UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Optimalizácia vodných elektrární Vážskej kaskády v krátkodobom horizonte

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2023

Bc. Juraj JANKOLA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Optimalizácia vodných elektrární Vážskej kaskády v krátkodobom horizonte

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Zuzana Chladná, Dr.

Bratislava 2023
Bc. Juraj JANKOLA

28176304

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Bc. Juraj Jankola
Študijný program:	ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor:	matematika
Typ záverečnej práce:	diplomová
Jazyk záverečnej práce:	slovenský
Sekundárny jazyk:	anglický

Názov: Optimalizácia vodných elektrární Vážskej kaskády v krátkodobom horizonte
Short term optimization of Váh river hydropower plants

Anotácia: Obchodné oddelenie v spoločnosti v spoločnosti Slovenské Elektrárne(SE) a.s. má za úlohu riadiť rozsiahle portfólio výrobných zdrojov za účelom maximalizácie zisku z predaja elektriny pri zachovaní všetkých technických požiadaviek. Rastúca produkcia z obnoviteľných zdrojov elektrickej energie na Európskom trhu sa vyznačuje veľkou volatilitou výroby, náhle zmeny výroby môžu spôsobiť nestabilitu siete a až dokonca blackout. Slovenské elektrárne disponujú pomerne veľkým portfóliom flexibilnej výroby, ktorá vie reagovať na náhle zmeny vo výrobe obnoviteľných zdrojov. To vedie na relatívne komplexný optimalizačný problém. Príprava prevádzky musí určiť výrobu každej jednotky v každej hodine spôsobom, ktorý jednak využije všetky trhové príležitosti a tiež rešpektuje všetky konštrukčné a prevádzkové obmedzenia. Plánovať výrobu vodných elektrární je potrebné pre rôzne časové horizonty: intraday, spot, týždeň, mesiac a až po ročné plánovanie. Poznámka: Táto diplomová práce ponúka možnosť uplatniť teoretické vedomosti z optimalizačných techník pri riešení reálneho problému z praxe. Konzultantom práce je Tomáš Šimovič, Senior konzultant pre kvantitatívne analýzy v SE. Diplomant bude mať možnosť spoznať zblízka každodenné fungovanie prípravy prevádzky, ktorý sa venuje riadeniu zdrojov obchodovaniu na komoditných trhoch (tzv. „asset backed trading“) a bude mať možnosť pracovať s najlepšou technológiou v oblasti „prescriptive analytics“. V prípade záujmu je možné diplomovú prácu skombinovať s platenou stážou na oddelení obchodu SE a.s.

Vedúci:	RNDr. Zuzana Chladná, Dr.
Katedra:	FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry:	doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Dátum zadania:	11.01.2022
Dátum schválenia:	14.01.2022

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.... študent

.... vedúci práce

Poďakovanie Na tomto mieste sa chcem poďakovať svojej vedúcej bakalárskej práce doc. RNDr. Zuzane Chladnej, Dr. za neochvejnú trpezlivosť pri kontrolách práce, včasné odpovede na moje dotazy, podnetné pripomienky a motiváciu k účasti na študentskej vedeckej konferencii. Ďalej sa chcem poďakovať mojim kolegom v Slovenských elektrárňach, Tomášovi Šimovičovi a Adamovi Fajkusovi, za odborné poradenstvo a príjemnú pracovnú atmosféru. Na záver sa chcem poďakovať svojej priateľke za emociálnu a morálnu podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

JANKOLA, Juraj: Optimalizácia vodných elektrární Vážskej kaskády v krátkodobom horizonte [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Zuzana Chladná, Dr., Bratislava, 2023, 57 s.

V čase vysokých cien elektriny a s dôrazom na väčší odklon od fosílnych palív je stále dôležitejšia výroba elektrickej energie z obnoviteľných zdrojov. Jedným z producentov obnoviteľnej energie sú aj vodné elektrárne. V našej práci sa budeme venovať optimalizácii prevádzky vodných elektrární na Vážskej kaskáde. Optimalizovať prevádzku znamená určiť také nasadenie generátorov pre každú elektráreň v každej hodine dňa, ktoré nám prinesie najväčší zisk s ohľadom na ich vzájomné prepojenie a technické obmedzenia. Zisk je generovaný predajom elektriny na spotovom trhu. Úlohu sme formulovali ako úlohu Mixed Integer Linear Programming (MILP) a ako Mixed Integer Quadratically Constrained Programming (MIQCP). Hlavným cieľom tejto práce bolo nájsť najlepší spôsob aproximácie nelineárnej funkcie výkonu jednotlivých elektrární, ktorá produkuje elektrickú energiu. V závere práce sme zhodnotili použité prístupy z hľadiska rýchlosti a presnosti optimalizácie.

Kľúčové slová: Vodná elektráreň, optimalizácia prevádzky, aproximácia funkcie viacerých premenných, MILP, MIQCP

Abstract

JANKOLA, Juraj: Short term optimization of Váh river hydropower plants [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Zuzana Chladná, Dr., Bratislava, 2023, 57 s.

The need for renewable energy production rises in times of high energy prices and decrease in usage of fossil fuels. One of the biggest producers of renewable energy are hydropower plants. Our work will be centred around Váh river-chain optimization. The goal of optimization is to determine a commitment of generators in every hour for every hydropower plant in a way that maximizes our profit with regard to their interconnection and technical limitations. Our profit comes from selling the energy at the spot market. The optimization problem was defined as a Mixed Integer Linear Programming (MILP) problem and as a Mixed Integer Quadratically Constrained Programming (MIQCP) problem. The main goal of this work was to find the best way to approximate the non-linear energy production function. In the end we evaluated all the approaches from speed and precision aspect.

Keywords: Hydropower plants, unit-commitment problem, multi-variable function approximation, MILP, MIQCP

Obsah

Úvod

Vodné elektrárne sú najväčším zdrojom obnoviteľnej elektrickej energie na Slovensku [13]. Na rozdiel od ostatných obnoviteľných zdrojov elektrickej energie, akými sú veterné a solárne elektrárne, je výroba elektrickej energie vo vodnej elektrárni flexibilná a *dispačovateľná*. Pod pojmom *dispačovateľná* rozumieme schopnosť prispôsobiť výrobu elektriny počas rádovo desiatok sekúnd a tým vyrovnať výkyvy v sieti spôsobené napríklad solárnymi alebo veternými elektrárňami. S výnimkou extrémnych situácií (napr. dlhotrvajúce sucho, či nepredvídateľná porucha), flexibilita vo výrobe umožňuje reagovať aj na zmeny vo vývoji spotových cien na trhu s elektrinou a to bez ohľadu na počasie. Flexibilita vo výrobe vytvára priestor pre optimalizáciu výroby s cieľom dosiahnuť čo najväčší zisk z predaja elektrickej energie.

Optimalizácii prevádzky vodných elektrární na Vážskej kaskáde sa venovanlo už niekoľko prác. Práca [14] sa venovala optimalizácii prečerpávacej vodnej elektrárne Čierny Váh. Táto elektráreň však nie je súčasťou nami optimalizovanej siete vodných elektrární. Optimalizácii vodnej elektrárne Kráľová sa venovala práca [15]. V tejto práci však išlo o optimalizáciu jedinej elektrárne bez prepojenia s celou Vážskou kaskádou. Hydraulickému výskumu na vodných elektrárňach Vážskej kaskády sa venovala práca [4]. Technickému popisu a matematickému modelovaniu jednotlivých elektrární Vážskej kaskády sa venovala práca [3].

Množstvo vyrobenej elektrickej energie (v MWh) priamo závisí od objemu vody, ktorá pretečie elektrárňou a spádu, teda rozdielu hornej a dolnej hladiny prislúchajúcej danej elektrárni. Presný matematický vzťah zachytávajúci závislosť výroby elektrickej energie od spádu a prietoku je možné reprezentovať empiricky odmeranou nelineárnou funkciou, ktorá je rôzna pre každú elektráreň. Presný vzťah je uvedený v [3].

Z matematického hľadiska riadenie prevádzky vodnej elektrárne je možné primárne považovať za úlohu optimálneho riadenia. V prípade Vážskej kaskády je tento prístup nepoužiteľný z dôvodu veľkého počtu premenných vstupujúcich do optimalizačného modelu. Pri takomto rozmere by riešenie úlohy štandardnými metódami optimálneho riadenia trvalo príliš dlho pre praktické použitie. Veľký rozmer úlohy je daný počtom elektrární Vážskej kaskády. Ďalší faktor, ktorý výrazne zväčšuje rozmer danej úlohy, je optimalizácia po hodinách v rámci celého dňa. Pôvodný problém sme preto upravili do tvaru úlohy celočíselného zmiešaného lineárneho programovania (MILP), resp. úlohy celočíselného zmiešaného programovania s kvadratickými ohraničeniami (MIQCP). Formulácia v takomto tvare umožňuje využiť sofistikované numerické prístupy, s využitím ktorých je možné nájsť riešenie aj pre úlohu s veľkým počtom premenných v požadovanom čase. Pri tomto prístupe sme však obmedzení požiadavkou, aby všetky ohraničenia a účelová funkcia boli reprezentované lineárnou, resp. kvadratickou funkciou.

Práca je rozdelená do piatich kapitol. V prvej kapitole predstavíme matematický model Vážskej kaskády a popíšeme technické obmedzenia, ktoré je nutné pri optimalizácii zohľadniť. V druhej kapitole uvedieme formuláciu úlohy MILP, resp. MIQCP a stručne charakterizujeme postupy používané solverom Gurobi na nájdenie optimálneho riešenia. Tretia kapitola prináša prehľad rôznych typov aproximácií použitých pri numerickom riešení problému stanovenia optimálnej prevádzky vodných elektrární. V štvrtej kapitole postupne popíšeme 6 optimalizačných modelov Vážskej kaskády, ktoré sme navrhli. Vysvetlíme, aké typy aproximácií v nich boli použité. Následne predstavené modely podrobíme numerickej analýze. Na základe porovnania rýchlosti a presnosti výpočtu na vybranom obchodovacom dni vyberieme najlepšie tri modely. V piatej kapitole numericky porovnáme tieto modely s reálnym prevádzkovým modelom momentálne používaným v Slovenských elektrárňach na viacerých dňoch. Nakoniec najlepší z týchto troch modelov porovnáme s prevádzkovým modelom na ďalších 30 dňoch. V závere práce uvedieme možné budúce rozšírenia modelu.

1 Model Vážskej kaskády

Vážska kaskáda sa skladá z 22 elektrární. Ich celkový inštalovaný výkon je 1515 MW. Naším cieľom je optimalizovať prevádzku všetkých elektrární súčasne. Na začiatku tejto kapitoly predstavíme model na stanovenie optimálnej prevádzky vodných elektrární Vážskej kaskády.

Prevádzku vodných elektrární Vážskej kaskády, ktorá patrí pod správu Slovenských elektrární, je potrebné optimalizovať tak, aby sa maximalizoval zisk z predaja vyrobenej elektrickej energie. V našich modeloch budeme predpokladať, že cena ($price_t$), za ktorú vyrobenú elektrinu predávame, je vopred známa (dostatočne presne odhadnutá) pre každú hodinu t, ($t = 0, \dots, 23$), daného dňa. Objem elektriny, ktorý budeme predávať, je daný sumárnym výkonom všetkých elektrární. Výkon $P_{t,p}$ elektrárne p v hodine t môžeme modelovať dvomi spôsobmi. V nasledujúcich častiach predstavíme dva modelovacie prístupy. V prvom z nich (časť 1.2) výkon elektrárne popíšeme ako funkciu spádu a prietoku. Alternatívne vieme výkon vyjadriť ako funkciu objemov horných a dolných nádrží a prietoku. Tento prístup použijeme v druhom modeli (časť 1.3). Pri optimalizácii prevádzky Vážskej kaskády je potrebné zohľadniť viaceré prevádzkové a technické obmedzenia. V neposlednom rade je potrebné zohľadniť vzájomnú previazanosť a súslednosť jednotlivých elektrární vyplývajúcu zo zdieľania rovnakého vodného toku, na ktorom sú postavené. Elektrárne sa navzájom ovplyvňujú tým, koľko vody pretečie cez jednu elektráreň a eventuálne sa dostane do druhej. Tento vzťah a aj ďalšie dôležité technické obmedzenia popíšeme v druhej časti tejto kapitoly. Slovenské elektrárne na Vážskej kaskáde poskytujú aj podporné služby, ktoré sme však do modelov nezahrnuli.

1.1 Matematický model Vážskej kaskády

Ako sme uviedli, problém riadenia prevádzky Vážskej kaskády je úlohou dynamického programovania. Presnejšie, ide o úlohu v nasledujúcom tvare:

$$\max \quad \sum_{t=0}^{T-1}\sum_{p=0}^{plant-1} price_t P_{t,p} - \sum_{t=0}^{T-1}\sum_{p=0}^{plant-1} q\_spill\_pen_{t,p} Q\_spill\_plant_{t,p} \tag{1}$$
$$- \sum_{t=0}^{T-1}\sum_{r=0}^{res-1} spill\_pen_{t,r}(Q\_spill_{t,r} - outflows\_bio_{t,r})$$
$$- \sum_{t=0}^{T-1}\sum_{g=0}^{gen-1} tg\_startup\_cost_g TG\_startup_{t,g}$$

za podmienok:

$$P_{t,p} = \begin{cases} F_1(Q_{t,p}, H_{t,p}) \\ F_2(Q_{t,p}, HH\_V_{t,p}, DH\_V_{t,p}) \end{cases} \quad t\text{=0,..,T-1; } p\text{=0,..,plant-1} \tag{2}$$

$$V_{t+1,r} = V_{t,r} + z(-Q^{out}_{t,r} - Q\_spill_{t,r} + infl_{t,r} + Q^{in}_{t,r}) \tag{3}$$

t=0,..,T-1; p=0,..,plant-1,res = 0,..,res-1

$$V_{0,r} = v_{0,r} \quad r\text{=0,..,res-1} \tag{4}$$

$$TG_{t,g} = \begin{cases} 1 & \text{ak } TG_{t-min(min\_TG\_up\_time,t),g} = 1 \\ 1 & \text{ak } TG_{t-1,g} = 1 \text{ a } TG\_shutdown_{t,g} = 0 \\ 1 & \text{ak } TG_{t-1,g} = 0 \text{ a } TG\_startup_{t,g} = 1 \\ 0 & \text{ak } TG_{t-1,g} = 0 \text{ a } TG\_shutup_{t,g} = 0 \\ 0 & \text{ak } TG_{t-1,g} = 1 \text{ a } TG\_shutdown_{t,g} = 1 \end{cases} \tag{5}$$

t=1,..,T-1; g=0,..,gen-1

$$TG_{0,g} = \begin{cases} 1 & \text{ak } TG\_startup_{0,g} = 1 \\ 0 & inak \end{cases} \quad g\text{=0,..,gen-1} \tag{6}$$

$$0 = TG\_startup_{t,g} \text{ ak } TG_{t,g} = 1 \quad t\text{=0,..,T-1, } g\text{=0,..,gen-1} \tag{7}$$

$$0 = TG\_shutdown_{t,g} \text{ ak } TG_{t,g} = 0 \quad t\text{=0,..,T-1, } g\text{=0,..,gen-1} \tag{8}$$

$$Q_{t,p} \leq \sum_{g=firstTG_p}^{lastTG_p} TG_{t,g} qtg^{max}_{t,g} \quad t\text{=0,..,T-1; } p\text{=0,..,plant-1} \tag{9}$$

$$Q_{t,p} \geq \sum_{g=firstTG_p}^{lastTG_p} TG_{t,g} qtg^{min}_{t,g} \quad t\text{=0,..,T-1; } p\text{=0,..,plant-1} \tag{10}$$

$$Q^{out}_{t,r} = Q_{t,p} + Q\_spill\_plant_{t,p} \quad t\text{=0,..,T-1; } r\text{=0,..,res-1, } p \text{ pre elektráreň} \tag{11}$$

pod nádržou r

$$Q^{out}\_del_{t,r} = \begin{cases} Q^{out}_{t,r} + F_3(Q\_spill_{\tau,r}) & \text{ak } r \in SK\_w\_delay \\ Q^{out}_{t,r} + Q\_spill_{t,r} & \text{inak} \end{cases} \tag{12}$$

t=0,..,T-1; r= 0,..,res-1, τ=0,..,t

$$Q^{in}_{t,r+1} = \begin{cases} F_4(Q^{out}\_del_{\tau,r}) & \text{ak } r \in res\_w\_delay \\ Q^{out}\_del_{t,r} & \text{inak} \end{cases} \tag{13}$$

t=0,..,T-1; r=0,..,res-2, τ=0,..,t

$$Q_{t,p} + Q\_spill\_plant_{t,p} = Q_{t,p+1} + Q\_spill\_plant_{t,p+1} \tag{14}$$

t=0,..,T-1; $p \in canal\_scheme$

$$\sum_{t=0}^{T-1} Q^{out}_{t,r}/T \leq max\_avg\_out_r \quad r\text{=0,..,res-1} \tag{15}$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} Q^{out}_{t,r}/T \geq min\_avg\_out_r \quad r\text{=0,..,res-1} \tag{16}$$

$$q^{diff}_p \geq |Q_{t,p} - Q_{t-1,p}| \quad t\text{=0,..,T-1; p=0,..,plant-1} \tag{17}$$

$$q^{max}\_canal_p \geq Q_{t,p} + Q\_spill\_plant_{t,p} \quad t\text{=0,..,T-1; p=0,..,plant-1} \tag{18}$$

$$V_{T,r} \in \langle \hat{V}^{min}_r, \hat{V}^{max}_r \rangle \quad t\text{=0,..,T-1; r=0,..,res-1} \tag{19}$$

$$Q_{t,p} \in \{0\} \cup \langle Q^{min}_p, Q^{max}_p \rangle \quad t\text{=0,..,T-1; p=0,..,plant-1} \tag{20}$$

$$P_{t,p} \in \{0\} \cup \langle P^{min}_p, P^{max}_p \rangle \quad t\text{=0,..,T-1; p=0,..,plant-1} \tag{21}$$

$$V_{t,r} \in \langle V^{min}_r, V^{max}_r \rangle \quad t\text{=0,..,T-1; r=0,..,res-1} \tag{22}$$

