise je zadefinovaný ako

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ \vdots \\ y_{n,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1,1}^1 \dots A_{1,n}^1 \\ \vdots \\ A_{n,1}^1 \dots A_{n,n}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ \vdots \\ y_{n,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1,1}^2 \dots A_{1,n}^2 \\ \vdots \\ A_{n,1}^2 \dots A_{n,n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-2} \\ \vdots \\ y_{n,t-2} \end{bmatrix} + \dots \\ &\dots + \begin{bmatrix} A_{1,1}^i \dots A_{1,n}^i \\ \vdots \\ A_{n,1}^i \dots A_{n,n}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-i} \\ \vdots \\ y_{n,t-i} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} A_{1,1}^p \dots A_{1,n}^p \\ \vdots \\ A_{n,1}^p \dots A_{n,n}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-p} \\ \vdots \\ y_{n,t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n,t} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

V skrátenej zápise

$$y_t = \nu + \sum_{k=1}^p A_k y_{t-k} + \varepsilon_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2)$$

kde  $y_t$  je  $(n \times 1)$  náhodný vektor,  $A_k$  sú pevné  $(n \times n)$  matice koeficientov,  $\nu$  je pevný  $(n \times 1)$  vektor interceptu, ktorý umožňuje nenulovú strednú hodnotu  $\mathbb{E}[y_t]$  a  $\varepsilon_t$  je  $n$ -rozmerný, biely šum, t.j.  $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$  a  $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_s^T] = \Sigma_\varepsilon$ , pre  $s = t$  a  $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_s^T] = 0$ , pre  $s \neq t$ . Aby sme preskúmali dôsledky plynúce z (2), zvažme  $VAR(1)$  model

$$y_t = \nu + A_1 y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (3)$$

Ak tento mechanizmus generovania začne v určitom čase  $t = 1$ , dostaneme

$$y_1 = \nu + A_1 y_0 + \varepsilon_1, \quad (4)$$

$$y_2 = \nu + A_1 y_1 + \varepsilon_2, \quad (5)$$

$\vdots$

Dosadením vzťahu (4) do rovnice (5) vznikne

$$y_2 = \nu + A_1(\nu + A_1 y_0 + \varepsilon_1) + \varepsilon_2 = (I_n + A_1)\nu + A_1^2 y_0 + A_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (6)$$

Pre všeobecné  $t$  platí

$$y_t = (I_n + A_1 \dots + A_1^{t-1})\nu + A_1^t y_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A_1^k \varepsilon_{t-k}. \quad (7)$$

Na základe vyjadrenia pre všeobecné  $y_t$  vieme povedať, že vektory  $y_1, \dots, y_t$  sú jednoznačne určené len pomocou  $y_0, A_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$ . Predpokladajme, že model  $VAR(1)$  začal v nekonečnej minulosti, potom zo vzťahu (7) dostávame

$$y_t = \nu + A_1 y_{t-1} + \varepsilon_t = (I_n + A_1 \dots + A_1^j)\nu + A_1^{j+1} y_{t-j-1} + \sum_{k=0}^j A_1^k \varepsilon_{t-k}. \quad (8)$$

Predchádzajúce odvodenia možno rozšíriť pre  $VAR(p)$  s  $p > 1$ , pretože každý  $VAR(p)$  možno zapísať vo forme  $VAR(1)$ . Platí, že ak  $y_t$  je daný  $VAR(p)$  modelom v (2), jemu zodpovedajúci  $np$ -rozmerný  $VAR(1)$  má tvar

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{p-1} & A_p \\ I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

a v skrátrenom tvare

$$Y_t = \boldsymbol{\nu} + \mathbf{A}Y_{t-1} + E_t. \quad (9)$$

## 1.2 Stabilita $VAR(p)$

Vo všeobecnosti môžeme pripomenúť, že vlastné hodnoty (resp. charakteristické korene) štvorcovej ( $n \times n$ ) matice  $A$  sú korene polynómu  $\lambda$ , dané  $\det(A - \lambda I_n)$  alebo  $\det(\lambda I_n - A)$ . Determinant sa niekedy nazýva charakteristický determinant a polynóm sa nazýva charakteristický polynóm matice  $A$ . Keď korene polynómu sú komplexné čísla, vlastné

hodnoty sú vo všeobecnosti tiež komplexné. Číslo  $\lambda_i$  je vlastnou hodnotou matice  $A$ , ak sú stĺpce  $(A - \lambda_i I_n)$  lineárne závislé. V dôsledku toho existuje vektor  $v_i \neq 0$  taký, že

$$(A - \lambda_i I_n)v_i = 0. \quad (10)$$

Vektor s touto vlastnosťou je vlastný vektor alebo charakteristický vektor matice  $A$ , s prislúchajúcou vlastnou hodnotou  $\lambda_i$ .

Ak máme komplexné číslo

$$z = z_1 + iz_2, \quad (11)$$

kde  $z_1$  a  $z_2$  sú reálne a imaginárne časti  $z$ , a  $i = \sqrt{-1}$ , modulus  $|z|$  je definovaný ako

$$= \sqrt{z_1^2 + z_2^2}. \quad (12)$$

Model  $VAR(1)$  nazývame stabilným, ak pre všetky vlastné hodnoty matice  $A_1$  platí, že  $|\lambda_i| < 1$  pre  $\forall i$ , respektíve  $|z| < 1$ . Na základe vyššie uvedeného môžeme podmienku ekvivalentne zapísať ako

$$\det(I_n - A_1 z) \neq 0 \quad \text{pre } |z| \leq 1, \quad (13)$$

teda korene ležia mimo jednotkového kruhu v komplexnej rovine. Ak (13) platí, tak:

- postupnosť  $A_1^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  je absolútne sumovateľná, teda existuje nekonečný súčet pre  $\sum_{k=1}^{\infty} A_1^k \varepsilon_{t-k}$ ,
- pre  $j \rightarrow \infty$ :  $(I_n + A_1 \dots + A_1^j)\nu \rightarrow (I_n - A_1)^{-1}\nu$ ,
- $A_1^{j+1}$  navyše konverguje pre  $j \rightarrow \infty$  veľmi rýchlo ku nule, preto môžeme výraz  $A_1^{j+1}y_{t-j-1}$  v limite považovať za nulový.

Po splnení podmienky o vlastných hodnotách pre maticu  $A_1$ , súčasne s uvedenými dôsledkami, môžeme tvrdiť, že  $VAR(1)$  model  $y_t$  je dobre definovaný, stochastický model a vieme ho zapísať v tvare

$$y_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} A_1^k \varepsilon_{t-k}, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (14)$$

kde  $\mu$  je dané ako

$$\mu = (I_n - A_1)^{-1}\nu. \quad (15)$$

Ekvivalentne pre  $VAR(p)$  definujeme, že ak platí

$$\det(I_{np} - \mathbf{A}z) = \det(I_n - A_1z - \dots - A_pz^p) \neq 0 \quad \text{pre } |z| \leq 1, \quad (16)$$

tak je splnená podmienka stability.  $VAR(p)$  model je stabilný, ak je splnená podmienka (16) a možno ho vyjadriť v tvare

$$y_t = J\boldsymbol{\mu} + J \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k E_{t-k}, \quad (17)$$

kde  $J$  je  $(n \times np)$  matica,  $\boldsymbol{\mu}$  je vektor rozmeru  $(np \times 1)$  a platí

$$J := [I_n : 0 : \dots : 0], \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\mu} = (I_{np} - \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\nu}. \quad (19)$$

### 1.3 Stacionarita $VAR(p)$

Stochastický model  $y_t$  je stacionárny, ak je prvý a druhý moment časovo invariantný. Prvý moment pre model  $y_t$  je jeho stredná hodnota

$$\mathbb{E}[y_t] = \mu \quad \text{pre } \forall t. \quad (20)$$

Vzťah (20) značí, že všetky  $y_t$  majú rovnakú strednú hodnotu v každom čase  $t$ . Druhý moment modelu  $y_t$  je jeho variancia

$$\mathbb{E}[(y_t - \mu)(y_{t-h} - \mu)'] = \Gamma_y(h) \quad \text{pre } \forall t, h = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Zápis  $\Gamma_y(h)$  vyjadruje, že autokovariancie modelu nezávisia od času  $t$ , ale práve od časového úseku  $h$  medzi dvomi vektormi  $y_t$  a  $y_{t-h}$ . Medzi  $\Gamma_y(h)$  a  $\Gamma_y(-h)'$  platí rovnosť. V neskorších častiach práce sa podrobnejšie venujeme definovaniu autokovariancií pre VAR model.

**Veta 1.1 (*Podmienka stacionarity*)** *Stabilný  $VAR(p)$  model  $y_t$ ,  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , je stacionárny.*

Poznamenajme, že z **Vety 1.1** nevyplýva, že nestabilný model musí byť nevyhnutne nestacionárny.

## 1.4 Nekorelovanosť rezíduí $VAR(p)$

Pri výpočte autokorelácií stabilného modelu sa používa zápis

$$R(h) = D^{-1}\Gamma_y(h)D^{-1}, \quad (22)$$

kde  $D$  je diagonálna matica tvorená štandardnými odchýlkami zložiek  $y_t$ , t.j. na hlavnej diagonále matice  $D$  sú druhé odmocniny diagonálnych prvkov  $\Gamma_y(0)$ . Nech  $\gamma_{ij}(h)$  označuje kovarianciu medzi  $y_{i,t}$  a  $y_{j,t-h}$ , potom maticu  $D^{-1}$  môžeme zapísať

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\gamma_{11}(0)}} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\gamma_{nn}(0)}} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

a korelácie medzi  $y_{i,t}$  a  $y_{j,t-h}$ , čo je  $ij$ -ty prvok  $R(h)$ , môžeme zapísať ako

$$\rho_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_{ii}(0)}\sqrt{\gamma_{jj}(0)}}. \quad (24)$$

Pri výbere modelu možno považovať za jedno z dôležitých kritérií to, či sú rezíduá dostatočne blízke bielemu šumu. Samozrejme, ak je cieľom predpoveď, nemusí byť prvoradé, či sú rezíduá skutočne bielym šumom, pokiaľ model predpovedá správne hodnoty. Sú však situácie, kedy je kontrola bieleho šumu dôležitá. Napríklad, ak je rád modelu vybraný neštatistickými metódami, napríklad na základe ekonomickej teórie, môže byť užitočné mať k dispozícii štatistické nástroje na skúmanie vlastností rezíduí. V tejto podkapitole popíšeme Portmanteauov test, ktorý je populárnym testom významnosti autokorelácií rezíduí  $VAR(p)$  modelu  $y_t$ , až po oneskorenie  $h$ .

Portmanteauov test je určený na testovanie

$$H_0 : \mathbf{R}(h) = (R(1), \dots, R(h)) = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mathbf{R}(h) \neq 0. \quad (25)$$

Testovacia štatistika je

$$Q(h) := T \sum_{i=1}^h \text{tr}(\hat{R}'(i)\hat{R}^{-1}(\varepsilon)\hat{R}(i)\hat{R}^{-1}(\varepsilon)). \quad (26)$$

Keď sa ako odhad reziduálnych autokorelácií využije vzťah (22)

$$\hat{R}(i) = \hat{D}^{-1}\hat{\Gamma}_y(i)\hat{D}^{-1}, \quad (27)$$

kde

$$\hat{\Gamma}_y(i) := \hat{C}(i) := \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}'_{t-i}, \quad i = 0, 1, \dots, h < T, \quad (28)$$

možno potom testovaciu štatistiku (26) prepísať

$$\begin{aligned} Q(h) &:= T \sum_{i=1}^h \text{tr}(\hat{R}'(i) \hat{R}^{-1}(\varepsilon) \hat{R}(i) \hat{R}^{-1}(\varepsilon) \hat{D}^{-1} \hat{D}) \\ &= T \sum_{i=1}^h \text{tr}(\hat{D} \hat{R}'(i) \hat{D} \hat{D}^{-1} \hat{R}^{-1}(\varepsilon) \hat{D}^{-1} \hat{D} \hat{R}(i) \hat{D} \hat{D}^{-1} \hat{R}^{-1}(\varepsilon) \hat{D}^{-1}). \end{aligned}$$

Po využití (27) a (28) je testovacia štatistika daná vzťahom

$$Q(h) := T \sum_{i=1}^h \text{tr}(\hat{C}'(i) \hat{C}^{-1}(0) \hat{C}(i) \hat{C}^{-1}(0)). \quad (29)$$

**Veta 1.2 (*Rozdelenie*  $Q(h)$ )** Nech  $y_t$  je stacionárny, stabilný,  $n$ -rozmerný  $VAR(p)$  model ako (2) s identicky rozdeleným, štandardným bielym šumom  $\varepsilon_t$  a nech koeficienty sú odhadnuté viacrozmernou metódou najmenších štvorcov alebo iným asymptoticky ekvivalentným postupom. Potom, pre vysoké hodnoty  $h$  a  $T$  platí

$$Q(h) \approx \chi^2_{1-\alpha}(n^2(h-p)), \quad (30)$$

pre spoľahlivosť  $\alpha$ . Z (30) vyplýva, že oneskorenie  $h$  treba voliť  $h > p$ . Treba si uvedomiť, že  $\chi^2$ -aproximácia rozdelenia testovacej štatistiky môže byť zavádzajúca pre malé hodnoty  $h$ .

## 2 Odhad parametrov

V nasledujúcej kapitole sa zaoberáme odhadmi neznámych parametrov  $A_1, \dots, A_p, \Sigma_\varepsilon$  a rádu modelu  $p$ . Uvedieme dve prístupy na odhad  $A_1, \dots, A_p, \Sigma_\varepsilon$ . Jeden pomocou odhadu viacrozmernou metódou najmenších štvorcov a druhý získaný Morfovým (LWR) rekurzívnym algoritmom. Pri odhade rádu  $p$ , uvažujeme tri rôzne informačné kritériá. Neznáme parametre odhadujeme z pozorovaní časového radu.

### 2.1 Odhad rádu $p$

Na získanie dobrého modelu je dôležité určiť správny rád  $p$ . Príliš malý rád môže viesť k slabej reprezentácii údajov, zatiaľ čo vysoký môže viesť k numerickým problémom s odhadom modelu [9]. Základným postupom na odhad rádu  $p$  je nájsť minimum kritéria, ktoré vyvažuje rozptyl daný odhadnutým modelom a počtu koeficientov, ktoré sa majú odhadnúť. Minimum hľadáme na zvolenom intervale  $[0, p_{max}]$ . Uvádzame tri často používané kritériá. Pri odhade rádu  $p$  vychádzame z článku [16].

- **Akaikeho informačné kritérium (AIC)**. Optimálny rád  $VAR$  modelu zodpovedá takej hodnote  $p$ , pre ktorú je funkcia AIC definovaná ako

$$AIC(p) = \ln[\det(\tilde{\Sigma}_\varepsilon(p))] + \frac{2}{T}pn^2, \quad (31)$$

a nadobúda minimum.

- **Akaikeho informačné kritérium s korekciou (CAIC)**. Optimálny rád  $VAR$  modelu zodpovedá takej hodnote  $p$ , pre ktorú je funkcia CAIC definovaná ako

$$CAIC(p) = \ln[\det(\tilde{\Sigma}_\varepsilon(p))] + \frac{2}{T}pn^2 \frac{T}{T - n - 1}, \quad (32)$$

a nadobúda minimum.

- **Bayesovo informačné kritérium (BIC)**. Optimálny rád  $VAR$  modelu zodpovedá takej hodnote  $p$ , pre ktorú je funkcia BIC definovaná ako

$$BIC(p) = \ln[\det(\tilde{\Sigma}_\varepsilon(p))] + \frac{\ln(T)}{T}pn^2, \quad (33)$$

a nadobúda minimum.



Pri všetkých troch informačných kritériách platí, že  $\tilde{\Sigma}_\varepsilon(p)$  je odhad kovariančnej matice  $\Sigma_\varepsilon$ ,  $\det()$  označuje determinant,  $T$  je počet pozorovaní a  $n$  je rozmer časového radu, t.j. počet premenných. Poznamenajme, že v simulačnej štúdii budeme používať viacrozmernú metódu najmenších štvorcov a Morfov (LWR) rekurzívny algoritmus na odhad kovariančnej matice.

AIC kritérium asymptoticky nadhodnocuje rád  $p$  s pozitívnou pravdepodobnosťou, preto sme sa rozhodli používať aj AIC s korekciou. Kritérium BIC odhaduje rád konzistentne za pomerne všeobecných podmienok, ak je skutočný rád  $p$  menší alebo rovný  $p_{max}$  [3].

## 2.2 Viacrozmerná metóda najmenších štvorcov

Odhad neznámych koeficientov viacrozmernou metódou najmenších štvorcov určujeme pre štandardný tvar  $VAR(p)$  modelu zo vzorca (2). Predpokladá sa, že je k dispozícii časový rad  $y_1, \dots, y_T$ , kde  $T$  je dĺžka časového radu pre každú premennú  $n$ . Dostávame

$$Y = BZ + E, \quad (34)$$

a v zložkovom zápise

$$\begin{bmatrix} | & \dots & | \\ y_{p+1} & \dots & y_T \\ | & \dots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \nu & A_1 & \dots & A_p \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ Z_p & \dots & Z_{T-1} \\ | & \dots & | \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ \varepsilon_{p+1} & \dots & \varepsilon_T \\ | & \dots & | \end{bmatrix}, \quad (35)$$

kde  $t$ -ty vektor matice  $Z$  má zložky

$$Z_t = \begin{bmatrix} 1 \\ y_t \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Iný možný zápis rovnice (34) je pomocou operátora  $vec$  [7]. Operátor  $vec$  transformuje matice na vektory skladaním stĺpcov, v našom prípade to bude znamenať

$$vec(Y) = vec(BZ) + vec(E). \quad (37)$$

S využitím Kroneckerovho súčinu a pravidlami pre operátor  $vec$ , vieme ešte  $vec(BZ)$  prepísať do tvaru

$$\mathbf{y} := vec(Y) = (Z' \otimes I_n)vec(B) + vec(E). \quad (38)$$

Odhadovanie viacrozmernou metódou najmenších štvorcov  $\beta = \text{vec}(B)$  znamená, že hľadáme také  $\beta$ , ktoré minimalizuje

$$S(\beta) = \mathbf{e}' \Sigma_E^{-1} \mathbf{e}, \quad (39)$$

kde  $\mathbf{e} = \text{vec}(E)$ ,  $\Sigma_E = I_T \otimes \Sigma_\varepsilon$  predstavuje kovariančnú maticu vektora  $\text{vec}(E)$ . Môžeme  $S(\beta)$  prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} S(\beta) &= \mathbf{e}'(I_T \otimes \Sigma_\varepsilon)^{-1} \mathbf{e} = [\mathbf{y} - (Z' \otimes I_n)\beta]'(I_T \otimes \Sigma_\varepsilon)^{-1}[\mathbf{y} - (Z' \otimes I_n)\beta] \\ &= \mathbf{y}'(I_T \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1})\mathbf{y} + \beta'(Z \otimes I_n)(I_T \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1})(Z' \otimes I_n)\beta - 2\beta'(Z \otimes I_n)(I_T \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1})\mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}'(I_T \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1})\mathbf{y} + \beta'(ZZ' \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1})\beta - 2\beta'(Z \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1})\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Pre určenie extrému vzhľadom na  $\beta$  položíme parciálnu deriváciu podľa  $\beta$  rovnú nule

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 2(ZZ' \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1})\beta - 2(Z \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1})\mathbf{y} = 0.$$

Odhad  $\beta$  viacrozmernou metódou najmenších štvorcov je definovaný

$$\hat{\beta} = ((ZZ')^{-1} \otimes \Sigma_\varepsilon)(Z \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1})\mathbf{y} = ((ZZ')^{-1}Z \otimes I_n)\mathbf{y}. \quad (40)$$

Pre určenie, či je odhadnutý vektor  $\hat{\beta}$  minimum alebo maximum je potrebné určiť Hessián

$$\frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta \partial \beta'} = 2(ZZ' \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1}).$$

Výsledkom je pozitívne definitná matica, čo potvrdzuje, že  $\hat{\beta}$  je skutočne minimalizujúci vektor.

Stojí za zmienku poznamenať, že je dokázané v [15], že odhad metódou viacrozmerých najmenších štvorcov a odhad metódou najmenších štvorcov sú v modeli viacerých rovníc identické, ak sú regresory vo všetkých rovniciach rovnaké, pričom odhad metódou najmenších štvorcov získame minimalizáciou

$$\tilde{S}(\beta) = \varepsilon'\varepsilon = [\mathbf{y} - (Z' \otimes I_n)\beta]'[\mathbf{y} - (Z' \otimes I_n)\beta].$$

Odhad  $\beta$  môže byť zapísaný aj ako

$$\hat{\beta} = \text{vec}(\hat{B}) = ((ZZ')^{-1}Z \otimes I_n)\text{vec}(Y) = \text{vec}(YZ'(ZZ')^{-1}).$$

Teda

$$\hat{B} = YZ'(ZZ')^{-1}. \quad (41)$$

Po určení odhadu  $\hat{B}$  možno odhadnúť  $\Sigma_\epsilon$

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}_\epsilon &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t \hat{\epsilon}_t' = \frac{1}{T} \hat{E} \hat{E}' = \frac{1}{T} (Y - \hat{B}Z)(Y - \hat{B}Z)' \\ &= \frac{1}{T} (Y - YZ'(ZZ')^{-1}Z)(Y - YZ'(ZZ')^{-1}Z)' \\ &= \frac{1}{T} Y(I_T - Z'(ZZ')^{-1}Z)(I_T - Z'(ZZ')^{-1}Z)'Y' \\ &= \frac{1}{T} Y(I_T - Z'(ZZ')^{-1}Z)Y' .\end{aligned}$$

Úprava pre stupne voľnosti je často žiadúca, pretože pri regresii s pevnými, nestochastickými regresormi to vedie k nevychýlenému odhadu kovariančnej matice. Takýto nevychýlený odhad je daný

$$\hat{\Sigma}_\epsilon = \frac{T}{T - np - 1} \tilde{\Sigma}_\epsilon . \quad (42)$$

Oba odhady  $\hat{\Sigma}_\epsilon$  a  $\tilde{\Sigma}_\epsilon$  sú asymptoticky ekvivalentné.

## 2.3 Morfov (LWR) rekurzívny algoritmus

Druhá metóda, ktorou odhadujeme neznáme matice koeficientov a kovariančnú maticu je variant takzvaného Levinson-Wiggins-Robinsonovho rekurzívneho algoritmu, známy pod skratkou LWR algoritmus - termín všeobecne označujúci triedu viacrozmerých rozšírení Durbinovej rekurzie [4], [6], [12], [14]. V našej práci využívame variant, ktorý popísal Morf a kolektív [8].

Matice regresných koeficientov  $\hat{A}_k$  odhadujeme rekurzívne pre  $k = 1, 2, \dots, p$  z údajov časového radu  $y_t$  pre  $t = 1, \dots, T$ . Algoritmus začína inicializačnými podmienkami  $k = 0$ , pre dopredné a spätné AR koeficienty

$$\tilde{A}_{0,0}^{-1} = \left[ \sum_{i=1}^T y_i y_i^T \right]^{1/2} , \quad (43)$$

$$\tilde{B}_{0,0}^{-1} = \left[ \sum_{i=0}^{T-1} y_i y_i^T \right]^{1/2} . \quad (44)$$

Nasleduje LWR rekurzia, ktorá iteruje pokiaľ je splnená podmienka  $k \leq p$  v nasledujúcich krokoch:

1. vypočítajú sa takzvané dopredné a spätné chyby predikcie

$$\tilde{e}_{k,t} = \sum_{i=0}^k \tilde{A}_{k,i} y_{t-i}, \quad (45)$$

$$\tilde{r}_{k,t} = \sum_{i=0}^k \tilde{B}_{k,k-i} y_{t-i}, \quad (46)$$

2. odhadnú sa normalizované koeficienty R

$$\tilde{R}_k^e = \sum_{t=k+1}^T \tilde{e}_{k,t} \tilde{e}_{k,t}^T, \quad (47)$$

$$\tilde{R}_k^r = \sum_{t=k+1}^T \tilde{r}_{k,t-1} \tilde{r}_{k,t-1}^T, \quad (48)$$

$$\tilde{R}_k^{er} = \sum_{t=k+1}^T \tilde{e}_{k,t} \tilde{r}_{k,t-1}^T, \quad (49)$$

$$\hat{\rho}_{k+1} = [\tilde{R}_k^e]^{-\frac{1}{2}} [\tilde{R}_k^{er}] [\tilde{R}_k^r]^{-\frac{T}{2}}, \quad (50)$$

3. dopočítajú sa dopredné a spätné normalizované prediktory pre  $k+1$

$$P_{k+1} = I - \hat{\rho}_{k+1} \hat{\rho}_{k+1}^T, \quad (51)$$

$$Q_{k+1} = I - \hat{\rho}_{k+1}^T \hat{\rho}_{k+1}. \quad (52)$$

4. pomocou vnoreného cyklu, sa dopočítajú dopredné a spätné koeficienty pre  $i = 0, \dots, k+1$

$$\tilde{A}_{k+1,i} = P_{k+1}^{-\frac{1}{2}} [\tilde{A}_{k,i} - \hat{\rho}_{k+1} \tilde{B}_{k,k-i+1}], \quad (53)$$

$$\tilde{B}_{k+1,i} = Q_{k+1}^{-\frac{1}{2}} [\tilde{B}_{k,i} - \hat{\rho}_{k+1}^T \tilde{A}_{k,k-i+1}]. \quad (54)$$

Po skončení celého algoritmu sa určí výsledná, odhadnutá matica regresných koeficientov pomocou dopredných koeficientov  $\tilde{A}_{k+1}$  a  $\tilde{A}_k$  a odhad kovariančnej matice rezíduí, ktorý sa dopočíta ako nevychýlený odhad rezíduí pomocou  $\tilde{A}_k$  a  $\tilde{e}_{k,t}$ . Všeobecne sa uvádza, že Morfov (LWR) algoritmus je veľmi stabilný a má tú výhodu, že nielen koeficienty VAR, ale aj odhady kovariančnej matice rezíduí sa počítajú rekurzívne [1]. V praxi pre jeden odhad môže byť algoritmus rýchlejší v porovnaní s viacrozmernou metódou najmenších štvorcov. Závisí to ale od počtu premenných, dĺžky časových radov a rádu modelu. Pre podrobnosti o algoritme odkazujeme čitateľa na pramene, z ktorých sme čerpali [1] a [8].

### 3 Testy Grangerovej kauzality

Hlavnou myšlienkou Grangerovej kauzality je zistiť, či sme schopní zlepšiť predikciu a teda, či vieme znížiť predikčnú chybu jednej premennej, ak použijeme na predikciu aj hodnoty z inej premennej [5]. Grangerova kuzalita je založená na predikovaní premenných pomocou  $VAR$  modelu. Budeme skúmať prepojenie medzi dvomi premennými v rámci dvojrozmerného  $VAR(p)$  modelu. Hovoríme, že premenná  $y_1$  vplýva na  $y_2$ , v Grangerovom zmysle, ak minulé hodnoty  $y_1$  pomáhajú predikcii  $y_2$ . Tento vzťah sa zvykne značiť aj ako  $y_1 \rightarrow y_2$ .

V tejto kapitole popíšeme testovanie kauzality, teda testy významnosti rozdielu predikčných chýb. Prvý uvedieme Waldov test, ktorého popis vychádza z publikácie [7] a druhý test označujeme ako Barnettov-Sethov test, ktorého popis vychádza z publikácie [1].

#### 3.1 Waldov test

Keďže sa v práci zameriavame na skúmanie kauzálného prepojenia medzi dvoma premennými, prepíšeme pre zjednodušenie model (2) pre prípad  $n = 2$ , teda platí

$$\begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^p \begin{bmatrix} A_{1,1}^k & A_{1,2}^k \\ A_{2,1}^k & A_{2,2}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-k} \\ y_{2,t-k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Zložku  $y_{2,t}$  vieme zapísať ako

$$y_{2,t} = \nu_2 + \sum_{k=1}^p \begin{bmatrix} A_{2,1}^k & A_{2,2}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-k} \\ y_{2,t-k} \end{bmatrix} + \varepsilon_{2,t}, \quad (56)$$

kde kovariančná matica je

$$\Sigma_{y_2} = cov(\varepsilon_{2,t}). \quad (57)$$

Ak proces  $y_2$  nezávisí od  $y_1$ , tak matice koeficientov prislúchajúce  $y_1$  sú nulové

$$A_{2,1}^1 = \dots = A_{2,1}^k = \dots = A_{2,1}^p = 0. \quad (58)$$

Pre vzťah (56) za platnosti (58)

$$y_{2,t} = \nu_2 + \sum_{k=1}^p \begin{bmatrix} 0 & A_{2,2}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-k} \\ y_{2,t-k} \end{bmatrix} + \varepsilon'_{2,t}, \quad (59)$$

kde  $A_{2,2}^k$  je tzv. matica redukovaných regresných koeficientov a  $\varepsilon'_{2,t}$  sú tzv. redukované regresné rezíduá, preto má kovariančná matica tvar

$$\Sigma'_{y_2} = cov(\varepsilon'_{2,t}). \quad (60)$$

Proces  $y_{2,t}$  v tvare (59) je predpísaný iba svojou vlastnou minulosťou  $y_{2,t-k}$ . Hypotézu (58) vieme prepísať do maticovo-vektorového zápisu

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \textcolor{red}{1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \textcolor{red}{1} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ A_{1,1}^1 \\ \textcolor{red}{A}_{2,1}^1 \\ A_{1,2}^1 \\ A_{2,2}^1 \\ \vdots \\ \textcolor{red}{A}_{2,1}^k \\ \vdots \\ A_{1,1}^p \\ \textcolor{red}{A}_{2,1}^p \\ \vdots \\ A_{2,2}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Predchádzajúci vzťah vieme zapísať aj ako

$$C\beta = c, \quad (62)$$

kde matica  $C$  je hodnosti  $p$ ,  $p \times (4p+2)$ -rozmerná matica tvorená len nulami a jednotkami, v závislosti od toho, ktoré koeficienty chceme analyzovať. Vektor  $\beta = vec(\nu, A^1, \dots, A^p)$  a  $c$  je nulový vektor dĺžky  $p$ .

