

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ZABEZPEČENIE GARANTOVANÝCH FONDŮV

DIPLOMOVÁ PRÁCA



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Tereza Sládečková
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Zabezpečenie garantovaného fondu
Securing a guaranteed fund

Anotácia: V garantovanom fonde II. pilera je správca povinný zabezpečiť úspory proti poklesu hodnoty v definovanej perióde. V práci pôjde o hľadanie rôznych stratégií zabezpečenia.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
Dátum zadania: 13.01.2021

Dátum schválenia: 17.01.2021
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie Takto by som sa chcela pod'akovať vedúcemu diplomovej práce doc. Mgr. Igorovi Melicherčíkovi za pomoc a vedenie pri písaní práce a za ochotný a trpezlivý prístup.

Abstrakt v štátnom jazyku

SLÁDEČKOVÁ, Tereza: Zabezpečenie garantovaných fondov [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2023, 44 s.

V tejto práci sa venujeme zabezpečeniu garantovaných fondov pomocou derivátov úrokovej miery. Jedná sa o garantované dlhopisové fondy druhého dôchodkového piliera, do ktorých je dôchodková správcovská spoločnosť povinná doplácať pri poklese hodnoty dôchodkovej jednotky pod hranicu garancie. V práci sme simulovali priebeh fungovania fondu počas dvadsiatich rokov a porovnávali sme výsledky fondu len s čisto dlhopisovým portfóliom a fondu s portfóliom s derivátom. Skúšali sme simulácie so swapom, capom a floorom pri rôznych variáciách ich parametrov. Podarilo sa nám nájsť viacero stratégií, kedy investícia do derivátu zabezpečila nižšie počty simulácií, v ktorých sa doplácalo v porovnaní s čisto dlhopisovým fondom a taktiež aj nižšie priemerné doplatky do fondu.

Kľúčové slová: Druhý pilier, deriváty úrokovej miery, garantované fondy, dlhopisy, simulácie vývoja portfólia

Abstract

SLÁDEČKOVÁ, Tereza: Securing guaranteed funds [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2023, 44p.

In this work we study the securing of the guaranteed funds by investing into interest rates derivatives, especially the guaranteed bond funds of the second pension pillar. The pension management company is obliged to pay into the fund when the value of pension unit gets lower than guarantee threshold. We simulated the performance of the funds during twenty-year period and compare the performance of the fund with pure bond portfolio and the fund with a portfolio including derivative. We ran simulations with portfolio including swap, cap and floor with different variations of parameters. We managed to find simulations where there was lower number of simulation with additional payments to fund needed in case of portfolio including derivative than pure bond portfolio and also where the average additional payment to fund was lower in case of portfolio including derivative.

Keywords: Second pension pillar, interest rate derivatives, guaranteed funds, bonds, portfolio performance simulations

Obsah

Úvod	3
1 Dôchodkové poistenie na Slovensku	4
1.1 Dlhopisy	5
2 Model úrokovej miery	5
2.1 Vašíčkov model	6
3 Deriváty úrokovej miery	7
3.1 Swapy	7
3.2 Cap	8
3.2.1 Ocenenie derivátu cap	8
3.3 Floor	12
4 Štruktúra programu	13
5 Stratégia zabezpečenia garantovaných fondov	16
5.1 Portfólio bez derivátov	17
5.2 Swap	18
5.2.1 Swap s nulovou počiatočnou hodnotou	18
5.2.2 Swap s nenulovou počiatočnou hodnotou	21
5.3 Cap	27
5.4 Floor	32
Záver	36
Zoznam použitej literatúry	39

Úvod

Slovenský dôchodkový systém sa v médiách a tlači spomína pomerne často. Taktiež je predmetom mnohých politických kampaní. Väčšinou sa hovorí o zvyšovaní dôchodkových dávok alebo o zvyšovaní odvodov do dôchodkového systému. Okrem toho sa čoraz častejšie skloňujú slová o dlhoch v prvom pilieri, zlých demografických vyhlídkach na ďalšie roky a o nízkych výnosoch v druhom, kapitalizačnom, pilieri.