Vzhľadom na väčší rozsah parametrov a premenných v modeli uvádzame prehľad a popis vstupných parametrov v Tabuľke 1, použitých stavových premenných v Tabuľke 2 a použitých riadiacich premenných v Tabuľke 3. V účelovej funkcii (1) maximalizujeme zisk z prevádzky všetkých elektrární $p = 0, \ldots, plant - 1$ počas fixného časového horizontu 24 hodín. Príjem z výroby elektrickej energie je daný súčinom ceny ($price_t$) a výkonu ($P_{t,p}$) elektrárne p v čase t v každej hodine dňa. Náklady na prevádzku zahŕňajú pokutu za jalové prietoky ($q\_spill\_pen_p$) a odtoky($spill\_pen_r$) a náklady na zapnutie generátora ($tg\_startup\_cost_g$). Riadenie prevádzky spočíva v rozhodnutí o veľkosti prietoku ($Q_{t,p}$),veľkosti jalového odtoku ($Q\_spill_{t,r}$), jalového prietoku ($Q\_spill\_plant_{t,p}$) a počte zapnutých generátorov pre každú elektráreň a každú hodinu dňa. Stavová premenná $V_{t,r}$ označuje objem nádrže r v čase t. Ohraničenie (3) vyjadruje zmenu objemu nádrže za jednu ho-

Názov parametra	Rozmer	Stručný popis
T	1×1	časový úsek, na ktorom optimalizujeme (24h)
$plant$	1×1	počet elektrární (22)
res	1×1	počet nádrží (12)
gen	1×1	počet generátorov (52)
z	1×1	prevod zo sekúnd na hodiny (3600)
$price$	$T \times 1$	cena za MWh vyrobenej elektrickej energie
$spill\_pen$	$T \times res$	pokuta za jalový prietok a odtok
$outflows\_bio$	$T \times res$	nutné biologické odtoky
$tg\_startup\_cost$	$gen \times 1$	cena zapnutia generátora
min_TG_uptime	$gen \times 1$	minimálny čas behu generátora
$firstTG$	$plant \times 1$	poradové čísla prvých generátorov jedn. elektrární
$lastTG$	$plant \times 1$	poradové čísla posledných generátorov jedn. elektrární
$infl$	$T \times res$	prítoky z vedľajších tokov, dažďa
min_avg_out	$res \times 1$	minimálne priemerné odtoky
max_avg_out	$res \times 1$	maximálne priemerné odtoky
q^{max}_canal	$p \times 1$	maximálny tok kanálom
q^{diff}	$plant \times 1$	maximálna zmena prietoku cez elektráreň
v_0	$res \times 1$	počiatočný objem v nádrži
$\hat{V}^{max}, \hat{V}^{min}$	$res \times 1$	maximálny a minimálny koncový objem
Q^{max}, Q^{min}	$T \times plant$	maximálny a minimálny prietok elektrárňou
P^{max}, P^{min}	$T \times plant$	maximálny a minimálny výkon elektrárne
V^{max}, V^{min}	$T \times res$	maximálny a minimálny objem nádrže
H^{max}, H^{min}	$T \times plant$	maximálny a minimálny spád
qtg^{max}, qtg^{min}	$T \times gen$	maximálny a minimálny prietok generátorom

Tabuľka 1: Vstupné parametre modelu

Názov stavovej premennej	Rozmer	Stručný popis
P	$T \times plant$	výkon
H	$T \times plant$	spád
V	$T \times plant$	objem nádrže
Q^{out}	$T \times res$	sumárny odtok z nádrže do kanála
Q^{out}_del	$T \times res$	súčet odtoku z nádrže do kanála s oneskoreným jalovým odtokom
Q^{in}	$T \times res$	sumárny prítok do nádrže
HH	$T \times plant$	výška hornej hladiny
DH	$T \times plant$	výška dolnej hladiny
HH_V	$T \times plant$	objem hornej nádrže
DH_V	$T \times plant$	objem dolnej nádrže
TG	$T \times gen$	stav generátora (1-zapnutý, 0-vypnutý)

Tabuľka 2: Stavové premenné

Názov riadiacej premennej	Rozmer	Stručný popis
Q	$T \times plant$	prietok
Q_spill_plant	$T \times plant$	jalový prietok
Q_spill	$T \times res$	jalový odtok
TG_starup	$T \times gen$	zapnutie generátora
$TG\_shutdown$	$T \times gen$	vypnutie generátora

Tabuľka 3: Riadiace premenné

dinu. Parameter z zabezpečuje prevod sekúnd na hodiny, keďže prietok $Q_{t,p}$ je v jednotkách m^3s^{-1}. V ohraničení (3) ešte vystupuje parameter $infl_{t,r}$ označujúci prítoky z rôznych prirodzených vedľajších tokov a premenná $Q^{in}_{t,r}$ reprezentujúca objem vody, ktorý dotečie do nádrže r v čase t. Parameter $v_{0,r}$ označuje počiatočný objem vody v nádrži $r = 0, .., res - 1$. Každá elektráreň sa skladá z dvoch až troch generátorov (Liptovská Mara zo štyroch, ale je rozdelená v modeli na dve osobitné elektrárne). Stavová premenná $TG_{t,g}$ hovorí o tom, či je generátor g zapnutý ($TG_{t,g} = 1$), resp. vypnutý ($TG_{t,g} = 0$) v čase t. Ohraničenia (5) a (6) nám hovoria, či je generátor g zapnutý v čase t. V týchto ohraničeniach ďalej vystupuje parameter $min\_TG\_up\_time_g$ vyjadrujúci minimálny čas, ktorý musí generátor ostať zapnutý. Binárne riadiace premenné $TG\_startup_{t,g} = 1$, resp. $TG\_shutdown_{t,g} = 1$ vyjadrujú, či sme generátor g v čase t zapli, resp. vypli. Ohraničenia (7) a (8) nám zabezpečujú, aby sme nezapínali zapnutý generátor alebo nevypínali vypnutý generátor. Ohraničenia (9) a (10) zabezpečujú, aby bolo možné pokryť celkový prietok cez každú elektráreň prietokmi cez zapnuté generátory danej elektrárne. Parametre $qtg^{min}_{t,g}$, resp. $qtg^{max}_{t,g}$ označujú minimálny, resp. maximálny prietok generátorom g v čase t. Index $g = 0, ..., gen - 1$, ide cez všetky generátory všetkých elektrární. Parametre $firstTG_p$ a $lastTG_p$ nám priradzujú konkrétny počet generátorov ku konkrétnej elektrárni p. Premenná $Q^{out}_{t,r}$ označuje sumárny odtok z nádrže r do kanála, ako je definované v ohraničení (11). Ohraničenie (12) reprezentuje medzisúčet toku do kanála a oneskoreného jalového odtoku $Q\_spill_{\tau,r}$. Množina SK_w_delay obsahuje nádrže, ktoré majú staré koryto, v ktorom dochádza k oneskoreniu $Q\_spill_{t,r}$. Funkcia F_3 je nelineárna funkcia dotoku oneskoreného jalového odtoku závislá od jeho hodnôt do času t. Ohraničenie (13) definuje pomocnú premennú $Q^{in}_{t,r+1}$, ktorá je sumárnym prítokom do nádrže $r+1$. Vidíme, že pre nádrže z množiny res_w_delay dochádza znova k oneskoreniu dotoku. Funkcia F_4 definuje oneskorenia toku $Q^{out}\_del_{\tau,r}$ a je závislá od predchádzajúcich hodnôt do času t. Osobitne bolo potrebné vyriešiť elektráreň Krpeľany, do ktorej doteká voda s oneskorením aj z elektrárne Bešeňová aj z elektrárne Tvrdošín. Táto špecifická závislosť je zahrnutá do modelu, avšak kvôli lepšej prehľadnosti sme ju do popisu modelu nezahrnuli. Elektrárne, medzi ktorými sa nenachádza žiadna nádrž, sú zahrnuté do množine $canal\_scheme$. Pre tento typ elektrární potrebujeme špecifikovať ďalšie ohraničenie (14): objem vody, ktorý pretečie elektrárňou p sa nemá kde zadržať, a teda rovnaký objem vody musí pretiecť aj elektrárňou $p+1$. Ohraničenia (15) a (16) zabezpečujú, aby boli dodržané minimálne a maximálne odtoky z jednotlivých nádrží, pričom premenná $Q^{out}_{t,r}$ reprezentuje sumárny odtok z nádrže r v čase t. Ohraničenie (17) hovorí o maximálnej zmene prietoku danou elektrárňou medzi dvoma hodinami. Ohraničenie (18) stanovuje maximálny tok vodným kanálom. Ohraničenie (19) stanovuje interval pre koncový stav nádrží. Podmienky (20)–(22) vymedzujú povolený rozsah hodnôt jednotlivých premenných.

1.2 Modelovanie výkonu v priestore spádu a prietoku

V tomto prístupe kľúčovú premennú optimalizačného modelu, výkon elektrárne $P_{t,p}$, reprezentujeme ako funkciu dvoch premenných, spádu a prietoku, nasledovne

$$P_{t,p} = F_1(Q_{t,p}, H_{t,p}) \quad \textit{t=0,..,T-1; p=0,..,plant-1,} \tag{23}$$

$$H_{t,p} = HH_{t,p} - DH_{t,p} \quad \textit{t=0,..,T-1; p=0,..,plant-1,} \tag{24}$$

kde $H_{t,p}$ (z angl. *Head*) je spád elektrárne p v čase t. Hodnotu spádu určíme ako rozdiel výšok hornej ($HH_{t,p}$) a dolnej ($DH_{t,p}$) hladiny (24). Výšku hornej a dolnej hladiny vo všeobecnosti modelujeme nasledovne:

$$HH_{t,p} = F_5(V_{t,r}) \quad \textit{t=0,..,T-1; p=0,..,plant-1; r=0,..res-1,}$$

$$DH_{t,p} = F_6(Q_{t,p}, HH_{t,p+1}) \; \textit{t=0,..,T-1; p=0,..,plant-1.}$$

Funkcia F_5 je nelineárna funkcia závislosti výšky hornej hladiny od objemu nádrže r nad elektrárňou p. Funkcia F_6 je nelineárna funkcia závislosti výšky dolnej hladiny elektrárne p od prietoku danou elektrárňou a výšky hornej hladiny nasledujúcej elektrárne.

Vodné elektrárne Vážskej kaskády nie sú identické. Z modelovacieho hľadiska je potrebné rozlíšiť polohu elektrárne vzhľadom k vodnej nádrži. Táto charakteristika je kľúčová pri modelovaní výšky hornej a dolnej hladiny. Pre účely tejto práce sme rozlíšili nasledujúce typy elektrární:

- **Typ 0**: ide o elektrárne, ktoré sú medzi dvoma nádržami. To znamená, že prislúchajúca horná hladina sa mení podľa objemu hornej nádrže a dolná hladina sa mení podľa hornej hladiny nasledujúcej nádrže a prietoku cez danú elektráreň. Hornú hladinu aproximujeme po častiach lineárne. Dolnú hladinu by tak bolo potrebné aproximovať v dvoch premenných, a to v prietoku a hornej hladine nasledujúcej elektrárne. Tento prístup je však veľmi neefektívny, pretože vyžaduje zavedenie veľkého množstva nových premenných spojených s dvojrozmernou po častiach lineárnou aproximáciou. Preto dolnú hladinu aproximujeme s využitím lineárnej regresie v tvare $DH_{t,p} = a_pQ_{t,p} + b_pHH_{t,p+1} + intercept_p$. Tento prístup je úspornejší z hľadiska pridaného počtu premenných.

- **Typ 1**: ide o elektrárne, ktoré sú hneď pod nádržou, ale hneď za nimi nie je ďalšia nádrž. To znamená, že prislúchajúca horná hladina sa mení podľa objemu hornej nádrže a dolná hladina sa mení len podľa prietoku cez danú elektráreň. Hornú hladinu aproximujeme po častiach lineárne. Dolnú hladinu aproximujeme lineárnou funkciou v tvare $DH_{t,p} = a_pQ_{t,p} + intercept_p$.

- **Typ 2**: ide o elektrárne, ktoré sú kanálové. To znamená, že ich horná a dolná hladina sa nemení. Ich výkon teda závisí iba od prietoku.

- **Typ 3**: ide o elektrárne, ktoré nie sú hneď pod nádržou, ale sú pred nádržou. To znamená, že ich horná hladina sa nemení a dolná hladina sa mení podľa hornej hladiny nasledujúcej nádrže a prietoku cez danú elektráreň. Dolnú hladinu by bolo potrebné aproximovať v dvoch premenných, a to v prietoku a hornej hladine nasledujúcej elektrárne. Z rovnakých dôvodov, ako pre elektrárne typu 0, sme sa dolnú hladinu rozhodli aproximovať lineárnou funkciou v tvare $DH_{t,p} = a_pQ_{t,p} + b_pHH_{t,p+1} + intercept_p$.

- **Typ 4**: ide o elektrárne, ktoré sú hneď pod nádržou a na začiatku sústavy kanálových elektrární. To znamená, že ich horná hladina sa mení podľa objemu hornej nádrže a dolná hladina sa mení podľa vzťahu bližšie opísaného v [4], ktorý sme však do tejto práce nezahrnuli: dolnú hladinu považujeme za fixnú. Hornú hladinu aproximujeme po častiach lineárne.

Hodnoty odhadnutých koeficientov a_p, b_p a $intercept_p$ z dôvodu veľkého rozsahu neuvádzame.

1.3 Modelovanie výkonu v priestore prietoku a objemu hornej a dolnej nádrže

Druhou možnosťou je popísať výkon ako funkciu prietoku a objemu horných a dolných hladín. Objem hornej nádrže označíme premennou $HH\_V_{t,p}$ a objem dolnej nádrže premennou $DH\_V_{t,p}$. Ako sme uviedli v časti 1.2, nie všetky elektrárne sú priamo pod alebo nad nádržou. Výkon sme preto podľa typu elektrárne modelovali nasledovne:

- **Typ 0**: tu patria elektrárne, ktoré sú hneď pod nádržou a pred ďalšou nádržou. To znamená, že máme k dispozícii oba objemy a ich výkon budeme aproximovať v priestore premenných $Q_{t,p}$ a $(HH\_V_{t,p} - DH\_V_{t,p})$.

- **Typ 1 a 4**: tu patria elektrárne, ktoré sú hneď pod nádržou, ale hneď za nimi nie je ďalšia nádrž. To znamená, že máme k dispozícii len objem hornej nádrže a ich výkon budeme aproximovať v priestore premenných $Q_{t,p}$ a $HH\_V_{t,p}$.

- **Typ 2**: tu patria elektrárne, ktoré sú kanálové. To znamená, že ich horná a dolná hladina sa nemení. Ich výkon teda závisí iba od prietoku a budeme ho aproximovať iba v priestore $Q_{t,p}$.

- **Typ 3**: tu patria elektrárne, ktoré nie sú hneď pod nádržou, ale sú pred nádržou. To znamená, že máme k dispozícii iba objem dolnej nádrže a ich výkon budeme aproximovať v priestore premenných $Q_{t,p}$ a $DH\_V_{t,p}$.

1.4 Technické obmedzenia

Požiadavka na reálnu aplikovateľnosť optimalizačného modelu si vynucuje brať do úvahy viaceré technické obmedzenia, ktoré prevádzky jednotlivých elektrární musia spĺňať. V nasledujúcich častiach si postupne priblížime jednotlivé skupiny obmedzení, ktoré sú súčasťou modelu. Poznamenajme, že vzhľadom na individuálne charakteristiky jednotlivých elektrární, nie všetky technické obmedzenia sa vzťahujú na každú z elektrární Vážskej kaskády.

1.4.1 Generátory

Medzi základné technické charakteristiky vodnej elektrárne patrí informácia o maximálnom, resp. minimálnom výkone (označíme P^{max}, resp. P^{min}) a o maximálnom, resp. minimálnom prietoku (označíme Q^{max}, resp. Q^{min}). Výkon elektrárne je rozdelený medzi dva alebo tri identické generátory. Výnimkou je jedine vodná elektráreň Tvrdošín, na výkone ktorej sa podielajú dva generátory s rovnakým výkonom a tretí generátor s menším výkonom. Očakávaným výstupom optimalizačného modelu je aj rozhodnutie, ktorý z generátorov v jednotlivých elektrárňach je optimálne zapnúť v danú hodinu dňa.

Manažovanie prevádzky jednotlivej vodnej elektrárne spočíva v rozhodnutí o výške prietoku cez elektrárne v každú hodinu dňa. Navyše je potrebné rozhodnúť o prevádzke jednotlivých generátorov v elektrárni. Z tohto dôvodu zavedieme stavovú premennú $TG_{t,g} \in \{0,1\}, t = 0,..,T-1; g = 0,..,gen-1$, kde $TG_{t,g} = 1$ hovorí, že konkrétny generátor g je zapnutý v čase t. Keďže zapínaním a vypínaním sa generátor opotrebúva, zavedieme parameter $TG\_starup\_cost_g$, ktorý určuje pokutu, resp. náklady na zapnutie generátora. Ďalej zavedieme riadiacu premennú $TG\_startup_{t,g}$ určujúcu, či sme zapli generátor g v čase t. Premenná $TG\_shutdown_{t,g}$ bude určovať, či sme generátor g vypli v čase t. Teda pri rozhodovaní, či bude prietok elektrárňou $Q1$ alebo $Q2$, kde $Q1 \leq Q2$, budeme musieť brať do úvahy aj to, či na prietok $Q2$ musíme zapnúť ďalší generátor. Taktiež chceme zabezpečiť, aby sa generátory nezapínali, resp. nevypínali príliš často. Zaviedli sme preto parameter min_TG_uptime, čiže minimálny čas, ktorý musí ostať generátor zapnutý po jeho spustení.