Waldov test pre kauzálne prepojenie medzi premennými v Grangerovom zmysle je definovaný ako

$$H_0 : C\beta = c \quad \text{vs.} \quad H_1 : C\beta \neq c. \quad (63)$$

Ak zamietneme hypotézu  $H_0$  s maticou  $C$  v tvare (61), tak konštatujeme štatisticky významný kauzálny vplyv premennej  $y_1$  na  $y_2$ . Inak konštatujeme, že  $y_2$  nie je kauzálne

ovplyvňovaný  $y_1$ . Matica  $C$  sa dá analogicky upraviť pre testovanie kauzálneho prepojenia  $y_2 \rightarrow y_1$ .

Na testovanie nulovej hypotézy (63) sa používa Waldova štatistika

$$\lambda_W = (C\hat{\beta} - c)'[C((ZZ')^{-1} \otimes \hat{\Sigma}_\varepsilon)C']^{-1}(C\hat{\beta} - c), \quad (64)$$

ktorá je odvodená zo vzťahu

$$T(C\hat{\beta} - c)'[C(\Gamma^{-1} \otimes \Sigma_\varepsilon)C']^{-1}(C\hat{\beta} - c) \xrightarrow{d} \chi^2(p). \quad (65)$$

kde  $\hat{\beta}$  sú odhadnuté matice koeficientov. Nahradením  $\Gamma$  a  $\Sigma_\varepsilon$  ich odhadmi  $\Gamma = \frac{ZZ'}{T}$  a  $\hat{\Sigma}_\varepsilon$  dostávame Waldovu štatistiku, ktorá má asymptotické  $\chi^2$ -rozdelenie s  $p$  stupňami voľnosti. Matica  $Z$  je totožná s maticou použitou vo vzorci (35).

V praxi môže byť užitočné vykonať úpravy kritických hodnôt testu aby sa kompenzovala skutočnosť, že matica  $(\Gamma^{-1} \otimes \Sigma_\varepsilon)$  je neznáma a bola nahradená odhadom. Ak uvažujeme týmto smerom, berieme na vedomie, že

$$pF(p, T) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(p), \quad (66)$$

kde  $F(p, T)$  označuje náhodnú premennú s  $F$ -rozdelením, s  $p$  a  $T$  stupňami voľnosti. Pretože  $F(p, T)$ -rozdelenie má ťažší koniec ako  $\chi^2(p)$  je rozumnejšie predeliť Waldovu štatistiku hodnotou  $p$

$$\lambda_F = \frac{\lambda_W}{p}, \quad (67)$$

v spojení s kritickými hodnotami z niektorého  $F$ -rozdelenia. Obvyklá  $F$ -štatistika pre regresný model má menovateľa pre stupeň voľnosti rovný veľkosti vzorky mínus počet odhadovaných parametrov. Z modelu pre viacrozmerný odhad najmenších štvorcov máme vektor  $vec(Y)$  s  $nT$  pozorovaniami a  $vec(B) = \beta$  obsahuje  $n(np + 1)$  parametrov. Môžeme to aj alternatívne zapísať ako  $T - np - 1$  [7]. Máme teda približné rozdelenia také, že

$$\lambda_F \approx F(p, nT - n^2p - n) \approx F(p, T - np - 1). \quad (68)$$

### 3.2 Barnettov-Sethov prístup

Stretávame sa s alternatívnym riešením v článku [1], kde hlavný rozdiel je v tom, že redukcia nenastáva pri koeficientoch  $A$  ale v autokovariančných maticiach  $\Gamma$ . Aj keď je riešenie výpočtovo zložitejšie, autori článku uvádzajú, že takýto výpočet vedie k presnejším výsledkom.

### 3.2.1 Autokovariancie $VAR(p)$

V tejto časti prepíšeme  $VAR$  model do tvaru tzv. Yule-Walkerových rovníc, v ktorých vystupujú miesto odhadnutých matíc koeficientov a kovariančnej matice, autokovariančné matice  $\Gamma_y(h)$ .

Predpokladajme, že  $y_t$  je stacionárny, stabilný model  $VAR(p)$ , ktorý má tvar (2). Môže byť napísaný vo forme (upravenej na prímer)

$$y_t - \mu = \sum_{k=1}^p A_k(y_{t-k} - \mu) + \varepsilon_t. \quad (69)$$

Následným vynásobením  $(y_{t-h} - \mu)'$  a zavedením strednej hodnoty  $\mathbb{E}[\dots]$  dostávame

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(y_t - \mu)(y_{t-h} - \mu)'] &= A_1 \mathbb{E}[(y_{t-1} - \mu)(y_{t-h} - \mu)'] + \dots \\ &\dots + A_p \mathbb{E}[(y_{t-p} - \mu)(y_{t-h} - \mu)'] + \mathbb{E}[\varepsilon_t(y_{t-h} - \mu)']. \end{aligned} \quad (70)$$

Pomocou vzťahu (21) a tým, že platí  $\Gamma_y(h) = \Gamma_y(-h)'$ , vieme uvedenú rovnicu pre  $h = 0$  previesť do tvaru

$$\Gamma_y(0) = \sum_{k=1}^p A_k \Gamma_y(-k) + \Sigma_\varepsilon = \sum_{k=1}^p A_k \Gamma_y(k)' + \Sigma_\varepsilon. \quad (71)$$

Po úprave dostávame

$$\sum_{k=0}^p A_k \Gamma_y(h - k) = \Sigma_\varepsilon \quad \text{kde} \quad A_0 = I. \quad (72)$$

Pre  $h > 0$

$$\Gamma_y(h) = \sum_{k=1}^p A_k \Gamma_y(h - k). \quad (73)$$

Tieto rovnice sú známe ako Yule-Walkerove rovnice [7]. Rovnice (71) a (73) možno použiť na rekurzívny výpočet  $\Gamma_y(h)$  pre  $h \geq p$ , ak sú známe  $A_1, \dots, A_p$  a  $\Gamma_y(p-1), \dots, \Gamma_y(0)$ .

Počiatkové matice autokovariancie pre  $|h| < p$  možno určiť pomocou modelu  $VAR(1)$ , ktorý zodpovedá (69)

$$Y_t - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}(Y_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + E_t, \quad (74)$$

kde  $Y_t, \mathbf{A}, E_t$  majú tvar ako v prípade (9) a  $\boldsymbol{\mu} = (\mu', \dots, \mu')' = \mathbb{E}[Y_t]$ . Tak ako pri  $VAR(1)$  ďalej dostávame

$$\Gamma_Y(0) = \mathbf{A}\Gamma_Y(0)\mathbf{A}' + \Sigma_E, \quad (75)$$



kde  $\Sigma_E = \mathbb{E}[E_t E_t']$  a

$$\begin{aligned}\Gamma_Y(0) &= \mathbb{E} \left( \begin{bmatrix} y_t - \mu \\ \vdots \\ y_{t-p+1} - \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_t - \mu)' & \cdots & (y_{t-p+1} - \mu)' \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \Gamma_y(0) & \Gamma_y(1) & \cdots & \Gamma_y(p-1) \\ \Gamma_y(-1) & \Gamma_y(0) & \cdots & \Gamma_y(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_y(-p+1) & \Gamma_y(-p+2) & \cdots & \Gamma_y(0) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Teda  $\Gamma_y(h)$ , pre  $h = -p+1, \dots, p-1$ , sa získa pomocou

$$vec(\Gamma_Y(0)) = (I_{(np)^2} - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}))^{-1} vec(\Sigma_E). \quad (76)$$

Následne sa z týchto autokovariančných matíc podľa Whittlea [12] určí opätovne  $\hat{A}, \hat{\Sigma}_\varepsilon$ .

### 3.2.2 Whittleov algoritmus

Zovšeobecnenie Durbinovej metódy na mnohorozmerný prípad označuje Whittleov algoritmus [12]. Uvažujú sa dve autoregresie súčasne. Vzťah vyjadrujúci  $y_t$  z hľadiska jeho bezprostrednej minulosti a vzťah vyjadrujúci  $y_t$  z hľadiska jeho bezprostrednej budúcnosti. Vychádzajúc z Yule-Walkerových rovníc (71) a (73), a zo všeobecného zápisu  $VAR(p)$  modelu (2), ak  $\Gamma_y(k) = \mathbb{E}[y_t y_t']$ , potom vieme analogicky zaviesť

$$\sum_{k=0}^p A_k \Gamma_y(h-k) = 0 \quad \text{pre } (h > q). \quad (77)$$

Ak  $q = 0$ , potom

$$\sum_{k=0}^p A_k \Gamma_y(-k) = \Sigma_\varepsilon. \quad (78)$$

Predpokladajme teraz, že vzhľadom na  $\Gamma_y(k)$  použijeme vzťah (77) pre  $h = q+1, \dots, p+q$  na určenie  $A_k$ . Keďže skutočná schéma nemusí byť rádu  $p$  (alebo žiadneho konečného rádu), budeme označovať výsledné odhady ako  $A_{pk}$ , aby sa zdôraznila závislosť od odhadu  $p$ . Matice  $A_{p1}, \dots, A_{pp}$  sú teda riešenia lineárnej sústavy rovníc

$$\sum_{k=0}^p A_{pk} \Gamma_y(h-k) = 0 \quad (h = q+1, \dots, q+p), \quad (79)$$

kde  $A_{p0} = I$ . Uvažujme súčasne riešenie sústavy rovníc

$$\sum_{k=0}^p \bar{A}_{pk} \Gamma_y(k-h) = 0 \quad (h = -q+1, \dots, -q+p), \quad (80)$$

kde  $\bar{A}_{p0} = I$  a  $\bar{A}_{p1}, \dots, \bar{A}_{pp}$  sú neznáme, ktoré sa majú určiť. Definujeme matice

$$\begin{aligned}\Sigma_{\varepsilon,p} &= \sum_{k=0}^p A_{pk} \Gamma_y(q-k), \\ \Delta_p &= \sum_{k=0}^p A_{pk} \Gamma_y(p+q-k-1), \\ \bar{\Sigma}_{\varepsilon,p} &= \sum_{k=0}^p \bar{A}_{pk} \Gamma_y(q+k), \\ \bar{\Delta}_p &= \sum_{k=0}^p \bar{A}_{pk} \Gamma_y(-p+q-k-1).\end{aligned}$$

Potom platia nasledujúce rekurzcie

$$A_{p+1,k} = A_{pk} + A_{p+1,p+1} \bar{A}_{p,p-k+1}, \quad (81)$$

$$\bar{A}_{p+1,k} = \bar{A}_{pk} + \bar{A}_{p+1,p+1} A_{p,p-k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, p), \quad (82)$$

$$A_{p+1,p+1} = -\frac{\Delta_p}{\bar{\Sigma}_{\varepsilon,p}}, \quad (83)$$

$$\bar{A}_{p+1,p+1} = -\frac{\bar{\Delta}_p}{\Sigma_{\varepsilon,p}}, \quad (84)$$

ktoré zovšeobecňujú Durbinove vzťahy, z ktorých dostávame odhadnutú maticu regresných koeficientov  $\hat{A}$  a odhadnutú kovariančnú maticu rezíduí  $\hat{\Sigma}_{\varepsilon}$ . Tieto odhady určené z autokovariančných matíc následne využívame pri Barnettovom-Sethovom teste na určenie Grangerovej kauzality.

### 3.2.3 Barnettov-Sethov test

Tak ako aj v prípade Waldovho testu z podkapitoly 3.1, aj pri určení kauzality podľa Barnettovho-Sethovho testu budeme vychádzať z myšlienky určenia kauzálneho prepojenia  $y_1 \rightarrow y_2$ , ktoré sme si odvodili v (56) a následne (59). Oba vzťahy si prepíšeme pomocou autokovariančných matíc (ako sme si zadefinovali v 3.2.1) a následne na nich využijeme Whittleov algoritmus (3.2.2), ktorým dostávame odhadnuté matice koeficientov a kovariančné matice. Pre (56) sú nimi  $\hat{A}_{y_2}$  a  $\hat{\Sigma}_{y_2} = \text{cov}(\varepsilon_{2,t})$ , pre (59) sú  $\hat{A}'_{y_2}$  a  $\hat{\Sigma}'_{y_2} = \text{cov}(\varepsilon'_{2,t})$ . Nulová hypotéza je rovnaká ako v (63). Veľkosť Grangerovej kauzality je definovaná ako

$$\mathcal{F}_{y_1 \rightarrow y_2} = \ln \frac{|\Sigma_{\varepsilon'}|}{|\Sigma_{\varepsilon}|}. \quad (85)$$

$\mathcal{F}_{y_1 \rightarrow y_2}$  teda určuje mieru, do akej proces (56) je lepším modelom v porovnaní s redukovaným procesom (59). Testovacia štatistika má tvar

$$P := \exp(\mathcal{F}_{y_1 \rightarrow y_2}) - 1, \quad (86)$$

pričom platí

$$P \rightarrow F(d_1, d_2), \quad (87)$$

kde  $d_1 = p$  a  $d_2 = T - 4p - 2$ .

## 4 Simulačná štúdia

V prvej časti simulačnej štúdie skúmame Portmanteauov test významnosti autokorelácií rezíduí. Uvažujeme rezíduá, generované štyrmi rôznymi modelmi, v práci označenými ako **Model I, II, III a IV**. Pre každý model je sila Portmanteauovho testu vyšetrovaná v závislosti od dĺžky rezíduí. Pre potreby štúdie sme naprogramovali Portmanteauov test, ktorý bol spúšťaný prostredníctvom softvéru *MATLAB*.

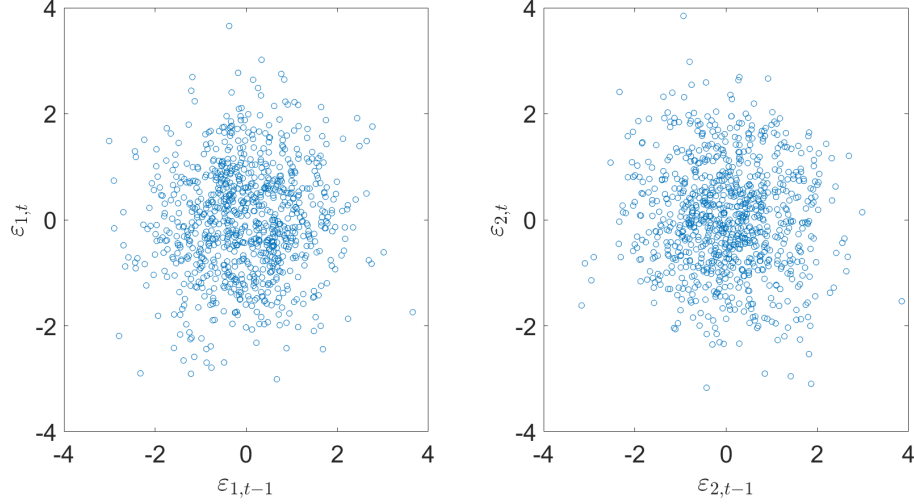
V druhej časti simulačnej štúdie porovnávame Waldov test a Barnettov-Sethov test na Grangeru kauzalitu. Uvažujeme údaje generované *VAR* modelom s rôznymi rádmi, pričom predikčné chyby boli generované **Modelmi I, II, III a IV**. Okrem toho sme porovnali dva možné prístupy na určenie odhadov matíc koeficientov a kovariančných matíc. Taktiež sme porovnali úspešnosť troch uvažovaných kritérií na odhad rádu  $p$  pre *VAR*. Výpočty boli vykonané prostredníctvom softvéru *MATLAB*, v ktorom sme využili aj časť funkcií z nástroja MVGC [1].

### 4.1 Portmanteauov test

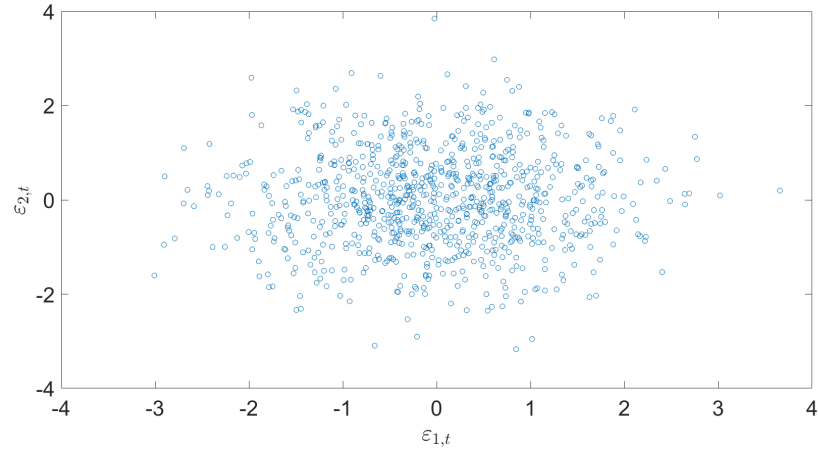
Portmanteauovým testom skúmame rezíduá generované štyrmi rôznymi modelmi, ktoré si v tejto podkapitole zadefinujeme. Pre každý model sú generované rezíduá dĺžky  $T = \{100, 300, 500, 700, 900\}$ , pričom rezíduá o dĺžke  $T$  pri zvolenej variancii boli vygenerované 1000-krát. V modeloch, v ktorých budeme generovať rezíduá nezávisle očakávame vyššie percento nezamietnutia nulovej hypotézy o nekorelovanosti rezíduí z (25) v porovnaní s lineárne závislými rezíduami.

**Model I** Rezíduá sú generované z dvojrozmerného, normálneho rozdelenia s nulovou strednou hodnotou  $\mu = (0, 0)'$  a kovariančnou maticou

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}, \sigma_\varepsilon^2 = \{0.5, 1, 1.5\}. \quad (88)$$



**Obr. 1:** Nezávislosť  $\varepsilon_{1,t}$  na  $\varepsilon_{1,t-1}$  a  $\varepsilon_{2,t}$  na  $\varepsilon_{2,t-1}$  pre **Model I**,  $T = 900$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ .



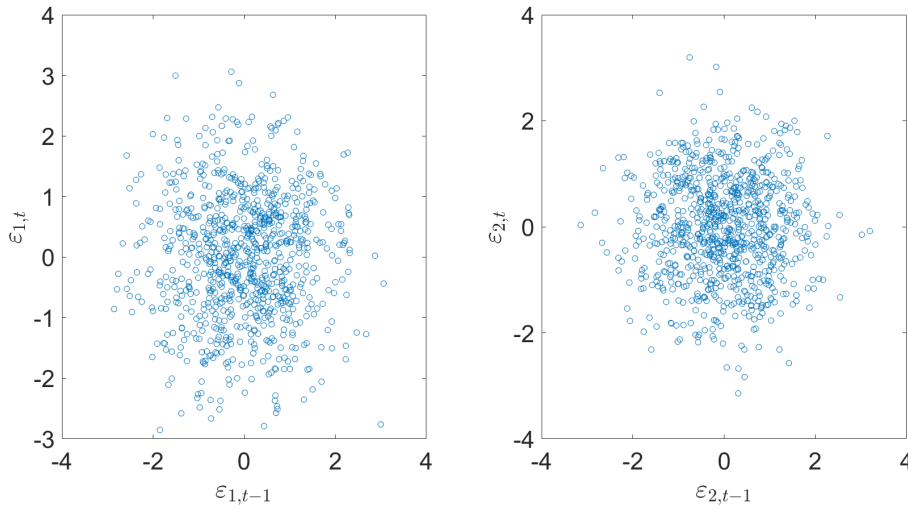
**Obr. 2:** Nezávislosť  $\varepsilon_{2,t}$  na  $\varepsilon_{1,t}$  pre **Model I**,  $T = 900$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ .

Na **Obr.2** vidíme, že rezíduá  $\varepsilon_{1,t}$  a  $\varepsilon_{2,t}$  sú realizované symetricky v okolí bodu  $[0, 0]$ . Kovariančná matica s nulovými mimodiagonálnymi prvkami nám zaručuje, že sú spomínané rezíduá medzi sebou nekorelované. Taktiež pozorujeme, že v **Obr.1** nie je žiaden vzor závislosti medzi  $\varepsilon_{1,t}$  na  $\varepsilon_{1,t-1}$  a  $\varepsilon_{2,t}$  na  $\varepsilon_{2,t-1}$ .

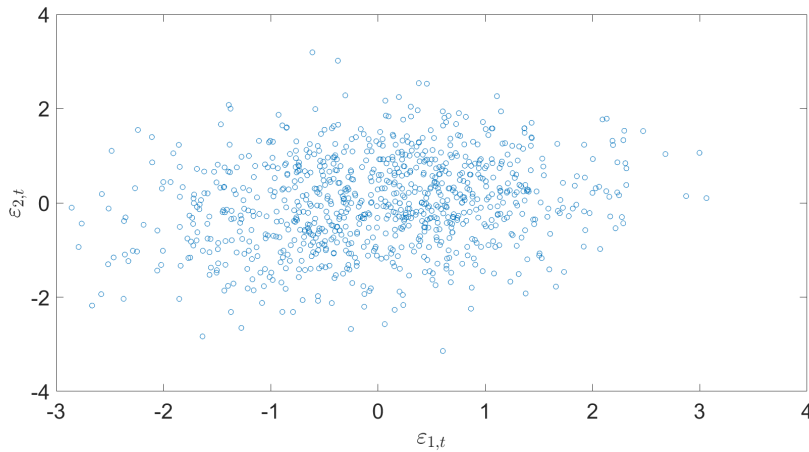
**Model II** Rezíduá sú generované z dvojrozmerného, normálneho rozdelenia s nulovou strednou hodnotou  $\mu = (0, 0)'$  a kovariančnou maticou

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0.2 \\ 0.2 & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}, \sigma_\varepsilon^2 = \{0.5, 1, 1.5\}. \quad (89)$$

Rozdiel oproti **Modelu I** nastáva v mimodiagonálnych prvkoch kovariančnej matice  $\Sigma_\varepsilon$ , ktoré už nie sú nulové.



**Obr. 3:** Nezávislosť  $\varepsilon_{1,t}$  na  $\varepsilon_{1,t-1}$  a  $\varepsilon_{2,t}$  na  $\varepsilon_{2,t-1}$  pre **Model II**,  $T = 900$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ .



**Obr. 4:** Závislosť  $\varepsilon_{2,t}$  na  $\varepsilon_{1,t}$  pre **Model II**,  $T = 900$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ .

Na **Obr.4** vidíme, že rezíduá sú realizované symetricky v okolí bodu  $[0, 0]$ . Zmenou nenulových mimodiagonálnych prvkov kovariančnej matice  $\Sigma_\varepsilon$  pozorujeme závislosť medzi

rezíduami  $\varepsilon_{1,t}$  a  $\varepsilon_{2,t}$ . Z **Obr.3** pozorujeme, že neexistuje vzor závislosti  $\varepsilon_{1,t}$  na  $\varepsilon_{1,t-1}$  a  $\varepsilon_{2,t}$  na  $\varepsilon_{2,t-1}$ .

**Model III** Rezíduá sú generované pomocou lineárne závislých funkcií tak, aby mali nulovú strednú hodnotu  $\mu = (0, 0)'$  a kovariančnú maticu

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}, \sigma_\varepsilon^2 = \{0.5, 1, 1.5\}. \quad (90)$$

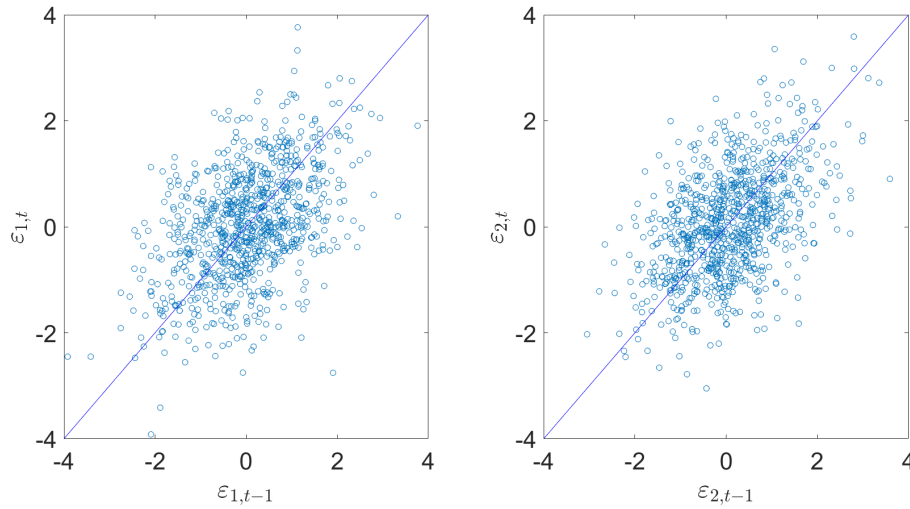
Uvažovali sme pomocný vektor  $X$ , ktorý sme generovali z dvojrozmerného, normálneho rozdelenia s nulovou strednou hodnotou  $\mu = (0, 0)'$  a kovariančnou maticou

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_X^2 \end{bmatrix}, \sigma_X^2 = \sigma_\varepsilon^2 - 0.4. \quad (91)$$

Lineárne závislé rezíduá potom generujeme

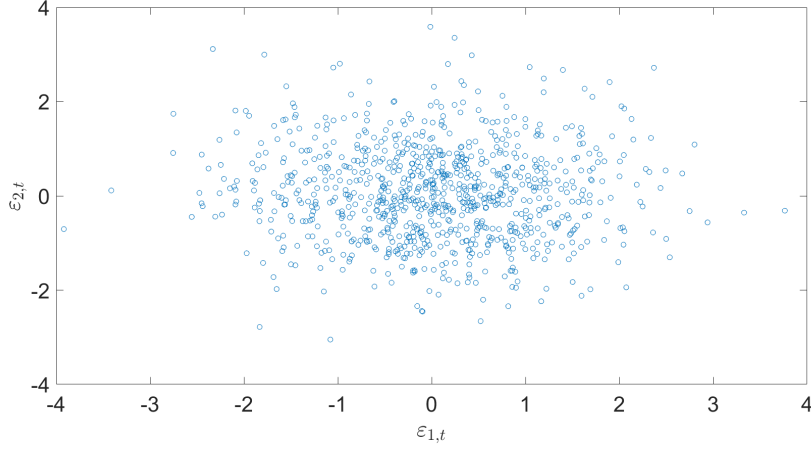
$$\varepsilon_{i,t} = \theta X_{i,t-1} + X_{i,t}, \quad i = 1, 2, \quad (92)$$

kde konštanta  $\theta$  je riešením rovnice  $Var(\varepsilon_{i,t}) = \theta^2 \sigma_X^2 + \sigma_X^2 = \sigma_\varepsilon^2, i = 1, 2$ . Pri určení vzťahu sme vychádzali zo vzorca na výpočet variancie súčtu dvoch nezávislých, náhodných premenných.



**Obr. 5:** Závislosť  $\varepsilon_{1,t}$  na  $\varepsilon_{1,t-1}$  a  $\varepsilon_{2,t}$  na  $\varepsilon_{2,t-1}$  pre **Model III**,  $T = 900$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ .

Vidíme, že rezíduá  $\varepsilon_{1,t}$  a  $\varepsilon_{2,t}$  sú opäť realizované v okolí bodu  $[0, 0]$ , avšak v porovnaní s predošlými modelmi pozorujeme lineárny vzor v závislosti  $\varepsilon_{1,t}$  na  $\varepsilon_{1,t-1}$  a  $\varepsilon_{2,t}$  na  $\varepsilon_{2,t-1}$ . Vzájomné vzťahy medzi vektormi rezíduí  $\varepsilon_{2,t}$  a  $\varepsilon_{1,t}$  sú vygenerované nezávisle.

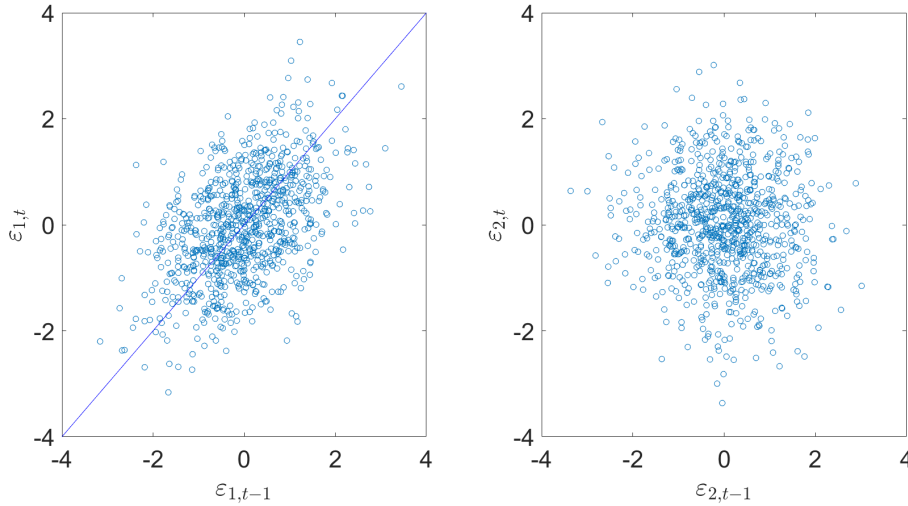


**Obr. 6:** Nezávislosť  $\varepsilon_{2,t}$  na  $\varepsilon_{1,t}$  pre **Model III**,  $T = 900$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ .

**Model IV** Rezíduá sú generované tak, aby mali nulovú strednú hodnotu  $\mu = (0, 0)'$  a kovariančnú maticu

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}, \sigma_\varepsilon^2 = \{0.5, 1, 1.5\}, \quad (93)$$

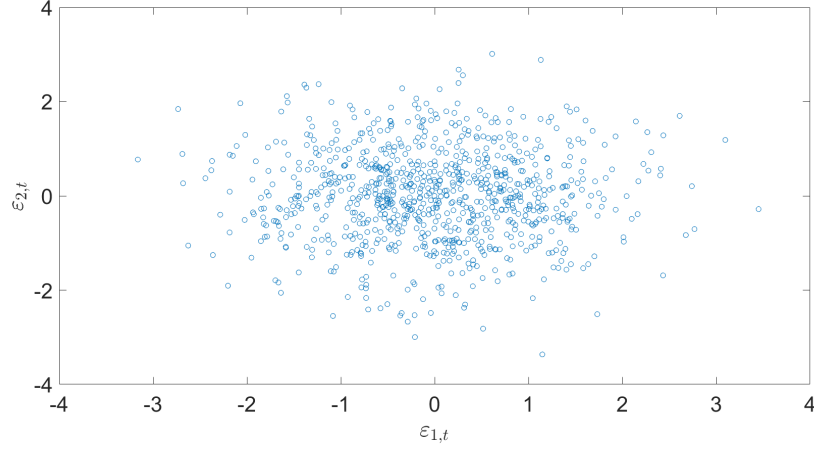
Vektor rezíduí  $\varepsilon_{1,t}$  je generovaný pomocou (92), teda požadujeme, aby boli  $\varepsilon_{1,t}$  na  $\varepsilon_{1,t-1}$  lineárne závislé, zatiaľ čo druhý vektor rezíduí  $\varepsilon_{2,t}$  je generovaný postupom ako v **Modeli I**.



**Obr. 7:** Závislosť  $\varepsilon_{1,t}$  na  $\varepsilon_{1,t-1}$  a nezávislosť  $\varepsilon_{2,t}$  na  $\varepsilon_{2,t-1}$  pre **Model IV**,  $T = 900$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ .

Z **Obr. 7** vidíme, že rezíduá  $\varepsilon_{1,t}$  a  $\varepsilon_{2,t}$  sú opäť realizované v okolí bodu  $[0, 0]$ , avšak pre vektor rezíduí  $\varepsilon_{1,t}$  na  $\varepsilon_{1,t-1}$  pozorujeme lineárny vzor v závislosti a pri  $\varepsilon_{2,t}$  na  $\varepsilon_{2,t-1}$





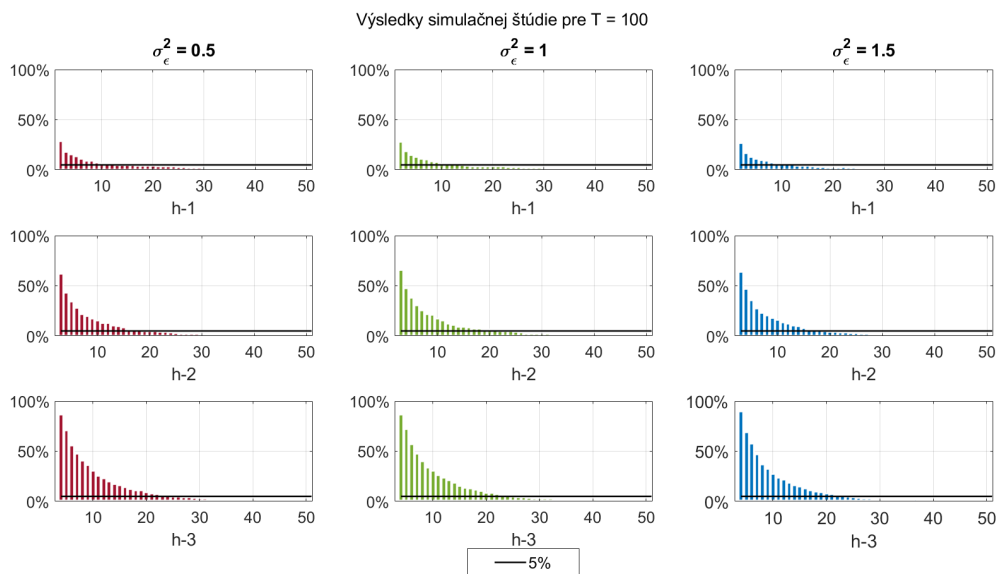
**Obr. 8:** Nezávislosť  $\varepsilon_{2,t}$  na  $\varepsilon_{1,t}$  pre **Model IV**,  $T = 900$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ .

pozorujeme nezávislosť. Vektory rezíduí  $\varepsilon_{2,t}$  a  $\varepsilon_{1,t}$  sú vygenerované nezávisle.

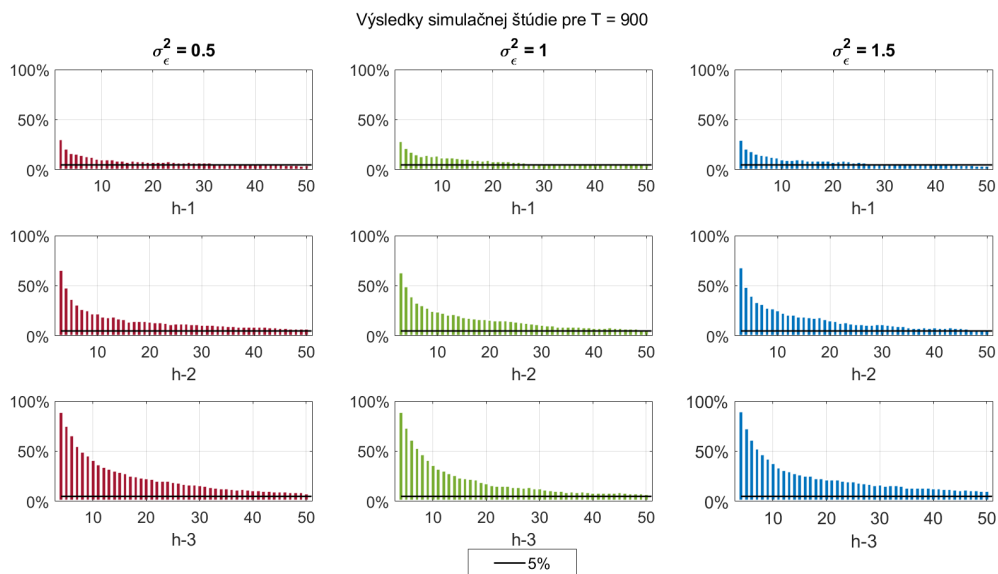
#### 4.1.1 Sila Portmanteauovho testu

Testovacia štatistika Portmanteauovho testu z (30) má  $\chi^2$ -rozdelenie. V práci sme testovaciu štatistiku, spočítanú pre vygenerované rezíduá, porovnali s kritickou hodnotou  $\alpha = 0.05$   $\chi^2$ -rozdelenia s  $n^2(h - p)$  stupňami voľnosti, kde  $n = 2$ ,  $p = \{1, 2, 3\}$ ,  $h = \{p + 1, \dots, 50\}$ . Pre každú hodnotu  $h - p$  sme spočítali percento zamietnutia nulovej hypotézy z 1000 simulácií. Získané výsledky pre  $T = \{100, 900\}$  sú graficky znázornené v nasledujúcich obrázkoch. Pre ostatné hodnoty  $T$  sú výsledky uvedené v Prílohe A.

**Model I** Z výsledkov **Obr. 9** a **Obr. 10** vyplýva, že variancia nemá vplyv na silu Portmanteauovho testu, zatiaľ čo  $p$  a  $T$  áno. Percento zamietnutia nulovej hypotézy Portmanteauovho testu je vyššie pre rezíduá generovanej dĺžky  $T = 900$  aj vo vysokých oneskoreniach v porovnaní s  $T = 100$ . Vo všetkých prípadoch vidíme rovnaký, klesajúci a exponenciálny charakter, teda možno predpokladať, že ak by sme navýšili počet oneskorení pri vyšších  $T$ , tak by zamietnutie nulovej hypotézy mohlo nadobúdať hladinu nižšiu ako 5%.

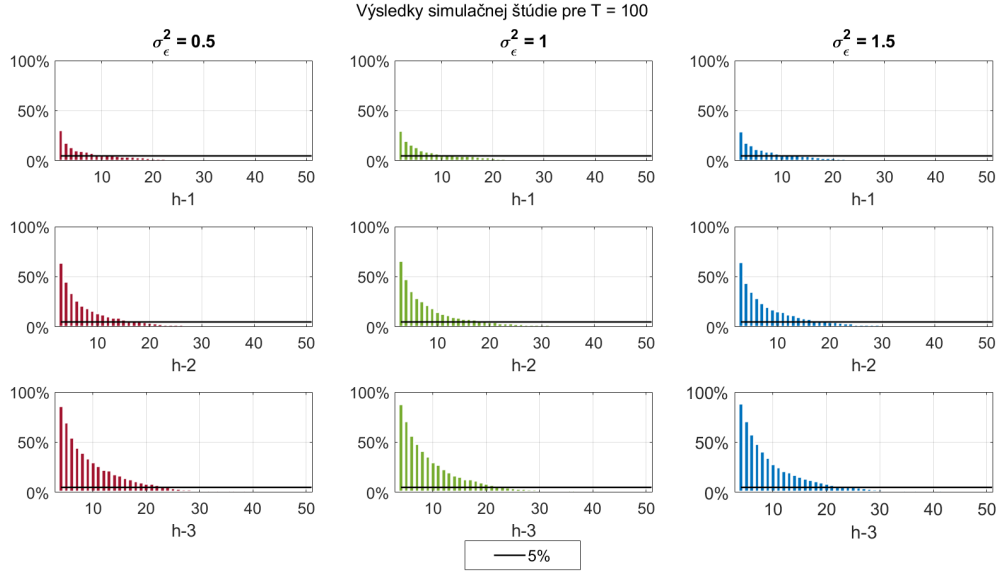


**Obr. 9:** Sila Portmanteauovho testu pre rezíduá generované **Modelom I** pre  $T = 100$ .

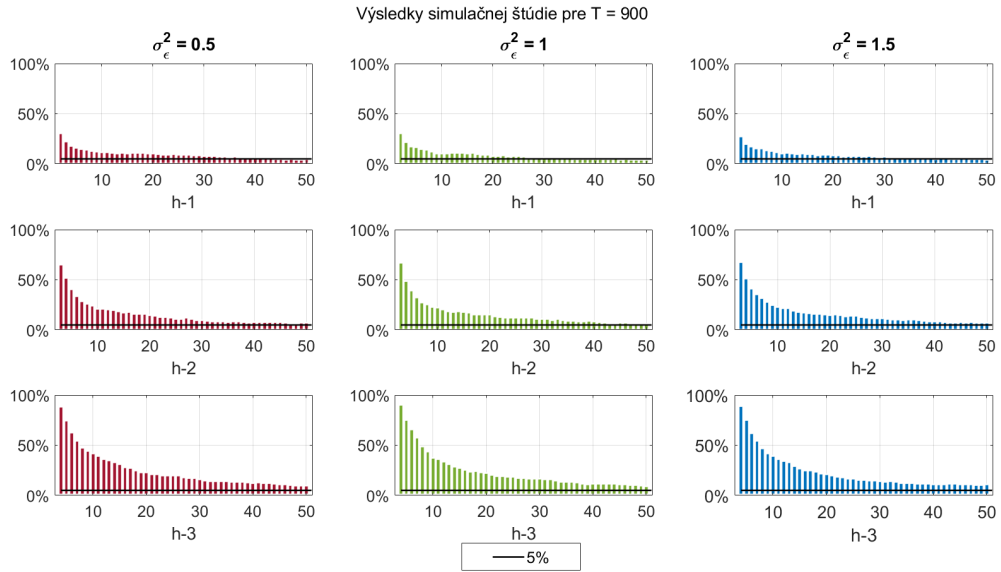


**Obr. 10:** Sila Portmanteauovho testu pre rezíduá generované **Modelom I** pre  $T = 900$ .

**Model II** Nepozorujeme výrazný rozdiel vo výsledkoch **Obr. 11** a **Obr. 12** v porovnaní s výsledkami pre **Model I**. Nenulovosť mimodiagonálnych prvkov kovariančnej matice rezíduí  $\Sigma_\epsilon$  výrazne neovplyvnila výsledky Portmanteauovho testu.

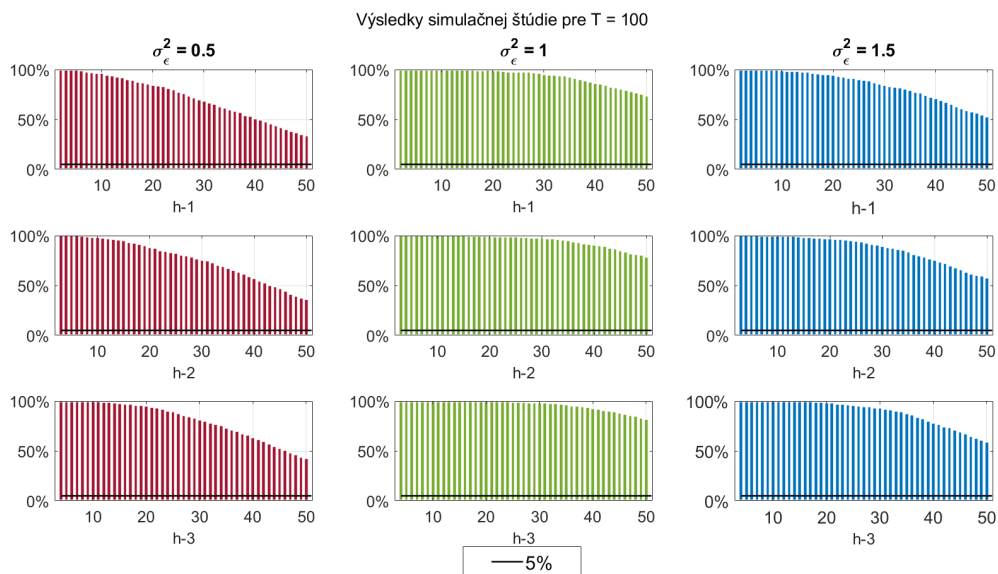


**Obr. 11:** Sila Portmanteauovho testu pre rezíduá generované **Modelom II** pre  $T = 100$ .

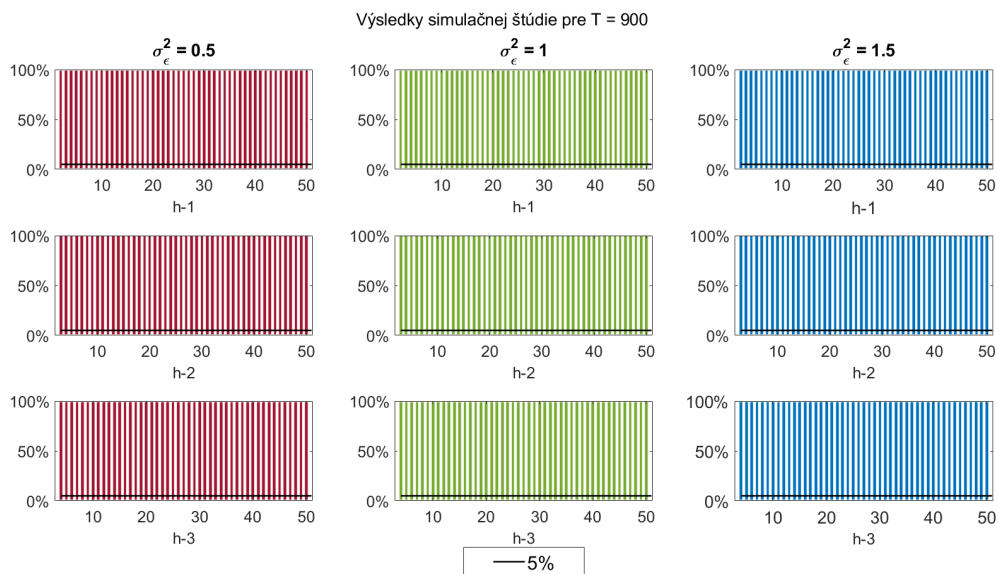


**Obr. 12:** Sila Portmanteauovho testu pre rezíduá generované **Modelom II** pre  $T = 900$ .

**Model III** Portmanteauov test mal pri niektorých lineárne závislých rezíduách problém pri testovaní  $T = 100$ . Pri vyšších oneskoreniach  $h$  nedokázal vo všetkých testovaniach zamietnuť nulovú hypotézu, **Obr. 13**. Pri rezíduách s  $T = \{300, \dots, 900\}$  vo všetkých oneskoreniach zamietol nulovú hypotézu správne a teda odhalil korelácie rezíduí.

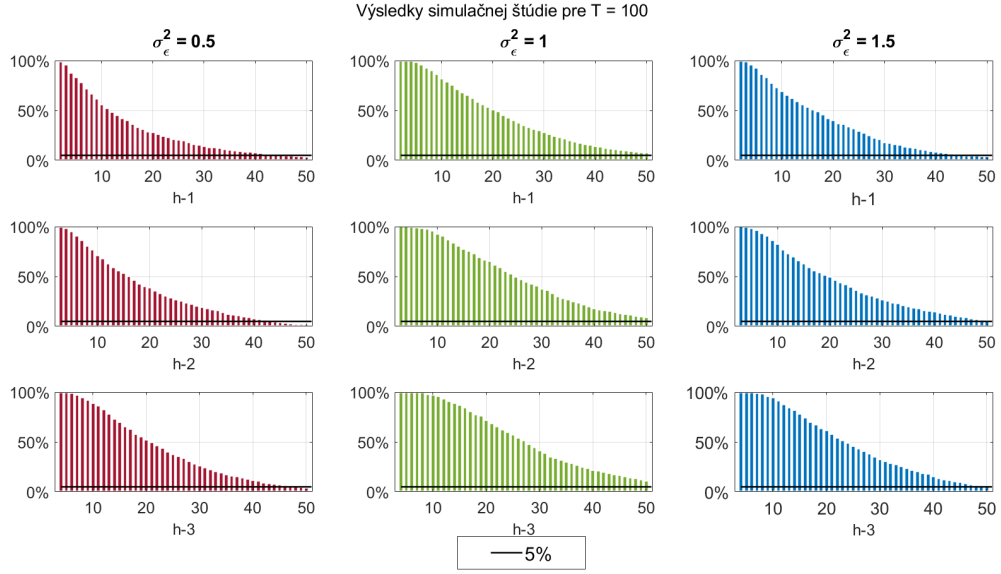


**Obr. 13:** Sila Portmanteauovho testu pre rezíduá generované **Modelom III** pre  $T = 100$ .

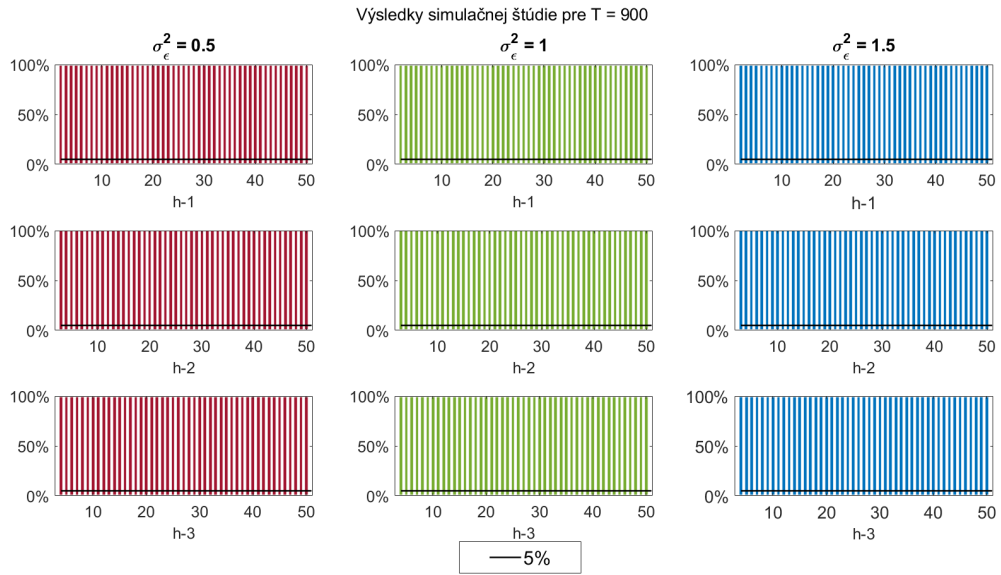


**Obr. 14:** Sila Portmanteauovho testu pre rezíduá generované **Modelom III** pre  $T = 900$ .

**Model IV** V poslednom modeli je výsledok Portmanteauovho testu ovplyvnený nezávislosťou generovania vektora rezíduí  $\varepsilon_{2,t}$ . Ovplyvnilo to najmä výsledky rezíduí generovaných  $T = \{100, 300\}$ , znázornené v **Obr. 15** a **Obr. A.41**. V niektorých testovaniach, a to hlavne pri vyšších oneskoreniach, Portmanteauov test nezamietol nulovú hypotézu. Pri rezíduách dĺžky  $T = \{500, 700, 900\}$  odhalil vo všetkých testovaniach korelácie rezíduí.



Obr. 15: Sila Portmanteauovho testu pre rezíduá generované **Modelom IV** pre  $T = 100$ .



Obr. 16: Sila Portmanteauovho testu pre rezíduá generované **Modelom IV** pre  $T = 900$ .

## 4.2 Grangerov test kauzality

Simulačná štúdia Grangerovho testu kauzality je uskutočnená na časových radoch generovaných  $VAR(p)$  modelom

$$y_{1,t} = 0.5y_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t}, \quad (94)$$

$$y_{2,t} = 0.5y_{2,t-1} + cy_{1,t-p} + \varepsilon_{2,t}, \quad (95)$$

kde  $p$  je určená hodnota rádu z množiny  $p = \{1, 2, \dots, 5\}$ , a  $c$  je konštanta z množiny  $c = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ . Maticový zápis pre  $p = 1$  je

$$\begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}^1 & A_{1,2}^1 \\ A_{2,1}^1 & A_{2,2}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}, \quad (96)$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1}^1 & A_{1,2}^1 \\ A_{2,1}^1 & A_{2,2}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ c & 0.5 \end{bmatrix}. \quad (97)$$

Pre zvyšné  $p$  platí

$$\begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}^1 & A_{1,2}^1 \\ A_{2,1}^1 & A_{2,2}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1,1}^p & A_{1,2}^p \\ A_{2,1}^p & A_{2,2}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-p} \\ y_{2,t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}, \quad (98)$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1}^1 & A_{1,2}^1 \\ A_{2,1}^1 & A_{2,2}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1,1}^p & A_{1,2}^p \\ A_{2,1}^p & A_{2,2}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}. \quad (99)$$

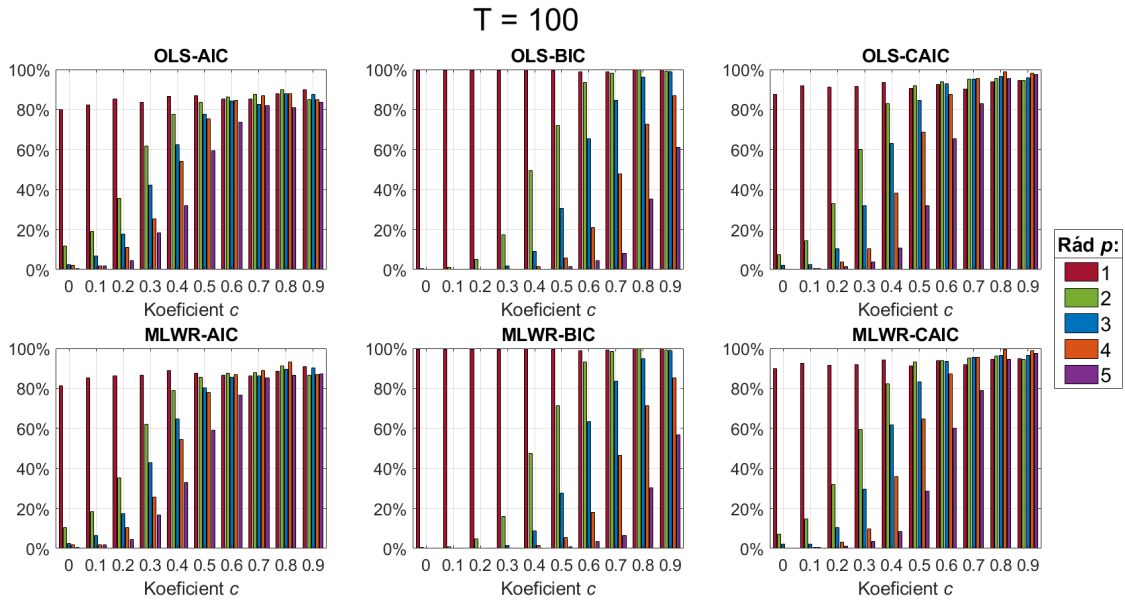
Predikčné chyby a ich kovariančná matica je určená v závislosti od použitého modelu, analogicky ako v podkapitole 4.1.

Na vygenerovanie dát časových radov *VAR* sme využívali nainštalované funkcie z nástroja MVGC. V simulačnej štúdií na Grangerov test kauzality generujeme vektory rezíduí rovnakým spôsobom ako v časti 4.1 a porovnávame výkonnosť testov na Grangerovu kauzalitu na všetkých štyroch modeloch. Naše výpočty sme realizovali podľa postupu z diagramu **Obr. 17**. Každú kombináciu parametrov  $T, c, p, \sigma_\varepsilon^2$ , čo je celkovo 750 možností, sme vygenerovali 100-krát pre každý model. Pri jednotlivých modeloch uvedieme najprv výsledky porovnania informačných kritérií na odhad rádu modelu. Využívali sme k tomu viacrozmernú metódu najmenších štvorcov (OLS) a Morfov (LWR) rekurzívny algoritmus (MLWR). Následne predstavíme výsledky z testovania Grangerovej kauzality, teda Waldovho testu (W) a Barnettovho-Sethovho testu (BS).

Pri odhade metódou OLS, zabudovanou v nástroji MVGC, nebola v niektorých odhadnutých maticiach koeficientov  $\hat{A}$  splnená podmienka stability. V každom z **Modelov I, II, III a IV** bolo v priemere 0.025% takýchto prípadov z celkovej simulácie. Dáta sme pre tieto prípady opätovne pregenerovali. Dokázali sme tak ďalej dopočítať kauzálne prepojenia. Samotní autori nástroja MVGC nás v priloženej dokumentácii s touto skutočnosťou vopred oboznámili.



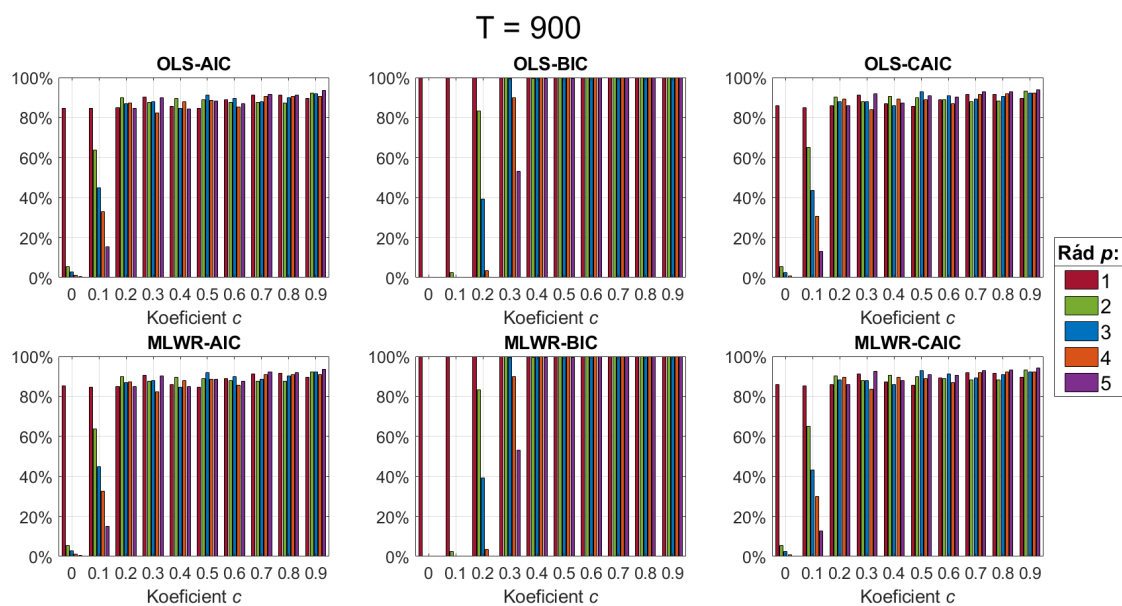
**Model I** Porovnali sme vplyv konštanty  $c$ , variance  $\sigma_\varepsilon^2$  a dĺžky  $T$  na výsledný odhad parametrov  $\hat{A}, \hat{\Sigma}_\varepsilon, \hat{p}$ . Všetky odhadnuté matice  $\hat{A}$  spĺňajú podmienku stability zadefinovanú v podkapitole 1.2. Odhadnuté rezíduá metódou OLS sme testovali podľa podkapitoly 1.4. Na ich testovanie sme použili Portmanteauov test s kritickou hodnotou  $\alpha = 0.05$ ,  $\chi^2$ -rozdelenia s  $n^2(h - \hat{p})$  stupňami voľnosti, kde  $n = 2$ ,  $\hat{p} = \{1, 2, \dots, 20\}$ ,  $h = \{\hat{p} + 1, \dots, 50\}$ . Výsledky Portmanteauovho testu vyšli podobne ako v časti 4.1.1 pre **Model I**. Pri odhade parametrov a testovaní kauzality sa ukázalo, že  $\sigma_\varepsilon^2$  nemala výrazný vplyv, preto nasledujúce výsledky uvádzame sumárne pre všetky variance  $\sigma_\varepsilon^2 = \{0.5, 1, 1.5\}$ .