Prvý pilier je priebežný, teda peniaze, ktoré do neho dnes zaplatia platitelia odvodov sú hneď rozdane terajším dôchodcom. V druhom pilieri sa však zaplatené príspevky investujú do fondov, kde sa ďalej zhodnocujú. Sporiteľ si svoje úspory rozdeľuje do dvoch fondov: akciového alebo indexového a garantovaného dlhopisového fondu. V našej práci sa budeme venovať práve garantovaným dlhopisovým fondom.

Garantované dlhopisové fondy sú charakteristické prakticky nulovým rizikom zo strany sporiteľa, no taktiež nízkou výnosnosťou. Nízke riziko je spojené práve s garanciou. Tá znamená, že ak klesne hodnota dôchodkovej jednotky v desaťročnom období, dôchodková správcovská spoločnosť je povinná tento rozdiel vyrovnať zo svojich vlastných prostriedkov. Zaoberať sa garanciou týchto fondov je čoraz viac dôležité, pretože úrokové miery sa pohybujú v záporných číslach [6] a negatívne ovplyvňujú výnosnosť dlhopisových fondov. Ich dlhodobé zhodnotenie sa pohybuje medzi 1,6 až 2,5 percenta. [1] V garantovaných fondoch na Slovensku si sporí 940-tisíc ľudí a má v nich uložených cez 7 miliárd eur. [7]

V našej práci sa budeme venovať zabezpečeniu garantovaných fondov. Teda budeme sa snažiť nájsť vhodnú stratégiu, ktorá by kompenzovala náklady dôchodkovej správcovskej spoločnosti na garanciu dlhopisových fondov. Podľa modelu úrokovej miery, ktorého parametre odhadneme použitím reálnych dát nasimulujeme možné vývoje úrokovej miery. Pre každý vývoj úrokovej miery ďalej vypočítame vývoj hodnoty dlhopisových fondov a objem, ktorý musia DSS doplniť do garantovaných fondov bez zabezpečenia garancie a aj v prípade rôznych stratégií zabezpečenia. Pri simuláciách úrokovej miery a dlhopisového portfólia vychádzame z práce [11]. Na zabezpečenie budeme využívať deriváty úrokovej miery, a to deriváty swap, cap a floor. Tieto stratégie navzájom porovnáme a vyhodnotíme ich účinnosť.

1 Dôchodkové poistenie na Slovensku

V súčasnosti na Slovensku funguje trojpilierový dôchodkový systém. Základným systémom dôchodkového zabezpečenia sú prvý a druhý pilier. Tretí pilier dobrovoľného doplnového dôchodkového sporenia je len doplnkový pilier, ktorý zhodnocuje dobrovoľné príspevky zamestnancov. [3]

Prvý pilier predstavuje povinné starobné dôchodkové poistenie. Je to priebežný systém, teda príspevky platiteľov sa neodkladajú a nezhodnocujú, ale sú použité na vyplatenie dôchodkov terajších dôchodcov. Príspevky aj vyplácanie dôchodkov spravuje Sociálna poisťovňa.

Druhý pilier je kapitalizačný. Príspevky sporiteľa sú ukladané na osobný dôchodkový účet sporiteľa v dôchodkovej správcovskej spoločnosti (DSS) a sú investované do fondov. Každá DSS je povinná spravovať aspoň dva fondy, a to jeden dlhopisový garantovaný dôchodkový fond a jeden akciový negarantovaný fond. Akciový negarantovaný fond je vo všeobecnosti výnosnejší, ale pri prípadných stratách nesie celé riziko sporiteľ.