Ohraničenia (5)–(8), ktoré zhŕňajú všetky technické požiadavky ohľadom prevádzky generátorov, vieme alternatívne prepísať nasledovne:

$$TG\_startup_{t,g} \leq TG_{t,g} \quad \textit{(t=0,..,T-1, g=0,..,gen-1)} \tag{25}$$

$$TG\_shutdown_{t,g} \leq 1 - TG_{t,g} \quad \textit{(t=0,..,T-1, g=0,..,gen-1)} \tag{26}$$

$$TG_{t,g} - TG_{t-1,g} = TG\_startup_{t,g} - TG\_shutdown_{t,g} \quad \textit{(t=0,..,T-1, g=0,..,gen-1)} \tag{27}$$

$$TG_{t1,g} \geq TG_{t,g} - TG_{t-1,g} \tag{28}$$

$$\textit{(t1=t,..,min(T-1,min\_TG\_uptime), t=0,..T-1,g=0,..,gen-1)}$$

$$TG_{t1,g} - 1 \leq TG_{t,g} - TG_{t-1,g} \tag{29}$$

$$\textit{(t1=t,..,min(T-1,min\_TG\_uptime), t=0,..,T-1,g=0,..,gen-1),}$$

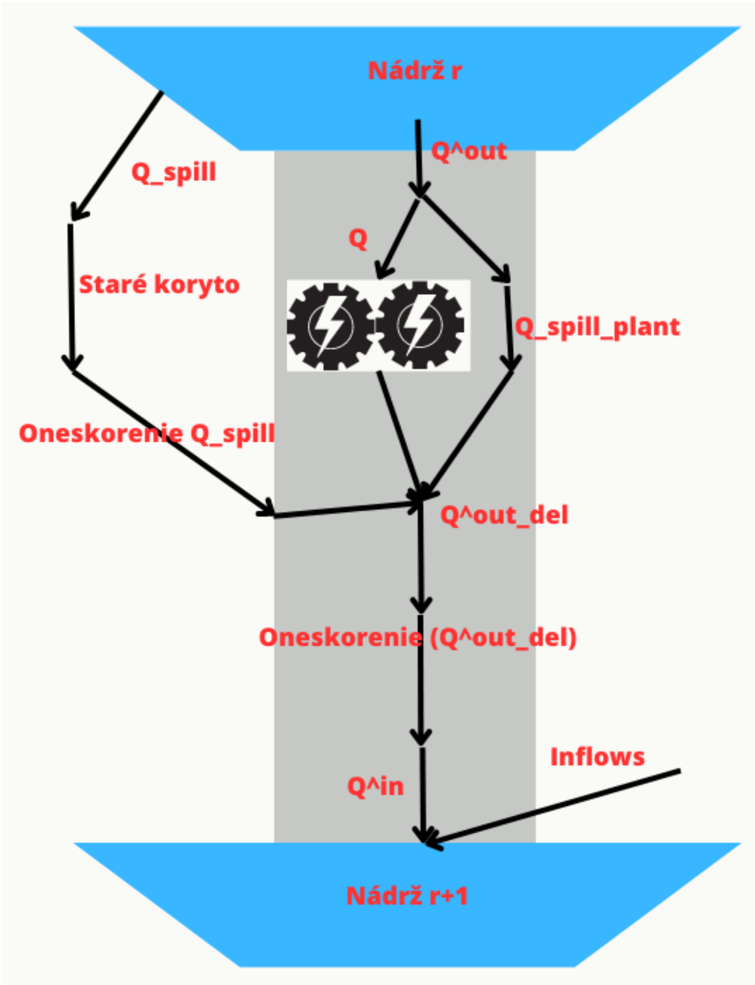
kde ohraničenie (25) zodpovedá ohraničeniu (7), ohraničenie (26) zodpovedá ohraničeniu (8) a ohraničenia (5) a (6) zodpovedajú ohraničeniam (27)–(29). Podmienky (25)–(29) sú lineárneho charakteru, čo ako uvidíme v Kapitole 3, bude podstatné pri numerickom riešení optimalizačného problému. Z implementačného hľadiska bolo potrebné zaviesť ešte dva vektory. Vektor $firstTG$ bude obsahovať na mieste p poradové číslo prvého generátora prislúchajúceho elektrárni p. Vektor $lastTG$ bude obsahovať na mieste p poradové číslo posledného generátora prislúchajúceho elektrárni p.

1.4.2 Jalové prietoky

Jalový odtok z nádrže r budeme označovať premennou Q_spill_r a jalový prietok cez p-tu elektráreň budeme označovať premennou $Q\_spill\_plant_p$. V prípade Q_spill_r ide o odtok cez staré koryto, teda mimo kanála, na ktorom sa nachádza daná elektráreň. V prípade $Q\_spill\_plant_p$ ide o prietok cez p-tu elektráreň mimo generátorov, ktorý sa nepodieľa na výrobe elektriny. Je dôležité túto premennú zahrnúť do modelu, lebo bez nej by maximálny tok vody cez elektráreň bol daný jej maximálnym prietokom $Q^{max}_{t,p}$. Zároveň, ak by boli z technických príčin odstavené všetky generátory danej kanálovej elektrárne, nebolo by možné bez jalového prietoku dostať vodu do zvyšných elektrární na kanáli. Výsledkom optimalizácie by však mohla byť napríklad aj situácia, pri ktorej je optimálne prelievať zbytočne veľa vody jalovým prietokom. Toto nadmerné využívanie jalového prietoku by bolo dôsledkom toho, že optimalizujeme len v rámci jedného dňa, ale z dlhšieho časového hľadiska by nemuselo byť optimálne. Preto zavedieme parameter $q\_spill\_pen_p$, ktorý bude fungovať ako pokuta za jalový prietok v účelovej funkcii. Ďalej jalový odtok je potrebný aj preto, lebo niektoré elektrárne majú pri sebe aj biologický kanál, cez ktorý musí voda pretekať pre zachovanie biodiverzity. Kvôli tejto skutočnosti musíme zaviesť ďalší parameter $outflows\_bio_r$, o ktorý znížime v účelovej funkcii pokutu za jalový odtok z nádrže r.

1.4.3 Dotokové časy

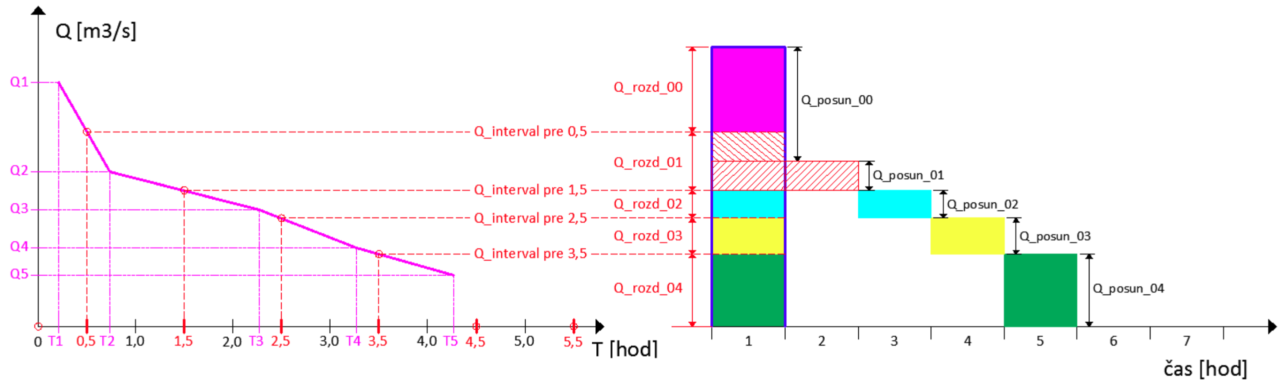
Dôležitou súčasťou optimalizačného modelu sú dotokové časy. Tento problém musíme riešiť pri nádržiach, ktoré nemajú priamu hydraulickú väzbu. To znamená, že sú od seba vzdialené relatívne ďaleko a všetka voda vypustená z nádrže r nedotečie do nádrže $r+1$ v jednom časovom kroku. Dotokové časy musíme uvažovať aj pri nádržiach, ktoré majú staré koryto. Staré koryto je pôvodný tok rieky, ktorý je často dlhší ako novopostavený umelý kanál, na ktorom je vodná elektráreň pod nádržou. Pri starom koryte tiež musíme riešiť dotokový čas medzi nádržou a kanálom za elektrárňou, kde sa tento tok spája s jalovým odtokom z nádrže. Pre lepšiu vizualizáciu uvádzame schému na Obr. 1.



Obr. 1: Grafická reprezentácia prietoku kanálom a starým korytom. Sivou reprezentujeme kanál, šípky reprezentujú príslušné toky.

Ako je uvedené v [3], čas dotoku a objem, ktorý dotečie z nádrže r do nádrže $r+1$ sú funkciou celkového objemu vody, ktorý tečie buď kanálom alebo starým korytom. Podľa [3] je dotoková funkcia nelineárna, preto ak optimalizačný model chceme naformulovať ako úlohu MILP, resp. MIQCP, musíme nájsť vhodnú lineárnu, resp. kvadratickú aproximáciu funkcie dotokových časov. Pre všetky nádrže, pri ktorých potrebujeme počítať dotokové časy, budeme vychádzať z reálne nameraných diskrétnych hodnôt závislosti dotokového času od prietoku. Následne danú nelineárnu závislosť budeme po častiach lineárne aproximovať.

Na Obr. 2 sme pre ilustráciu schematicky znázornili výpočet dotokových časov. Počiatočný prietok $Q1$ (vľavo) zodpovedá celkovému vypustenému objemu reprezentovanému prvým farebným stĺpcom (Obr. 2 vpravo). V ďalšom časovom kroku, tj. v priebehu jednej hodiny, nám dotečie do nasledujúcej elektrárne len voda s objemom Q_posun_00, v priebehu ďalšej hodiny, nám dotečie voda s objemom Q_posun_01 atď. Ak by sme na začiatku mali prietok, napríklad len Q4, znamenalo by to, že prvé tri hodiny do nasledujúcej elektrárne nepritečie žiadna voda a potom v štvrtú hodinu pritečie všetka voda s objemom Q_posun_04. Na Obr. 2 vidíme, že objem, ktorý pritečie v čase t, mohol byť vypustený v časoch $t-1, t-2, ..., t-4$. Preto sme v modeli definovali celkový prítok do nádrže $r+1$ v čase t ako $Q^{in}_{t,r+1} = F_4(Q^{out}\_del_{\tau,r})$. Každá elektráreň má iný maximálny dotokový čas, preto funkciu F_4 definujeme všeobecne pre $\tau = 0, \ldots, t$. Rovnako sme v modeli definovali oneskorený jalový odtok ($Q\_spill_{t,r}$), ktorý dotečie v čase t v rovnici (12) ako funkciu $F_3(Q\_spill_{\tau,r})$, pre $\tau = 0, \ldots, t$, teda závislú od predchádzajúcich hodnôt $Q\_spill_{\tau,r}$ do času t.



Obr. 2: Grafická reprezentácia výpočtu dotokových časov. Zdroj: Interná komunikácia v SE.

2 Typy optimalizačných úloh

Úloha optimalizácie prevádzky sformulovaná v časti 1.1 je úlohou optimálneho riadenia. Vzhľadom na veľký počet premenných vstupujúcich do výpočtu by riešenie štandardnými technikami optimálneho riadenia nebolo dostatočne efektívne vzhľadom na dĺžku výpočtu. Alternatívou je riešiť tento problém ako úlohu celočíselného zmiešaného lineárneho programovania (MILP), resp. celočíselného zmiešaného kvadraticky ohraničeného programovania (MIQCP). V súčasnosti sú dostupné viaceré numerické metódy, ktoré aj pre úlohy veľkých rozmerov vedia nájsť riešenie dostatočne rýchlo pre praktické použitie. V tejto práci využijeme solver Gurobi [8], ktorý v súčasnosti patrí k jedným z najpoužívanejších solverov na riešenie úloh zmiešaného celočíselného programovania. Úlohy v tvare MILP, resp. MIQCP vie Gurobi relatívne rýchlo vyriešiť. V tejto časti si uvedieme, štandardné tvary úloh MILP, resp. MIQCP, aj akými spôsobmi ich solver Gurobi rieši.

2.1 Lineárne programovanie

Základným typom problémov v matematickom programovaní sú úlohy lineárneho programovania. V týchto úlohách optimalizujeme lineárnu účelovú funkciu cez množinu riešení sústavy lineárnych rovníc a nerovníc. Štandardný tvar úlohy lineárneho programovania je nasledovný:

$$\min_x c^T x \tag{30}$$

$$Ax \geq b \tag{31}$$

$$x \geq 0 \tag{32}$$

Najznámejšou metódou riešenia úloh tohto typu je simplexová metóda. Keďže naša úloha nie je v tvare úlohy lineárneho programovania, nebudeme bližšie venovať simplexovej metóde a iným spôsobom riešenia týchto úloh. Prehľad metód na riešenie úloh lineárneho programovania je možné nájsť napríklad v [6].

2.2 Úloha zmiešaného celočíselného lineárneho programovania

Rozšírením úloh lineárneho programovania je úloha zmiešaného celočíselného lineárneho programovania. Toto rozšírenie spočíva v tom, že niektoré premenné budú naďalej spojité a zvyšné budú definované len na podmnožine celých čísel. Špeciálne, ak všetky celočíselné premenné môžu nadobúdať len binárne hodnoty $0, 1$ ide o úlohu zmiešaného binárneho programovania.

Pri riešení problému optimálnej prevádzky Vážskej kaskády je predstavenie binárnych premenných potrebné z viacerých dôvodov. Prvým z nich je samotná povaha niektorých premenných. Typickým príkladom je premenná, ktorá reprezentuje stav generátora. O ňom predpokladáme, že sa môže nachádzať len v jednom z dvoch stavov (zapnutý, vypnutý). Premenná reprezentujúca stav generátora je preto nutne binárna. Druhým dôvodom predstavenia binárnych premenných je potreba linearizácie riešeného problému. Binárna premenná nám v tomto prípade pomáha identifikovať príslušnosť k linearizovanej ploche.

2.2.1 Formulácia

Formulácia problému MILP vyzerá nasledovne:

$$\min_x c^T x \tag{33}$$

$$Ax + Dy \geq b \tag{34}$$

$$x \geq 0, y \in \mathbb{Z}^+. \tag{35}$$

Pridanie ohraničenia na celočíselnosť niektorých premenných znemožňuje pri riešení úlohy použiť štandardné metódy na riešenie úloh lineárneho programovania. Na riešenie predstaveného problému v tvare MILP, resp. MIQCP využijeme softvér Gurobi. Ide o komerčný softvér na riešenie úloh lineárneho a kvadratického programovania, ďalej úlohy s kvadratickými ohraničeniami (konvexnými aj nekonvexnými) a úlohy kónického programovania. Gurobi je v súčasnosti považovaný za najrýchlejší solver na riešenie týchto typov problémov [8]. V nasledujúcej časti stručne nahliadneme do numerických metód, ktoré Gurobi používa na riešenie úloh MILP, resp. MIQCP.

2.2.2 Metódy optimalizácie

Prístup, ktorým Gurobi rieši MILP úlohy, sa nazýva *branch-and-cut* algoritmus. Tento algoritmus je zovšeobecnením algoritmu *branch-and-bound* s použitím tzv. rezných plôch. V nasledujúcej časti si v krátkosti priblížime obe metódy.

Metóda vetvenia a medzí (Branch and bound) Ide o univerzálny algoritmus na riešenie MILP úloh. Na jeho začiatku máme MILP úlohu, ktorú nevieme riešiť, preto urobíme jej lineárnu relaxáciu. To znamená, že riešime rovnakú úlohu, len bez ohraničení na celočíselnosť premenných. Ako je uvedené v [7], môže nastať niekoľko prípadov. Samozrejme, ak lineárna relaxácia nemá riešenie, nemá ho ani pôvodná úloha. Ďalej, ak je relaxovaná úloha neohraničená, je aj pôvodná úloha neohraničená alebo nemá riešenie. Najlepším prípadom je, keď riešenie relaxovanej úlohy spĺňa aj ohraničenia na celočíselnosť a v tom prípade máme priamo riešenie pôvodnej úlohy. Prípad, ktorý nastáva najčastejšie a budeme sa mu podrobnejšie venovať, je, keď relaxovaná úloha má riešenie, ale nespĺňa ohraničenia na celočíselnosť. Ak napríklad premenná $x_i = p$ nespĺňa ohraničenie na celočíselnosť, vytvoríme dve podúlohy U_1 a U_2. V úlohe U_1 riešime pôvodný problém s pridaným ohraničením $x_i \leq \lfloor p \rfloor$ a v úlohe U_2 pribudne ohraničenie $x_i \leq \lceil p \rceil$. Algoritmus takýmto spôsobom vetví pôvodnú úlohu na podúlohy, pričom si vždy pamätá najlepšiu dosiahnutú hodnotu účelovej funkcie, v^{min}, pre minimalizačnú úlohu, v niektorej vetve. Rozhodnutie o ďalšom vetvení prebieha nasledovne. Nech pre relaxovanú úlohu U_k dostaneme riešenie x^k s hodnotou optimálnej funkcie v^k. Ak platí $v^k \geq v^{min}$, tak žiadna ďalšie vetvenie nám nezlepší hodnotu účelovej funkcie a vo vetvení nepokračujeme. Ak platí $v^k \leq v^{min}$ a sú splnené celočíselné ohraničenia, zapamätáme si v_k ako novú najlepšiu hodnotu účelovej funkcie a vo vetvení nepokračujeme. Ak platí $v^k \leq v^{min}$, ale nie sú splnené celočíselné ohraničenia, je potrebné danú úlohu U_k znova rozvetviť v niektorej z premenných nespĺňajúcich celočíselné ohraničenia. Takto vlastne postupne prechádzame jednotlivé celočíselné možnosti premenných a teda vidíme, že pri veľkom počte premenných nemusí proces dostatočne rýchlo konvergovať. V práci [7] sú uvedené bližšie aj metódy výberu uzla na vetvenie. Gurobi [8] používa prístup *Best Bound* ako default.

Rezné nadroviny (Cutting planes) Rezné nadroviny boli zavedené ako spôsob riešenia MILP úloh. Ich cieľom je pridávať ohraničenia v tvare nadrovín tak dlho, kým nedostaneme množinu prípustných riešení, ktorej všetky vrcholy tvoria celé čísla, ktoré sú najbližšie k hranám relaxovanej úlohy. Potom už riešenie, ktoré dostaneme zo simplexovej metódy, bude určite spĺňať podmienku celočíselnosti. Solver Gurobi používa rôzne typy rezných nadrovín. Najznámejšou z nich je Gomoryho zmiešaný celočíslený rez. Podrobný popis, ako sa rôzne rezy tvoria, možno nájsť napr. v [9].

2.3 MIQCP

Rozšírením úloh zmiešaného celočíselného lineárneho programovania sú úlohy zmiešaného celočíselného kvadratického programovania (MIQP). Jediný rozdiel medzi týmito úlohami je v tom, že účelová funkcia je kvadratická. Ohraničenia i naďalej musia byť lineárne. Jedným z prístupov k aproximácii výkonu v modeli Vážskej kaskády je aproximácia kvadratickou funkciou. Z popisu modelu v časti 1.1 v tvare úlohy optimálneho riadenia sa môže zdať, že výkon vstupuje len do účelovej funkcie a model je možné formulovať ako úlohu MIQP. Ako ukážeme neskôr pri predstavovaní modelov, funkcia výkonu bude vstupovať aj do ohraničení a teda výsledný model bude v tvare zmiešaného celočíselného programovania s kvadratickými ohraničeniami (MIQCP). Vo všeobecnosti úloha v tvare MIQCP vyzerá nasledovne:

$$\min_x x^T Q x + c^T x \tag{36}$$

$$Ax = b \tag{37}$$

$$x^T W x + w^T x \leq 0 \tag{38}$$

$$l \leq x \leq u \tag{39}$$

$$x_i \in \mathbb{Z} \text{ pre i} \in I, \tag{40}$$

kde I je množina indexov označujúce celočíselné zložky vektora x. Matica Q a matica W sú kladne semidefinitné symetrické matice. Matica A a vektor b určujú lineárne ohraničenia pre x. Vektor c určuje lineárnu zložku účelovej funkcie. Vektor w určuje lineárnu zložku v kvadratických ohraničeniach. Vekotry l a u definujú horné a dolné ohraničenia pre premennú x. Gurobi vie riešiť aj problémy tohto typu. Pre bližší popis metód riešenia odkazujeme čitateľa na [12].