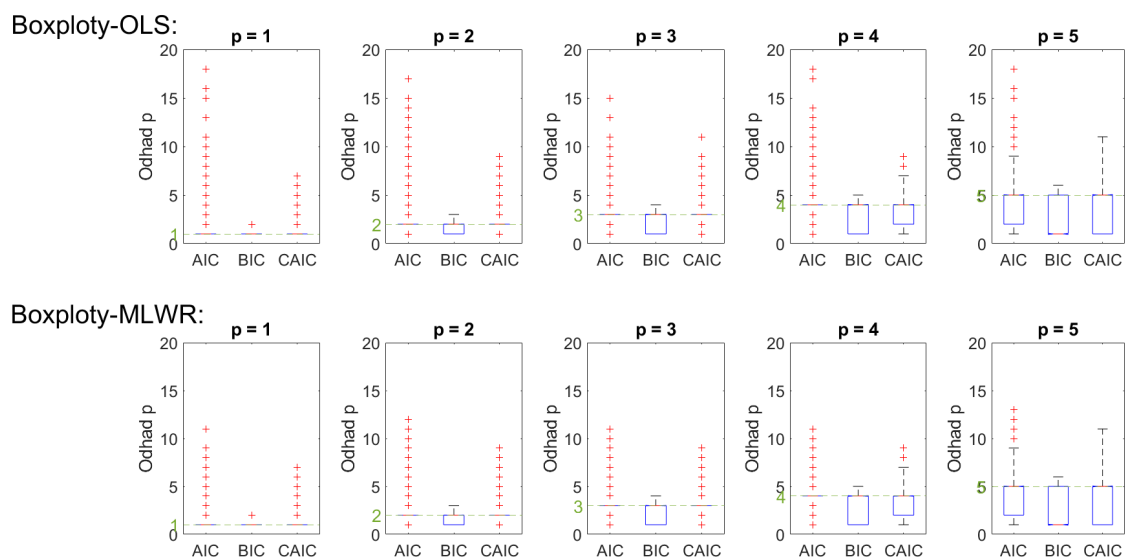
**Obr. 18:** Percentuálna úspešnosť odhadu rádu  $p$  pre **Model I**,  $T = 100$ .

Z výsledkov uvedených na **Obr. 18**, **Obr. 19** vyplýva, že pre  $T = 900$  s narastajúcou konštantou  $c$  sa zlepšuje presnosť odhadu rádu pri všetkých troch uvažovaných informačných kritériách, nezávisle od metódy OLS alebo MLWR. Najpresnejší odhad pre  $T = 900$  a koeficienty  $c \geq 0.4$  bol získaný Bayesovým informačným kritériom a to pre všetky rády. V mnohých prípadoch pozorujeme veľmi vysokú správnosť určenia odhadu  $p$ . Pre  $T = 100$  má Bayesovo informačné kritérium pri vyšších odhadoch rádu menšiu presnosť. Odhady určené pomocou Akaikeho informačného kritéria s korekciou vykazujú mierne lepšie výsledky v porovnaní s kritériom bez korekcie. Ani pri jednom z nich nepozorujeme vyššiu úspešnosť správneho odhadu pre  $T = 900$ , ako pri Bayesovom informačnom kritériu.





**Obr. 19:** Percentuálna úspešnosť odhadu rádu  $p$  pre Model I,  $T = 900$ .



**Obr. 20:** Boxploty pre odhady rádu  $p$  podľa informačných kritérií pre Model I.

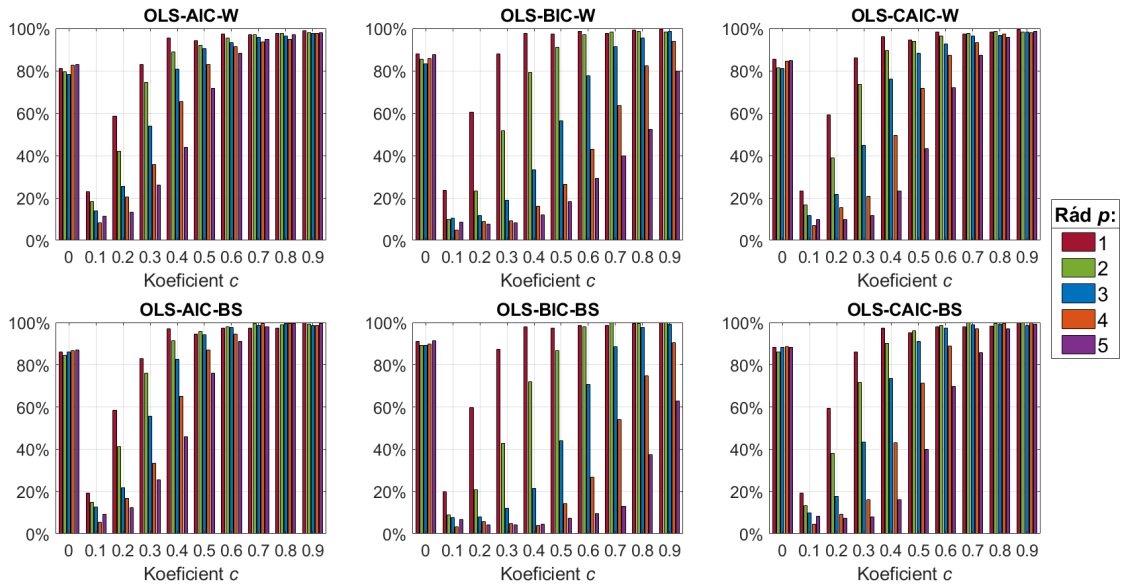
Boxploty v **Obr. 20** predstavujú súhrnné výsledky pre všetky  $T, c, \sigma_\varepsilon^2$  na určenie rozmedzia chybného odhadnutia rádoov pri jednotlivých informačných kritériách. Z boxplotov sa potvrdilo, že Akaikeho informačné kritérium výrazne nadhodnocuje odhady rádoov. Po pridání korekcie sa odhady zlepšili a znížil sa počet vysokých outlierov. Bayesovo informačné kritérium má minimálny počet outlierov ale podhodnocuje odhady. Z **Tabuľky 1** pozorujeme, že výsledky pre odhady  $p$  metódou MLWR sú čiastočne lepšie. Najlepšia voľba informačného kritéria pri  $p = 1$  je BIC, pri  $p = 2, 3, 4$  CAIC a pri  $p = 5$  AIC. So zvyšujúcim sa  $p$ , klesá percento správneho odhadu rádu.

|       |             | OLS    |        |        | MLWR   |        |        |
|-------|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p$ : | Info.krit.: | $< p$  | $= p$  | $> p$  | $< p$  | $= p$  | $> p$  |
| 1     | AIC         | 0.00%  | 87.71% | 12.29% | 0.00%  | 88.21% | 11.79% |
| 1     | BIC         | 0.00%  | 99.91% | 0.09%  | 0.00%  | 99.93% | 0.07%  |
| 1     | CAIC        | 0.00%  | 89.96% | 10.04% | 0.00%  | 90.24% | 9.76%  |
| 2     | AIC         | 15.80% | 73.31% | 10.89% | 16.06% | 73.58% | 10.36% |
| 2     | BIC         | 29.85% | 70.10% | 0.05%  | 29.98% | 69.97% | 0.05%  |
| 2     | CAIC        | 16.95% | 74.79% | 8.26%  | 17.13% | 74.92% | 7.95%  |
| 3     | AIC         | 20.23% | 69.43% | 10.34% | 20.40% | 69.97% | 9.63%  |
| 3     | BIC         | 37.57% | 62.41% | 0.02%  | 37.74% | 62.25% | 0.01%  |
| 3     | CAIC        | 21.85% | 71.05% | 7.10%  | 22.06% | 71.14% | 6.80%  |
| 4     | AIC         | 23.47% | 66.97% | 9.56%  | 23.79% | 67.43% | 8.78%  |
| 4     | BIC         | 45.29% | 54.70% | 0.01%  | 45.49% | 54.50% | 0.01%  |
| 4     | CAIC        | 26.08% | 67.93% | 5.99%  | 26.34% | 67.95% | 5.71%  |
| 5     | AIC         | 26.38% | 63.97% | 9.65%  | 26.84% | 64.56% | 8.60%  |
| 5     | BIC         | 52.12% | 47.85% | 0.03%  | 52.40% | 47.58% | 0.02%  |
| 5     | CAIC        | 30.16% | 64.47% | 5.37%  | 30.66% | 64.21% | 5.13%  |

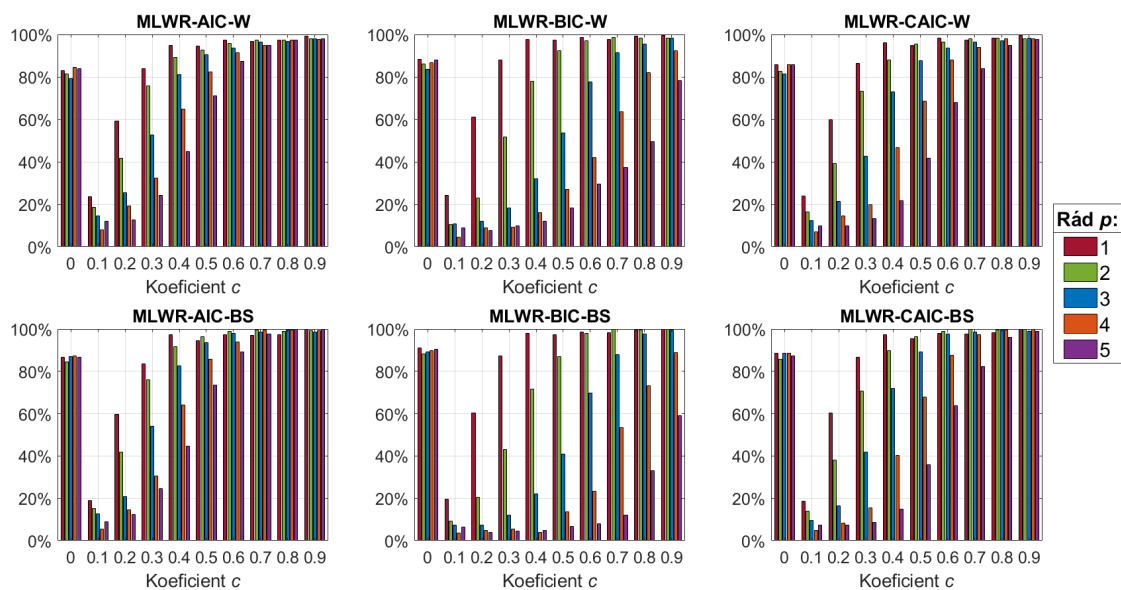
**Tabuľka 1:** Tabuľka porovnania percentuálneho počtu odhadov pre **Model I**.

Ďalšou časťou simulačnej štúdie bolo pomocou odhadnutých  $VAR$  parametrov (odhadnuté metódami OLS a MLWR) testovať kauzalitu prostredníctvom Waldovho testu (W) a Barnettovho-Sethovho testu (BS).

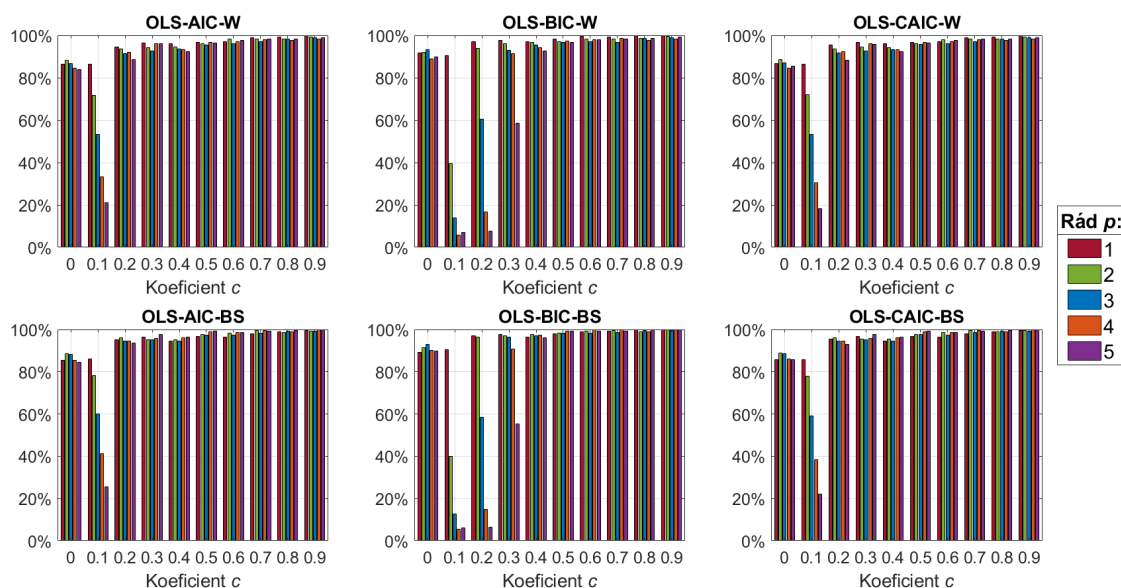
Na základe výsledkov z **Tabuliek 2 a 3** možno konštatovať, že ani jedna z metód na odhadovanie parametrov výrazne neovplyvnila výsledné učenie kauzality. Z výsledkov testovania Grangerovej kauzality môžeme povedať, že na dátach je Waldov test v prípade  $T = 100$ , so zvyšujúcim sa  $p$  a  $c$  lepším pre odhady BIC. Pri odhadoch AIC a CAIC pozorujeme, že Waldov test je približne v polovici prípadov lepšou voľbou. Na druhej strane Barnettov-Sethov test považujeme za lepší pri väčších dĺžkach  $T$ . Pri odhadoch AIC a CAIC je Barnettov-Sethov test lepší pre  $p \geq 2$ , a pri BIC, ak je koeficient  $c \geq 0.4$  a  $p \geq 2$ . Výsledky metódou OLS z **Obr. 21 a Obr. 23** a zároveň výsledky metódou MLWR **Obr. 22 a Obr. 24** zobrazujú percentuálnu úspešnosť správnej detekcie kauzality  $y_1 \rightarrow y_2$  a zároveň správneho nezamietnutia hypotézy o  $y_2 \nrightarrow y_1$  pre koeficienty  $c = \{0.1, \dots, 0.9\}$ . Ak je koeficient  $c = 0$ , tak vo  $VAR(p)$  modeli nepredpokladáme kauzalitu, teda v grafických výsledkoch uvádzame percentuálnu úspešnosť správnej detekcie  $y_1 \nrightarrow y_2$  a zároveň  $y_2 \nrightarrow y_1$ . Pozorujeme, že oba testy určili lepšie výsledky pre  $T = 900$  pri vysokých koeficientoch  $c$ , kde detegovanie správneho určenia kauzálného prepojenia je vo väčšine prípadov určené s vysokou úspešnosťou.



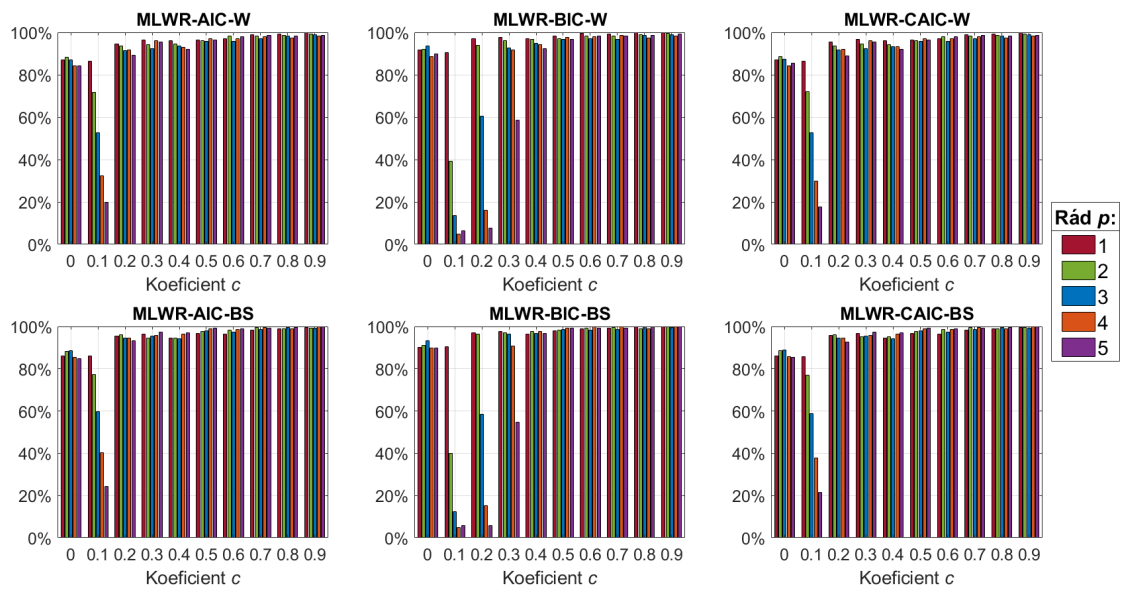
**Obr. 21:** Percentuálna úspešnosť určenia kauzálného prepojenia medzi  $y_1$ ,  $y_2$  radmi W a BS testom pre **Model I**, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS a  $T = 100$ .



**Obr. 22:** Percentuálna úspešnosť určenia kauzálneho prepojenia medzi  $y_1$ ,  $y_2$  radmi W a BS testom pre **Model I**, ak boli odhadnuté parametre metódou MLWR a  $T = 100$ .



**Obr. 23:** Percentuálna úspešnosť určenia kauzálneho prepojenia medzi  $y_1$ ,  $y_2$  radmi W a BS testom pre **Model I**, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS a  $T = 900$ .



**Obr. 24:** Percentuálna úspešnosť určenia kauzálneho prepojenia medzi  $y_1$ ,  $y_2$  radmi W a BS testom pre **Model I**, ak boli odhadnuté parametre metódou MLWR a  $T = 900$ .

| $T = 100$ | OLS-AIC  |      |      |      |      | OLS-BIC  |      |       |       |       | OLS-CAIC  |      |      |      |      |
|-----------|----------|------|------|------|------|----------|------|-------|-------|-------|-----------|------|------|------|------|
| $c/p$     | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1        | 2    | 3     | 4     | 5     | 1         | 2    | 3    | 4    | 5    |
| 0         | 5.0      | 4.7  | 7.7  | 4.0  | 4.0  | 3.0      | 4.0  | 6.0   | 4.0   | 3.7   | 3.0       | 4.7  | 7.3  | 4.0  | 3.3  |
| 0.1       | -3.7     | -3.3 | -1.3 | -3.0 | -2.0 | -3.7     | -1.0 | -2.7  | -1.7  | -2.0  | -4.0      | -3.3 | -1.7 | -2.3 | -1.7 |
| 0.2       | -0.3     | -0.7 | -3.7 | -3.7 | -1.0 | -0.7     | -2.3 | -3.7  | -3.3  | -3.3  | 0.0       | -1.0 | -4.0 | -6.0 | -2.7 |
| 0.3       | 0.0      | 1.3  | 1.7  | -2.3 | -0.3 | -0.7     | -9.0 | -7.0  | -4.3  | -4.0  | 0.0       | -2.0 | -1.7 | -4.7 | -3.7 |
| 0.4       | 1.7      | 2.3  | 2.0  | -0.3 | 2.0  | 0.3      | -7.3 | -12.0 | -12.0 | -7.3  | 1.3       | 0.3  | -2.3 | -6.7 | -7.3 |
| 0.5       | 0.3      | 3.7  | 4.0  | 4.0  | 4.3  | 0.0      | -4.3 | -12.3 | -12.0 | -11.0 | 0.3       | 2.0  | 2.7  | -0.3 | -3.3 |
| 0.6       | 0.0      | 2.7  | 4.3  | 3.3  | 2.7  | 0.0      | 1.0  | -7.0  | -16.3 | -19.7 | -0.3      | 2.3  | 4.7  | 1.7  | -2.3 |
| 0.7       | 0.3      | 2.7  | 3.0  | 6.0  | 3.0  | 1.0      | 1.7  | -2.7  | -9.7  | -27.0 | 0.7       | 2.3  | 2.7  | 3.7  | -1.7 |
| 0.8       | -0.3     | 1.3  | 3.3  | 4.7  | 2.7  | 0.3      | 1.0  | 2.3   | -7.7  | -15.0 | 0.0       | 1.0  | 2.7  | 2.3  | 1.3  |
| 0.9       | 1.0      | 1.3  | 1.0  | 1.0  | 1.7  | 0.3      | 1.7  | 0.7   | -3.7  | -17.0 | 0.3       | 1.7  | 0.3  | 2.0  | 0.7  |
| $T = 100$ | MLWR-AIC |      |      |      |      | MLWR-BIC |      |       |       |       | MLWR-CAIC |      |      |      |      |
| $c/p$     | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1        | 2    | 3     | 4     | 5     | 1         | 2    | 3    | 4    | 5    |
| 0         | 3.7      | 3.0  | 7.7  | 2.7  | 2.7  | 2.7      | 2.3  | 5.7   | 3.0   | 2.3   | 3.0       | 3.0  | 7.3  | 3.0  | 1.7  |
| 0.1       | -4.7     | -3.3 | -2.0 | -2.7 | -3.0 | -4.7     | -1.0 | -3.3  | -1.0  | -2.7  | -5.3      | -2.3 | -2.7 | -2.0 | -2.7 |
| 0.2       | 0.3      | 0.3  | -4.3 | -4.7 | -0.3 | -0.7     | -2.3 | -4.7  | -4.0  | -3.7  | 0.3       | -1.3 | -5.0 | -6.3 | -2.7 |
| 0.3       | -0.3     | 0.3  | 1.3  | -1.7 | 0.3  | -0.7     | -8.7 | -6.3  | -4.0  | -5.3  | 0.3       | -2.7 | -0.7 | -4.3 | -4.7 |
| 0.4       | 2.3      | 2.3  | 1.7  | -1.0 | -0.3 | 0.3      | -6.3 | -10.0 | -12.0 | -7.0  | 1.3       | 1.7  | -1.0 | -6.3 | -6.7 |
| 0.5       | 0.0      | 3.7  | 3.3  | 3.0  | 2.7  | 0.0      | -5.3 | -12.0 | -13.3 | -11.7 | 0.3       | 1.0  | 1.7  | -0.7 | -5.7 |
| 0.6       | 0.0      | 3.3  | 4.3  | 2.7  | 2.0  | 0.0      | 1.0  | -8.0  | -18.7 | -21.7 | -0.3      | 2.7  | 4.0  | -0.3 | -4.3 |
| 0.7       | 0.3      | 2.3  | 2.3  | 4.7  | 2.7  | 0.7      | 1.3  | -3.3  | -10.3 | -25.3 | 0.3       | 2.0  | 2.3  | 3.3  | -1.7 |
| 0.8       | 0.0      | 1.7  | 3.0  | 2.3  | 2.7  | 0.3      | 1.3  | 2.3   | -8.7  | -16.7 | 0.0       | 1.3  | 2.7  | 1.7  | 1.0  |
| 0.9       | 0.7      | 1.3  | 0.7  | 1.7  | 2.0  | 0.3      | 1.7  | 1.3   | -3.3  | -19.3 | 0.3       | 2.0  | 0.7  | 2.0  | 1.3  |

**Tabuľka 2:** O koľko percent je lepší (kladné hodnoty)/ horší (záporné hodnoty) Barnettov-Sethov (BS) test v porovnaní s Waldovým (W) testom pre **Model I**, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS respektíve MLWR a  $T = 100$ .

| $T = 900$ | OLS-AIC  |     |     |      |     | OLS-BIC  |      |      |      |      | OLS-CAIC  |     |     |      |     |
|-----------|----------|-----|-----|------|-----|----------|------|------|------|------|-----------|-----|-----|------|-----|
| $c/p$     | 1        | 2   | 3   | 4    | 5   | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1         | 2   | 3   | 4    | 5   |
| 0         | -1.0     | 0.3 | 1.7 | 0.7  | 0.3 | -2.3     | -0.7 | -0.3 | 1.0  | -0.3 | -1.0      | 0.3 | 1.7 | 1.3  | 0.3 |
| 0.1       | -0.3     | 6.7 | 6.7 | 8.0  | 4.7 | 0.0      | 0.3  | -1.3 | -0.3 | -1.0 | -0.7      | 6.0 | 5.7 | 8.0  | 3.7 |
| 0.2       | 0.3      | 2.3 | 3.3 | 2.7  | 5.0 | 0.0      | 2.3  | -2.0 | -1.7 | -1.3 | 0.0       | 2.3 | 3.0 | 2.3  | 4.7 |
| 0.3       | 0.0      | 0.7 | 2.3 | -0.3 | 1.7 | 0.0      | 1.0  | 3.3  | -0.7 | -3.3 | 0.0       | 0.7 | 2.3 | -0.3 | 2.0 |
| 0.4       | -1.3     | 0.3 | 1.0 | 2.7  | 4.0 | -0.7     | 1.0  | 1.7  | 3.0  | 3.3  | -1.3      | 1.0 | 1.3 | 2.7  | 4.0 |
| 0.5       | 0.0      | 1.7 | 2.0 | 2.3  | 3.0 | -0.3     | 1.3  | 1.7  | 2.0  | 2.7  | 0.0       | 1.7 | 2.0 | 2.3  | 3.0 |
| 0.6       | -0.7     | 0.0 | 1.3 | 1.7  | 1.0 | -0.7     | 1.0  | 1.3  | 2.0  | 1.3  | -0.7      | 0.7 | 1.3 | 1.7  | 1.0 |
| 0.7       | -1.0     | 1.3 | 1.3 | 1.7  | 1.0 | 0.0      | 1.3  | 2.0  | 1.3  | 1.0  | -1.0      | 1.3 | 1.7 | 1.7  | 1.0 |
| 0.8       | -0.3     | 0.3 | 1.0 | 1.3  | 1.3 | 0.0      | 0.3  | 1.0  | 1.3  | 1.3  | -0.3      | 0.7 | 1.0 | 1.3  | 1.3 |
| 0.9       | -0.3     | 0.0 | 0.3 | 1.7  | 1.0 | 0.0      | 0.3  | 0.7  | 1.7  | 0.7  | -0.3      | 0.3 | 0.3 | 1.7  | 1.0 |
| $T = 900$ | MLWR-AIC |     |     |      |     | MLWR-BIC |      |      |      |      | MLWR-CAIC |     |     |      |     |
| $c/p$     | 1        | 2   | 3   | 4    | 5   | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1         | 2   | 3   | 4    | 5   |
| 0         | -1.0     | 0.0 | 1.7 | 1.0  | 0.3 | -1.7     | -1.0 | -0.3 | 1.0  | -0.3 | -1.0      | 0.0 | 1.7 | 1.3  | 0.0 |
| 0.1       | -0.3     | 5.7 | 7.0 | 8.0  | 4.3 | 0.0      | 0.7  | -1.3 | 0.0  | -0.7 | -0.7      | 5.0 | 6.0 | 7.7  | 3.7 |
| 0.2       | 0.7      | 2.3 | 3.3 | 3.0  | 4.0 | 0.0      | 2.3  | -2.0 | -0.7 | -2.0 | 0.3       | 2.3 | 3.0 | 2.7  | 3.7 |
| 0.3       | 0.0      | 0.3 | 3.0 | -0.3 | 2.0 | 0.0      | 1.0  | 3.7  | -1.0 | -4.0 | 0.0       | 0.3 | 3.0 | -0.3 | 2.0 |
| 0.4       | -1.3     | 0.0 | 0.7 | 3.3  | 5.0 | -0.7     | 1.0  | 1.7  | 3.3  | 4.3  | -1.3      | 0.7 | 1.0 | 3.0  | 5.0 |
| 0.5       | 0.3      | 1.7 | 2.3 | 2.0  | 3.0 | -0.3     | 1.3  | 2.0  | 1.7  | 2.7  | 0.3       | 1.7 | 2.3 | 2.0  | 3.0 |
| 0.6       | -0.7     | 0.0 | 1.7 | 1.7  | 1.0 | 0.0      | 1.0  | 1.3  | 2.0  | 1.0  | -0.7      | 0.7 | 1.7 | 1.7  | 1.0 |
| 0.7       | -0.7     | 1.3 | 1.7 | 1.7  | 0.7 | 0.0      | 1.3  | 2.0  | 1.3  | 1.0  | -0.7      | 1.3 | 1.7 | 1.7  | 0.7 |
| 0.8       | -0.3     | 0.3 | 1.3 | 1.7  | 1.3 | 0.0      | 0.0  | 1.3  | 1.7  | 1.3  | -0.3      | 0.3 | 1.3 | 1.7  | 1.3 |
| 0.9       | -0.3     | 0.0 | 0.3 | 1.7  | 1.3 | 0.0      | 0.3  | 0.7  | 1.7  | 0.7  | -0.3      | 0.3 | 0.3 | 1.7  | 1.3 |

**Tabuľka 3:** O koľko percent je lepší (kladné hodnoty)/ horší (záporné hodnoty) Barnettov-Sethov (BS) test v porovnaní s Waldovým (W) testom pre **Model I**, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS respektíve MLWR a  $T = 900$ .

**Model II** Základný rozdiel oproti **Modelu I** je v zadanom kovariančnej matici  $\Sigma_\varepsilon$ , ktorá má nenulové mimodiagonálne prvky (analogicky ako v podkapitole 4.1 pre **Model II**). Rovnako ako v simulácii **Modelu I** sme porovnali vplyv konštanty  $c$ , variancie  $\sigma_\varepsilon^2$  a dĺžky  $T$  na výsledný odhad parametrov  $\hat{p}, \hat{A}, \hat{\Sigma}_\varepsilon$ . Všetky odhadnuté matice  $\hat{A}$  spĺňajú podmienku stability z podkapitoly 1.2. Odhadnuté rezíduá metódou OLS sú analogicky testované pomocou Portmanteauovho testu s rovnakými stupňami voľnosti a kritickou hodnotou ako v **Modeli I**. Výsledky Portmanteauovho testu vyšli podobne ako v časti 4.1.1 pre **Model II**. V simulačnej štúdií sme postupovali analogicky ako v prípade simulačnej štúdie pre **Model I**. Porovnali sme presnosť odhadu  $p$  pomocou troch uvažovaných informačných kritérií. Všetky grafické výsledky **Modelu II** spolu s tabuľkami uvádzame v Prílohe B.