Dlhopisový garantovaný fond má prísnejšie obmedzenia na investície, a to také, ktoré obmedzujú devízne a úrokové riziko. Zo zákona [14] je poisťovňa povinná doplniť majetok do garantovaného fondu z vlastného majetku, ak v sledovanom období došlo k poklesu hodnoty dôchodkovej jednotky. Do roku 2023 platilo, že sledované obdobie je desať rokov a začína plynúť 1. januára každého kalendárneho roka. Hodnota majetku, ktorú musí doplniť je

$$\left(\frac{AHDJ_{x+10}}{AHDJ_x} - 1 \right) \times \overline{NAV}_{[x,x+1]}, \quad (1)$$

kde $AHDJ_x$ je aritmetický priemer aktuálnych hodnôt dôchodkovej jednotky za prvý mesiac sledovaného obdobia, $AHDJ_{x+10}$ je aritmetický priemer aktuálnych hodnôt dôchodkovej jednotky za posledný mesiac sledovaného obdobia a $\overline{NAV}_{[x,x+10]}$ je priemerná čistá hodnota majetku v dlhopisovom fonde za sledované obdobie.

Počas písania práce došlo k novele zákona v ktorej sa upravujú pravidlá garancie dlhopisových fondov v druhom pilieri. Podľa zákona [15] teraz platí individuálna garancia. Individuálna garancia predstavuje výšku povinných príspevkov, ktoré sporiteľ vložil do fondu. Ak suma vyplácaného dôchodku bude nižšia ako individuálna garancia, dôchodková správcovská spoločnosť tento rozdiel doplatí z vlastných zdrojov. [8]

Aktuálna hodnota dôchodkovej jednotky je podiel na majetku v dôchodkovom fonde. Počíta sa ako podiel čistej hodnoty majetku v dôchodkovom fonde a počtu všetkých dôchodkových jednotiek na osobných dôchodkových účtoch sporiteľov v dlhopisovom garantovanom fonde v daný deň. [17], [9]

1.1 Dlhopisy

Dlhopisy sú spolu s akciami základnými prostriedkami na finančnom trhu. Ako definuje zákon [16], dlhopis je cenný papier, ktorého emitent je povinný splácať majiteľovi dlžnú sumu a vyplácať výnosy z dlžnej sumy. Rozlišujeme rôzne druhy dlhopisov.

Rozdeliť ich môžeme podľa emitenta, toto rozdelenie je opísané v zákone o dlhopisoch.[16]

Hypotekárne záložné listy. Ich hodnota je krytá pohľadávkami banky z hypotekárnych úverov.

Štátne dlhopisy. Sú to dlhopisy vydané štátom, konkrétne ministerstvami. Ich správu, splácanie a vyplácanie ich výnosov taktiež zabezpečuje ministerstvo.

Komunálne obligácie môže vydávať buď banka, ktorá za výťažok z tejto obligácie poskytne komunálny úver obci, alebo obec, ktorá za emisiu ručí svojim majetkom.

Druhý spôsob rozdelenia je podľa toho, či na konci stanovených období vyplácajú kupóny. Toto rozdelenie je opísané napríklad v [10].

Bezкупónové dlhopisy, tak ako naznačuje ich názov nevyplácajú kupóny, len ich nominálnu hodnotu. Ich aktuálna cena závisí od ich výnosu, teda úroku, ktorý závisí od doby splatnosti dlhopisu.

Kupónové dlhopisy vyplácajú kupóny v dohodnutých časových intervaloch. Kupóny sú väčšinou vyjadrené ako percentuálna hodnota z ich nominálnej hodnoty.

Špeciálnym druhom dlhopisu sú **par bondy**, pre ktoré platí, že ich cena sa rovná nominálnej hodnote.

2 Model úrokovej miery

Pri písaní tejto kapitoly sme vychádzali z [10]. V matematických výpočtoch sa často využíva diskontný dlhopis, inak nazývaný aj diskontný faktor. Jedná sa o bezкупónový dlhopis s nominálnou hodnotou $F = 1$. Ak označíme dnešný čas ako t a čas maturity

tohto dlhopisu ako T , cenu diskontného dlhopisu pri spojitom úročení môžeme vypočítať nasledovne:

$$P = e^{-R(t,T)(T-t)}, \quad (2)$$

kde $R(t, T)$ označuje spojitý úrok na obdobie od t do T .