3 Spôsoby aproximácie

Ako sme mohli vidieť v Kapitole 1, v ktorej sme predstavili model optimalizácie prevádzky vodnej elektrárne, viaceré vzťahy, ktoré v ňom vystupujú, sú nelineárneho charakteru. Kvôli požiadavkám na rýchlosť a presnosť výpočtu je našim cieľom daný problém riešiť ako úlohu MILP resp. MIQCP. Kľúčovým problémom je teda nájdenie vhodného spôsobu aproximácie nelineárnych vzťahov vystupujúcich v optimalizačnom modeli. V prvom rade ide o funkciu výkonu. Nelineárnymi funkciami sú popísané aj vzťahy na výpočet výšky hornej a dolnej hladiny a dotokových časov. K aproximácii hladín sme sa už vyjadrili v časti 1.2. Dotokové časy budeme aproximovať po častiach lineárne z empiricky nameraných dát.

3.1 Lineárna regresia

Ako sme už uviedli v časti 1.2 metódu lineárnej regresie využijeme pri aproximácii dolných hladín elektrární. Lineárnu regresiu s kvadratickými členmi využijeme pri modelovaní výkonu niektorých modelov. Podrobnosti o tejto metóde môže čitateľ nájsť napríklad v [10].

3.2 Jednorozmerná po častiach lineárna aproximácia

Túto aproximáciu sme využili hlavne pri aproximácii horných a dolných hladín závislých len od jednej premennej a taktiež pri modelovaní dotokových časov. V prípade funkcie jednej premennej je postup pomerne priamočiary. Spočíva v rozdelení definičného oboru danej funkcie $f(x)$ na $n-1$ intervalov. Za týmto účelom definujeme body $x_1, ..., x_n$ usporiadané $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$, v ktorých poznáme hodnoty $f(x_1), ..., f(x_n)$. Potom pre akékoľvek $\hat{x}$ z intervalu $\langle x_1, x_n \rangle$ vieme nájsť také x_i, x_{i+1}, že platí: $x_i \leq \hat{x} \leq x_{i+1}$. Aproximovanú hodnotu $f^a(\hat{x})$ dostaneme ako konvexnú kombináciu hodnôt $f(x_i)$ a $f(x_{i+1})$. Presnejšie $f^a(\hat{x}) = \lambda f(x_i) + (1-\lambda) f(x_{i+1})$ pre takú λ, pre ktorú platí $\hat{x} = \lambda x_i + (1-\lambda) x_{i+1}$ a $\lambda \in \langle 0; 1 \rangle$. Aby sme danú aproximáciu mohli implementovať do MILP solvera, musíme doplniť súbor ohraničení, ktorý nám umožní akejkoľvek hodnote $x \in \langle x_1, x_n \rangle$ priradiť dvojicu súradníc x_i a x_{i+1}. Formulácia, ktorú sme využili v našom prípade, vyzerá nasledovne:

$$\lambda_{i+1} \leq \delta_i \quad \text{i=1,..,n-1} \tag{41}$$

$$\delta_i \leq \lambda_i \quad \text{i=1,..,n} \tag{42}$$

$$\hat{x} = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) \tag{43}$$

$$\delta_n = 0, \tag{44}$$

kde $\lambda \in \langle 0; 1 \rangle$ a $\delta \in \{0, 1\}$. Ak teda $\hat{x} \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$ dostávame postupnosť $\delta_1 = 1, ...\delta_{i-1} = 1, \delta_i = 0, ..., \delta_n = 0$. Taktiež dostávame postupnosť $\lambda_1 = 1, ...\lambda_{i-1} = 1, \lambda_i \in \langle 0; 1 \rangle, ..., \lambda_n = 0$. Nakoniec pre aproximáciu dostaneme $\hat{x} = x_1 + x_2 - x_1 + ... + x_i - x_{i-1} + \lambda_i (x_{i+1} - x_i) + 0 + ... + 0$. Vidíme, že všetky členy pred x_{i-1} sa vynulujú a ostane nám $\hat{x} = x_i + \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$ a teda $\hat{x} = (1 - \lambda_i) x_i + \lambda_i x_{i+1}$.

3.3 Trojuholníková metóda

Túto metódu uvedenú v [1] sme využili pri aproximovaní funkcie výkonu. V dvojrozmernom prípade rozdelíme priestor funkčných hodnôt $f(x, y)$ na $(n-1) \times (n-1)$ segmentov. Za týmto účelom definujeme body $x_1, ..., x_n$ usporiadané $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ a $y_1, ..., y_m$ usporiadané $y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_m$. Budeme predpokladať, že hodnota funkcie $f(x, y)$ je známa vo všetkých bodoch (x_i, y_j) pre $i = 1, ..., n$ a $j = 1, ..., m$. Pri takomto delení priestoru je zrejmé, že pre ľubovoľný bod $(\hat{x}, \hat{y})$ vieme nájsť taký interval pre x, aby $x_i \leq \hat{x} \leq x_{i+1}$ a taký interval pre y $y_j \leq \hat{y} \leq y_{j+1}$. Z toho vyplýva, že bod $(\hat{x}, \hat{y})$ sa nachádza v obdĺžniku s vrcholmi $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_{i+1}, y_{j+1})$. Daný obdĺžnik ešte rozdelíme na dva trojuholníky pomocou uhlopriečky z vrcholu (x_i, y_j) do vrcholu (x_{i+1}, y_{j+1}). Hodnotu funkcie $f(x, y)$ v bode $(\hat{x}, \hat{y})$ budeme aproximovať ako konvexnú kombináciu troch bodov. Dva z týchto bodov budú body $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1})$. Tretí bod je zvolený podľa toho, či sa nachádzame nad alebo pod uhlopriečkou $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1})$. Na základe popísanej konštrukcie môžeme aproximovanú hodnotu funkcie f v bode $(\hat{x}, \hat{y})$ vyjadriť nasledovne:

$$f^a(\hat{x}, \hat{y}) = \lambda f(x_i, y_j) + \mu f(x_{i+1}, y_{j+1}) + (1 - \lambda - \mu) \bar{f}, \tag{45}$$

kde tretí vrchol $\hat{f}$ definujeme nasledujúcim predpisom:

$$\bar{f} = \begin{cases} f(x_{i+1}, y_j) & \text{ak } \hat{y} \le y_j + (\hat{x} - x_i)\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{i+1}+x_i} \\ f(x_i, y_{j+1}) & \text{inak.} \end{cases} \tag{46}$$

Pre hodnoty parametrov λ a μ požadujeme, aby: $\lambda \in \langle 0; 1\rangle$, $\mu \in \langle 0; 1\rangle$, $(1 - \mu - \lambda) \in \langle 0; 1\rangle$. Aby sme daný prístup mohli implementovať v MILP solveri, musíme vyššie uvedený aproximačný prístup popísať pomocou lineárnych ohraničení. Výsledný systém má tvar:

$$1 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_{i,j} \tag{47}$$

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j} x_i \tag{48}$$

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j} y_j \tag{49}$$

$$f^a(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j} f(x_i, y_j) \tag{50}$$

Okrem ohraničení (47)-(50) navyše požadujeme, aby boli nenulové len práve tri $\lambda_{i,j}$, ktoré prislúchajú tomu trojuholníku, v ktorom sa nachádza bod $(\hat{x}, \hat{y})$. Na zabezpečenie tejto vlastnosti musíme ešte doplniť ohraničenia:

$$1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (h^u_{i,j} + h^l_{i,j}) \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{i,j} \le & h^u_{i,j} + h^l_{i,j} + h^u_{i-1,j-1} + h^l_{i-1,j-1} + h^u_{i,j-1} + h^l_{i-1,j} \\ & i = 1, ..., n; j = 1, ..., m \end{aligned} \tag{52}$$

Novozavedené premenné $h^u_{i,j}$ a $h^l_{i,j}$ sú binárne premenné, ktoré určujú v ktorom trojuholníku sa nachádza bod $(\hat{x}, \hat{y})$. Napríklad, ak je premenná $h^u_{i,j} = 1$, potom sa nachádzame v trojuholníku danom bodmi $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1}), (x_i, y_{j+1})$, pretože z ohraničenia (52) vyplýva, že jediné nenulové λ sú $\lambda_{i,j}, \lambda_{i,j+1}, \lambda_{i+1,j+1}$. Ohraničenie (51) zabezpečuje, že sa berie do úvahy len jediný takýto trojuholník. Z tvaru ohraničení vidíme, že je nutné dodefinovať okrajové binárne premenné nasledovne: $h^u_{0,j} = h^u_{i,0} = h^u_{n,j} = h^u_{i,m} = h^l_{0,j} = h^l_{i,0} = h^l_{n,j} = h^l_{i,m}$, pre $(i = 1, ..., n; j = 1, ..., m)$.

3.4 Trojuholníková metóda s využitím Delaunay triangulácie

V predchádzajúcej metóde sme mali rozdelený priestor premenných na obdĺžnikovú sieť, v ktorej sme ešte každý obdĺžnik rozdelili diagonálou spájajúcou body $(x_i, y_j), (x_{i+j}, y_{j+1})$

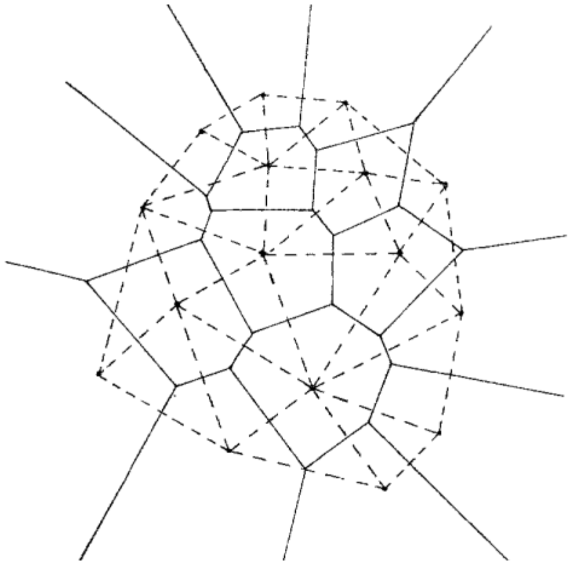
pre $i = 1, ..., n$ a $j = 1, ..., m$. V tomto prístupe priamo vyberieme niektoré body v priestore (x, y). Keďže už nebudú tvoriť pravidelnú obdĺžnikovú sieť musíme zvoliť spôsob, akým tieto body pospájame do trojuholníkov. My sme v práci použili Delaunay trianguláciu.

3.4.1 Delaunay triangulácia

Delaunay trinagulácia je v [5] definovaná cez Voronoiov diagram. Majme množinu bodov $V = \{v_1, ...v_n\}, n \geq 3$. Uvažujme, že nie všetky body sú kolineárne a že žiadne štyri body neležia na jednej kružnici (pre jednoznačnosť tvorby trojuholníkov). Okolo každého z bodov vytvoríme Voronoiove mnohouholníky. Voronoiove mnohouholníky autori v [5] prirovnávajú k rastu bunky. Vezmeme každý bod v_i z našej množiny V a okolo každého z nich začne rovnomerne rýchlo rásť bunka. Keď sa niektorá z buniek dotkne inej bunky, prestane sa v tom smere rozširovať. Dve bunky sa teda stretnú v polovici vzdialenosti medzi ich stredmi. Tretia bunka sa s nimi stretne tak, že bod stretnutia všetkých troch buniek bude stredom opísanej kružnice prechádzajúcej jadrami týchto troch buniek. Delaunay trojuholníky vzniknú spojením jadier buniek, ktorých steny sa dotýkajú ako je uvedené na Obr. 3. Táto triangulácia je nutne konvexným obalom množiny bodov V. Iný pohľad na Delaunay trianguláciu je, že trojuholníky sú vytvárané maximalizáciou najmenšieho uhla v jednotlivých trojuholníkoch ako je uvedené v [5]. Tretí pohľad vyplývajúci z Voronoiových buniek je, že tri body spojíme do trojuholníka, ak opísaná kružnica k týmto bodom neobsahuje vo svojom vnútri žiadny ďalší bod.

3.4.2 MILP ohraničenia k Delaunay triangulácii

Kvôli spôsobu, akým trojuholníky vznikajú pri Delaunay triangulácii, nemôžeme použiť rovnaké ohraničenia ako pri trojuholníkovej metóde uvedenej v časti 3.3. Body teraz totiž netvoria obdĺžnikovú sieť. V predchádzajúcej metóde sme mali pre ľubovoľné x_i definované body $(x_i, y_1), ..., (x_i, y_m)$. Teraz budeme mať body definované len ako (x_1, y_1), $(x_2, y_2), ...(x_n, y_n)$, kde n je počet všetkých bodov vstupujúcich do triangulácie. Počet trojuholníkov vytvorených z týchto bodov označíme m. Každému trojuholníku priradíme postupne číslo od 0 po $m - 1$. Ďalej potrebujeme zaviesť pre každý bod (x_i, y_i) množinu $Nbrs_i$, ktorá bude obsahovať čísla trojuholníkov, ktorých súčasťou je daný bod. Pre



Obr. 3: Plné čiary označujú Voronoiove bunky, čiarkované označujú Delaunay trojuholníky. Zdroj [5]

vytvorené trojuholníky zavedieme binárnu premennú h_j, kde $h_j = 1$ bude označovať, že na aproximáciu používame body trojuholníka j. Pri využití trojuholníkovej metódy na Delaunay triangulácii bodov sme museli modifikovať ohraničenia uvedené v [1] z časti 3.3. Nami modifikované ohraničenia potom vieme vyjadriť v nasledujúcom tvare:

$$1 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \tag{53}$$

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \tag{54}$$

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \tag{55}$$

$$f^a(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i, y_i) \tag{56}$$

$$\lambda_i \leq \sum_{j \in Nbrs_i} h_j \quad \text{i=0,...,n-1} \tag{57}$$

$$1 = \sum_{j=0}^{m-1} h_j. \tag{58}$$

Ohraničenia (53)–(56) sú v podobnom tvare ako ohraničenia (47)–(50), ale len s jednou sumou. Namiesto ohraničení (51)–(52) máme ohraničenia (57)–(58). Ohraničenie (57) hovorí, že len λ_i, ktorá je súčasťou aktívneho trojuholníka, môže byť nenulová. Ohraničenie (58) zabezpečuje, že práve jeden trojuholník je aktívny.

3.4.3 Spôsob výberu bodov

Dôvod, prečo sme chceli vybrať priamo niektoré body, je, že funkcia výkonu je nelineárna lomená funkcia. K zlomom dochádza, keď jeden generátor ide na plný výkon a je nutné zapnúť druhý generátor a prietok sa medzi nich rovnomerne rozdelí. Kvôli týmto zlomom môže byť rovnomerný výber bodov neoptimálny. Body sme vyberali nasledovne. Priestor v premenných (x, y) sme rozdelili na obdĺžnikovú sieť $b \times b$ bodov. V každom bode si vypočítame hodnotu diferenciálu druhého rádu funkcie $f(x_i, y_j)$ pre $x = 0, ...b-1; y = 0, ..., b-1$. Diferenciál druhého rádu je rovný $d^2f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y$. Keďže poznáme hodnoty funkcie výkonu len na obdĺžnikovej sieti, musíme spojité derivácie nahradiť numerickými. Numerickú deriváciu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ vyjadríme nasledovne $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{f(x_{i-1},y_j)-2f(x_i,y_j)+f(x_{i+1},y_j)}{h^2}$, kde h je dĺžka kroku na x-ovej osi. Podobne pre $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{f(x_i,y_{j-1})-2f(x_i,y_j)+f(x_i,y_{j+1})}{s^2}$, kde s je dĺžka kroku na y-ovej osi. Obe tieto numerické derivácie sú s presnosťou $O(h^2)$, resp. $O(s^2)$. Pre zmiešanú parcialnu deriváciu použijeme nasledujúce vyjadrenie $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) = \frac{f(x_{i-1},y_{j-1})-f(x_{i-1},y_{j+1})-f(x_{i+1},y_{j-1})+f(x_{i+1},y_{j+1})}{4hs}$. Presnosť tohto vyjadrenia je $O(hs)$, čiže celková presnosť numerickej aproximácie druhého diferenciálu bude $O(\max(h^2, s^2))$. Následne sme si určili, koľkými bodmi n chceme funkciu výkonu danej elektrárne aproximovať a vybrali tých n bodov, ktoré mali najväčšiu hodnotu druhého diferenciálu v absolútnej hodnote. Absolútna hodnota druhého diferenciálu nás zaujíma preto, lebo chceme zachytiť zlomy funkcie výkonu smerom nahor aj nadol.

3.5 Obdĺžniková metóda

Túto metódu uvedenú v [1] je opäť možné použiť na aproximáciu dvorozmernej nelineárnej funkcie $f(x, y)$. Rovnako ako v predchádzajúcej metóde potrebujeme body $x_1, ..., x_n$ usporiadané $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ a $y_1, ..., y_m$ usporiadané $y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_m$. Hodnotu funkcie $f(x, y)$ musíme poznať vo všetkých bodoch (x_i, y_j) pre $i = 1, ..., n$ a $j = 1, ..., m$. Pre hodnotu $\hat{y} \in (y_i, y_{i+1})$ použijeme po častiach lineárnu aproximáciu v premennej x pre funkčnú hodnotu $f(x, y_j)$ upravenú o lineárnu korekciu závislú od hodnoty premennej $\hat{y}$. Presnejšie, pre bod $(\hat{x}, \hat{y})$, kde $\hat{x} \in (x_i, x_{i+1})$ pre aproximovanú funkčnú hodnotu dostávame:

$$f^a(\hat{x}, \hat{y}) = \lambda f(x_i, y_j) + (1-\lambda)f(x_{i+1}, y_j) + \delta \min \Delta(i,j), \Delta(i+1,j), \tag{59}$$

kde $\Delta(l,j) = f(x_l, y_{j+1}) - f(x_l, y_j)$ a $\delta = \frac{\hat{y}-y_j}{y_{j+1}-y_j}$. Vidíme, že δ je vlastne relatívna poloha $\hat{y}$ od začiatku intervalu $\langle y_j; y_{j+1}\rangle$ a teda $\delta \in \langle 0; 1\rangle$. Pre lepšiu predstavu to môžme porovnať s trojuholníkovou metódou. Teda majme obdĺžnik $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_{i+1}, y_{j+1})$ s uhlopriečkou $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1})$. Pokiaľ $\min(\Delta(i,j), \Delta(i+1,j)) = \Delta(i,j)$, potom obdĺžnik, ktorým aproximujeme hodnotu funkcie, prechádza rovinou $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1})$. Naopak, ak $\min(\Delta(i,j), \Delta(i+1,j)) = \Delta(i+1,j)$, potom obdĺžnik, ktorým aproximujeme hodnotu funkcie, prechádza rovinou (x_i, y_j), $(x_{i+1}, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1})$. Ako je uvedené v [1] táto metóda poskytuje podhodnotený odhad oproti trojuholníkovej metóde. Nadhodnotený odhad je možné dosiahnuť zamenením minima za maximum v (59).