Z výsledkov uvedených na **Obr. B.44, Obr. B.45** vyplýva, že čím väčšie je  $T$ , tým je lepšia presnosť odhadu  $p$  všetkými tromi uvažovanými informačnými kritériami. Najpresnejší odhad pre  $T = 900$  a väčšie hodnoty koeficientov  $c$  bol získaný Bayesovým informačným kritériom. Odhady určené Akaikeho informačným kritériom a aj s jeho korekciou nedávajú ani v jednom prípade takú vysokú úspešnosť odhadu  $p$  pre  $T = 900$  ako s Bayesovým informačným kritériom. Výsledky sú minimálne odlišné v porovnaní s **Modelom I**.

Boxploty v **Obr. B.46** predstavujú súhrnné výsledky pre všetky  $T, c, \sigma_\varepsilon^2$  na určenie rozmedzia chybného odhadnutia rádov pri jednotlivých informačných kritériách. Opäť sa z boxplotov potvrdilo, že Akaikeho informačné kritérium skutočne nadhodnocuje odhady rádov a vzniká veľa outlierov. Tie sú výrazne nad očakávaným odhadom  $p$  a to najmä pri odhade metódou OLS. Po pridaní korekcie sa ich počet znížil. Bayesovo informačné kritérium má minimálny počet outlierov ale opäť významne podhodnocuje. Z **Tabuľky 7** pozorujeme, že za lepšiu metódu odhadu  $p$  možno považovať MLWR pre  $p = 1, 2, 3, 5$  a OLS pre  $p = 4$ . Pri voľbe najpresnejšieho určenia  $p$  podľa informačného kritéria pre  $p = 1$  volíme BIC a pre  $p = 2, 3, 4, 5$  je ním CAIC. V porovnaní výsledkov pre **Model I** sú odhady v priemere lepšie o 1%. Jedná sa teda iba o veľmi malé zlepšenie.

Následne opäť na našich odhadnutých parametroch (odhadnuté metódami OLS a MLWR) testujeme kauzalitu pomocou Waldovho testu (W) a Barnettovho-Sethovho testu (BS). Čo sa týka koeficientu  $c = 0$ , v tomto prípade sme testovali správne nezamietnu-



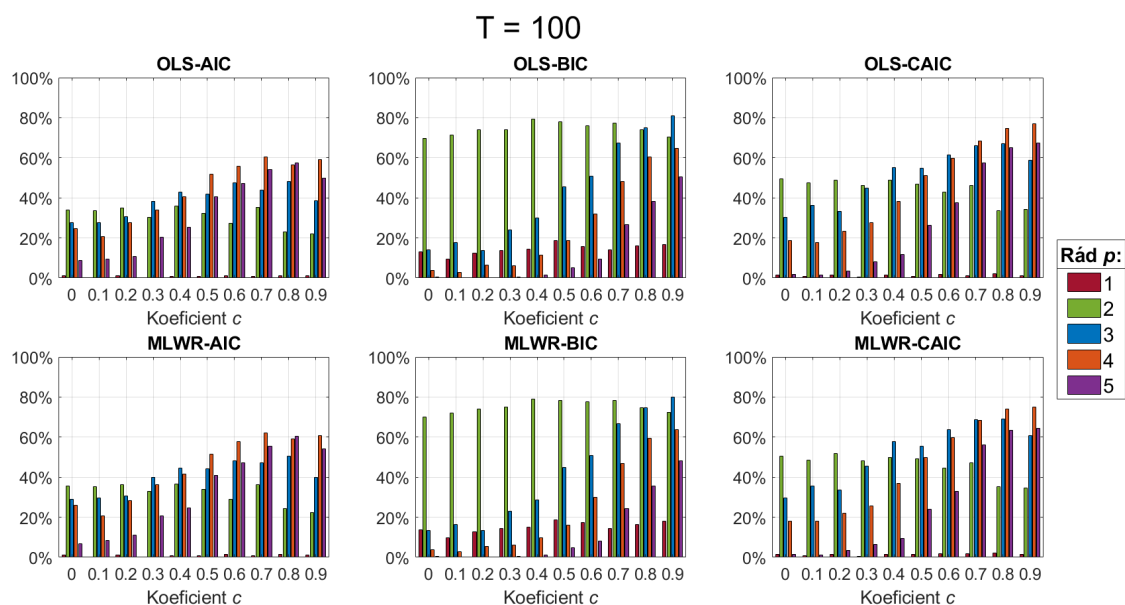
tie hypotézy  $y_1 \nrightarrow y_2$  a zároveň  $y_2 \nrightarrow y_1$ . Aj napriek tomu, že sme varianciu  $\sigma_\varepsilon$  volili z množiny  $\{0.5, 1, 1.5\}$ , výsledné grafické výstupy zobrazujeme sumárne, keďže variancia nemala na výsledky určenia kauzality výrazný vplyv. V **Tabuľkách 8 a 9** pozorujeme, že na výsledné určenie Grangerovej kauzality nebola ani jedna z odhadovaných metód lepšou. Tak ako je uvedené pri **Modeli I**, aj tu platí, že pri testovaní pre  $T = 100$ , pri vyšších rádoch  $p$  a koeficientoch  $c$  je pre oba odhady BIC lepšou voľbou Waldov test. Barnettov-Sethov test je lepšie použiť pri dĺžke  $T = 900$  a to pri vyšších  $p$  a  $c$ . Percentuálna úspešnosť správnej detekcie Grangerových kauzalít je prezentovaná na **Obr. B.47, B.48, B.49, B.50**. Pri vyššom  $T$  a zároveň aj so zvyšujúcim sa koeficientom  $c$  je čoraz vyššia úspešnosť správnej detekcie, nezávisle od odhadovanej metódy. Po porovnaní s **Modelom I** nemožno vo všeobecnosti tvrdiť, že by sme pozorovali pri niektorom z testov výrazné zlepšenie, respektíve zhoršenie výsledného správneho určenia Grangerových kauzalít. Výsledky **Modelu II** vykazovali podobnú úspešnosť ako pre **Model I**. Zmena zadefinovania kovariančných matíc  $\Sigma_\varepsilon$  výrazne neovplyvnila výsledky simulačnej štúdie.

**Model III** V tomto modeli sme pozorovali správanie testov Grangerovej kauzality a odhadov parametrov  $\hat{p}$ ,  $\hat{A}$ ,  $\hat{\Sigma}_\varepsilon$ , ak nebola splnená podmienka nekorelovanosti rezíduí. Rezíduá sú generované pomocou lineárne závislých funkcií rovnako ako bolo zadefinované v podkapitole 4.1 pre **Model III**. Na testovanie sme použili Portmanteauov test rovnako ako v predošlých modeloch. Podmienka stability 1.2 odhadnutých matíc koeficientov  $\hat{A}$  bola vo všetkých prípadoch splnená.

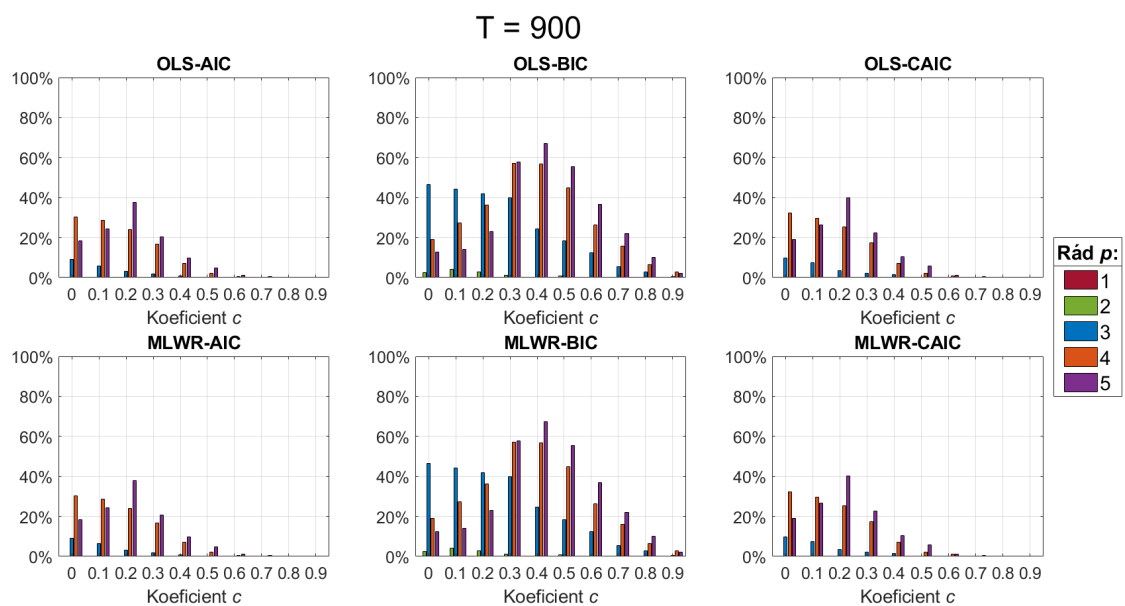
Výsledky testovania nekorelovanosti odhadnutých rezíduí mali vo všetkých oneskoreniach vyššie percento zamietnutia nulovej hypotézy Portmanteauovým testom v porovnaní s **Modelmi I, II**, kde sme generovali nezávislé rezíduá. So zvyšujúcou sa dĺžkou  $T$  sa zvyšovalo percento zamietnutia nulovej hypotézy o nekorelovanosti rezíduí. Zmena v generovaní rezíduí výrazne ovplyvnila aj odhady rádov  $p$ , znázornené na **Obr. 25** a **Obr. 26**. V prípade  $T = 100$  bola zaznamenaná lepšia percentuálna úspešnosť odhadu rádov ako v prípade  $T = 900$ . V žiadnom z odhadovaných rádov nenachádzame úspešnosť väčšiu ako 82%. Na základe výsledkov z **Tabuľky 4** a boxplotov **Obr. 27** vidíme, že nedodržanie podmienky nekorelovanosti rezíduí ovplyvnilo odhady rádov  $p$  k horšiemu. AIC nadhodnocovalo odhady, pri CAIC boli odhady mierne nižšie, ale aj napriek tomu sú tieto výsledky vo veľmi veľkej miere nadhodnotené a to pri oboch metódach. BIC sa ukázalo ako najpresnejšie, no dokázalo určiť správne rády len vo veľmi malom počte prípadov. V porovnaní s **Modelmi I, II** sú tieto výsledky výrazne horšie.

Z výsledkov testovania kauzalít uvedených na **Obr. 28**, **Obr. 29**, **Obr. 30** a **Obr. 31** vidíme, že Waldov test je pre  $T = 900$  výrazne horším v porovnaní s Barnettovým-Sethovým testom. Ani jeden z testov nedokázal detegovať kauzálne prepojenie bez chyby.

Z **Tabuľky 5** je Waldov test dobrou voľbou len vo veľmi malom počte prípadov v porovnaní s Barnettovým-Sethovým testom. V **Tabuľke 6** s dĺžkou  $T = 900$  vyšiel Barnettov-Sethov test lepší v porovnaní s Waldovým v oboch metódach odhadov a pre všetky kombinácie  $p$  a  $c$ . Po celkovom porovnaní s predchádzajúcimi výsledkami **Modelov I, II** môžeme na záver skonštatovať, že ak sú rezíduá generované závisle, tak na výsledné odhady rádov  $p$  to má veľmi nepriaznivý vplyv. So zvyšujúcou sa dĺžkou  $T$  sa výsledky odhadu výraznejšie zhoršovali. Waldov test sa ukázal ako výrazne horší v porovnaní Barnettovým-Sethovým testom, pretože nedokázal vo väčšej miere prípadov určovať správne kauzálne prepojenie.

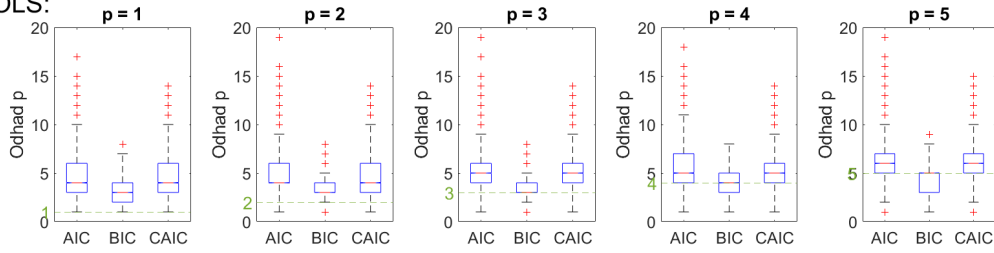


**Obr. 25:** Percentuálna úspešnosť odhadu rádu  $p$  pre Model III,  $T = 100$ .

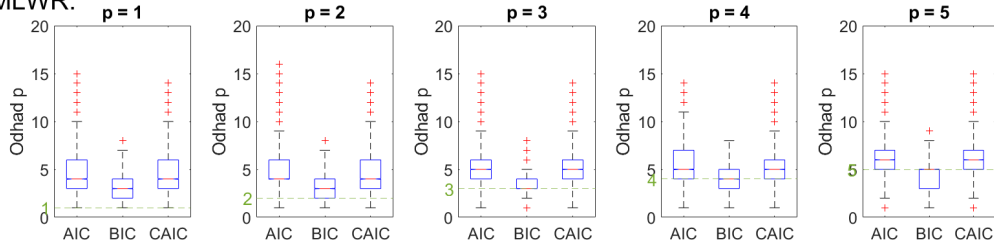


**Obr. 26:** Percentuálna úspešnosť odhadu rádu  $p$  pre Model III,  $T = 900$ .

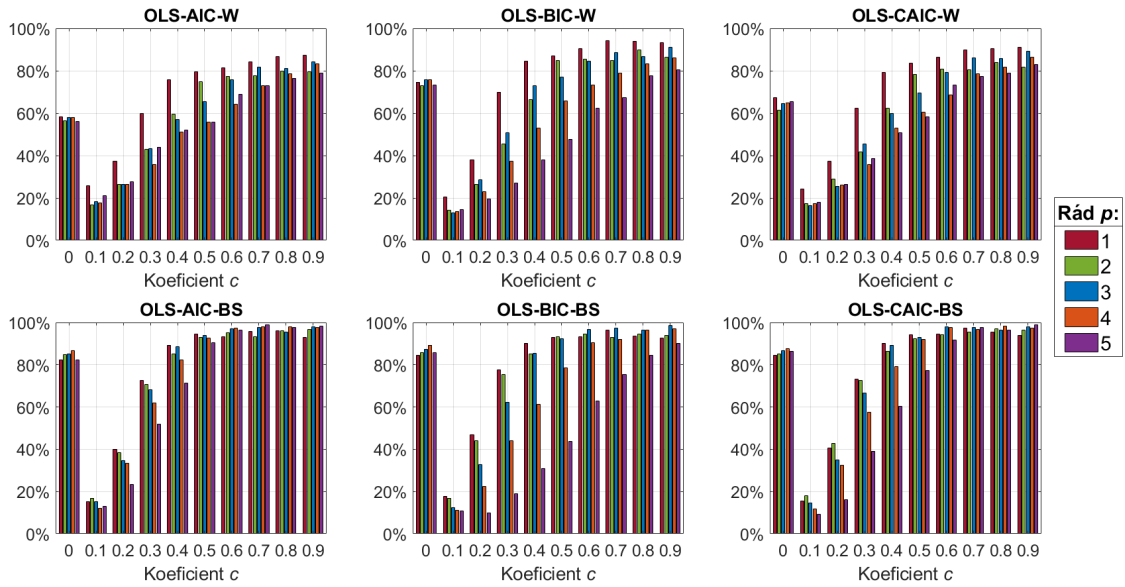
Boxploty-OLS:



Boxploty-MLWR:



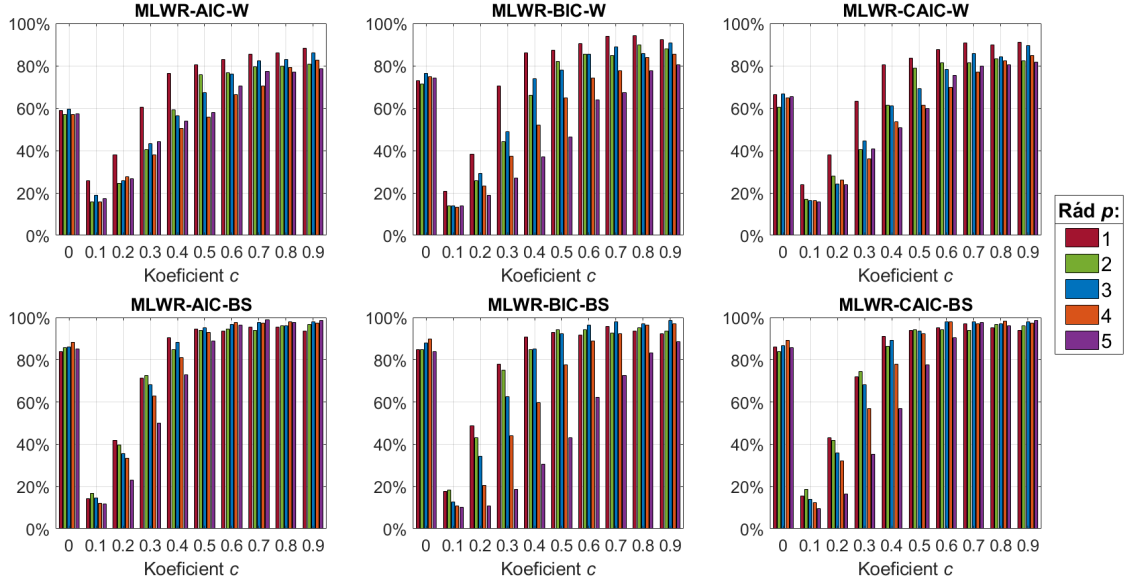
Obr. 27: Boxploty pre odhady rádu  $p$  podľa informačných kritérií pre Model III.



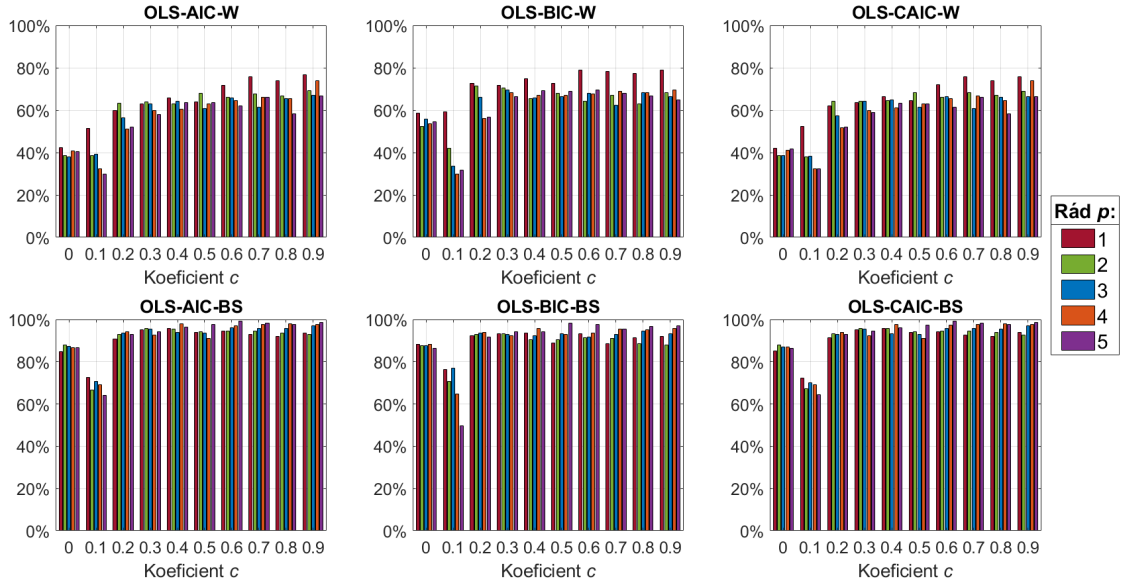
Obr. 28: Percentuálna úspešnosť správnej detekcie kauzality  $y_1 \rightarrow y_2$  a zároveň správneho nezamietnutia hypotézy  $y_2 \nrightarrow y_1$  W a BS testom pre Model III, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS a  $T = 100$  (Pozn. pre  $c = 0$  je zamietnutá kauzalita oboma smermi).

|       |      | OLS    |        |        | LWR    |        |        |
|-------|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p$ : |      | $< p$  | $= p$  | $> p$  | $< p$  | $= p$  | $> p$  |
| 1     | AIC  | 0.00%  | 0.14%  | 99.86% | 0.00%  | 0.15%  | 99.85% |
| 1     | BIC  | 0.00%  | 2.87%  | 97.13% | 0.00%  | 3.00%  | 97.00% |
| 1     | CAIC | 0.00%  | 0.23%  | 99.77% | 0.00%  | 0.26%  | 99.74% |
| 2     | AIC  | 0.03%  | 6.63%  | 93.34% | 0.03%  | 6.93%  | 93.04% |
| 2     | BIC  | 0.89%  | 24.00% | 75.11% | 0.95%  | 24.24% | 74.81% |
| 2     | CAIC | 0.05%  | 9.48%  | 90.47% | 0.06%  | 9.79%  | 90.15% |
| 3     | AIC  | 3.09%  | 14.05% | 82.86% | 3.29%  | 14.49% | 82.22% |
| 3     | BIC  | 14.63% | 36.77% | 48.60% | 14.89% | 36.69% | 48.42% |
| 3     | CAIC | 4.78%  | 17.34% | 77.88% | 4.99%  | 17.66% | 77.35% |
| 4     | AIC  | 9.55%  | 22.11% | 68.34% | 9.96%  | 22.47% | 67.57% |
| 4     | BIC  | 31.17% | 36.90% | 31.93% | 31.48% | 36.74% | 31.78% |
| 4     | CAIC | 13.27% | 23.93% | 62.80% | 13.71% | 23.88% | 62.41% |
| 5     | AIC  | 18.62% | 19.79% | 61.59% | 19.21% | 20.06% | 60.73% |
| 5     | BIC  | 44.33% | 32.63% | 23.04% | 44.59% | 32.50% | 22.91% |
| 5     | CAIC | 23.86% | 20.60% | 55.54% | 24.47% | 20.30% | 55.23% |

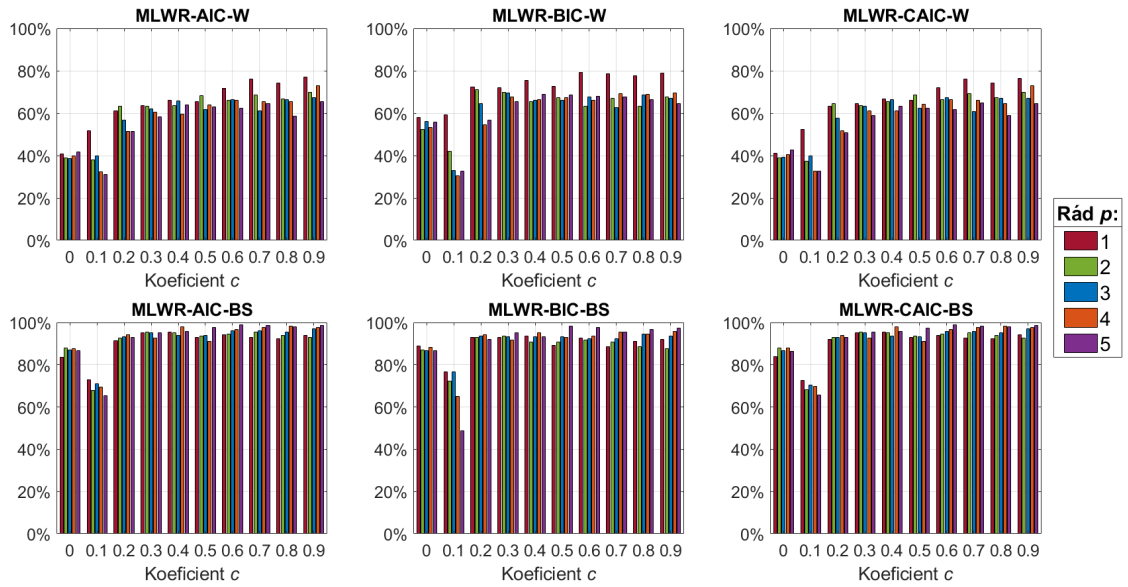
**Tabuľka 4:** Tabuľka porovnania percentuálneho počtu odhadov pre **Model III**.



**Obr. 29:** Percentuálna úspešnosť správnej detekcie kauzality  $y_1 \rightarrow y_2$  a zároveň správneho nezamietnutia hypotézy  $y_2 \nrightarrow y_1$  W a BS testom pre **Model III**, ak boli odhadnuté parametre metódou MLWR a  $T = 100$  (Pozn. pre  $c = 0$  je zamietnutá kauzalita oboma smermi).



**Obr. 30:** Percentuálna úspešnosť správnej detekcie kauzality  $y_1 \rightarrow y_2$  a zároveň správneho nezamietnutia hypotézy  $y_2 \nrightarrow y_1$  W a BS testom pre **Model III**, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS a  $T = 900$  (Pozn. pre  $c = 0$  je zamietnutá kauzalita oboma smermi).



**Obr. 31:** Percentuálna úspešnosť správnej detekcie kauzality  $y_1 \rightarrow y_2$  a zároveň správneho nezamietnutia hypotézy  $y_2 \nrightarrow y_1$  W a BS testom pre **Model III**, ak boli odhadnuté parametre metódou MLWR a  $T = 900$  (Pozn. pre  $c = 0$  je zamietnutá kauzalita oboma smermi).

| $T = 100$ | OLS-AIC  |      |      |      |      | OLS-BIC  |      |      |      |      | OLS-CAIC  |      |      |      |       |
|-----------|----------|------|------|------|------|----------|------|------|------|------|-----------|------|------|------|-------|
| $c/p$     | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1         | 2    | 3    | 4    | 5     |
| 0         | 24.0     | 28.3 | 27.0 | 28.7 | 26.3 | 9.7      | 12.7 | 11.7 | 13.7 | 12.3 | 17.0      | 23.7 | 22.0 | 22.7 | 21.0  |
| 0.1       | -10.3    | 0.0  | -3.0 | -5.7 | -8.0 | -2.7     | 2.3  | -0.7 | -2.7 | -4.0 | -8.7      | 0.7  | -1.7 | -5.7 | -8.7  |
| 0.2       | 2.7      | 12.0 | 8.3  | 7.0  | -4.3 | 9.0      | 17.7 | 4.0  | -0.7 | -9.7 | 3.3       | 13.7 | 9.7  | 6.3  | -10.3 |
| 0.3       | 12.7     | 27.7 | 25.0 | 26.3 | 8.0  | 7.7      | 30.0 | 11.7 | 6.7  | -8.0 | 11.0      | 31.0 | 21.3 | 22.0 | 0.3   |
| 0.4       | 13.7     | 25.3 | 31.7 | 31.3 | 19.3 | 5.3      | 18.7 | 12.3 | 8.3  | -7.0 | 10.7      | 24.0 | 29.3 | 26.0 | 9.7   |
| 0.5       | 15.0     | 18.0 | 28.7 | 37.0 | 34.7 | 6.0      | 8.3  | 15.3 | 13.0 | -4.0 | 10.7      | 14.0 | 23.3 | 31.7 | 19.0  |
| 0.6       | 12.0     | 17.7 | 21.3 | 33.0 | 27.3 | 3.0      | 9.3  | 12.0 | 17.0 | 0.7  | 8.3       | 13.7 | 18.7 | 29.0 | 18.3  |
| 0.7       | 11.3     | 15.7 | 16.0 | 25.0 | 26.0 | 2.0      | 8.0  | 8.7  | 13.0 | 8.0  | 7.3       | 15.0 | 11.7 | 18.0 | 20.3  |
| 0.8       | 9.3      | 16.0 | 14.3 | 19.3 | 21.3 | -0.3     | 4.7  | 9.7  | 13.0 | 6.7  | 5.0       | 13.0 | 10.7 | 16.7 | 17.3  |
| 0.9       | 5.7      | 17.0 | 13.7 | 14.3 | 19.3 | -0.7     | 7.7  | 7.7  | 11.0 | 9.7  | 3.0       | 14.7 | 8.7  | 11.0 | 16.0  |
| $T = 100$ | MLWR-AIC |      |      |      |      | MLWR-BIC |      |      |      |      | MLWR-CAIC |      |      |      |       |
| $c/p$     | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1         | 2    | 3    | 4    | 5     |
| 0         | 25.0     | 28.7 | 26.3 | 31.3 | 27.7 | 11.7     | 13.3 | 11.7 | 14.7 | 9.7  | 19.7      | 23.7 | 20.0 | 24.3 | 20.3  |
| 0.1       | -11.3    | 1.0  | -4.3 | -3.7 | -5.7 | -3.0     | 4.3  | -1.3 | -2.7 | -3.7 | -8.3      | 1.7  | -2.3 | -4.0 | -6.0  |
| 0.2       | 4.0      | 15.0 | 10.0 | 5.7  | -3.7 | 10.3     | 17.3 | 5.0  | -2.7 | -8.3 | 5.0       | 14.0 | 11.7 | 6.0  | -7.7  |
| 0.3       | 11.0     | 32.3 | 25.0 | 25.0 | 5.7  | 7.7      | 30.7 | 13.7 | 6.7  | -8.3 | 8.7       | 34.0 | 23.7 | 21.0 | -5.3  |
| 0.4       | 14.0     | 25.3 | 32.0 | 30.7 | 19.0 | 4.7      | 18.7 | 11.0 | 7.7  | -6.3 | 10.7      | 25.0 | 28.3 | 24.3 | 6.3   |
| 0.5       | 14.3     | 18.3 | 27.7 | 37.3 | 31.0 | 5.7      | 12.3 | 14.3 | 12.7 | -3.3 | 10.3      | 15.3 | 24.3 | 31.0 | 17.7  |
| 0.6       | 10.7     | 18.0 | 20.7 | 31.3 | 26.0 | 1.3      | 9.0  | 11.0 | 14.7 | -1.7 | 7.3       | 13.0 | 19.7 | 28.0 | 15.0  |
| 0.7       | 10.0     | 14.3 | 15.3 | 27.0 | 21.7 | 1.7      | 7.7  | 9.0  | 14.7 | 5.3  | 6.3       | 12.7 | 12.3 | 20.0 | 17.7  |
| 0.8       | 9.3      | 16.0 | 13.0 | 18.7 | 20.7 | -0.7     | 5.0  | 11.3 | 12.3 | 5.7  | 5.0       | 13.3 | 12.7 | 16.0 | 15.7  |
| 0.9       | 5.3      | 16.0 | 12.0 | 14.7 | 20.0 | 0.0      | 5.7  | 8.0  | 11.7 | 8.3  | 3.0       | 13.7 | 8.3  | 12.3 | 17.0  |