Závislosť úrokovej miery od maturity dlhopisu vyjadruje časová štruktúra úrokových mier. Vieme ju ľahko odvodiť z rovnice (2) pre rôzne maturity dlhopisov.

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T) \quad (3)$$

Okamžitá úroková miera je úroková miera pre nekonečne krátky čas. Na časovej štruktúre úrokových mier je to jej počiatočná hodnota. [2] Môžeme ju označiť ako

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t+} R(t, T). \quad (4)$$

Z pohľadu stochastiky je krátkodobá úroková miera náhodný proces s určitými vlastnosťami. Modely krátkodobej úrokovej miery sa snažia tieto vlastnosti zachytiť pomocou rôznych parametrov. Potom použitím týchto modelov s odhadnutými parametrami je možné dané náhodné procesy replikovať, napríklad pre potreby simulácií. Modelom krátkodobej úrokovej miery sa podrobne venuje napríklad [10].

2.1 Vašíčkov model

Vašíčkov model patrí medzi jednofaktorové modely úrokovej miery. Jeho výnimočnou vlastnosťou je, že proces r_t môže nadobúdať aj záporné hodnoty. V minulosti sa táto vlastnosť považovala za nevýhodu, ale dnes, keď sú záporné úrokové miery realitou to môžeme považovať za jeho výhodu a preto sme sa rozhodli práve tento model použiť v našej práci. Pri jednofaktorových modeloch predpokladáme, že proces krátkodobej úrokovej miery sa v rizikovo neutrálnom svete riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr_t = \mu_t dt + \omega_t dW_t, \quad (5)$$

kde W_t je wiennerov proces a μ_t a ω_t sú $\mathcal{F}_t^W$ -adaptované procesy. Parameter μ_t sa nazýva drift a ω_t volatilita stochastického modelu. [10]

Vo Vašíčkovom modeli má stochastická diferenciálna rovnica tvar

$$dr_t = (\theta - \alpha r_t)dt + \sigma dW_t. \quad (6)$$

Drift rovnice je $\theta - \alpha r_t$ a θ , α a σ sú kladné konštanty. Takto definovaný proces sa radí k Ornstein-Uhlenbeckovým procesom, pre ktoré je charakteristická vlastnosť mean-reversion. To znamená, že proces je driftom priťahovaný k hodnote $\frac{\theta}{\alpha}$.

Okrem okamžitej úrokovej miery budeme ďalej v našej práci pracovať aj s časovou štruktúrou úrokových mier, ktorú sme už spomínali na začiatku tejto kapitoly. Na jej výpočet podľa rovnice (3) však potrebujeme ceny diskontných dlhopisov, ktoré nepoznáme. Je možné odvodiť vzorec na jej výpočet použitím Vašíčkovho modelu. Toto odvodenie je podrobne opísané napríklad v práci [11]. Ako je uvedené v tejto práci, pre časovú štruktúru začínajúcu v r_t platí

$$R(t, T) = \frac{\theta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(T-t)} \left(r_t - \frac{\theta}{\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha(T-t)}) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} + \frac{\sigma^2}{\alpha^3(T-t)} (1 - e^{-\alpha(T-t)}) - \frac{\sigma^2}{4\alpha^3(T-t)} (1 - e^{2\alpha(T-t)}) \quad (7)$$

3 Deriváty úrokovej miery

Ako naznačuje názov, deriváty úrokovej miery sú také deriváty, ktorých výplata závisí od úrokovej miery. V súčasnosti sú veľmi populárne na finančných trhoch. Do tejto skupiny patria dlhopisy, ale aj napríklad forwardové kontrakty. V našej práci sa budeme bližšie zaoberať derivátmi swap, cap a floor.