Aby sme mohli túto metódu implementovať do nami využívaného solvera, je potrebné zaviesť ďalšie premenné a ohraničenia. Čo sa týka premennej x v nej robíme obyčajnú jednorozmernú po častiach lineárnu aproximáciu funkcií $f(x, y_j)$, pre $j = (1, ..., m)$. Pre premennú y si zadefinujeme pomocné premenné $\beta_1, ..., \beta_{m-1}$. Ak $\hat{y} \in \langle y_j; y_{j+1}\rangle$ potom práve β_j nadobúda hodnotu 1 a ostatné hodnotu 0. Ďalšie premenné, ktoré potrebujeme sú $\gamma_1, ..., \gamma_{m-1}$. Ak $\hat{y} \in \langle y_j; y_{j+1}\rangle$ potom $\gamma_j = \delta$ z rovnice (42) a $\gamma_k = 0$ pre $k \neq j$. Všetky potrebné ohraničenia vyzerajú nasledovne:

$$1 = \sum_{i=1}^{n-1} h_i \tag{60}$$

$$\lambda_i \leq h_{i-1} + h_i \tag{61}$$

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{62}$$

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \tag{63}$$

$$1 = \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \tag{64}$$

$$\hat{y} = \sum_{j=1}^{m-1} (\beta_j y_j + \gamma_j (y_{j+1} - y_j)) \tag{65}$$

$$\gamma_j \leq \beta_j \quad \text{(j=1,...,m-1)} \tag{66}$$

$$f^a(\hat{x}, \hat{y}) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k, y_j) + \gamma_j K_{i,j} + M(2 - \beta_j + h_i) \quad \text{(j=1,...,m-1;i=1,...,n-1)} \tag{67}$$

$$f^a(\hat{x}, \hat{y}) \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k, y_j) + \gamma_j K_{i,j} - M(2 - \beta_j + h_i) \quad \text{(j=1,...,m-1;i=1,...,n-1)} \tag{68}$$

Pomocná premenná $K_{i,j} = \min \Delta(i,j), \Delta(i+1,j)$ a M je veľká konštanta tzv „Big M". Ohraničenia (60)–(63) sú po častiach lineárna aproximácia v premennej x. Ohraničenia

(64)–(66) zabezpečujú nájdenie intervalu $\langle y_{j+1} - y_j \rangle)$, v ktorom sa nachádza $\hat{y}$. Ohraničenia (67) a (68) sú neaktívne, ak $\beta_j = 0$ alebo $h_i = 0$. Keď je aj index j aj index i taký, že $\hat{x} \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$ a $\hat{y} \in \langle y_j, y_{j+1} \rangle$ potom máme $f^a(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k, y_j) + \gamma_j K_{i,j}$. Podľa [1] sa metódy navzájom nedominujú, no trojuholníková metóda je častejšie rýchlejšia aj presnejšia, ale obdĺžniková metóda je lepšia v nájdení prípustného riešenia [1].

4 Porovnanie modelov

Cieľom tejto práce bolo stanoviť optimálnu prevádzku Vážskej kaskády. Pri modelovaní kľúčovej premennej, výkonu elektrárne, sme uvažovali dva prístupy, ktoré sme podrobne opísali v častiach 1.2 a 1.3. V kapitole 3 sme predstavili viaceré numerické prístupy na linearizáciu nelineárnych vzťahov, ktoré v predstavených modeloch vystupujú. V tejto kapitole jednotlivé modely a numerické spôsoby aproximácie porovnáme. Porovnávacími kritériami bude presnosť, rýchlosť výpočtu a reálny zisk. Najprv uvedieme výsledky numerických experimentov pre jednotlivé modely a v závere kapitoly jednotlivé modely porovnáme. Presnosť výpočtu stanovíme porovnaním reálneho výkonu a aproximovaného výkonu vypočítaného na základe jednotlivých modelov. Pod pojmom reálny výkon rozumieme výpočet výkonu $P_{t,p}$ konkrétnej elektrárne podľa nasledujúceho empirického vzťahu odvodeného v [3]:

$$P_{t,p} = P(Q_t, H_t) = (N - S(Y - H_t))Q_t^2 + (O - U(Y - H_t))Q_t + (R - W(Y - H_t)) \tag{69}$$

V modeloch, v ktorých nevystupuje premenná spád, ju dopočítame z objemov horných a dolných hladín. Konštanty N, S, Y, O, U, R, W sú odhadnuté pre každý generátor a pre ich veľký rozsah ich nebudeme uvádzať. V ďalších častiach postupne predstavíme šesť modelov, ktoré vznikli kombináciou dvoch prístupov modelovania výkonu a troch spôsobov jeho aproximácie.

4.1 Model v priestore spádu a prietoku s kvadratickou aproximáciou

Tento model je v tvare úlohy MIQCP. Pri aproximácii nelineárnej funkcie $F_1(Q_{t,p}, H_{t,p})$ vystupujúcej v rovnici (2) uvážime nasledujúcich 7 alternatívnych vyjadrení:

$$P_{t,p} = a_p Q_{t,p}^2 + b_p Q_{t,p} + d_p H_{t,p} + f_s \tag{70}$$

$$P_{t,p} = a_p Q_{t,p}^2 + b_p Q_{t,p} + c_p H_{t,p}^2 + d_p H_{t,p} + f_s \tag{71}$$

$$P_{t,p} = a_p Q_{t,p}^2 + b_p Q_{t,p} + c_p H_{t,p}^2 + d_p H_{t,p} + e_p Q_{t,p} H_{t,p} + f_s \tag{72}$$

$$P_{t,p} = a_p Q_{t,p}^2 + b_p Q_{t,p} + d_p H_{t,p} + e_p Q_{t,p} H_{t,p} + f_s \tag{73}$$

$$P_{t,p} = a_pQ_{t,p}^2 + b_pQ_{t,p} + c_pH_{t,p}^2 + e_pQ_{t,p}H_{t,p} + f_s \tag{74}$$

$$P_{t,p} = a_pQ_{t,p}^2 + c_pH_{t,p}^2 + d_pH_{t,p} + e_pQ_{t,p}H_{t,p} + f_s \tag{75}$$

$$P_{t,p} = a_pQ_{t,p}^2 + b_pQ_{t,p} + e_pQ_{t,p}H_{t,p} + f_s \tag{76}$$

Takýto spôsob aproximácie nám umožní pôvodný problém naformulovať ako úlohu MIQCP. Solver Gurobi je schopný rýchlejšej optimalizácie MIQCP modelu, ak je navyše konvexný. V MILP formulácii tohto modelu sa nachádzajú nasledujúce tri ohraničenia:

$$P_{t,p} \leq Bplant_{t,p}P_p^{max} \quad \textit{t=0,..,T-1; p=0,..,plant-1} \tag{77}$$

$$P_{t,p} \geq Bplant_{t,p}P_p^{min} \quad \textit{t=0,..,T-1; p=0,..,plant-1} \tag{78}$$

$$P_{t,p} \leq P0_{t,p} + (1 - Bplant_{t,p})M \quad \textit{t=0,..,T-1; p=0,..,plant-1,} \tag{79}$$

kde $P0_{t,p}$ je napríklad kvadratická aproximácia z rovnice (70) a M je tzv. „big M", teda nejaká veľká konštanta, v našom prípade 10^3. Premenná $Bplant_{t,p}$ označuje, či je elektráreň p zapnutá v čase t. Tieto ohraničenia sú interpretovateľné nasledovne:

$$P_{t,p} \begin{cases} = 0 & \text{ak } Bplant_{t,p} = 0 \quad \textit{t=0,..,T-1; p=0,..,plant-1} \\ \leq P0_{t,p} \wedge P_{t,p} \in \{0\} \cup \langle P_p^{min}, P_p^{max} \rangle & \text{ak } Bplant_{t,p} = 1 \quad \textit{t=0,..,T-1; p=0,..,plant-1.} \end{cases} \tag{80}$$

Vďaka tomu, že v úlohe maximalizujeme zisk, ktorý priamo úmerne závisí od výkonu, platí:

$$P_{t,p} \begin{cases} = 0 & \text{ak } Bplant_{t,p} = 0 \quad \textit{t=0,..,T-1; p=0,..,plant-1} \\ = P0_{t,p} & \text{ak } Bplant_{t,p} = 1 \quad \textit{t=0,..,T-1; p=0,..,plant-1.} \end{cases} \tag{81}$$

V celom modeli sa vyskytuje len jedno kvadratické ohraničenie (79). Potrebujeme teda, aby nasledujúce ohraničenie bolo konvexné:

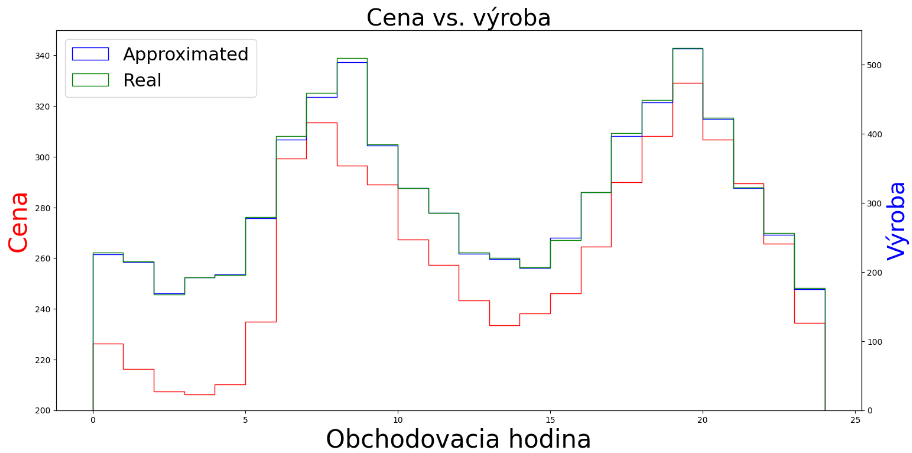
$$-P0_{t,p} + P_{t,p} \leq \begin{cases} M & \text{ak } Bplant_{t,p} = 0 \quad \textit{t=0,..,T-1; p=0,..,plant-1} \\ 0 & \text{ak } Bplant_{t,p} = 1 \quad \textit{t=0,..,T-1; p=0,..,plant-1} \end{cases} \tag{82}$$

Hessova matica ľavej strany (82) vyzerá nasledovne:

$$\begin{bmatrix} -2a_p & -e_p & 0 \\ -e_p & -2c_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{83}$$

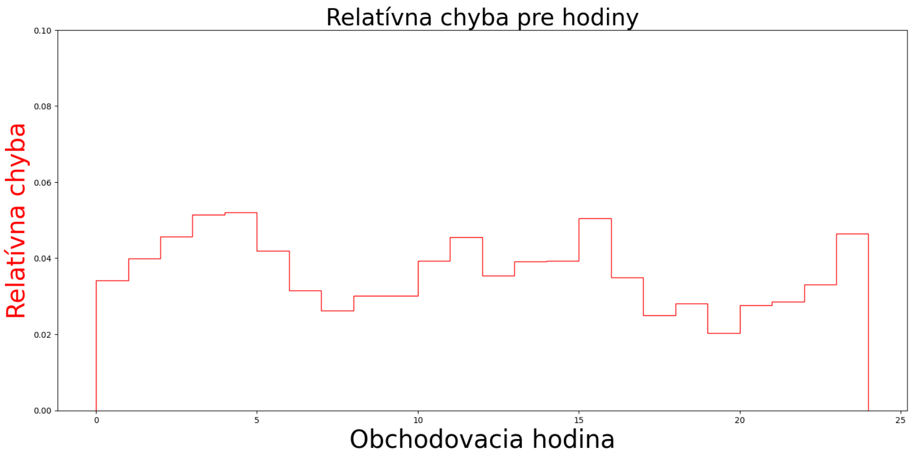
Aby bola Hessova matica (83) pozitívne semidefinitná, musia byť splnené nasledujúce dve podmienky: $a \geq 0$ a $4ac - e^2 \geq 0$. Spomedzi uvažovaných formulácií v (70)–(76) iba dve spĺňali podmienku konvexnosti. Išlo o formulácie (70) a (71). Avšak model s aproximáciou výkonu v tvare (71) nenašiel riešenie dostatočne rýchlo a teda sme používali iba formuláciu (70). Nevýhodou tohto modelu vyplývajúcou už z formulácie je nutnosť v každom kroku počítať výšku hornej aj dolnej hladiny. Výhodou pri porovnávaní výsledkov bolo, že sme mali k dispozícii presnú hodnotu spádu v každom kroku.

Na Obr. 4 sme graficky porovnali aproximovaný a reálny výkon sčítaný cez všetky elektrárne v jednotlivých obchodných hodinách. Ako môžeme vidieť, navrhnutý prístup pomerne presne aproximuje sumárny výkon Vážskej kaskády. Rýchlosť výpočtu pri tomto modeli bola 78,17 sekúnd.

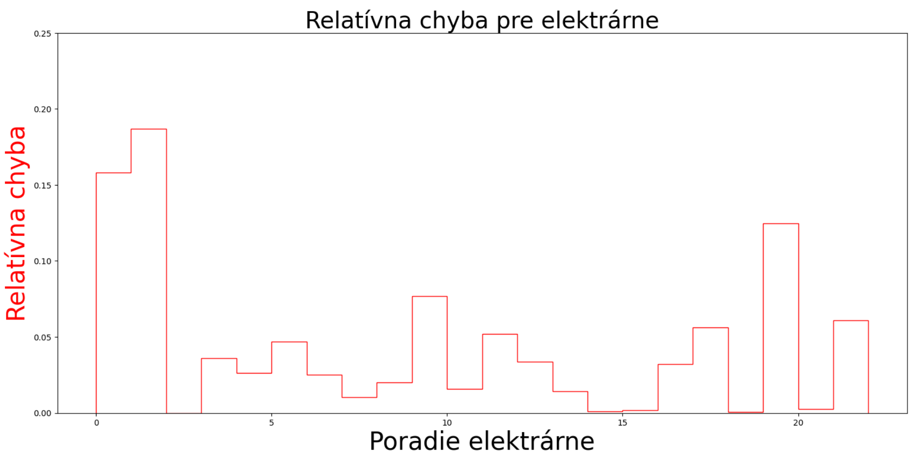


Obr. 4: Porovnanie aproximovaného a reálneho výkonu celej Vážskej kaskády

Na Obr. 5 uvádzame porovnanie relatívnej chyby v jednotlivých hodinách. Ako môžeme pozorovať, relatívna chyba dosahuje hodnotu najviac 5%. Na Obr. 6 uvádzame porovnanie relatívnej chyby pre jednotlivé elektrárne. Pre lepšiu viditeľnosť rozdielov budeme uvádzať grafy odchýlok po hodinách s rozpätím y-ovej osi 0 až 10% a grafy odchýlok po elektrárňach s rozpätím 0 až 25%. Vidíme, že výkon v niektorých elektrárňach sa podarilo aproximovať takmer presne. Výnimku predstavujú jedine elektrárne č. 0, 1 a 20, kde pozorujeme vysokú relatívnu chybu. Elektráreň 2 bola celý čas vypnutá, preto u nej vidíme nulovú chybu. Poznamenajme, že pre výrobcu elektrickej energie je dôležitejšie porovnanie na Obr. 5, nakoľko elektrinu predáva ako jeden výsledný produkt v jednotlivých hodinách dňa a nie pre každú elektráreň zvlášť. To znamená, že väčšia relatívna chyba



Obr. 5: Porovnanie chyby celkového aproximovaného a reálneho výkonu v jednotlivých hodinách dňa



Obr. 6: Porovnanie chyby celkového aproximovaného a reálneho výkonu pre jednotlivé elektrárne Vážskej kaskády

konkrétnej elektrárne nepredstavuje pre výrobcu až taký problém, ako väčšia relatívna chyba v konkrétnu hodinu. Posledné metriky, ktorými sme zhodnotili efektivitu modelu je priemerná relatívna chyba výkonu po elektrárňach v nasledujúcom tvare:

$$E\_by\_plants = \frac{1}{plant} \sum_{i=0}^{plant-1} \frac{\left| \sum_{j=0}^{T-1} P_{j,i}^{opt} - \sum_{j=0}^{T-1} P_{j,i}^{real} \right|}{\sum_{j=0}^{T-1} P_{j,i}^{real}} \tag{84}$$

a priemerná relatívna chyba po hodinách v tvare:

$$E\_by\_hours = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \frac{\left| \sum_{i=0}^{plants-1} P_{j,i}^{opt} - \sum_{i=0}^{plant-1} P_{j,i}^{real} \right|}{\sum_{i=0}^{plant-1} P_{j,i}^{real}} \tag{85}$$

kde $P_{j,i}^{real}$ je reálny výkon elektrárne i v čase j a $P_{j,i}^{opt}$ je výkon z optimalizácie modelu elektrárne i v čase j. V prípade modelu v priestore spádu a prietoku kvadratickou aproximáciou boli tieto hodnoty $E\_by\_plants = 4.46\%$ a $E\_by\_hours = 3.65\%$.