**Tabuľka 5:** O koľko percent je lepší (kladné hodnoty)/ horší (záporné hodnoty) Barnettov-Sethov (BS) test v porovnaní s Waldovým (W) testom pre **Model III**, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS respektíve MLWR a  $T = 100$ .



| $T = 900$ | OLS-AIC  |      |      |      |      | OLS-BIC  |      |      |      |      | OLS-CAIC  |      |      |      |      |
|-----------|----------|------|------|------|------|----------|------|------|------|------|-----------|------|------|------|------|
| $c/p$     | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1         | 2    | 3    | 4    | 5    |
| 0         | 42.3     | 49.3 | 49.3 | 46.0 | 46.3 | 29.7     | 35.3 | 32.0 | 34.7 | 31.7 | 43.0      | 49.3 | 48.3 | 46.0 | 44.7 |
| 0.1       | 21.3     | 28.0 | 31.3 | 36.7 | 34.0 | 17.0     | 28.7 | 43.3 | 34.7 | 18.0 | 20.0      | 29.3 | 31.7 | 36.7 | 32.0 |
| 0.2       | 30.7     | 29.7 | 37.3 | 43.3 | 41.0 | 19.7     | 21.7 | 27.7 | 38.0 | 35.0 | 29.3      | 29.0 | 35.7 | 42.3 | 41.0 |
| 0.3       | 32.0     | 31.7 | 32.3 | 32.7 | 36.3 | 21.7     | 23.0 | 23.3 | 24.0 | 28.0 | 31.3      | 31.3 | 31.0 | 32.3 | 35.7 |
| 0.4       | 30.0     | 32.3 | 29.7 | 37.7 | 32.7 | 18.7     | 25.0 | 26.7 | 28.7 | 25.0 | 29.3      | 31.0 | 28.3 | 36.7 | 32.7 |
| 0.5       | 30.0     | 26.3 | 33.0 | 28.0 | 34.0 | 16.3     | 22.3 | 27.0 | 26.0 | 29.3 | 29.3      | 26.0 | 31.7 | 28.0 | 34.3 |
| 0.6       | 23.0     | 28.7 | 30.3 | 32.3 | 37.3 | 14.3     | 27.0 | 23.7 | 26.0 | 28.0 | 22.3      | 28.7 | 29.3 | 32.0 | 38.0 |
| 0.7       | 17.33    | 27.0 | 34.3 | 31.7 | 32.3 | 10.3     | 24.0 | 30.7 | 26.3 | 27.3 | 17.0      | 26.3 | 35.0 | 31.0 | 32.3 |
| 0.8       | 18.0     | 27.0 | 30.3 | 32.7 | 39.3 | 14.0     | 25.7 | 26.3 | 26.7 | 30.0 | 18.0      | 27.0 | 29.3 | 33.3 | 39.3 |
| 0.9       | 17.0     | 23.7 | 30.0 | 23.7 | 32.0 | 13.0     | 19.7 | 27.0 | 26.0 | 32.0 | 18.3      | 23.7 | 30.7 | 23.7 | 32.3 |
| $T = 900$ | MLWR-AIC |      |      |      |      | MLWR-BIC |      |      |      |      | MLWR-CAIC |      |      |      |      |
| $c/p$     | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1         | 2    | 3    | 4    | 5    |
| 0         | 43.0     | 49.0 | 48.3 | 47.7 | 45.0 | 31.0     | 34.7 | 30.7 | 35.0 | 31.0 | 43.0      | 49.0 | 47.3 | 47.7 | 43.7 |
| 0.1       | 21.3     | 30.0 | 31.0 | 37.0 | 34.3 | 17.3     | 30.3 | 43.7 | 34.7 | 16.0 | 20.3      | 31.0 | 30.3 | 37.0 | 33.0 |
| 0.2       | 30.3     | 29.3 | 36.7 | 43.0 | 41.7 | 20.7     | 22.0 | 29.0 | 39.7 | 35.3 | 28.7      | 28.3 | 35.3 | 42.3 | 42.3 |
| 0.3       | 31.3     | 32.0 | 33.0 | 32.3 | 36.7 | 21.0     | 23.7 | 23.7 | 24.0 | 29.7 | 30.3      | 31.7 | 31.7 | 31.7 | 36.3 |
| 0.4       | 29.3     | 31.3 | 28.3 | 38.3 | 31.7 | 18.3     | 25.3 | 27.3 | 28.7 | 24.3 | 28.7      | 29.7 | 27.3 | 37.0 | 32.3 |
| 0.5       | 27.7     | 25.3 | 32.3 | 27.0 | 34.7 | 16.7     | 23.3 | 27.3 | 25.7 | 29.7 | 27.0      | 25.0 | 31.0 | 26.7 | 35.0 |
| 0.6       | 22.7     | 28.7 | 29.7 | 30.7 | 36.7 | 13.3     | 28.3 | 24.7 | 27.7 | 29.7 | 22.0      | 28.3 | 28.3 | 30.3 | 37.3 |
| 0.7       | 17.0     | 26.7 | 35.0 | 32.3 | 34.0 | 10.0     | 23.7 | 29.7 | 26.0 | 27.7 | 16.7      | 25.7 | 35.0 | 31.7 | 33.3 |
| 0.8       | 18.0     | 27.3 | 29.0 | 33.0 | 39.3 | 13.3     | 25.3 | 26.0 | 25.7 | 30.3 | 18.0      | 26.7 | 28.0 | 33.7 | 39.0 |
| 0.9       | 17.0     | 23.0 | 29.7 | 24.7 | 33.3 | 13.0     | 20.0 | 26.7 | 26.0 | 32.7 | 18.0      | 22.7 | 30.0 | 24.7 | 34.0 |

**Tabuľka 6:** O koľko percent je lepší (kladné hodnoty)/ horší (záporné hodnoty) Barnettov-Sethov (BS) test v porovnaní s Waldovým (W) testom pre **Model III**, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS respektíve MLWR a  $T = 900$ .

**Model IV** V poslednom modeli generujeme rezíduá tak, že jeden vektor rezíduí je lineárne závislý, zatiaľ čo druhý je generovaný nezávisle (analogicky ako v podkapitole 4.1 podľa **Modelu IV**). Rezíduá sme testovali rovnako ako v predchádzajúcich modeloch pomocou Portmanteauovho testu. Rovnako vieme, že variancia rezíduí nemala výrazný vplyv, preto všetky výsledky uvádzame vzhľadom k uvažovaným hodnotám  $\sigma_\varepsilon^2$ . Podmienka stability 1.2 odhadnutých matíc koeficientov  $\hat{A}$  bola vo všetkých prípadoch splnená. Z Portmanteauovho testovania odhadnutých rezíduí sme pozorovali, že vo všetkých oneskoreniach je percento zamietnutia nulovej hypotézy vyššie ako v porovnaní s **Modelmi I, II**. Zároveň vyšlo nižšie ako v **Modeli III**, kedy boli obe rezíduá generované lineárne závisle. Taktiež so zväčšujúcou sa dĺžkou  $T$  vzniká čoraz väčšie percento závislých rezíduí a to vo všetkých oneskoreniach. Grafické výsledky **Modelu IV** spolu s tabuľkami uvádzame v Prílohe C.

Z **Obr. C.51** a **Obr. C.52** môžeme vyvodiť záver, že pokiaľ určujeme odhady rádov pri nižšej dĺžke  $T$ , tak ich AIC a CAIC dokážu lepšie určiť ako pri vyššom  $T$ . V porovnaní s **Modelom III** je to viditeľne lepšie pre všetky  $T$ . Na základe **Tabuľky 10** a boxplotov **Obr. C.53** vidíme, že nedodržanie podmienky nekorelovanosti rezíduí vedie k nesprávnym odhadom  $p$ , no v porovnaní s **Modelom III** nastalo zlepšenie. Tak ako v predchádzajúcich modeloch aj teraz AIC nadhodnocovalo odhady, zatiaľ čo pri CAIC to bolo mierne nižšie. BIC odhadlo rády najpresnejšie aj keď výrazne podhodnocuje. Aj napriek tejto skutočnosti považujeme BIC za najlepšiu voľbu pri všetkých odhadoch rádov  $p$ .

V poslednej časti sme na našich odhadnutých parametroch testovali kauzalitu. Tak ako už bolo v minulých testoch uvedené, pri hodnote  $c = 0$  sme testovali správne nezamietnutie hypotézy  $y_1 \nrightarrow y_2$  a zároveň  $y_2 \nrightarrow y_1$ .

Výsledky prezentované v **Tabuľkách 11, 12** ukazujú, že na výsledné určenie Grangerovej kauzality nemala ani jedna z odhadovaných metód zásadne lepší vplyv. Percentuálna úspešnosť správnej detekcie Grangerových kauzalít je prezentovaná na **Obr. C.54, C.55, C.56, C.57**. V porovnaní s **Modelom III** vidíme vyššiu percentuálnu úspešnosť a to vo všetkých štyroch grafoch, pri niektorých hodnotách pozorujeme veľmi vysokú správnosť detekcie kauzalít. Pri porovnávaní testov kauzalít sme vychádzali z **Tabuliek 11, 12**. Len pri  $T = 900$ ,  $c = 0$  a niektorých  $c = 0.1$  je lepší Barnettov-Sethov test, v iných prípadoch je to Waldov test. O výsledkoch pre  $T = 100$  nemožno vo všeobecnosti povedať, ktorý z testov je lepším. Závisí to od konkrétneho rádu  $p$  a konštanty  $c$ . V poslednom modeli

sme pozorovali, že ak jeden vektor rezíduí bol generovaný lineárne závisle zatiaľ čo druhý bol nezávislý, tak táto skutočnosť negatívne ovplyvnila celkové výsledky odhadov rádov  $p$  a detekcie kauzalít. V porovnaní s **Modelom III** dostávame výsledky výrazne lepšie, no na druhej strane sú stále horšími ako v **Modeloch I, II**, kde boli rezíduá generované nezávisle.

## Záver

Cieľom našej práce bolo simulačnou štúdiou otestovať silu Portmanteauovho testu pre rôzne generovania reziduálnych chýb. Pomocou viacrozmernej metódy najmenších štvorcov a Morfovým (LWR) rekurzívnym algoritmom sme odhadli matice koeficientov a kovariančnú maticu VAR modelu. Ďalej sme porovnávali úspešnosť troch uvažovaných informačných kritérií na odhad rádo  $p$ . Testovali sme spoľahlivosť a silu Waldovho testu v porovnaní s novým prístupom od Barnettta-Setha na významnosť kauzálneho prepojenia v Grangerovom zmysle.

V prvej kapitole sme uviedli základné predpoklady a vlastnosti VAR modelov, ako sú stabilita, stacionarita a nekorelovanosť rezíduí. Predstavili sme tu tiež Portmanteauov test, ktorý testuje vlastnosť nekorelovanosti rezíduí VAR.

V druhej kapitole sme zadefinovali odhady parametrov VAR modelov dvoma metódami, viacrozmerným odhadom najmenších štvorcov a Morfovým (LWR) rekurzívnym algoritmom. Ďalším dôležitým odhadom pri VAR( $p$ ) je odhad rádu  $p$ , kde sme predstavili tri informačné kritériá, s ktorými sme pracovali.

V tretej kapitole sme sa zamerali na predstavenie testov Grangerovej kauzality, konkrétne Waldov a Barnettov-Sethov test. Waldov test využíva odhadnuté parametre určené priamo z metód. Barnettov-Sethov test v porovnaní s Waldovým testom prináša iný pohľad na určenie Grangerovej kauzality, pri ktorom využíva autokovariančné matice.

V záverečnej časti našej práce predstavujeme simulačnú štúdiu, ktorá je praktickou ukážkou zadefinovanej teórie. Ako prvé sme skúmali Portmanteauov test o nekorelovanosti rezíduí pri štyroch rôznych modeloch. V prípade použitých modelov sa ukázalo, že na silu Portmanteauovho testu nemala variancia výrazný vplyv. V modeloch so závislými rezíduami a so zväčšujúcou sa dĺžkou  $T$  narastalo aj percento zamietnutia nulovej hypotézy pri všetkých oneskoreniach, a test určil korelácie rezíduí.

V druhej časti štúdie sme porovnávali metódy odhadov parametrov VAR a testy Grangerovej kauzality, pričom myšlienka generovania rezíduí bola totožná s testovaním sily Portmanteauovho testu. Skúmali sme štyri modeli, ktoré sa líšili v zadefinovaní vzťahov medzi rezíduami. V celkových výsledkoch pre porovnanie metód na odhad parametrov VAR sme nezaznamenali výraznejšiu dominanciu v určovaní lepších výsledkov. V prípade určenia odhadu rádu sme vychádzali z troch informačných kritérií. Zo všetkých štyroch

testovaných modelov vyplynulo, že Akaikeho informačné kritérium nadhodnocovalo odhady rádu v porovnaní s pôvodne zadaným rádom. Po pridaní korekcie sa nadhodnotenie zmiernilo. Bayesovo informačné kritérium malo vo všetkých prípadoch priemerne najlepší odhad, no odhady boli aj napriek tomu výrazne podhodnotené. Z výsledkov pre jednotlivé modely sme pozorovali, že ak nebola splnená podmienka nekorelovanosti rezíduí, tak aj naše výsledné odhady boli výrazne horšie. To vplývalo aj na percentuálne úspešnosti správnych detekcií kauzalít, ktoré boli taktiež horšie. Pri použití Barnettovho-Sethovho testu v porovnaní s Waldovým sme vo všeobecnosti nezaznamenali výrazné zlepšenie v modeloch s nekorelovanými rezíduami. Naopak v modeli, ktorý využíval len lineárne závislé rezíduá bol Barnettov-Sethov test v priemere lepším.

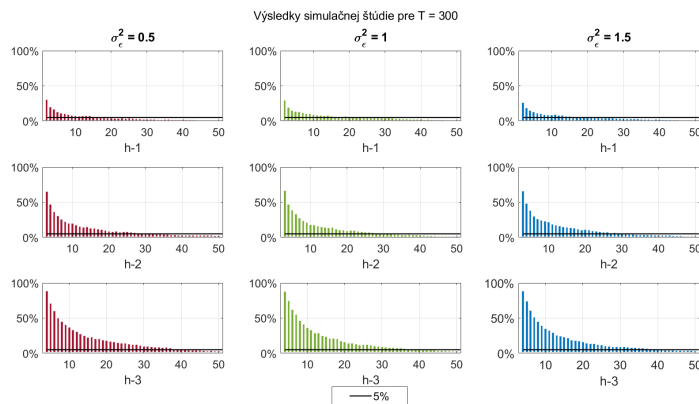
Na záver konštatujeme, že diplomová práca splnila ciele, ktoré boli na začiatku stanovené. Vytvorili sme súhrnný prehľad teórie stabilných VAR modelov s dôrazom na ich využitie pri testovaní Grangerovej kauzality. Na modeloch I, II, III a IV sme v simulačnej štúdií porovnali rôzne možnosti, ktoré ovplyvnili celkové výsledky. Tieto výsledky boli založené na odhadoch parametrov VAR modelov a testovaní kauzálneho prepojenia.

## Zoznam použitej literatúry

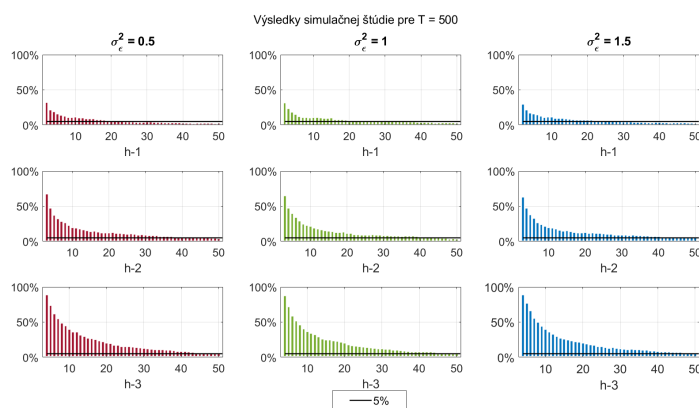
- [1] Barnett, L., Seth, A. K.: *The MVGC multivariate Granger causality toolbox: a new approach to Granger-causal inference*, Journal of neuroscience methods 223 (2014), 50-68.
- [2] Cekic, S., Grandjean, D., Renaud, O: *Time, frequency, and time-varying Granger-causality measures in neuroscience*, Statistics in medicine, 37(11) (2018), 1910-1931.
- [3] Ding, M., Chen, Y., Bressler, S. L.: *Granger causality: basic theory and application to neuroscience*, Handbook of time series analysis: recent theoretical developments and applications (2006), 437-460.
- [4] Durbin, J.: *The fitting of time-series models*, Revue de l'Institut International de Statistique (1960), 233-244.
- [5] Granger, C. W.: *Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods*, Econometrica: Journal of the Econometric Society (1969), 424-438.
- [6] Levinson, N: *The Wiener (root mean square) error criterion in filter design and prediction*, Journal of Mathematics and Physics, 25(1-4) (1946), 261-278.
- [7] Lütkepohl, H.: *New introduction to multiple time series analysis*, Springer Science & Business Media, Berlin (2005).
- [8] Morf, M. a kol. : *Recursive multichannel maximum entropy spectral estimation*, IEEE Transactions on Geoscience Electronics 16(2) (1978), 85-94.
- [9] Seth, A. K.: *A MATLAB toolbox for Granger causal connectivity analysis.*, Journal of neuroscience methods, 186(2) (2010), 262-273.
- [10] Seth, A. K., Barrett, A. B., Barnett, L.: *Granger causality analysis in neuroscience and neuroimaging*, Journal of Neuroscience, 35(8) (2015), 3293-3297.
- [11] Stokes, P. A., Purdon, P. L.: *A study of problems encountered in Granger causality analysis from a neuroscience perspective*, Proceedings of the national academy of sciences, 114(34) (2017), E7063-E7072.

- [12] Whittle, P.: *On the fitting of multivariate autoregressions, and the approximate canonical factorization of a spectral density matrix*, Biometrika, 50(1-2) (1963), 129-134.
- [13] Wiener, N.: *The theory of prediction*, In Modern Mathematics for Engineers (Series 1), New York: McGraw-Hill (1956).
- [14] Wiggins, R. A., Robinson, E. A.: *Recursive solution to the multichannel filtering problem*, Journal of Geophysical Research, 70(8) (1965), 1885-1891.
- [15] Zellner, A.: *An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests of aggregation bias*, Journal of the American Statistical Association 57 (1962), 348–368.
- [16] Zhou, D., a kol.: *Granger causality network reconstruction of conductance-based integrate-and-fire neuronal systems*, PloS one 9(2) (2014), e87636.

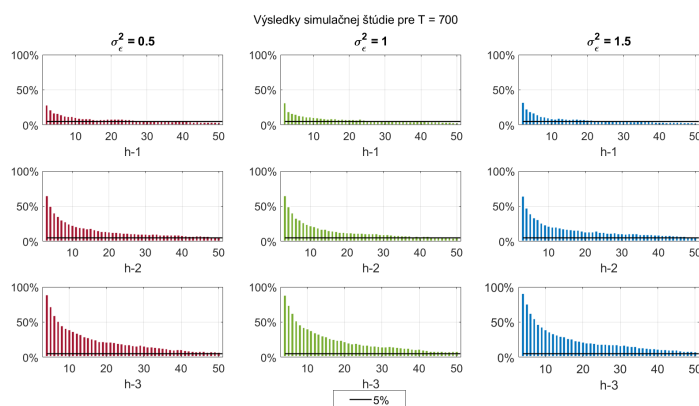
## Príloha A



**Obr. A.32:** Sila Portmanteauho testu pre rezíduá generované **Modelom I** pre  $T = 300$ .

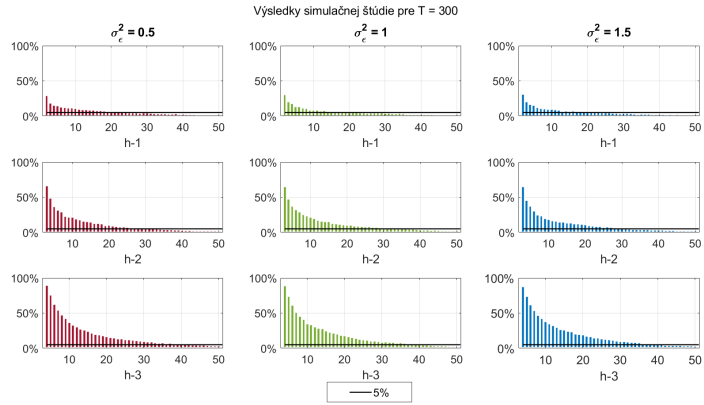


**Obr. A.33:** Sila Portmanteauho testu pre rezíduá generované **Modelom I** pre  $T = 500$ .

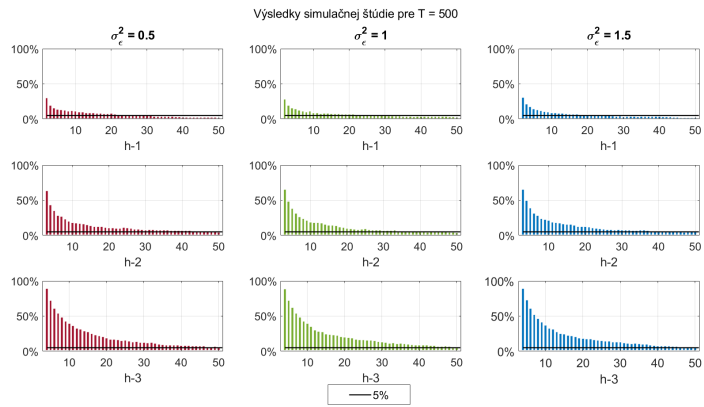


**Obr. A.34:** Sila Portmanteauho testu pre rezíduá generované **Modelom I** pre  $T = 700$ .

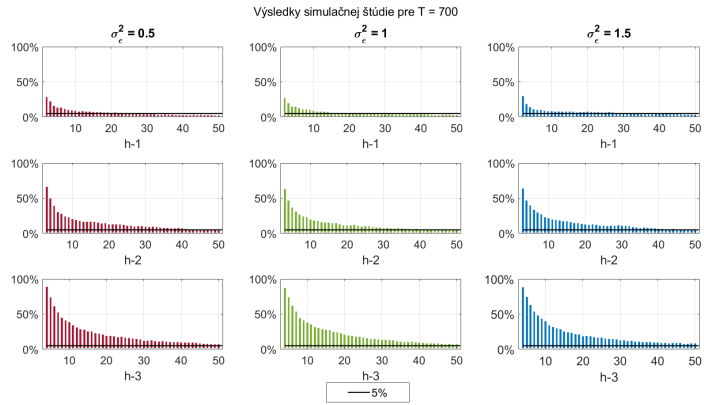




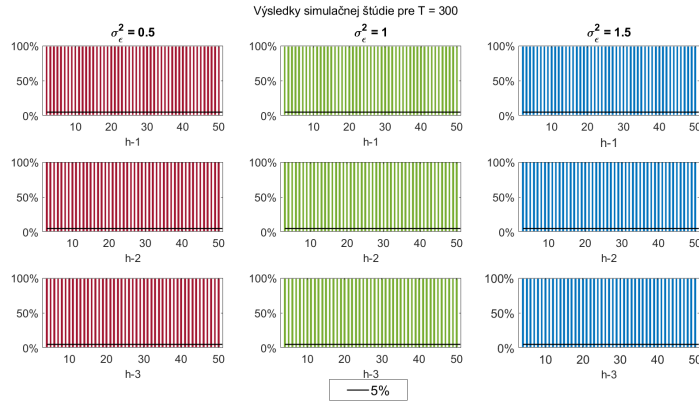
Obr. A.35: Sila Portmanteauho testu pre rezíduá generované **Modelom II** pre  $T = 300$ .



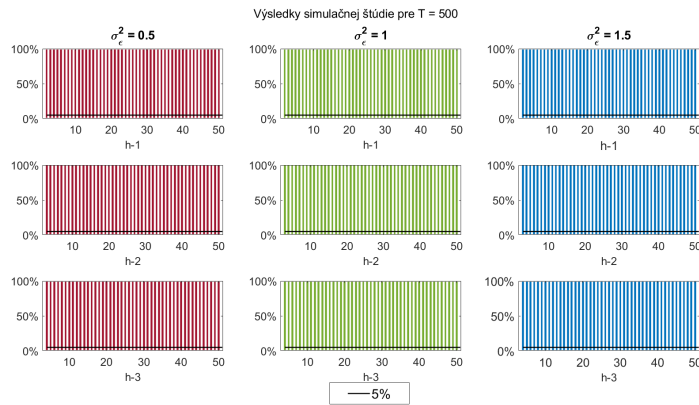
Obr. A.36: Sila Portmanteauho testu pre rezíduá generované **Modelom II** pre  $T = 500$ .



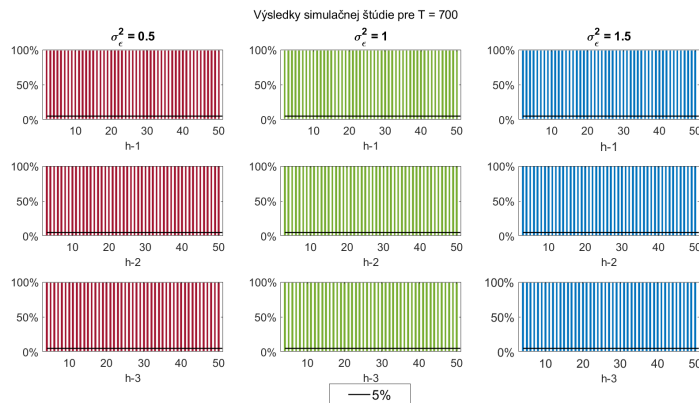
Obr. A.37: Sila Portmanteauho testu pre rezíduá generované **Modelom II** pre  $T = 700$ .



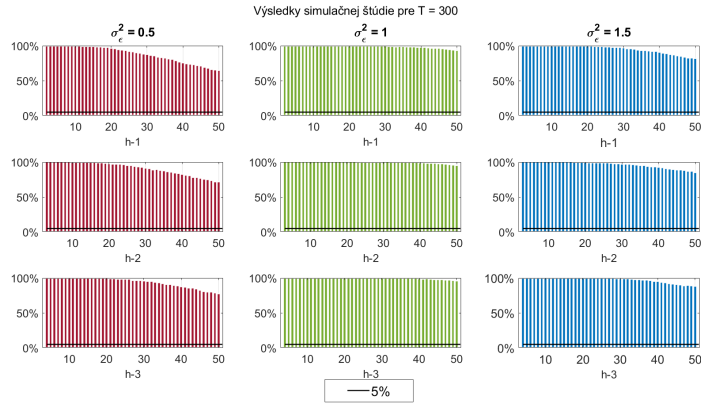
Obr. A.38: Sila Portmanteauho testu pre rezíduá generované Modelom III pre  $T = 300$ .



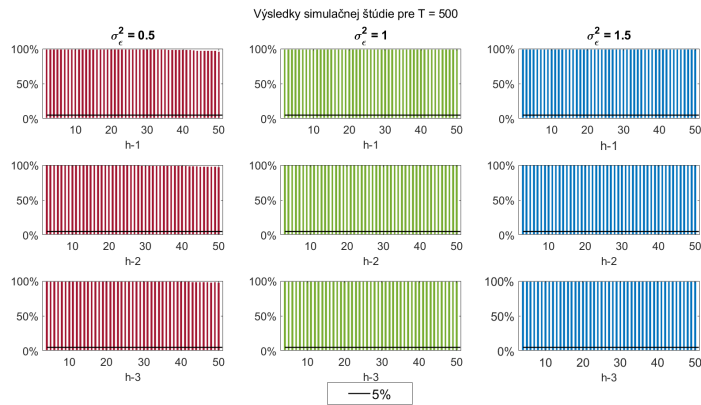
Obr. A.39: Sila Portmanteauho testu pre rezíduá generované Modelom III pre  $T = 500$ .



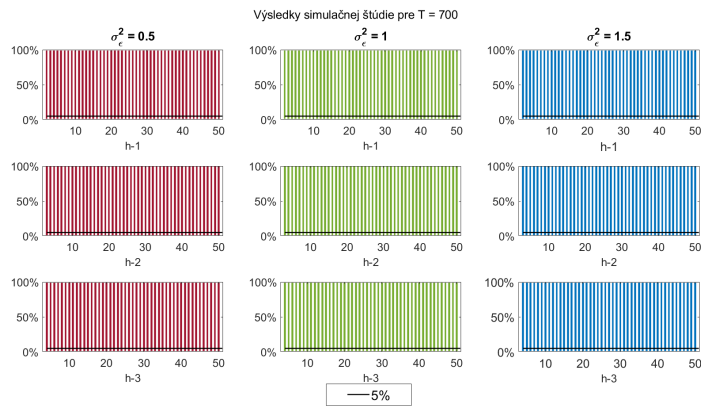
Obr. A.40: Sila Portmanteauho testu pre rezíduá generované Modelom III pre  $T = 700$ .



Obr. A.41: Sila Portmanteauho testu pre rezíduá generované **Modelom IV** pre  $T = 300$ .