3.1 Swapy

Dve inštitúcie si chcú požičať určitý obnos peňazí. Inštitúcia A chce splácať fixný úrok a inštitúcia B chce splácať plávajúci. Podmienky sú však také, že inštitúcia A dostane výhodnejší plávajúci úrok a inštitúcia B dostane výhodnejší fixný úrok. Vytvorí kontrakt, v ktorom si tieto platby vymenia, aby každá inštitúcia splácala úrok formou aká jej vyhovuje, teda swap. V realite si však len vyplácajú rozdiel medzi týmito dvomi platbami. Pre inštitúciu A bude bilancia platieb v čase $t_i = t_0 + i\delta$

$$-K\delta + \delta L_\delta(t_{i-1}), \quad (8)$$

kde δ je časový interval, v ktorých sa platia platby, K je fixná úroková sadzba a $L_\delta(t_{i-1})$ je plávajúci úrok v čase t_{i-1} , napríklad LIBOR. [10]

Swap by mal mať pri uzatváraní kontraktu nulovú hodnotu, teda je potrebné vypočítať hodnotu fixnej úrokovej sadzby K tak, aby toto pravidlo platilo. Hodnotu swapu je možné vyjadriť pomocou rozdielu dlhopisu s plávajúcim kupónom $\delta L_\delta(t_{i-1})$ a dlhopisu s konštantným kupónom $K\delta$. Je známe, že hodnota dlhopisu s plávajúcim kupónom v čase $t = 0$ je 1. Hodnota kontraktu v čase uzatvorenia teda je

$$0 = - \left(\sum_{i=1}^n K\delta P(t, t_i) + P(t, t_n) \right) + 1. \quad (9)$$

Ďalej z tejto rovnice vieme vyjadriť vzťah pre fixnú úrokovú mieru

$$K = \frac{1 - P(t, t_n)}{\delta \sum_{i=1}^n P(t, t_i)}. \quad (10)$$

Druhý prípad vstúpenia do swapu je, keď poznáme presnú hodnotu fixného úroku, s ktorou chceme so swapu vstúpiť. V tomto prípade však už cena v čase vstupu nie je nulová. Vypočítame ju dosadením požadovaného fixného úroku K do vzťahu (9), kde na ľavej strane nebude 0, ale cena swapu.

3.2 Cap

Kontrakt cap funguje ako zabezpečenie proti vysokej úrokovej miere. V stanovených časových intervaloch je predávajúci povinný platiť majiteľovi tohto derivátu rozdiel medzi trhovou úrokovou mierou, napríklad LIBOR, a realizačnou cenou K . Teda ak v časovom intervale trhovacia miera stúpe nad realizačnú hodnotu, majiteľ kontraktu dostane platbu nazývanú caplet. [10] Hodnotu capletu v čase t_i označíme ako X_i

$$X_i = \delta(L_\delta(t_{i-1}) - K)^+. \quad (11)$$

3.2.1 Ocenenie derivátu cap

V tejto podkapitole budeme postupovať podľa postupu opísaného v [10]. Pre trhovú úrokovú mieru LIBOR platí nasledovný vzťah s diskontným dlhopisom:

$$L_\delta(T) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{P(T, T + \delta)} - 1 \right). \quad (12)$$

Pomocou tohto vzťahu vieme hodnotu capletu napísať ako

$$X_i = \delta \left(\frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{P(t_{i-1}, t_i)} - 1 \right) - K \right)^+. \quad (13)$$

Označme cenu diskontného dlhopisu $P(t_{i-1}, t_i)$ ako P_i . Potom môžeme vyjadriť vzťah (32) nasledovne:

$$X_i = (P_i^{-1} - 1 - K\delta)^+ = (1 + K\delta)P_i^{-1}(C - P_i)^+, \quad (14)$$

kde

$$C = \frac{1}{1 + K\delta}. \quad (15)$$

Hodnota capletu predstavuje výšku platby, ktorú derivát vyplátí v čase t_i . Teraz odvodíme vzťah, pomocou ktorého určíme cenu capletu v prítomnosti, teda v čase t . Použitím vzťahu pre oceňovanie opcií dostávame:

$$\begin{aligned} V_i(t) &= B_t E_Q(B_{t_i}^{-1} X_i | \mathcal{F}_t^W) \\ &= B_t E_Q [B_{t_i}^{-1} (1 + K\delta) P_i^{-1} (C - P_i)^+ | \mathcal{F}_t^W] \\ &= B_t (1 + K\delta) E_Q \left[E_Q(B_{t_i}^{-1} P_i^{-1} (C - P_i)^+ | \mathcal{F}_{t_{i-1}}^W) | \mathcal{F}_t^W \right]. \end{aligned}$$