4.2 Model v priestore spádu a objemu hornej a dolnej hladiny s kvadratickou aproximáciou

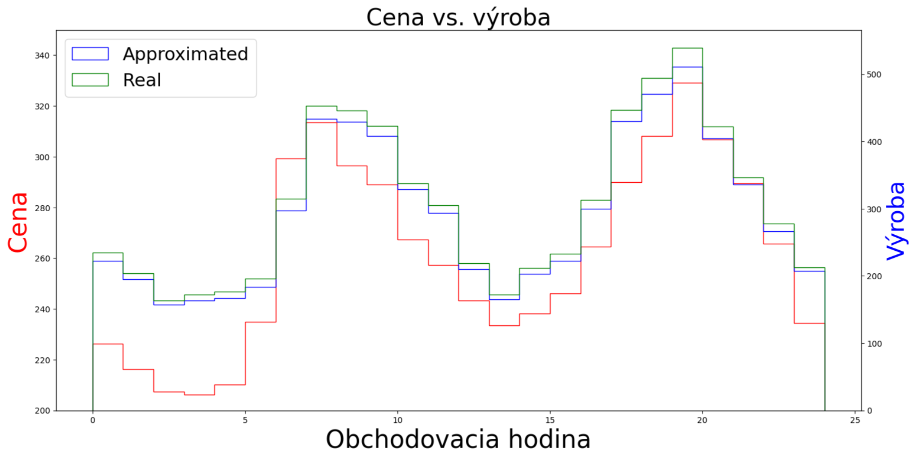
Ide o model v tvare úlohy MIQCP. Rovnako ako v predchádzajúcom modeli sme potrebovali, aby bola úloha konvexná. V tomto modeli sme výkon modelovali rôzne pre rôzne typy elektrární z dôvodu uvedeného v časti 1.3 nasledovne:

- **Typ 0**: $P_{t,p} = a_p Q_{t,p}^2 + b_p Q_{t,p} + g_p(HH\_V_{t,p} - DH\_V_{t,p}) + h_p(HH\_V_{t,p} - DH\_V_{t,p})^2 + intercept_p$
- **Typ 1 a 4**: $P_{t,p} = a_p Q_{t,p}^2 + b_p Q_{t,p} + c_p HH\_V_{t,p} + d_p(HH\_V_{t,p})^2 + intercept_p$
- **Typ 2**: $P_{t,p} = a_p Q_{t,p}^2 + b_p Q_{t,p} + intercept_p$
- **Typ 3**: $P_{t,p} = a_p Q_{t,p}^2 + b_p Q_{t,p} + e_p DH\_V_{t,p} + f_p(DH\_V_{t,p})^2 + intercept_p$

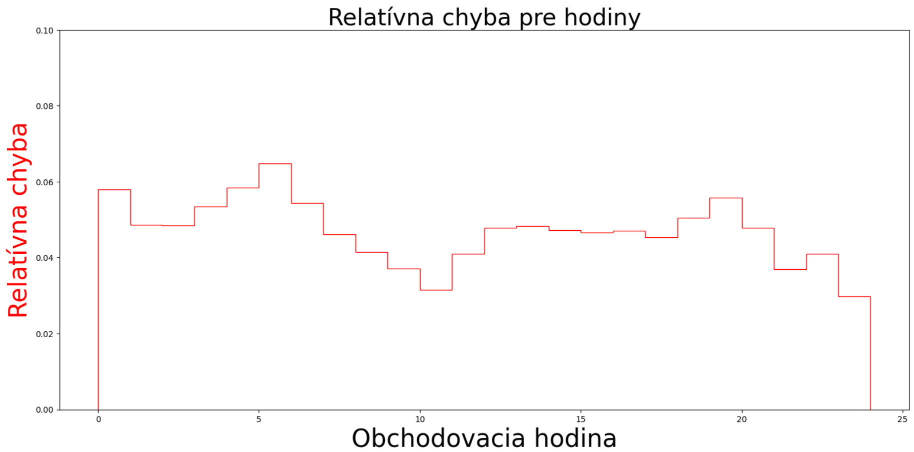
Do tohto modelu sme rovnako zahrnuli ohraničenia (77)–(79). Tvar Hessovej matice závisí od typu ohraničenia, ktorý uvažujeme. Ľahko však možno nahliadnuť, že konvexnosť ohraničenia stanovuje znamienko kvadratického člena. Ak je záporné, ohraničenia sú konvexné a môžeme model implementovať v tomto tvare. Ak parameter pri kvadratickom člene nie je záporný, funkciu výkonu sme aproximovali znovu s vynechaním konkrétnej premennej v druhej mocnine.

Výhodou tohto modelu je, že nemusíme v každom kroku počítať výšku hornej a dolnej hladiny. Nevýhodou je, že sme výkon neaproximovali v premenných, pre ktoré máme empiricky odhadnutý vzťah reálneho výkonu (69). Preto sme pri počítaní reálneho výkonu museli previesť objemy nádrží získané z optimalizácie späť na výšky horných a dolných hladín, aby sme dostali odhadnutý spád. Prevod medzi objemami nádrží a spádom sme realizovali na základe po častiach lineárnou aproximáciou, čo mohlo spôsobiť menšie odchýlky vo výpočte reálneho výkonu.

Na Obr. 7 vidíme porovnanie aproximovaného a reálneho výkonu sčítaného cez všetky elektrárne v jednotlivých obchodných hodinách. Z obrázku vidíme, že sa nám podarilo aproximovať sumárny výkon Vážskej kaskády menej presne ako v modeli v priestore spádu a prietoku s kvadratickou aproximáciou a hlavne v oblasti s vysokým výkonom je rozdiel viditeľný. Rýchlosť výpočtu pri tomto modeli bola 169,14 sekúnd. Na Obr. 8 vidíme gra-

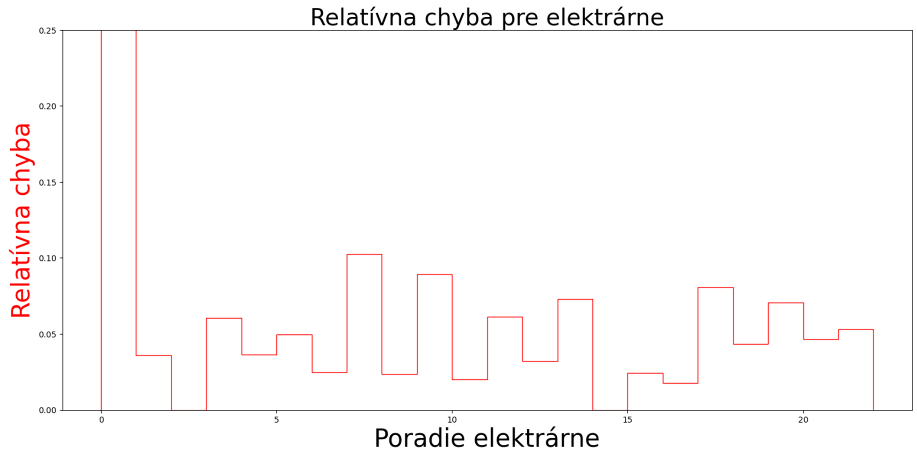


Obr. 7: Porovnanie aproximovaného a reálneho výkonu celej Vážskej kaskády



Obr. 8: Porovnanie chyby celkového aproximovaného a reálneho výkonu po hodinách

fické porovnanie relatívnej chyby po jednotlivých hodinách. Vidíme, že sa v niektorých hodinách aproximovaný výkon líšil od reálneho výkonu o viac ako 5%, avšak v žiadnej hodine dňa nedošlo k signifikatne väčšej relatívnej chybe. Na Obr. 9 uvádzame porovnanie relatívnej chyby po jednotlivých elektrárňach. Vidíme, že výkon vo viacerých elektrárňach je menej presne odhadnutý, ako v prípade modelu v priestore spádu a prietoku s kvadratickou aproximáciou. Poznamenajme, že elektrárne 0 a 2 sú odhadnuté s viac ako 20%-nou chybou. Znova nás ale viac zaujíma chyba na Obr. 8 a tá sa zhoršila len mierne. Čo sa týka celkových odchýlok po elektrárňach a po hodinách definovaných vzťahmi (84) a (85), ich hodnoty sú $E\_by\_plants = 5,90\%$ a $E\_by\_hours = 4,70\%$.

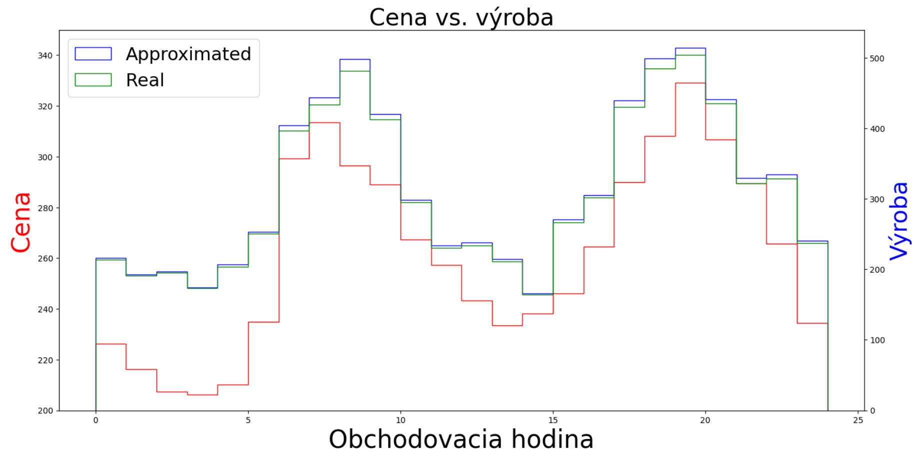


Obr. 9: Porovnanie chyby celkového aproximovaného a reálneho výkonu po elektrárňach

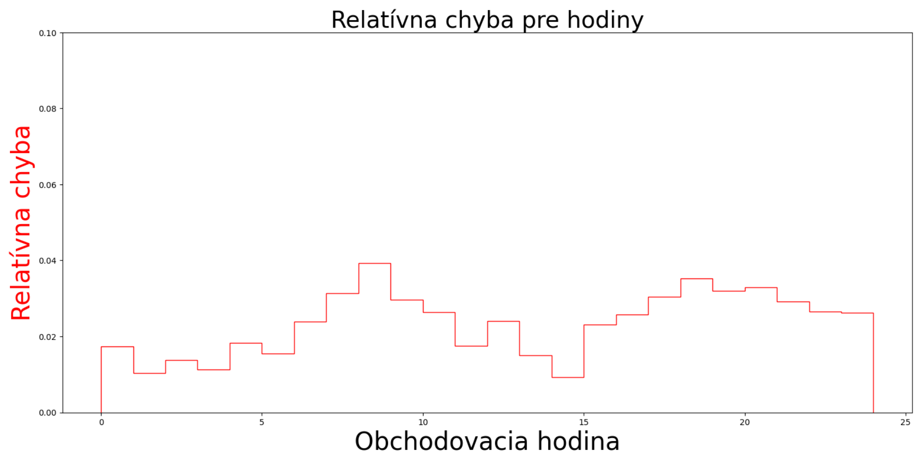
4.3 Model v priestore spádu a prietoku s použitím trojuholníkovej metódy

Tento model je v tvare úlohy MILP. Na aproximáciu funkcie výkonu sme použili trojuholníkovú metódu. Priestor prietoku sme si rozdelili na tri body a priestor spádu na dva. Pri takomto počte deliacich bodov prebehla optimalizácia v dostatočne krátkom čase pre praktické použitie. Dostali sme teda sieť 3×2 bodov, čo zodpovedá štyrom trojuholníkom. Oproti modelu v časti 4.1 má tento model výhodu, že nemáme žiadne kvadratické ohraničenie ani kvadratickú účelovú funkciu. Solver Gurobi je schopný tento model riešiť rýchlejšie. Nevýhodou je, že s trojuholníkovou metódou je spojený nárast premenných a ohraničení. Rýchlosť výpočtu pri tomto modeli bola 102,09 sekúnd.

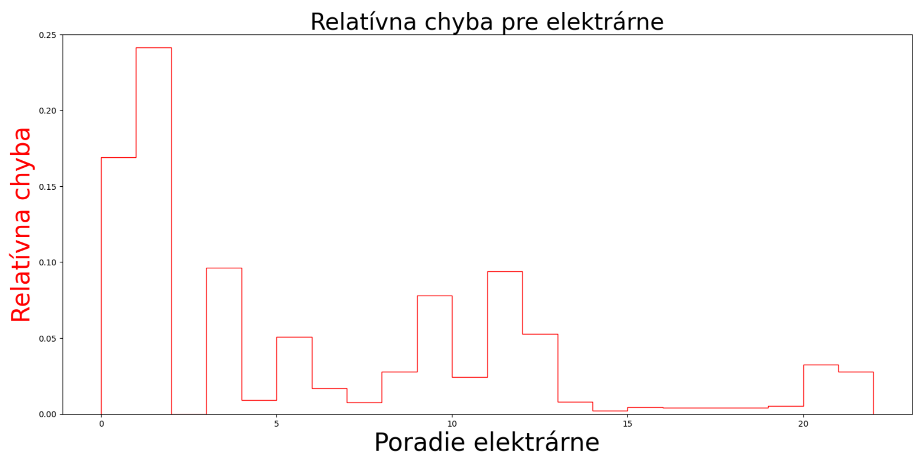
Na Obr. 10 vidíme pomerne presnú aproximáciu pri nízkom a strednom výkone, ale viditeľnú odchýlku pri vysokom. Na Obr. 11 uvádzame porovnanie relatívnej chyby po jednotlivých hodinách. Vidíme, že sa v žiadnej z hodín aproximovaný výkon nelíšil od reálneho výkonu o viac ako 5%. Na Obr. 12 uvádzame porovnanie relatívnej chyby po jednotlivých elektrárňach. Vidíme, že viaceré elektrárne sú odhadnuté s chybou okolo jedného percenta. Elektráreň 2 je vypnutá, preto má na grafe nulovú chybu. Ďalej vidíme, že elektráreň 1 je odhadnutá s viac ako 25%-nou chybou. Ide však o Vodnú elektráreň Tvrdošín, ktorá ma veľmi malý inštalovaný výkon (6,1MW), takže ak sa aj pomýlime o 25%, na celkovej 200–500 MW hodinovej výrobe to urobí odchýlku približne 1,5 MW. Čo sa týka priemerných odchýlok po elektrárňach a po hodinách definovaných ako v (84) a (85), ich hodnoty sú $E\_by\_plants = 4,37\%$ a $E\_by\_hours = 2,35\%$.



Obr. 10: Porovnanie aproximovaného a reálneho výkonu celej Vážskej kaskády



Obr. 11: Porovnanie chyby celkového aproximovaného a reálneho výkonu po hodinách



Obr. 12: Porovnanie chyby celkového aproximovaného a reálneho výkonu po elektrárňach

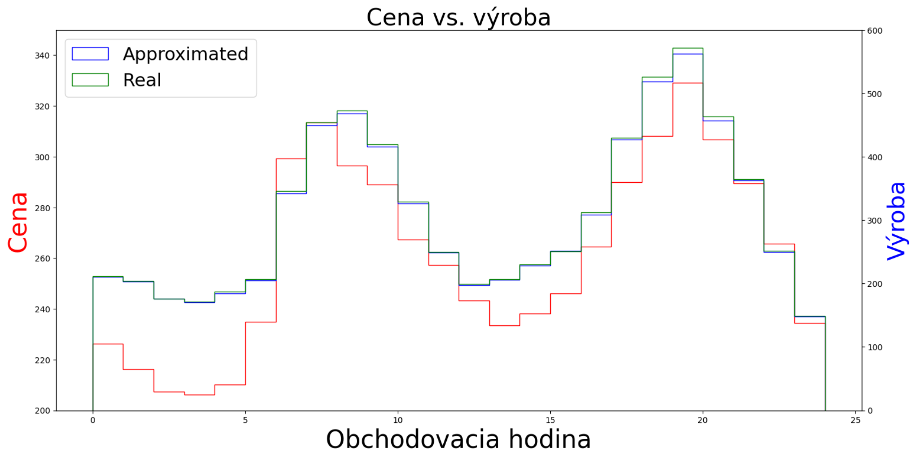
4.4 Model v priestore spádu a objemu hornej a dolnej nádrže s použitím trojuholníkovej metódy

Tento model je v tvare úlohy MILP. Na aproximáciu funkcie výkonu sme použili trojuholníkovú metódu. Priestor prietoku sme rozdelili na tri body a priestor objemov na dva body. Pri voľbe takéhoto počtu bodov prebehla optimalizácia v dostatočne krátkom čase pre praktické použitie. Dostali sme teda sieť 3×2 bodov, čo zodpovedá štyrom trojuholníkom. Čo sa týka objemov, používali sme rôzne kombinácie v závislosti od typu elektrárne nasledovne:

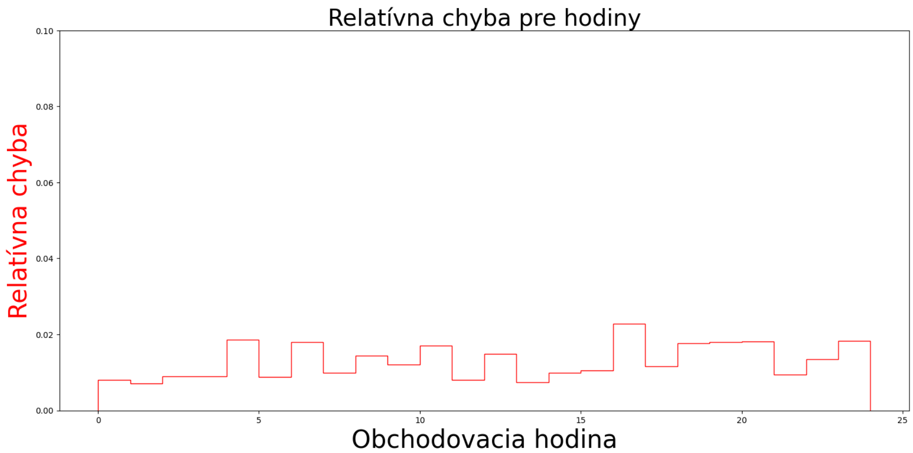
- **Typ 0**: Priestor objemu aproximovaný v premennej $HH\_V_{t,p} - DH\_V_{t,p}$.
- **Typ 1 a 4**: Priestor objemu aproximovaný v premennej $HH\_V_{t,p}$.
- **Typ 2**: Jednorozmerná po častiach lineárna aproximácia funkcie výkonu v premennej spád.
- **Typ 3**: Priestor objemu aproximovaný v premennej $DH\_V_{t,p}$.

Oproti modelu v časti 4.2 má tento model výhodu v tom, že nemáme žiadne kvadratické ohraničenie ani kvadratickú účelovú funkciu. Solver Gurobi je schopný tento model riešiť rýchlejšie. Nevýhodou je, že s trojuholníkovou metódou je spojený nárast premenných a ohraničení. Oproti modelu v časti 4.3 je však čas optimalizácie tohto modelu dostatočne krátky aj s pridanými ohraničeniami. Rýchlosť výpočtu pri tomto modeli bola 21,62 sekúnd.