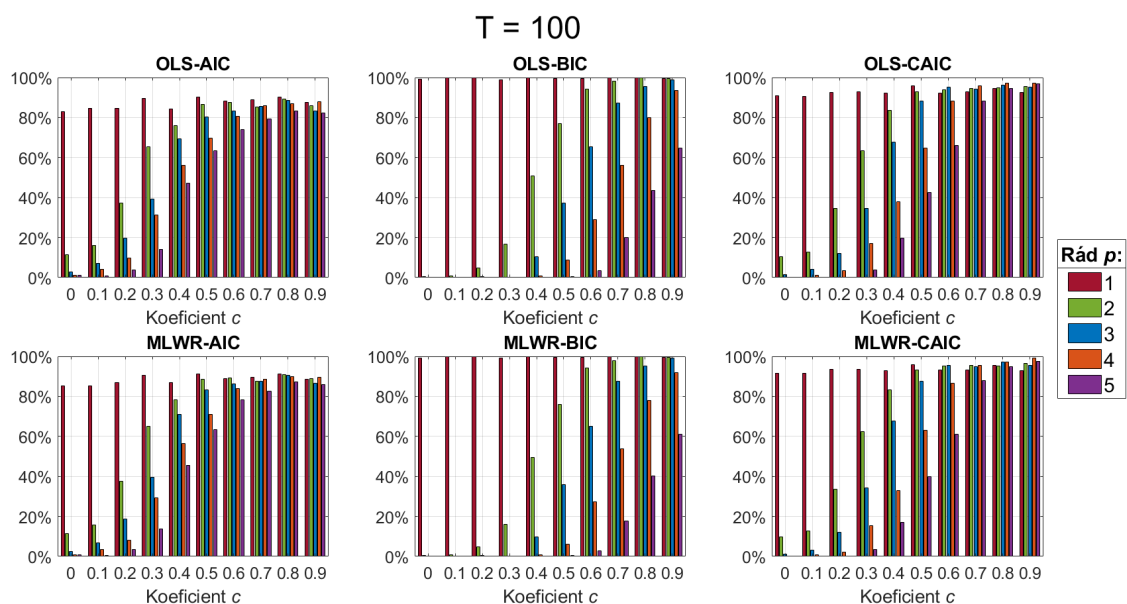


Obr. A.42: Sila Portmanteauho testu pre rezíduá generované **Modelom IV** pre  $T = 500$ .

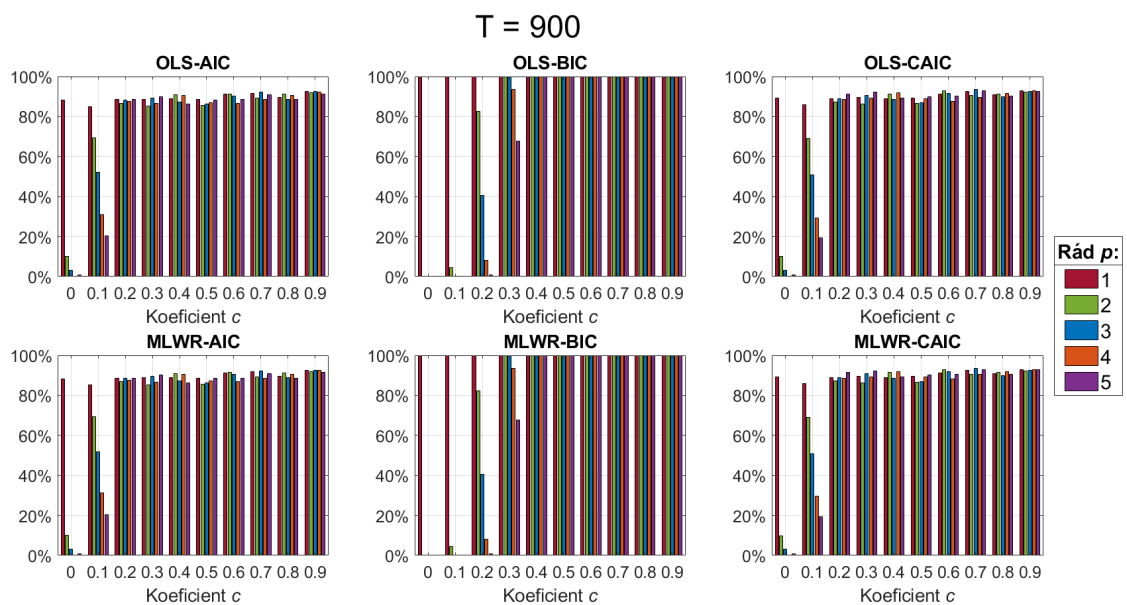


Obr. A.43: Sila Portmanteauho testu pre rezíduá generované **Modelom IV** pre  $T = 700$ .

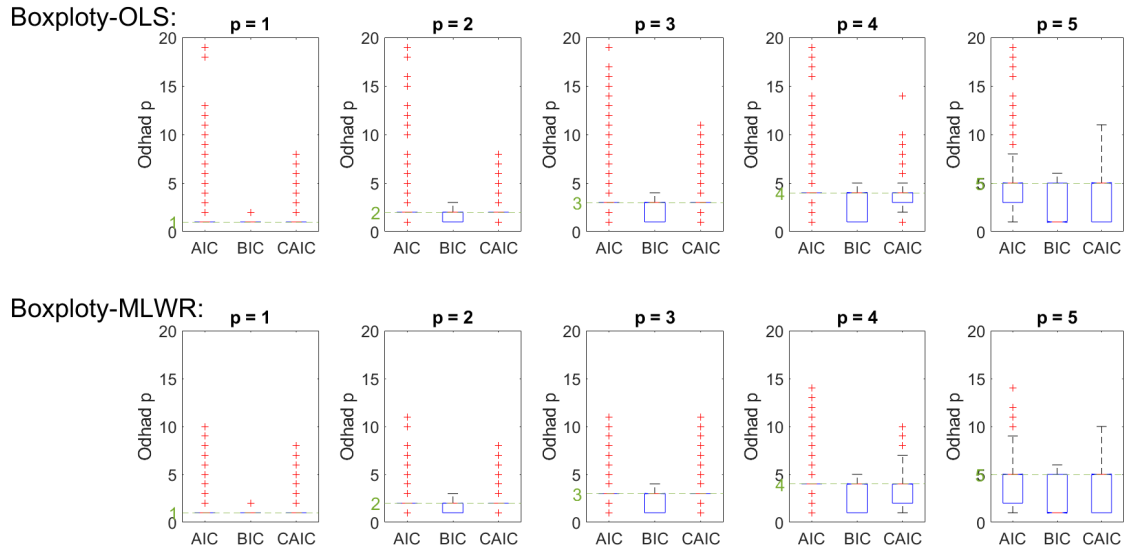
## Príloha B



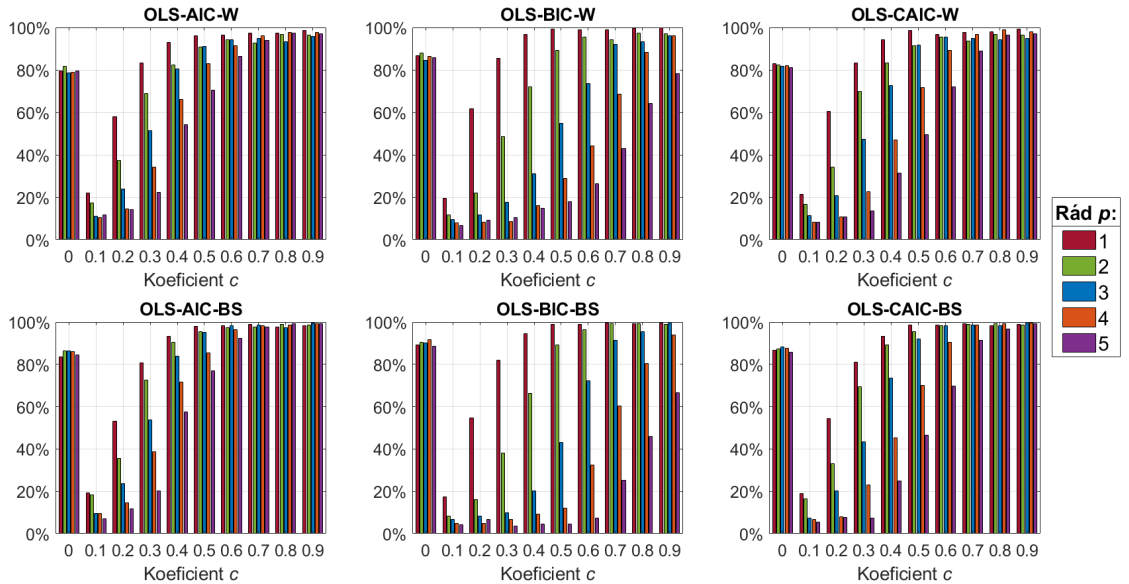
Obr. B.44: Percentuálna úspešnosť odhadu rádu  $p$  pre Model II,  $T = 100$ .



Obr. B.45: Percentuálna úspešnosť odhadu rádu  $p$  pre Model II,  $T = 900$ .



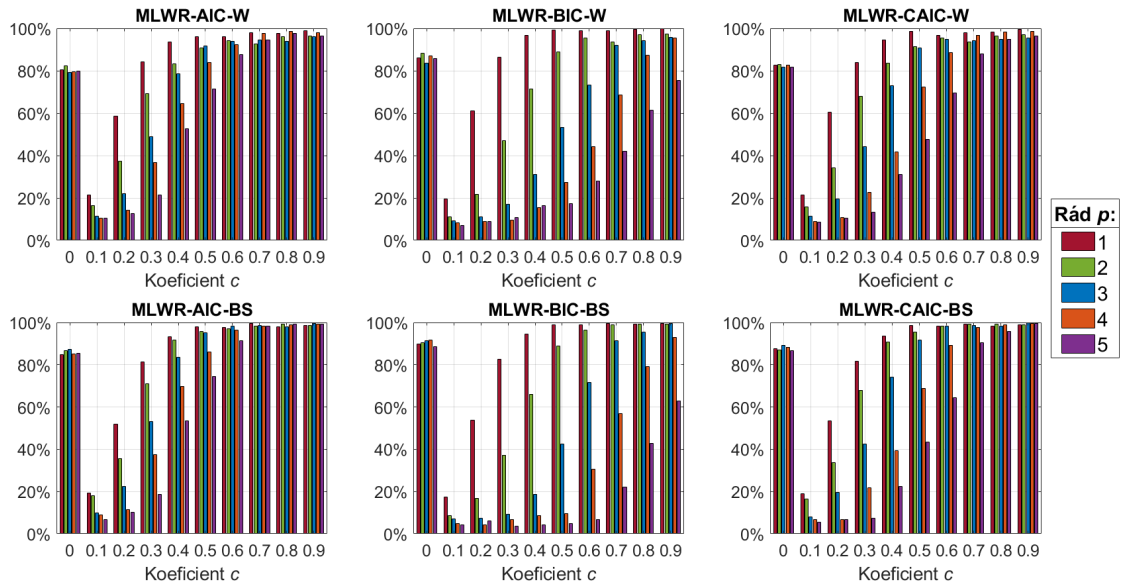
**Obr. B.46:** Boxploty pre odhady rádu  $p$  podľa informačných kritérií pre **Model II**.



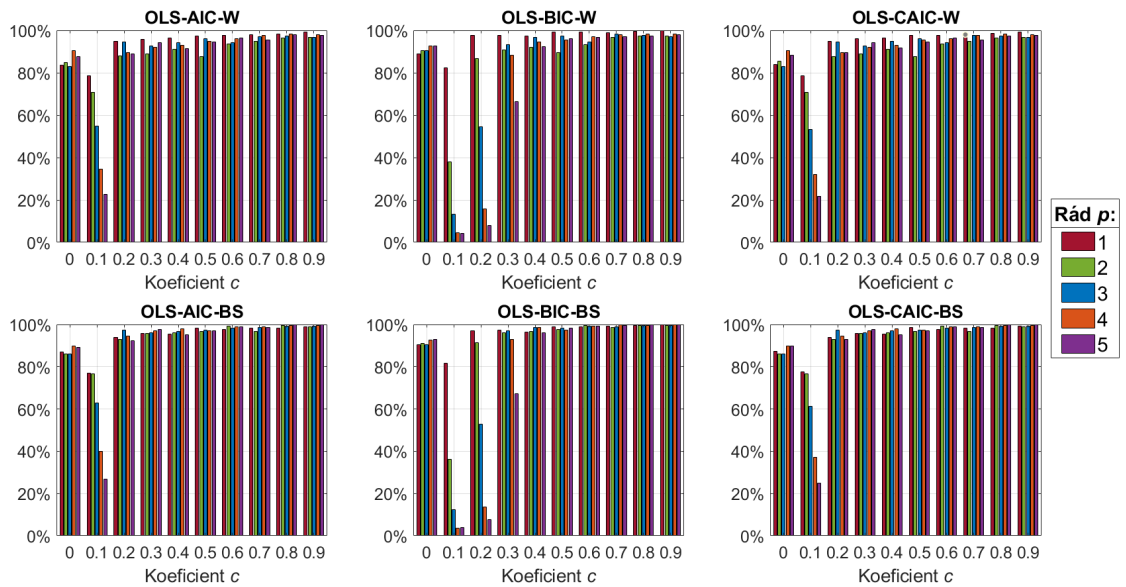
**Obr. B.47:** Percentuálna úspešnosť správnej detekcie kauzality  $y_1 \rightarrow y_2$  pre  $c = 0.1, \dots, 0.9$  a zároveň správneho nezamietnutia hypotézy  $y_2 \nrightarrow y_1$  W a BS testom pre **Model II**, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS a  $T = 100$  (Pozn. pre  $c = 0$  je zamietnutá kauzalita oboma smermi).

|       |             | OLS    |        |        | MLWR   |        |        |
|-------|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p$ : | Info.krit.: | $< p$  | $= p$  | $> p$  | $< p$  | $= p$  | $> p$  |
| 1     | AIC         | 0.00%  | 88.67% | 11.33% | 0.00%  | 89.07% | 10.93% |
| 1     | BIC         | 0.00%  | 99.95% | 0.05%  | 0.00%  | 99.95% | 0.05%  |
| 1     | CAIC        | 0.00%  | 90.70% | 9.30%  | 0.00%  | 90.96% | 9.04%  |
| 2     | AIC         | 15.81% | 73.99% | 10.20% | 15.92% | 74.40% | 9.68%  |
| 2     | BIC         | 29.24% | 70.75% | 0.01%  | 29.30% | 70.69% | 0.01%  |
| 2     | CAIC        | 16.82% | 75.47% | 7.71%  | 16.94% | 75.60% | 7.46%  |
| 3     | AIC         | 19.76% | 70.37% | 9.87%  | 20.06% | 70.77% | 9.17%  |
| 3     | BIC         | 36.75% | 63.19% | 0.06%  | 36.83% | 63.14% | 0.03%  |
| 3     | CAIC        | 21.30% | 71.87% | 6.83%  | 21.45% | 71.96% | 6.59%  |
| 4     | AIC         | 22.89% | 67.27% | 9.84%  | 23.27% | 67.65% | 9.08%  |
| 4     | BIC         | 43.67% | 56.30% | 0.03%  | 43.93% | 56.05% | 0.02%  |
| 4     | CAIC        | 25.60% | 68.25% | 6.15%  | 25.98% | 68.21% | 5.81%  |
| 5     | AIC         | 25.67% | 65.09% | 9.24%  | 26.16% | 65.49% | 8.35%  |
| 5     | BIC         | 50.50% | 49.49% | 0.01%  | 50.76% | 49.23% | 0.01%  |
| 5     | CAIC        | 29.09% | 65.79% | 5.12%  | 29.47% | 65.80% | 4.73%  |

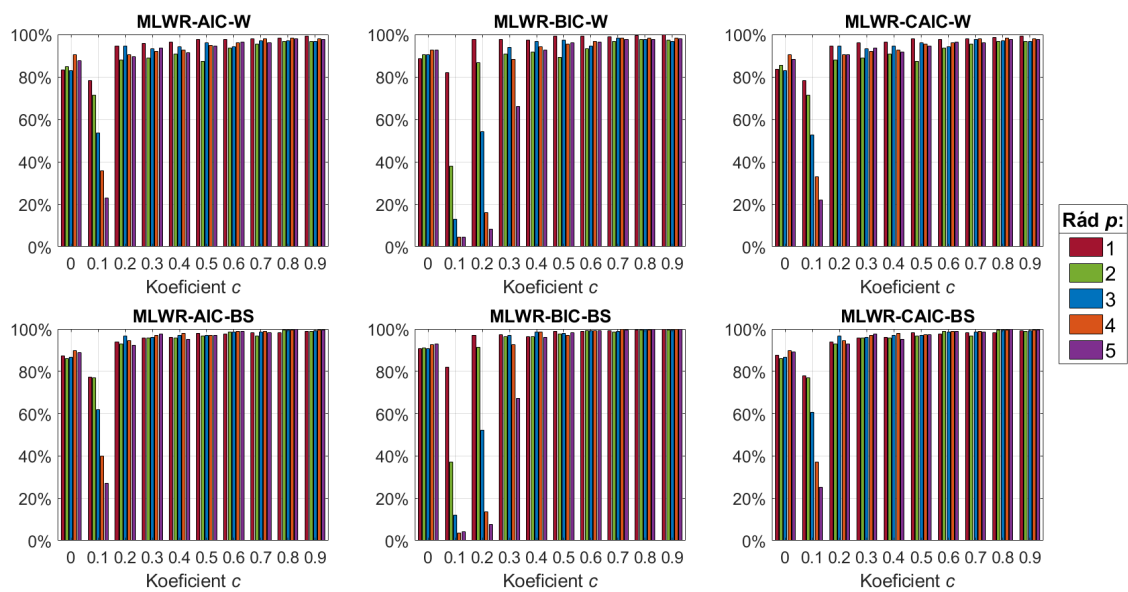
**Tabuľka 7:** Tabuľka porovnania počtov odhadov pre **Model II**.



**Obr. B.48:** Percentuálna úspešnosť správnej detekcie kauzality  $y_1 \rightarrow y_2$  pre  $c = 0.1, \dots, 0.9$  a zároveň správneho nezamietnutia hypotézy  $y_2 \nrightarrow y_1$  W a BS testom pre **Model II**, ak boli odhadnuté parametre metódou MLWR a  $T = 100$  (Pozn. pre  $c = 0$  je zamietnutá kauzalita oboma smermi).



**Obr. B.49:** Percentuálna úspešnosť správnej detekcie kauzality  $y_1 \rightarrow y_2$  pre  $c = 0.1, \dots, 0.9$  a zároveň správneho nezamietnutia hypotézy  $y_2 \nrightarrow y_1$  W a BS testom pre **Model II**, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS a  $T = 900$  (Pozn. pre  $c = 0$  je zamietnutá kauzalita oboma smermi).



**Obr. B.50:** Percentuálna úspešnosť správnej detekcie kauzality  $y_1 \rightarrow y_2$  pre  $c = 0.1, \dots, 0.9$  a zároveň správneho nezamietnutia hypotézy  $y_2 \nrightarrow y_1$  W a BS testom pre **Model II**, ak boli odhadnuté parametre metódou MLWR a  $T = 900$  (Pozn. pre  $c = 0$  je zamietnutá kauzalita oboma smermi).



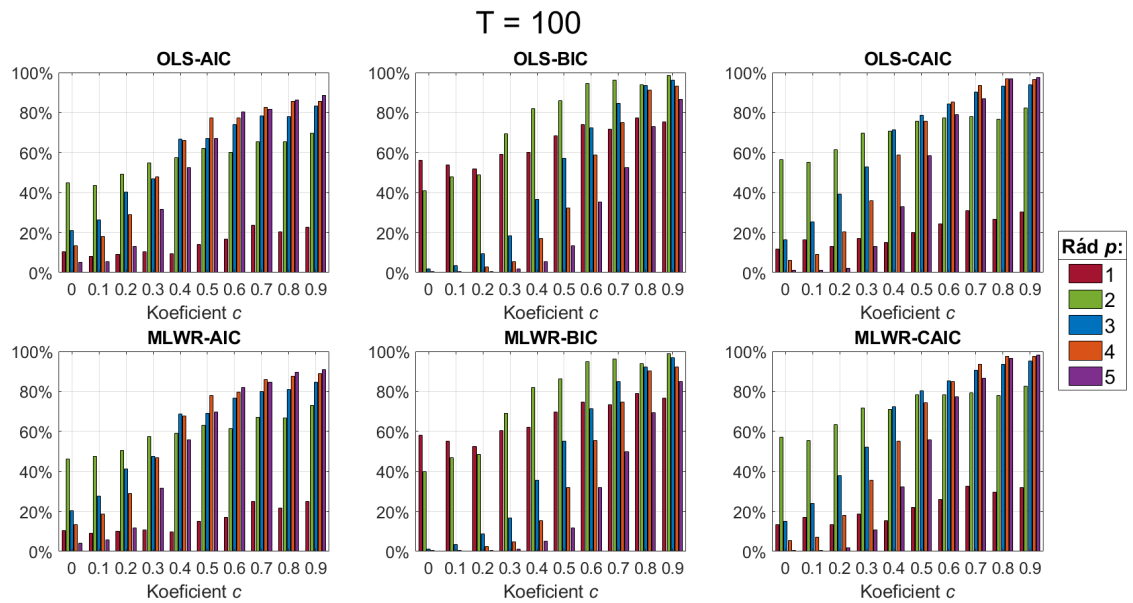
| $T = 100$ | OLS-AIC  |      |      |      |      | OLS-BIC  |       |       |       |       | OLS-CAIC  |      |      |      |      |
|-----------|----------|------|------|------|------|----------|-------|-------|-------|-------|-----------|------|------|------|------|
| $c/p$     | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1        | 2     | 3     | 4     | 5     | 1         | 2    | 3    | 4    | 5    |
| 0         | 4.0      | 4.7  | 7.7  | 7.0  | 4.7  | 2.7      | 2.3   | 5.3   | 5.3   | 3.0   | 3.7       | 5.0  | 6.7  | 5.7  | 4.7  |
| 0.1       | -2.7     | 1.0  | -1.3 | -0.7 | -4.7 | -2.3     | -3.3  | -3.0  | -3.0  | -2.3  | -2.3      | -0.3 | -4.0 | -1.7 | -3.0 |
| 0.2       | -5.0     | -1.7 | -0.3 | 0.0  | -2.7 | -7.0     | -6.0  | -3.3  | -3.3  | -2.7  | -6.0      | -1.3 | -0.3 | -2.7 | -3.0 |
| 0.3       | -2.7     | 3.7  | 2.3  | 4.3  | -2.0 | -3.3     | -10.7 | -7.7  | -2.0  | -6.7  | -2.3      | -0.7 | -4.0 | 0.3  | -6.3 |
| 0.4       | 0.3      | 8.0  | 3.7  | 5.7  | 3.3  | -2.0     | -5.7  | -10.7 | -6.7  | -10.3 | -1.0      | 6.0  | 1.0  | -1.7 | -6.0 |
| 0.5       | 2.0      | 4.7  | 4.0  | 2.3  | 6.7  | -0.3     | 0.0   | -12.0 | -17.0 | -13.3 | 0.0       | 4.0  | 0.3  | -1.7 | -3.0 |
| 0.6       | 2.0      | 3.0  | 4.0  | 5.0  | 6.0  | 0.0      | 1.0   | -1.3  | -12.0 | -19.0 | 2.0       | 3.0  | 3.0  | 1.0  | -2.3 |
| 0.7       | 1.7      | 5.0  | 3.7  | 2.3  | 3.7  | 0.7      | 5.0   | -0.7  | -8.3  | -17.7 | 1.7       | 5.3  | 3.7  | 2.0  | 2.3  |
| 0.8       | 0.3      | 2.3  | 4.0  | 1.0  | 2.0  | -0.3     | 2.0   | 2.0   | -8.0  | -18.3 | 0.3       | 2.7  | 4.0  | 0.3  | 0.3  |
| 0.9       | -0.3     | 2.3  | 4.0  | 1.7  | 2.3  | -0.3     | 2.0   | 4.0   | -2.0  | -11.7 | -0.3      | 2.3  | 5.0  | 1.7  | 2.3  |
| $T = 100$ | MLWR-AIC |      |      |      |      | MLWR-BIC |       |       |       |       | MLWR-CAIC |      |      |      |      |
| $c/p$     | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1        | 2     | 3     | 4     | 5     | 1         | 2    | 3    | 4    | 5    |
| 0         | 4.3      | 4.3  | 8.0  | 5.3  | 5.3  | 3.7      | 2.0   | 7.7   | 4.7   | 3.0   | 5.0       | 4.0  | 7.7  | 5.7  | 5.0  |
| 0.1       | -2.0     | 1.7  | -1.3 | -1.3 | -3.7 | -2.3     | -2.3  | -2.3  | -3.3  | -2.7  | -2.3      | 0.7  | -3.3 | -2.3 | -3.3 |
| 0.2       | -6.7     | -1.7 | 0.3  | -3.0 | -2.3 | -7.3     | -5.0  | -3.7  | -4.7  | -3.0  | -7.0      | -0.7 | 0.0  | -4.0 | -3.7 |
| 0.3       | -3.0     | 1.7  | 4.0  | 0.7  | -2.7 | -3.7     | -10.0 | -7.7  | -3.0  | -7.0  | -2.3      | 0.0  | -2.0 | -1.0 | -6.0 |
| 0.4       | -0.3     | 8.3  | 5.0  | 5.0  | 0.7  | -2.0     | -5.3  | -12.3 | -6.7  | -12.0 | -1.0      | 7.0  | 1.0  | -2.3 | -8.7 |
| 0.5       | -2.0     | 5.0  | 3.3  | 2.0  | 3.0  | -0.3     | 0.0   | -11.0 | -17.7 | -12.3 | 0.0       | 4.0  | 1.0  | -3.7 | -4.3 |
| 0.6       | 1.7      | 2.7  | 4.3  | 4.0  | 3.7  | 0.0      | 1.0   | -1.7  | -13.7 | -21.3 | 1.7       | 3.0  | 3.3  | 0.7  | -5.3 |
| 0.7       | 1.7      | 5.7  | 4.0  | 0.7  | 3.7  | 0.7      | 5.3   | -0.7  | -11.7 | -20.0 | 1.3       | 5.7  | 4.3  | 1.0  | 2.3  |
| 0.8       | 0.3      | 3.3  | 4.0  | 0.3  | 1.7  | -0.3     | 2.3   | 1.0   | -8.3  | -18.7 | 0.0       | 3.0  | 3.3  | 0.7  | 0.7  |
| 0.9       | -0.3     | 2.3  | 3.7  | 1.3  | 3.0  | -0.3     | 2.0   | 4.0   | -2.3  | -12.3 | -0.7      | 2.0  | 4.7  | 1.0  | 3.3  |

**Tabuľka 8:** Na koľko percent je lepší (kladné hodnoty)/ horší (záporné hodnoty) Barnettov-Sethov (BS) test v porovnaní s Waldovým (W) testom pre **Model II**, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS respektíve MLWR a  $T = 100$ .