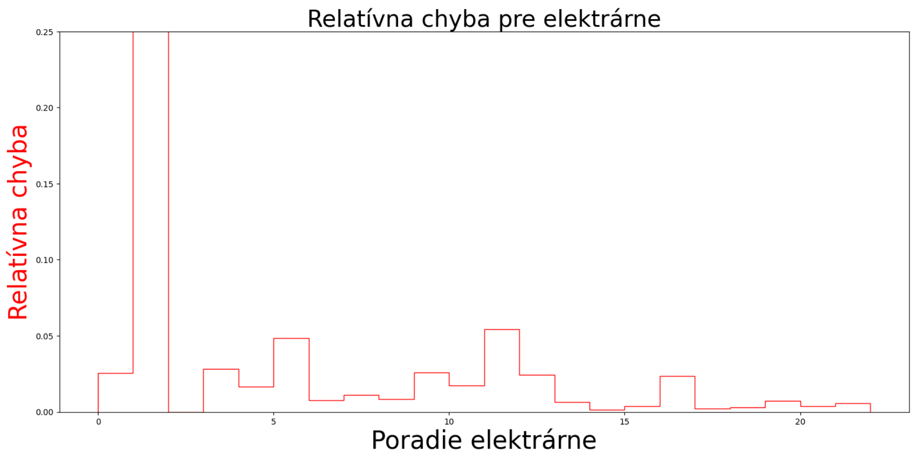
Na Obr. 13 vidíme pomerne presnú aproximáciu a tiež vidíme, že najvyšší výkon je pri najvyššej cene. Na Obr. 14 uvádzame porovnanie relatívnej chyby po jednotlivých hodinách. Vidíme, že sa v žiadnej z hodín aproximovaný výkon nelíšil od reálneho výkonu o viac ako 2,5%. Na Obr. 15 uvádzame porovnanie relatívnej chyby po jednotlivých elektrárňach. Vidíme, že takmer všetky elektrárne sú odhadnuté s chybou menšou ako 5 %. Elektráreň 2 je vypnutá, preto má na grafe nulovú chybu. Znovu vidíme, že elektráreň 1 je odhadnutá s viac ako 25%-nou chybou. Ide opäť o Vodnú elektráreň Tvrdošín, ktorá má veľmi malý inštalovaný výkon, takže jej príspevok k celkovej odchýlke je malý. Hodnoty celkových odchýlok po elektrárňach a po hodinách, definovaných vzťahmi (84) a (85), sú $E\_by\_plants = 3,06\%$ a $E\_by\_hours = 1,30\%$.



Obr. 13: Porovnanie aproximovaného a reálneho výkonu celej Vážskej kaskády



Obr. 14: Porovnanie chyby celkového aproximovaného a reálneho výkonu po hodinách

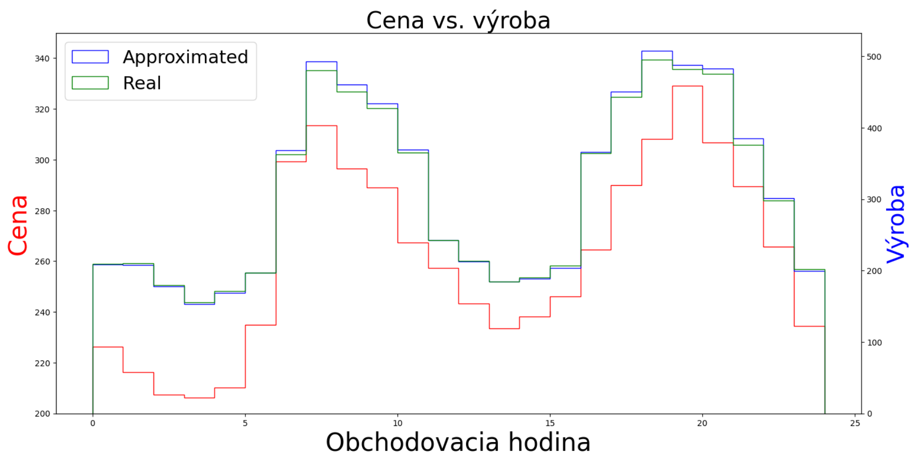


Obr. 15: Porovnanie chyby celkového aproximovaného a reálneho výkonu po elektrárňach

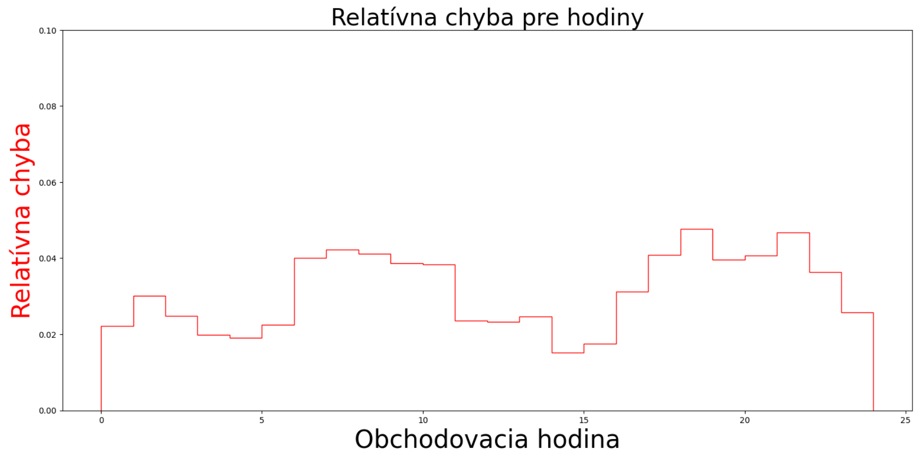
4.5 Model v priestore spádu a prietoku s použitím Delaunay triangulácie

Na aproximáciu funkcie výkonu z časti 1.2 sme použili trojuholníkovú metódu. V priestore spádu a prietoku sme vybrali štyri až šesť bodov na základe absolútnej hodnoty druhého diferenciálu výkonu jednotlivých elektrární. Následne sme z týchto bodov pomocou Delaunay triangulácie dostali 2 až 6 trojuholníkov. Tento model má oproti modelu z časti 4.3 väčšie pamäťové požiadavky. Kým pri modeli v časti 4.3 bolo potrebné na výpočet mk hodnôt výkonu si pamätať m hodnôt spádu a k hodnôt prietoku, pri tomto modeli je potrebné si pamätať mk hodnôt aj spádu aj prietoku. Z výpočtového hľadiska je opäť výhodou formulácia v tvare MILP. Rýchlosť výpočtu pri tomto modeli bola 189,13 sekúnd.

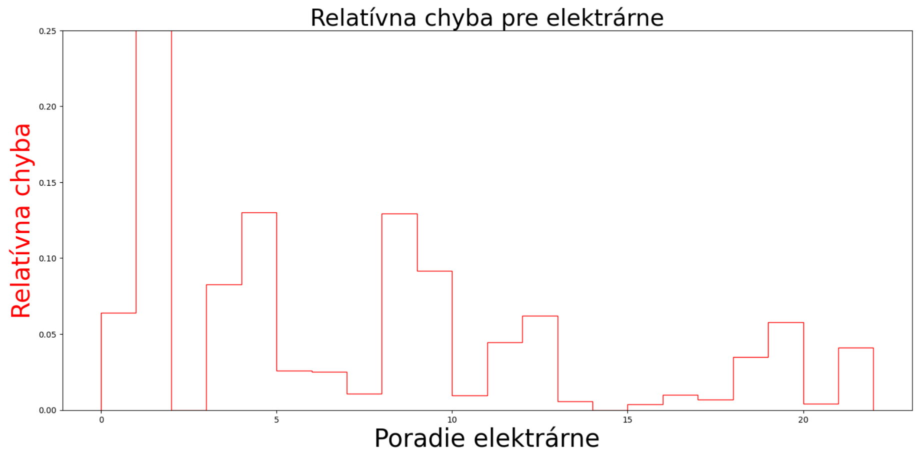
Na Obr. 16 vidíme pomerne presnú aproximáciu pri nižšom výkone, ale viditeľnú odchýlku pri vyššom výkone. Na Obr. 17 uvádzame porovnanie relatívnej chyby po jednotlivých hodinách. Vidíme, že sa v žiadnej z hodín aproximovaný výkon nelíšil od reálneho výkonu o viac ako 5%. Na Obr. 18 uvádzame porovnanie relatívnej chyby po jednotlivých elektrárňach. Vidíme, že niektoré elektrárne sa nám podarilo odhadnúť veľmi presne, ale pri viacerých elektrárňach máme chybu vyššiu ako 7 %. Elektráreň 2 je vypnutá, preto má nulovú chybu. Znova vidíme, že elektráreň 1 je odhadnutá s viac ako 25%-nou chybou. Ide opäť o vodnú elektráreň Tvrdošín, ktorá ma veľmi malý inštalovaný výkon, takže jej príspevok k celkovej odchýlke je malý. Hodnoty priemerných odchýlok po elektrárňach a po hodinách, definovaných vzťahmi (84) a (85), sú $E\_by\_plants = 5,46\%$ a $E\_by\_hours = 3,13\%$.



Obr. 16: Porovnanie aproximovaného a reálneho výkonu celej Vážskej kaskády



Obr. 17: Porovnanie chyby celkového aproximovaného a reálneho výkonu po hodinách

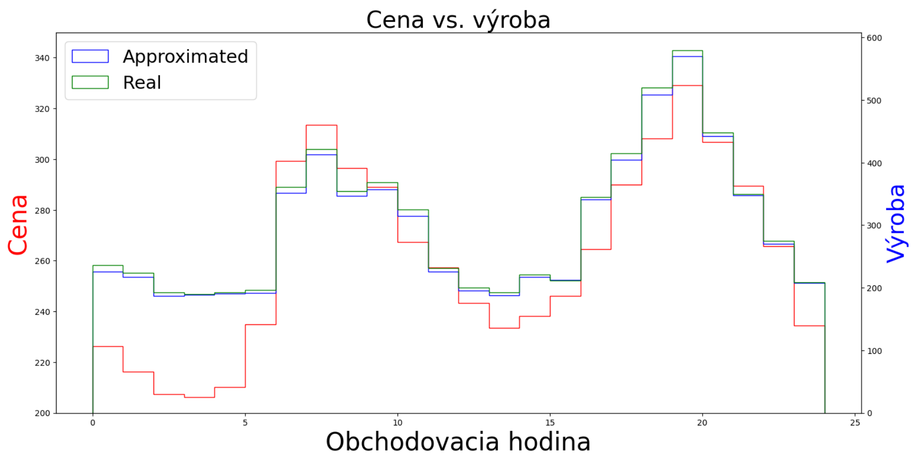


Obr. 18: Porovnanie chyby celkového aproximovaného a reálneho výkonu po elektrárňach

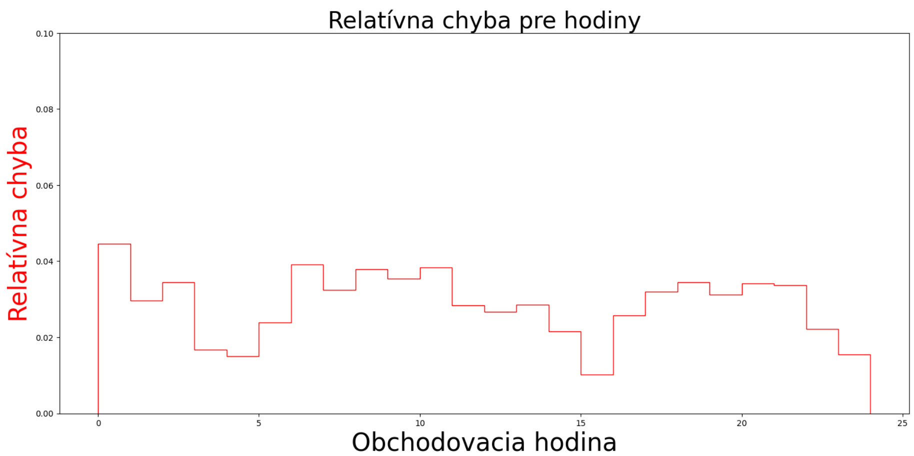
4.6 Model v priestore spádu a objemu hornej a dolnej nádrže s použitím trojuholníkovej metódy s Delaunay trianguláciou

Na aproximáciu funkcie výkonu z časti 1.3 sme použili trojuholníkovú metódu. V priestore objemov horných a dolných hladín a prietoku sme vybrali štyri až sedem bodov na základe absolútnej hodnoty druhého diferenciálu výkonu jednotlivých elektrární. Následne sme z týchto bodov pomocou Delaunay triangulácie dostali 2 až 8 trojuholníkov Podobne ako v prípade modelu z časti 4.5 aj tento model má vyššie pamäťové nároky, je potrebné si pamätať až mk hodnôt objemov hladín a prietoku. Avšak v porovnaní s modelom z časti 4.5 sme nemuseli uvažovať ohraničenia na výšku hladín a spád. Vďaka tomu sme pri zachovaní toho istého rozmeru úlohy mohli zjemniť trojuholníkovú sieť. Rýchlosť výpočtu pri tomto modeli bola 111,74 sekúnd.

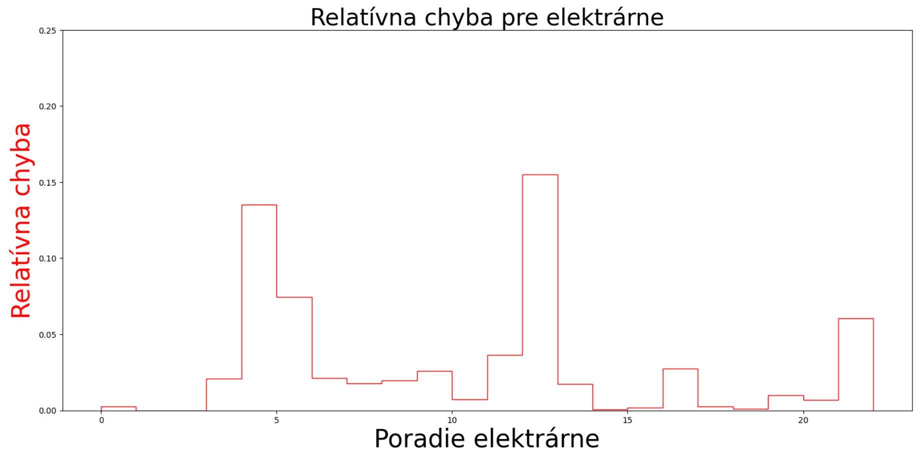
Na Obr. 19 vidíme mierne odchýlky pri vyšších aj nižších výkonoch. Na Obr. 20 uvádzame porovnanie relatívnej chyby po jednotlivých hodinách. Vidíme, že sa v žiadnej z hodín aproximovaný výkon nelíšil od reálneho výkonu o viac ako 5%. Na obrázku 21 uvádzame porovnanie relatívnej chyby po jednotlivých elektrárňach. Vidíme, že väčšinu elektrární sa nám podarilo odhadnúť veľmi presne, a len štyri elektrárne mali chybu nad 5%. Elektrárne 1 a 2 sú vypnuté, preto majú nulovú chybu. Hodnoty celkových odchýlok po elektrárňach a po hodinách, definovaných vzťahmi (84) a (85), sú $E\_by\_plants = 2,93\%$ a $E\_by\_hours = 2,88\%$.



Obr. 19: Porovnanie aproximovaného a reálneho výkonu celej Vážskej kaskády



Obr. 20: Porovnanie chyby celkového aproximovaného a reálneho výkonu po hodinách



Obr. 21: Porovnanie chyby celkového aproximovaného a reálneho výkonu po elektrárňach

4.7 Porovnanie modelov

Modely predstavené v častiach 4.1–4.6 sme vzájomne porovnali. Vzhľadom na ciele práce sme zvolili dve porovnávacie kritéria. Prvým bol čas potrebný na nájdenie optimálneho riešenia. Ďalej sme porovnávali rozdiel medzi aproximovaným a reálnym ziskom. Pod pojmom aproximovaný zisk rozumieme hodnotu zisku, ktorá bola výstupom z výpočtového algoritmu. Reálny zisk zase predstavuje takú hodnotu zisku, ktorú dostaneme dosadením vypočítaných optimálnych hodnôt prietoku a výšky hladín, resp. prietoku a objemu hladín do pôvodnej (neaproximovanej) funkcie výkonu v rovnici (69). Rozdiel medzi aproximovaným a reálnym výkonom sme následne vyhodnotili dvomi spôsobmi. V prvom z nich sme vypočítali maximálnu percentuálnu chybu cez všetky elektrárne a v druhom sme vypočítali maximálnu percentuálnu chybu v jednotlivých hodinách dňa. V Tabuľke 4 uvádzame porovnanie pre modely popísané v kapitolách 4.1–4.6. V stĺpci *model* je uvedené poradové číslo modelov. V stĺpci *Výkon* je uvedený priestor premenných pre aproximáciu výkonu. V stĺpci *aproximácia* je uvedený spôsob aproximácie z kapitoly 3. V štvrtom stĺpci uvádzame čas potrebný na nájdenie riešenia. V stĺpcoch pre aproximovaný a reálny zisk neuvádzame hodnotu zisku, ale relatívnu zmenu zisku voči najhoršiemu modelu v danom stĺpci. Najhorší model má v príslušnom riadku 0%. Skutočné údaje o zisku podliehajú obchodnému tajomstvu. Vidíme, že len v prípade modelov M1 a M4 sme získali riešenie za menej ako 100 sekúnd. Ďalej vidíme, že model M4 je bezkonkurenčne najrýchlejší. Tri najvyššie reálne zisky sa dosiahli použitím modelov M3, M4 a M5. Modely M2 a M6 majú veľmi malý reálny zisk. Model M5 má príliš dlhý optimalizačný čas. Do porovnávania so skutočným

Tabuľka 4: Sumárne porovnanie modelov

model	Výkon	aproximácia	čas (s)	Δ aproximovaný zisk %	Δ reálny zisk %	odchýlka po elektrárňach	odchýlka po hodinách
M1	$F_1(H,Q)$	kvadratická	78.17	4.77%	1.85%	4.46%	3.65%
M2	$F_2(Q, HH\_V, DH\_V)$	kvadratická	169.14	0%	0.92%	5.90%	4.70%
M3	$F_1(H,Q)$	trojuholníková	102.09	7.30%	1.84%	4.37%	2.35%
M4	$F_2(Q, HH\_V, DH\_V)$	trojuholníková	21.62	4.88%	2.34%	3.06%	1.30%
M5	$F_1(H,Q)$	Delaunay	189.13	6.75%	2.10%	5.46%	3.13%
M6	$F_2(Q, HH\_V, DH\_V)$	Delaunay	111.74	1.41%	0%	2.93%	2.88%

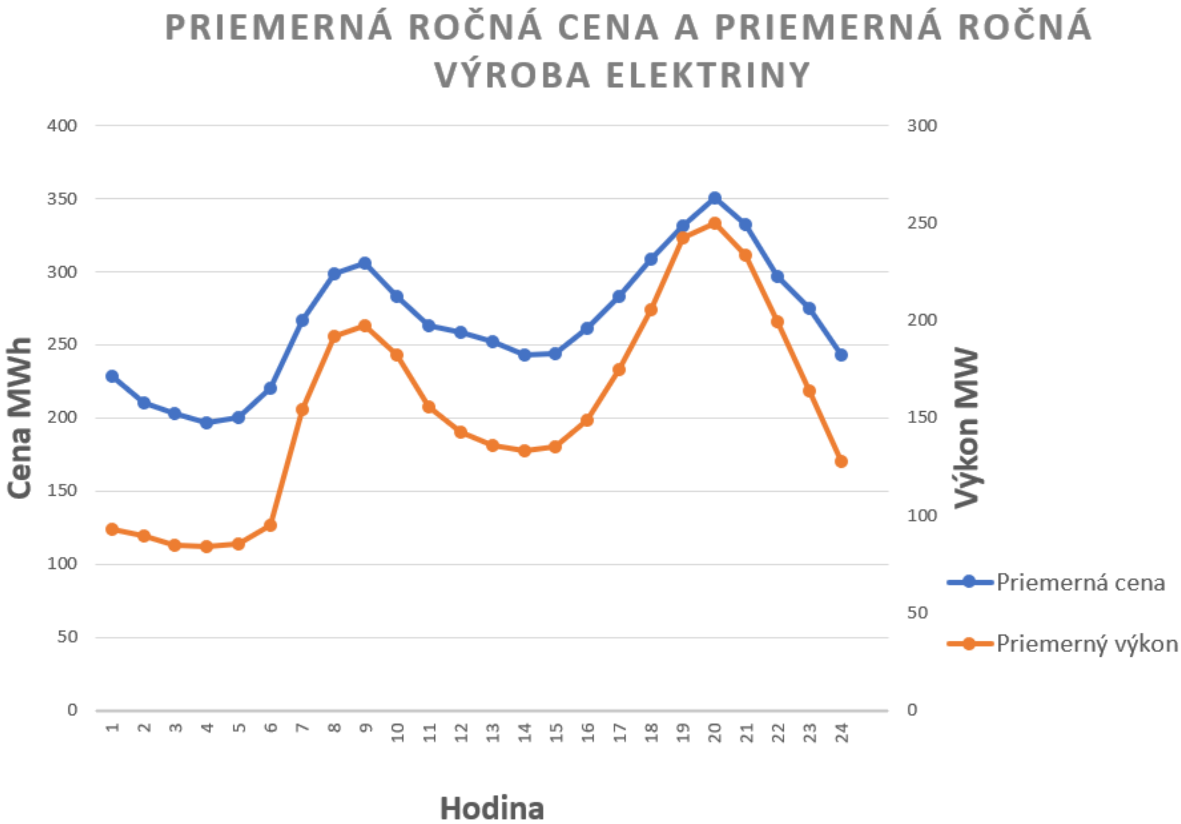
modelom v slovenských elektrárňach sme sa rozhodli vybrať modely M1, M3 a M4.

5 Porovnanie s prevádzkovým modelom Slovenských elektrární

V tejto časti porovnáme modely M1, M3 a M4 so skutočným prevádzkovým modelom Slovenských elektrární na šiestich dňoch. V predchádzajúcej časti sme porovnávali zisk z optimalizácie s reálnym ziskom. Porovnanie v tejto časti realizujeme s využitím simulačného modelu Slovenských elektrární. Vstupom do tohto modelu sú len prietoky cez elektrárne. Model následne urobí simuláciu dňa s danými prietokmi a stanoví presné výšky hladín, hodnoty spádu aj počet generátorov, ktoré musia byť zapnuté. V rámci simulácie dochádza tiež k úprave niektorých premenných tak, aby boli dodržané všetky relevantné ohraničenia. Na základe tejto simulácie dostaneme skutočný výkon vo všetkých elektrárňach, na ktorý budeme pre odlíšenie referovať pojmom *simulovaný výkon*. Od tohto porovnávania očakávame vyššiu percentuálnu chybu medzi optimalizovaným a simulovaným ziskom. V tejto chybe budú totiž zahrnuté aj nepresnosti v aproximácii hornej a dolnej hladiny jednotlivých elektrární. Na záver tejto časti urobíme finálne porovnanie najlepšieho z týchto troch modelov so skutočným prevádzkovým modelom na 30 dňoch.

5.1 Porovnanie troch modelov

Z časového hľadiska je numerická analýza modelov na viacerých dňoch náročná. Z tohto dôvodu sme sa rozhodli modely porovnať na šiestich vybraných dňoch. Prevádzkové ohraničenia v jednotlivých dňoch sa od seba výrazne nelíšia. Vývoj ceny elektriny počas jedného dňa zvyčajne vykazuje dva vrcholy v približne rovnakých hodinách ako sme ilustrovali na Obr. 22. Na Obr. 22 tiež vidíme, že priemerný nasadený výkon elektrární kopíruje cenovú krivku. Medzi dňami sa menia hlavne parametre $qtg_{t,g}^{max}$ a $qtg_{t,g}^{min}$, ktoré sú nulové v hodinách, keď je prislúchajúci generátor mimo prevádzky. Ďalej sa dni líšia v prítokoch z vedľajších tokov alebo zrážok a v stave hladín nádrží. Posledné dôležité parametre, ktoré sa môžu výraznejšie meniť sú min_avg_out, resp. max_avg_out, teda minimálne, resp. maximálne odtoky z nádrží. Tieto zmeny v parametroch sa dajú redukovať na objem vody, ktorý je model schopný sumárne pretlačiť cez elektrárne. Do porovnania sme vybrali tri dni, počas ktorých bol sumárny prietok v prevádzkovom modeli väčší ako 50 000 m^3 a tri



Obr. 22: Vývoj priemerných cien a priemerného výkonu Vážskej kaskády za rok 2022. Zdroj [11]

dni keď bol menší ako 30 000 m^3.

V Tabuľke 5 sme zhrnuli výstupy z modelov pre každý zo šiestich vybraných obchodovacích dní. Model *Basic* reprezentuje súčasný prevádzkový model Slovenských elektrární. Pre tento model sme zaznamenali čas trvania optimalizácie a celkovú chybu aproximácie výkonu. Hodnotu premennej *error* sme vypočítali nasledovne:

$$error = \frac{(\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{p=0}^{plant-1} P_{t,p}^{sim}) - (\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{p=0}^{plant-1} P_{t,p}^{opt})}{\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{p=0}^{plant-1} P_{t,p}^{sim}},$$

kde $P_{t,p}^{opt}$ je výstup výkonu, ktorý dostaneme z optimalizácie a $P_{t,p}^{sim}$ je výstup výkonu zo simulácie. Pri modeloch M1, M3 a M4 navyše uvádzame hodnotu percentuálnej zmeny v zisku oproti prevádzkovému modelu. Ak je táto hodnota záporná, znamená to, že zisk vypočítaný na základe optimálnych hodnôt prietoku je nižší ako zisk, ktorý sme dosiahli pri prevádzkovom modeli. V predposlednom riadku v Tabuľke 5 označenom *avg* uvádzame priemery v jednotlivých stĺpcoch.

Tabuľka 5: Porovnanie modelov na šiestich dňoch

	Basic		Model M4			Model M3			Model M1		
Deň	čas	error %	čas	error %	Δ zisk %	čas	error %	Δ zisk %	čas	error %	Δ zisk %
1	24.58	10.21	65.39	5.12	<0.01	127.4	8.63	-0.72	159	3.78	0.06
2	12.58	8.34	58.18	2.46	-1.98	300	5.73	-3.14	233.3	2.54	-0.02
3	21.97	8.18	165.5	2.96	1.09	288.67	6.64	1.06	300	3.63	0.32
4	12.3	7.33	37.88	3.53	-0.19	212.76	6.38	-0.29	108.97	5.09	-0.09
5	9.61	9.50	14.63	6.53	-2.38	132.35	10.31	-4.11	89.25	7.04	-2.73
6	13.5	9.38	84.61	6.26	-0.95	248.66	9.67	-1.26	204.13	6.72	-2.16
avg	15.75	8.82	71.03	4.48	-0.74	218.30	7.89	-1.40	182.44	4.80	-0.77
score	2.94		1.74			3.49			2.13		

V Tabuľke 5 vidíme, že všetky tri testované modely vykazujú v priemere dlhší výpočtový čas a nižší zisk než súčasne používaný model. Ako sme už uviedli v úvode práce, našim cieľom bolo primárne zlepšiť presnosť aproximácie výkonu. Výsledky z tejto numerickej analýzy naznačujú, že tento cieľ sa nám podarilo naplniť: modely M1, M3 a M4 vykazujú nižšiu percentuálnu chybu v odhade výkonu. Prirodzene, z hľadiska celkového porovnania modelov, je nutné vziať do úvahy všetky tri porovnávacie kritériá. Z tohto dôvodu sme navrhli porovnať jednotlivé modely na základe metriky *score*, ktorú sme definovali nasledovne:

$$score = \frac{\overline{error\%} - \overline{\Delta zisk\%} + \max(\overline{\check{c}as} - 100, 0)/100}{3} \tag{86}$$

Metrika *score* (86) priraďuje jednotlivým modelom ich skóre na základe priemerných hodnôt percentuálnych odchýlok chyby a zisku. Poslednou vstupnou hodnotou do tejto metriky je priemerný čas potrebný na nájdenie riešenia, pričom sme penalizovali len dobu trvania výpočtu nad 100 sekúnd, čo je pre praktické účely ešte akceptovateľná hodnota. Nižšia hodnota *score* hovorí, že ide o lepší model. Vidíme, že najlepšie *score* dosiahol model M4. Model M1 bol v uvedenej metrike tiež lepší ako prevádzkový model.

Tabuľka 6: Porovnanie modelu M4 a jeho relaxácií na 30 dňoch

model	čas	error %	Δ zisk %	score
Basic	21.46	9.54	0	3.18
M4	58.64	5.59	-2.07	2.55
M4 3%	74.63	5.39	-1.10	2.16
M4 5%	51.44	5.59	-0.77	2.12

5.2 Zhodnotenie modelu v priestore spádu a objemu horných a dolných hladín s trojuholníkovou aproximáciou

Model M4, ktorý sme v časti 5.1 vyhodnotili ako najlepší, sme následne porovnali s prevádzkovým modelom na 30 vybraných dňoch pre robustnejšie porovnanie. Okrem porovnania prevádzkového modelu a modelu M4 sme do porovnania pridali dve ďalšie modifikácie modelu M4. Pri realizácii numerických experimentov v predchádzajúcej časti sme si všimli, že v hodinách s vysokou cenou elektriny, v ktorých premenná P^{opt} dosahovala maximálny výkon, premenná P^{sim} dosahovala nižšie hodnoty a teda výkon elektrárne v skutočnosti nedosahoval maximálny výkon. Preto sme sa rozhodli porovnať prevádzkový model nielen s pôvodným modelom M4, ale aj s modifikovanou verziou, kde sme uvážili možnosť prekročenia maximálneho výkonu o 3% (M4 3%), resp. 5% (M4 3%). V Tabuľke 6 uvádzame porovnanie prevádzkového modelu (*Basic*) s uvedenými relaxáciami modelu M4. Hodnoty uvedené v Tabuľke 3 predstavujú priemer sledovaných ukazovateľov za 30 dní. Vidíme, že *score* ktorejkoľvek relaxácie bolo lepšie ako *score* prevádzkového modelu. Najlepšie *score* dosiahol model M4 5% a to najmä vďaka najmenšej percentuálnej odchýlke v zisku (menej ako jedno percento oproti prevádzkovému zisku) a vďaka najkratšiemu výpočtovému času.

Záver

V práci sme sa podrobne venovali riadeniu optimálnej prevádzky elektrární Vážskej kaskády v krátkodobom horizonte. Riadenie optimálnej prevádzky spočívalo v určení prietoku každou elektrárňou v každej hodine tak, aby sme maximalizovali zisk z vyrobenej elektriny predajom na spotovom trhu. Pri určení prietoku bolo nutné stanoviť aj počet zapnutých generátorov pre jednotlivé elektrárne. Ďalej bolo potrebné stanoviť aj hodnoty jalových prietokov a odtokov. Pri hľadaní optimálnej prevádzky bolo potrebné dodržať viaceré technické a prevádzkové obmedzenia jednotlivých elektrární.

Aby sme splnili požiadavku na rýchlosť výpočtu, problém riadenia prevádzky Vážskej kaskády sme riešili ako úlohu MILP, resp. MIQCP. Nakoľko niektoré empiricky odhadnuté funkcie vstupujúce do optimalizačného procesu sú nelineárneho charakteru, hľadali sme najvhodnejší spôsob aproximácie. Kľúčovú funkciu výkonu sme aproximovali jednou z nasledujúcich možností: kvadratická aproximácia, po častiach lineárna trojuholníková metóda a po častiach lineárna trojuholníková metóda s Delaunay trianguláciou. Navyše sme uvážili dve možnosti formulácie výkonu a to buď v priestore spádu a prietoku alebo v priestore prietoku a objemu hornej a dolnej hladiny. Kombináciou týchto vlastností sme dostali 6 modelov. V numerickej analýze sme navrhnuté modely porovnali s aktuálnym prevádzkovým modelom Slovenských elektrární. Jednotlivé modely sme porovnali na základe rýchlosti výpočtu a presnosti aproximácie. V prvom kole numerických experimentov sme spomedzi šiestich navrhnutých modelov vybrali najlepšie tri, ktoré sme podrobili ďalšej analýze. Do finálneho porovnania na 30 dňoch sme vybrali model M4, tj, model, kde je výkon reprezentovaný ako funkcia prietoku a objemu hornej a dolnej hladiny a funkcia výkonu bola aproximovaná trojuholníkovou metódou. Na základe charakteru nájdených riešení sme otestovali ešte dve ďalšie modifikácie modelu M4. Navrhli sme metriku *score*, ktorá umožnila porovnávať modely na základe všetkých troch sledovaných kritérií. Najlepšie výsledky sme dosiahli pri modeli M4 s možnosťou prekročiť maximálny výkon o 5 %.

V tejto práci sme sa venovali optimalizácii prevádzky vodnej elektrárne v krátkodobom horizonte. Výkon konkrétnej elektrárne sme aproximovali rovnakou funkciou nehľadiac na počet zapnutých generátorov. Možným rozšírením by bolo aproximovať výkon elektrárne osobitne pre jeden, dva, resp. tri zapnuté generátory. Týmto spôsobom by nám stúpol počet premenných, ale zvýšila by sa aj presnosť modelu. Separátnou úlohou dennej prípravy prevádzky, ktorej v tejto práci nebola venovaná pozornosť, je riadenie prevádzky vodných elektrární s cieľom vyrobiť predom stanovený výkon v každej hodine namiesto maximalizácie zisku. Pri výrobe predom stanoveného výkonu hrá presnosť aproximácií ešte väčšiu úlohu a z tohto dôvodu táto práca vytvára predpoklady aj pre riešenie tejto úlohy. Ďalším rozšírením môže byť optimalizácia prevádzky v strednodobom a dlhodobom horizonte. V týchto prípadoch by bolo nutné pracovať s viacerými možnými scenármi vývoja ceny a taktiež s rôznymi meteorologickými predpoveďami ovplyvňujúcimi riadenie prevádzky vodnej elektrárne.

Vodné elektrárne sú najčistejší dispačovateľný zdroj elektrickej energie a ich úloha pri vyvažovaní siete rastie z dôvodu stále väčšieho podielu výroby nedispačovateľných obnoviteľných zdrojov elektrickej energie v európskom energetickom mixe. Z tohto dôvodu rastú aj nároky na dynamické riadenie vodných elektrární, čo vytvára vyššie nároky na presnosť matematických nástrojov používaných na operatívnu podporu rozhodovania. Táto práca je prvou prácou, kde sa podarilo použiť komplexné aproximácie matematického popisu elektrární Vážskej kaskády a porovnať tieto výsledky s operatívne používaným modelom. Výsledky tento práce možno považovať za prínos pre Slovenské elektrárne pri rozhodnovaní. Predstavený matematický model prevádzky Vážskej kaskády a analýza numerických prístupov na jeho riešenie poskytuje základ pre riešenie ďalších optimalizačných úloh v tejto oblasti, ktoré sa ešte nepodarilo nasadiť do operatívnej prevádzky.

Zoznam použitej literatúry

[1] D'Ambrosio, C.: *Application-oriented Mixed Integer Non-Linear Programming*, Dizertačná práca, Universita Degli Studi Di Bologna, 2009

[2] Taktak, R., D'Ambrosio, C.: *An Overview on Mathematical Programming Approaches for the Deterministic Unit Commitment Problem in Hydro Valleys*, Energy Syst 8, 57–79, 2017

[3] Dušička, P., Šulek, P.: *Popis algoritmov hydromodelovania navrhnutých pre SW model prípravy prevádzky VE*, Katedra hydrotechniky, Stavebná fakulta STU Bratislava, 2006

[4] Dušička, P., Květon, R.: *Kanálové vodné elektrárne - hydraulický výskum prevádzky derivačných kanálov*, Slovenská technická univerzita, Bratislava, 1.vydanie,2015

[5] Lee, D., T., Schachter, B., J.: *Two Algorithms for Constructing a Delaunay Triangulation*, International Journal of Computer and Information Sciences, Vol. 9, No. 3, 1980, dostupné na internete (3.2.2021): https://www.personal.psu.edu/cxc11/AERSP560/DELAUNEY/13_Two_algorithms_Delauney.pdf

[6] Luenberger, D., G.„ P., Ye, Y.: *Linear and nonlinear programming*, Springer, 4. vydanie, 2016

[7] Kmetonyová, D.: *Testovanie softvéru pre zmiešané celočíselné programovanie*, Diplomová práca, Vysoká škola Ekonomická v Praze, Fakulta Informatiky a Statistiky, 2008

[8] Gurobi Optimization, LLC: *Gurobi Optimizer Reference Manual*, dostupné na internete (01.03.2023): www.gurobi.com

[9] Carr, R., Guerrette, P., James, M.: *Mixed-integer cuts*, 2020, dostupné na internete (01.03.2023) https://optimization.cbe.cornell.edu/index.php?title=Mixed-integer_cuts

[10] Zvára, K.: *Regrese*, Matfyzpress, Praha, 2018

[11] Entso-e transparency platform, dostupné na internete (03.04.2023), https://www.entsoe.eu/

[12] Gurobi QCP and SOCP optimizer overview, dostupné na internete (15.04.2023), https://www.gurobi.com/events/gurobi-qcp-and-socp-optimizer-overview/

[13] Finreport.sk, dostupné na internete (15.04.2023), https://t.ly/ntiz

[14] Fajkus, A.: *Optimalizácia prevádzky vodnej prečerpávacej elektrárne*, Diplomová práca, Univerzita Komenského, Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky, 2020

[15] Vester, M.: *Optimalizácia prevádzky vodnej elektrárne v krátkodobom horizonte* Diplomová práca, Univerzita Komenského, Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky, 2020