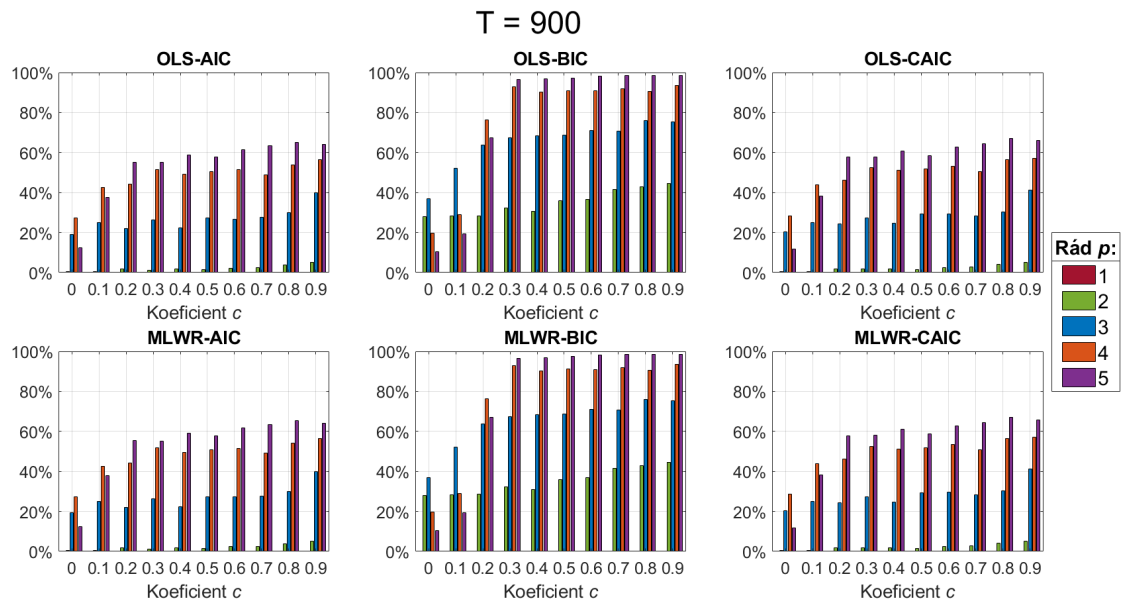
| $T = 900$ | OLS-AIC  |     |     |      |     | OLS-BIC  |      |      |      |      | OLS-CAIC  |     |     |      |     |
|-----------|----------|-----|-----|------|-----|----------|------|------|------|------|-----------|-----|-----|------|-----|
| $c/p$     | 1        | 2   | 3   | 4    | 5   | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1         | 2   | 3   | 4    | 5   |
| 0         | 3.3      | 1.0 | 3.0 | -0.7 | 1.7 | 1.3      | 0.7  | 0.0  | 0.0  | 0.3  | 3.3       | 0.7 | 3.0 | -0.7 | 1.3 |
| 0.1       | -1.7     | 6.0 | 8.0 | 5.3  | 4.0 | -0.7     | -1.7 | -1.0 | -1.0 | -0.3 | -1.0      | 6.0 | 8.0 | 5.0  | 3.3 |
| 0.2       | -1.0     | 5.0 | 2.7 | 5.0  | 3.3 | -0.7     | 4.7  | -2.0 | -2.0 | -0.3 | -1.0      | 5.3 | 2.7 | 5.0  | 3.3 |
| 0.3       | 0.0      | 6.7 | 3.3 | 5.0  | 3.3 | -0.3     | 5.3  | 3.7  | 4.7  | 1.0  | -0.3      | 6.7 | 3.3 | 5.0  | 3.3 |
| 0.4       | -1.0     | 5.0 | 2.3 | 5.0  | 3.7 | -1.0     | 4.7  | 2.0  | 4.0  | 3.7  | -1.0      | 5.0 | 2.0 | 5.0  | 3.3 |
| 0.5       | 1.0      | 9.0 | 1.3 | 2.0  | 2.3 | -0.3     | 8.0  | 1.0  | 2.0  | 2.3  | 1.0       | 9.0 | 1.3 | 2.0  | 2.3 |
| 0.6       | 0.0      | 5.7 | 4.0 | 3.0  | 2.7 | -0.3     | 6.3  | 4.7  | 2.3  | 2.7  | 0.0       | 5.7 | 4.0 | 3.0  | 2.7 |
| 0.7       | 0.3      | 1.7 | 1.7 | 1.3  | 3.3 | 0.3      | 2.0  | 0.7  | 2.0  | 2.7  | 0.3       | 1.7 | 1.0 | 1.3  | 3.3 |
| 0.8       | 0.0      | 3.3 | 2.0 | 1.3  | 2.0 | 0.0      | 2.3  | 2.0  | 1.3  | 2.7  | -0.3      | 3.3 | 2.0 | 1.3  | 2.7 |
| 0.9       | -0.3     | 2.3 | 2.7 | 1.6  | 2.3 | 0.0      | 2.3  | 2.7  | 1.7  | 2.0  | 0.0       | 2.3 | 2.7 | 1.7  | 2.3 |
| $T = 900$ | MLWR-AIC |     |     |      |     | MLWR-BIC |      |      |      |      | MLWR-CAIC |     |     |      |     |
| $c/p$     | 1        | 2   | 3   | 4    | 5   | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1         | 2   | 3   | 4    | 5   |
| 0         | 4.0      | 1.0 | 3.7 | -0.7 | 1.3 | 2.0      | 0.7  | 0.3  | 0.0  | 0.3  | 4.0       | 0.7 | 3.7 | -0.7 | 1.0 |
| 0.1       | -1.0     | 5.7 | 8.3 | 4.3  | 4.0 | 0.0      | -1.0 | -1.0 | -1.0 | -0.3 | -0.3      | 5.7 | 8.0 | 4.0  | 3.3 |
| 0.2       | -0.7     | 5.0 | 2.0 | 4.3  | 2.7 | -0.7     | 4.7  | -2.0 | -2.3 | -0.7 | -0.7      | 5.0 | 2.0 | 4.3  | 2.7 |
| 0.3       | 0.0      | 6.7 | 2.7 | 5.0  | 4.0 | -0.3     | 5.7  | 3.0  | 4.3  | 1.3  | -0.3      | 6.7 | 2.7 | 5.0  | 4.0 |
| 0.4       | -0.3     | 5.0 | 2.7 | 5.3  | 3.7 | -1.0     | 4.7  | 2.0  | 4.3  | 3.3  | -0.3      | 5.0 | 2.3 | 5.3  | 3.3 |
| 0.5       | 0.3      | 9.3 | 1.0 | 2.0  | 2.3 | -0.3     | 8.3  | 0.7  | 1.7  | 2.3  | 0.3       | 9.3 | 1.0 | 2.0  | 2.7 |
| 0.6       | 0.0      | 5.0 | 4.3 | 3.0  | 2.7 | -0.3     | 6.0  | 4.7  | 2.7  | 3.0  | 0.0       | 5.3 | 4.3 | 3.0  | 2.7 |
| 0.7       | 0.3      | 1.3 | 1.7 | 1.0  | 2.3 | 0.3      | 2.0  | 0.7  | 1.7  | 2.0  | 0.3       | 1.3 | 1.0 | 1.0  | 2.7 |
| 0.8       | 0.0      | 3.0 | 2.7 | 1.3  | 2.0 | 0.0      | 2.0  | 2.3  | 1.3  | 2.3  | -0.3      | 3.0 | 2.7 | 1.3  | 2.3 |
| 0.9       | -0.3     | 2.3 | 2.7 | 1.7  | 2.0 | 0.0      | 2.3  | 3.0  | 1.7  | 2.0  | 0.0       | 2.3 | 2.7 | 1.7  | 2.0 |

**Tabuľka 9:** Na koľko percent je lepší (kladné hodnoty)/ horší (záporné hodnoty) Barnettov-Sethov (BS) test v porovnaní s Waldovým (W) testom pre **Model II**, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS respektíve MLWR a  $T = 900$ .

## Príloha C

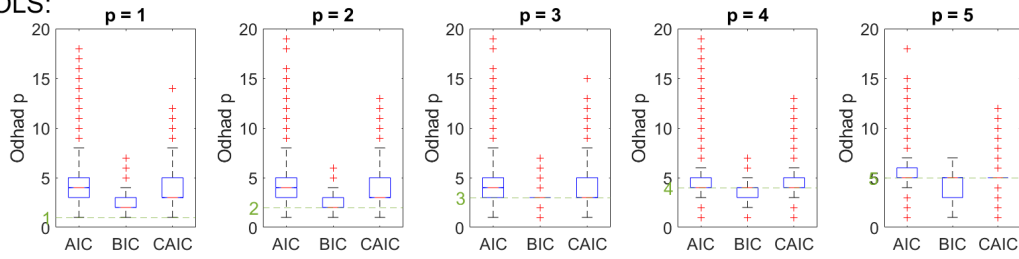


**Obr. C.51:** Percentuálna úspešnosť odhadu rádu  $p$  pre Model IV,  $T = 100$ .

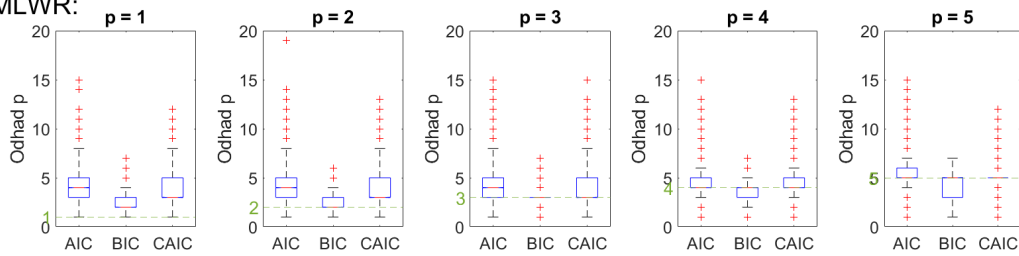


**Obr. C.52:** Percentuálna úspešnosť odhadu rádu  $p$  pre Model IV,  $T = 900$ .

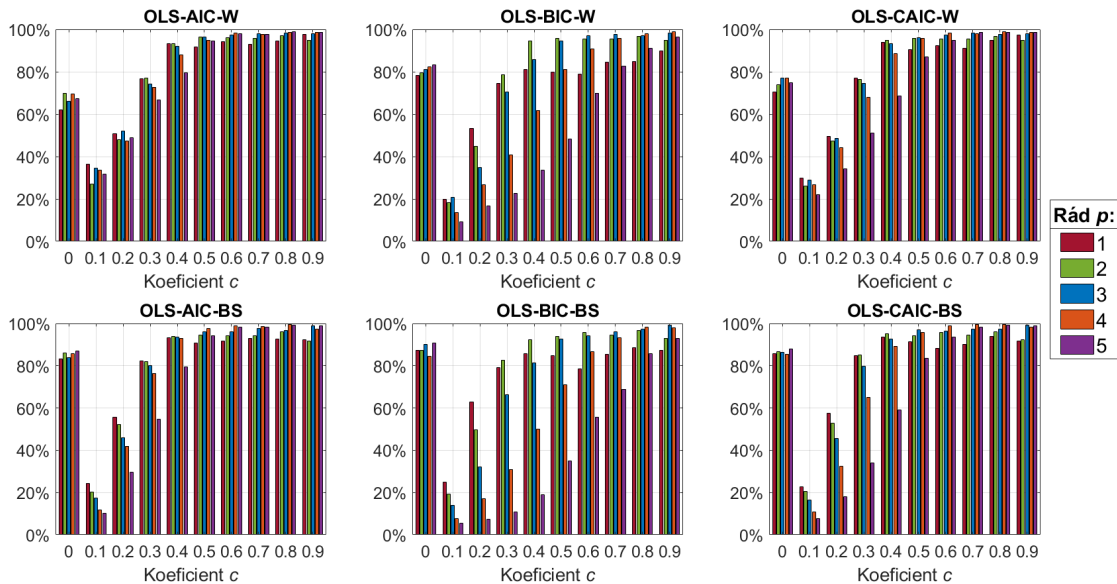
Boxploty-OLS:



Boxploty-MLWR:



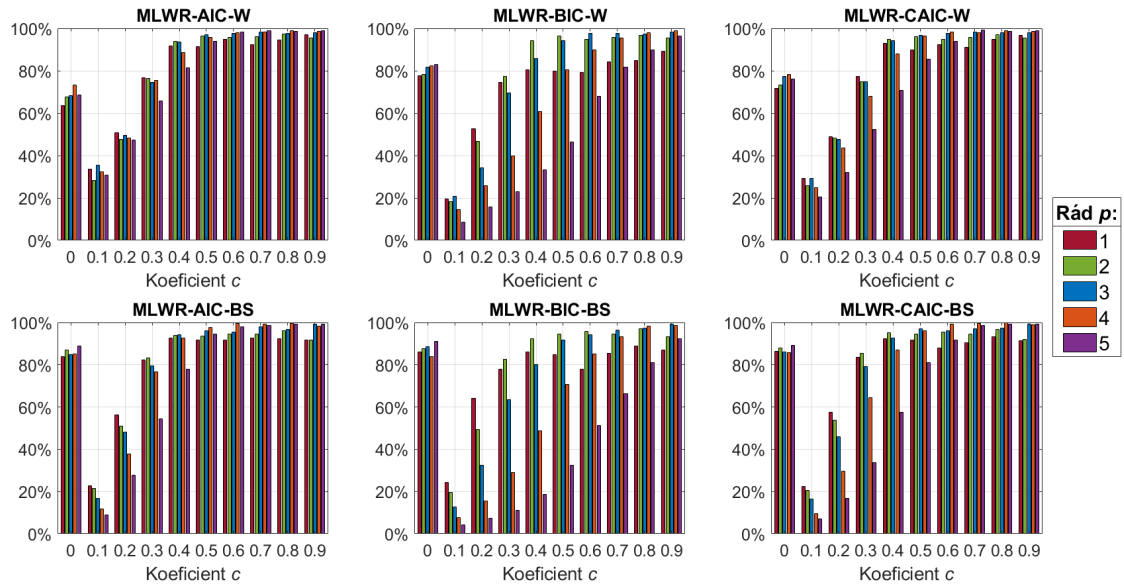
Obr. C.53: Boxploty pre odhady rádu  $p$  podľa informačných kritérií pre Model IV.



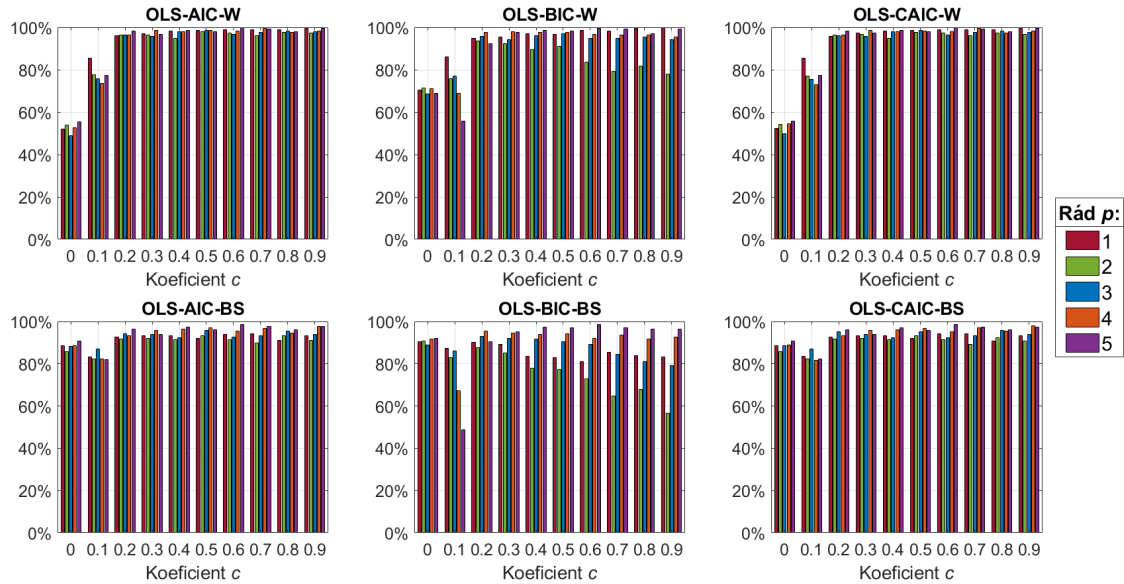
Obr. C.54: Percentuálna úspešnosť správnej detekcie kauzality  $y_1 \rightarrow y_2$  pre  $c = 0.1, \dots, 0.9$  a zároveň správneho nezamietnutia hypotézy  $y_2 \nrightarrow y_1$  W a BS testom pre Model IV, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS a  $T = 100$  (Pozn. pre  $c = 0$  je zamietnutá kauzalita oboma smermi).

|       |             | OLS    |        |        | MLWR   |        |        |
|-------|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p$ : | Info.krit.: | $< p$  | $= p$  | $> p$  | $< p$  | $= p$  | $> p$  |
| 1     | AIC         | 0.00%  | 2.93%  | 97.07% | 0.00%  | 3.11%  | 96.89% |
| 1     | BIC         | 0.00%  | 15.51% | 84.49% | 0.00%  | 15.84% | 84.16% |
| 1     | CAIC        | 0.00%  | 4.15%  | 95.85% | 0.00%  | 4.45%  | 95.55% |
| 2     | AIC         | 0.46%  | 19.61% | 79.93% | 0.49%  | 20.11% | 79.40% |
| 2     | BIC         | 4.26%  | 58.45% | 37.29% | 4.38%  | 58.56% | 37.06% |
| 2     | CAIC        | 0.81%  | 23.15% | 76.04% | 0.86%  | 23.47% | 75.67% |
| 3     | AIC         | 4.56%  | 41.07% | 54.37% | 4.80%  | 41.60% | 53.60% |
| 3     | BIC         | 18.76% | 66.71% | 14.53% | 18.99% | 66.58% | 14.43% |
| 3     | CAIC        | 6.49%  | 44.36% | 49.15% | 6.71%  | 44.59% | 48.70% |
| 4     | AIC         | 9.83%  | 54.48% | 35.69% | 10.15% | 55.02% | 34.83% |
| 4     | BIC         | 29.38% | 66.87% | 3.75%  | 29.58% | 66.69% | 3.73%  |
| 4     | CAIC        | 12.87% | 56.54% | 30.59% | 13.21% | 56.62% | 30.17% |
| 5     | AIC         | 15.48% | 57.51% | 27.01% | 15.92% | 58.11% | 25.97% |
| 5     | BIC         | 36.63% | 62.50% | 0.87%  | 36.98% | 62.17% | 0.85%  |
| 5     | CAIC        | 19.46% | 58.85% | 21.69% | 19.80% | 58.92% | 21.28% |

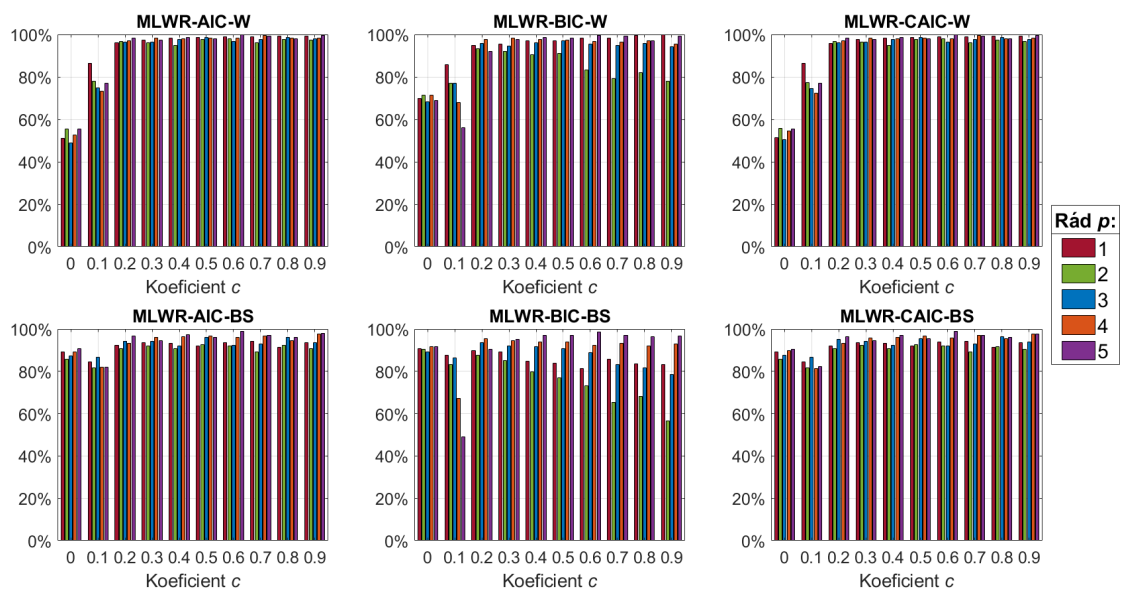
**Tabuľka 10:** Tabuľka porovnania počtov odhadov pre **Model IV**.



**Obr. C.55:** Percentuálna úspešnosť správnej detekcie kauzality  $y_1 \rightarrow y_2$  pre  $c = 0.1, \dots, 0.9$  a zároveň správneho nezamietnutia hypotézy  $y_2 \nrightarrow y_1$  W a BS testom pre **Model IV**, ak boli odhadnuté parametre metódou MLWR a  $T = 100$  (Pozn. pre  $c = 0$  je zamietnutá kauzalita oboma smermi).



**Obr. C.56:** Percentuálna úspešnosť správnej detekcie kauzality  $y_1 \rightarrow y_2$  pre  $c = 0.1, \dots, 0.9$  a zároveň správneho nezamietnutia hypotézy  $y_2 \nrightarrow y_1$  W a BS testom pre **Model IV**, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS a  $T = 900$  (Pozn. pre  $c = 0$  je zamietnutá kauzalita oboma smermi).



**Obr. C.57:** Percentuálna úspešnosť správnej detekcie kauzality  $y_1 \rightarrow y_2$  pre  $c = 0.1, \dots, 0.9$  a zároveň správneho nezamietnutia hypotézy  $y_2 \nrightarrow y_1$  W a BS testom pre **Model IV**, ak boli odhadnuté parametre metódou MLWR a  $T = 900$  (Pozn. pre  $c = 0$  je zamietnutá kauzalita oboma smermi).

| $T = 100$ | OLS-AIC  |      |       |       |       | OLS-BIC  |      |      |       |       | OLS-CAIC  |      |       |       |       |
|-----------|----------|------|-------|-------|-------|----------|------|------|-------|-------|-----------|------|-------|-------|-------|
| $c/p$     | 1        | 2    | 3     | 4     | 5     | 1        | 2    | 3    | 4     | 5     | 1         | 2    | 3     | 4     | 5     |
| 0         | 21.3     | 16.0 | 18.0  | 16.0  | 19.7  | 9.0      | 7.7  | 9.0  | 2.0   | 7.3   | 15.3      | 12.7 | 9.3   | 8.3   | 13.0  |
| 0.1       | -12.0    | -6.7 | -17.3 | -22.0 | -21.3 | 5.0      | 1.0  | -6.7 | -6.0  | -4.0  | -7.3      | -5.3 | -12.7 | -16.0 | -14.3 |
| 0.2       | 5.0      | 4.3  | -6.0  | -5.3  | -19.3 | 9.7      | 4.7  | -3.0 | -9.7  | -9.3  | 8.0       | 5.3  | -3.0  | -12.0 | -16.3 |
| 0.3       | 5.7      | 5.0  | 5.7   | 3.7   | -12.0 | 4.3      | 4.0  | -4.0 | -9.7  | -12.0 | 7.7       | 8.7  | 5.0   | -3.0  | -17.0 |
| 0.4       | 0.0      | 0.7  | 1.7   | 5.0   | -0.3  | 4.7      | -2.3 | -4.3 | -11.7 | -14.7 | -0.3      | 0.0  | -0.7  | 0.7   | -9.7  |
| 0.5       | -1.0     | -1.7 | -0.3  | 2.7   | -0.3  | 4.7      | -1.7 | -2.0 | -10.0 | -13.3 | 1.0       | -1.3 | 1.0   | 0.0   | -3.3  |
| 0.6       | -2.7     | -1.7 | -1.3  | 0.7   | 0.3   | -0.3     | 0.3  | -2.7 | -4.0  | -14.3 | -4.0      | 0.3  | -1.0  | 0.7   | -1.3  |
| 0.7       | 0.0      | -1.3 | -0.3  | 1.0   | 0.7   | 0.7      | -0.7 | -1.7 | -2.3  | -14.0 | -1.0      | -0.7 | -1.0  | 1.7   | -0.3  |
| 0.8       | -2.0     | -1.0 | -1.7  | 1.0   | 0.3   | 3.7      | 0.0  | 0.3  | 0.3   | -5.3  | -1.0      | -0.7 | -0.3  | 0.7   | 0.7   |
| 0.9       | -5.3     | -3.3 | 1.0   | -1.3  | 0.3   | -2.7     | -2.0 | 1.0  | -1.0  | -3.3  | -5.7      | -2.7 | 1.3   | -0.3  | 0.3   |
| $T = 100$ | MLWR-AIC |      |       |       |       | MLWR-BIC |      |      |       |       | MLWR-CAIC |      |       |       |       |
| $c/p$     | 1        | 2    | 3     | 4     | 5     | 1        | 2    | 3    | 4     | 5     | 1         | 2    | 3     | 4     | 5     |
| 0         | 20.3     | 19.3 | 16.3  | 11.7  | 20.3  | 8.3      | 9.3  | 7.0  | 1.7   | 8.0   | 14.7      | 14.7 | 8.7   | 7.3   | 13.3  |
| 0.1       | -11.0    | -7.0 | -18.7 | -20.7 | -21.7 | 4.7      | 1.3  | -8.0 | -7.0  | -4.3  | -7.0      | -5.0 | -13.0 | -15.3 | -13.3 |
| 0.2       | 5.7      | 3.3  | -1.7  | -10.7 | -19.7 | 11.3     | 2.7  | -2.0 | -10.0 | -8.3  | 8.7       | 5.3  | -1.7  | -14.0 | -15.3 |
| 0.3       | 5.7      | 7.0  | 4.7   | 1.3   | -11.3 | 3.3      | 5.3  | -6.3 | -11.0 | -12.0 | 6.3       | 10.3 | 4.0   | -3.7  | -18.7 |
| 0.4       | 1.0      | 0.0  | 0.7   | 4.0   | -3.3  | 5.7      | -2.0 | -5.7 | -12.0 | -14.7 | -0.7      | 0.0  | -1.7  | -1.0  | -13.0 |
| 0.5       | 0.3      | -2.7 | -1.0  | 2.0   | 0.7   | 4.7      | -1.7 | -2.7 | -9.7  | -14.0 | 1.7       | -1.3 | 0.3   | -0.3  | -4.0  |
| 0.6       | -3.3     | -1.0 | -2.3  | 1.7   | -0.3  | -1.3     | 0.7  | -3.3 | -5.0  | -16.7 | -4.3      | 0.3  | -1.7  | 1.0   | -2.3  |
| 0.7       | 0.3      | -1.3 | -0.3  | 1.0   | -0.3  | 1.0      | -1.0 | -1.3 | -2.0  | -15.3 | -0.7      | -1.0 | -1.3  | 1.7   | -0.7  |
| 0.8       | -2.3     | -1.3 | -1.0  | 0.7   | 0.7   | 4.0      | 0.3  | 0.0  | 0.3   | -9.0  | -1.7      | -0.3 | -0.7  | 1.0   | 0.7   |
| 0.9       | -5.3     | -3.7 | 1.3   | -0.3  | 0.3   | -2.3     | -2.0 | 1.0  | -0.3  | -4.0  | -5.3      | -3.3 | 1.3   | 0.3   | 0.3   |

**Tabuľka 11:** Na koľko percent je lepší (kladné hodnoty)/ horší (záporné hodnoty) Barnettov-Sethov (BS) test v porovnaní s Waldovým (W) testom pre **Model IV**, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS respektíve MLWR a  $T = 100$ .



| $T = 900$ | OLS-AIC  |      |      |      |      | OLS-BIC  |       |       |      |      | OLS-CAIC  |      |      |      |      |
|-----------|----------|------|------|------|------|----------|-------|-------|------|------|-----------|------|------|------|------|
| $c/p$     | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1        | 2     | 3     | 4    | 5    | 1         | 2    | 3    | 4    | 5    |
| 0         | 36.7     | 31.7 | 39.3 | 36.0 | 35.3 | 20.0     | 19.3  | 20.3  | 20.7 | 23.0 | 36.3      | 31.3 | 38.7 | 34.3 | 35.0 |
| 0.1       | -2.0     | 4.7  | 11.3 | 8.7  | 4.7  | 1.3      | 7.3   | 9.0   | -1.7 | -7.0 | -1.7      | 5.3  | 11.7 | 8.7  | 5.0  |
| 0.2       | -3.3     | -4.7 | -2.0 | -3.0 | -2.0 | -5.0     | -6.0  | -2.7  | -2.3 | -2.0 | -3.0      | -4.7 | -1.0 | -3.0 | -2.3 |
| 0.3       | -3.7     | -4.3 | -1.7 | -3.0 | -2.7 | -6.0     | -7.3  | -2.3  | -3.3 | -2.7 | -4.0      | -4.7 | -1.7 | -3.0 | -3.3 |
| 0.4       | -5.0     | -3.7 | -5.7 | -1.7 | -1.3 | -13.3    | -11.7 | -4.3  | -3.7 | -1.3 | -5.0      | -3.7 | -5.7 | -2.0 | -1.7 |
| 0.5       | -6.7     | -4.7 | -3.0 | -1.7 | -2.0 | -13.7    | -13.7 | -6.7  | -3.3 | -1.3 | -6.7      | -4.3 | -3.7 | -1.7 | -2.3 |
| 0.6       | -5.0     | -6.0 | -4.0 | -3.0 | -1.3 | -17.7    | -10.7 | -5.7  | -4.7 | -1.0 | -4.7      | -6.0 | -4.0 | -3.0 | -1.3 |
| 0.7       | -4.7     | -6.3 | -4.3 | -3.0 | -1.7 | -13.0    | -14.7 | -10.7 | -2.7 | -2.3 | -4.7      | -6.7 | -4.3 | -2.7 | -2.0 |
| 0.8       | -8.0     | -4.3 | -3.0 | -3.0 | -2.0 | -15.7    | -13.7 | -14.3 | -4.7 | -0.7 | -8.3      | -5.0 | -2.6 | -2.0 | -2.0 |
| 0.9       | -6.3     | -6.3 | -4.0 | -0.7 | -2.0 | -16.7    | -21.3 | -15.3 | -2.7 | -3.0 | -6.3      | -6.0 | -3.7 | -0.3 | -2.3 |
| $T = 900$ | MLWR-AIC |      |      |      |      | MLWR-BIC |       |       |      |      | MLWR-CAIC |      |      |      |      |
| $c/p$     | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 1        | 2     | 3     | 4    | 5    | 1         | 2    | 3    | 4    | 5    |
| 0         | 38.3     | 30.3 | 38.3 | 36.7 | 35.3 | 20.7     | 19.0  | 21.0  | 20.3 | 22.7 | 38.0      | 30.0 | 37.3 | 35.0 | 35.0 |
| 0.1       | -2.0     | 3.7  | 11.7 | 8.7  | 5.0  | 2.0      | 6.3   | 9.3   | -0.7 | -7.0 | -2.0      | 4.3  | 12.0 | 9.0  | 5.3  |
| 0.2       | -3.7     | -6.0 | -2.0 | -3.7 | -1.7 | -5.3     | -5.7  | -2.0  | -2.3 | -1.7 | -3.7      | -6.0 | -1.0 | -3.7 | -2.0 |
| 0.3       | -3.7     | -4.0 | -2.0 | -2.3 | -2.7 | -6.0     | -7.0  | -2.7  | -3.7 | -2.7 | -4.0      | -4.0 | -2.0 | -2.7 | -3.0 |
| 0.4       | -5.0     | -4.3 | -5.7 | -1.7 | -1.3 | -12.3    | -10.7 | -4.3  | -3.7 | -1.7 | -5.0      | -4.3 | -5.3 | -2.0 | -1.7 |
| 0.5       | -6.7     | -5.0 | -2.7 | -1.7 | -2.0 | -13.0    | -14.0 | -6.3  | -3.3 | -1.3 | -6.7      | -5.0 | -3.3 | -1.7 | -2.7 |
| 0.6       | -5.3     | -6.0 | -4.3 | -2.3 | -1.0 | -17.0    | -10.0 | -6.3  | -4.3 | -1.0 | -5.0      | -6.0 | -4.3 | -2.3 | -1.0 |
| 0.7       | -4.7     | -6.7 | -4.7 | -3.0 | -2.3 | -12.7    | -14.0 | -11.7 | -3.0 | -2.3 | -4.7      | -6.7 | -4.7 | -2.7 | -2.3 |
| 0.8       | -8.0     | -5.3 | -2.7 | -3.7 | -2.0 | -16.0    | -13.7 | -14.0 | -5.0 | -0.7 | -8.0      | -5.7 | -2.3 | -2.7 | -2.0 |
| 0.9       | -5.7     | -6.7 | -4.3 | -0.7 | -1.7 | -16.7    | -21.3 | -15.7 | -2.3 | -2.7 | -5.7      | -6.3 | -3.7 | -0.7 | -2.0 |

**Tabuľka 12:** Na koľko percent je lepší (kladné hodnoty)/ horší (záporné hodnoty) Barnettov-Sethov (BS) test v porovnaní s Waldovým (W) testom pre **Model IV**, ak boli odhadnuté parametre metódou OLS respektíve MLWR a  $T = 900$ .