Vidíme, že výraz $P_i^{-1}(C - P_i)^+$ je $\mathcal{F}_{t_{i-1}}^W$ -merateľný. Z toho dostávame:

$$V_i(t) = B_t (1 + K\delta) E_Q [P_i^{-1} (C - P_i)^+ E_Q(B_{t_i}^{-1} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}) | \mathcal{F}_t^W].$$

Výraz $B_{t_{i-1}} E_Q(B_{t_i}^{-1} | \mathcal{F}_{t_{i-1}})$ predstavuje hodnotu derivátu v čase t_{i-1} , ktorý má v čase t_i hodnotu 1, teda rovná sa hodnote diskontného dlhopisu v čase t_{i-1} , ktorý vyprší v čase t_i . To môžeme zapísať nasledovne:

$$B_{t_{i-1}} E_Q(B_{t_i}^{-1} . 1 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}) = P(t_{i-1}, t_i) = P_i.$$

Dosadíme to do vzťahu pre cenu capletu a dostaneme:

$$\begin{aligned} V_i(t) &= B_t (1 + K\delta) E_Q [P_i^{-1} (C - P_i)^+ P_i B_{t_{i-1}}^{-1} | \mathcal{F}_t^W] \\ &= (1 + K\delta) B_t E_Q [B_{t_{i-1}}^{-1} (C - P_i)^+ | \mathcal{F}_t^W]. \end{aligned} \quad (16)$$

Vidíme, že výraz $(C - P_i)^+$ je výplatná funkcia put opcie na diskontný dlhopis. Nakoniec pre cenu capletu vyplácaného v čase t_i dostávame:

$$V_i(t) = (1 + K\delta)P_E, \quad (17)$$

kde P_E predstavuje hodnotu put opcie na diskontný dlhopis s maturitou v čase t_i , realizačná cena opcie je C a maturita opcie put je v čase t_{i-1} .

Tvrdenie 3.1. *Nech S_t je hodnota bližšie nešpecifikovaného aktíva a B_t hodnota peňažného dlhopisu v čase t . Predpokladajme, že $\ln S_t$ a $\ln B_t^{-1}$ sú normálne rozdelené pri rizikovo neutrálnej miere Q . Korelácia medzi nimi je ρ . Nech pre disperzie platí:*

$$\begin{aligned} \text{Var}(\ln S_t) &= \sigma_1^2 T \\ \text{Var}(\ln B_t^{-1}) &= \sigma_2^2 T. \end{aligned} \quad (18)$$

Nech F je realizačná cena forwardového kontraktu s maturitou v čase T . Jeho hodnota v čase 0 je $E_Q(B_T^{-1}(S_T - F))$. Ak sa hodnota tohto kontraktu v čase 0 rovná 0, potom

$$F = \frac{E_Q(B_T^{-1}S_T)}{E_Q(B_T^{-1})}. \quad (19)$$

Ked' sú splnené tieto predpoklady, na výpočet hodnoty call opcie na dané aktívum s realizačnou cenou M a maturitou v čase T môžeme použiť zovšeobecnený Black-Scholesov vzorec

$$V_0 = E_Q(B_T^{-1}) \left[F \Phi \left(\frac{\ln \frac{F}{M} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 T}{\sigma_1 \sqrt{T}} \right) - M \Phi \left(\frac{\ln \frac{F}{M} - \frac{1}{2} \sigma_1^2 T}{\sigma_1 \sqrt{T}} \right) \right]. \quad (20)$$

Navyše platí

$$F = E_Q(S_T) \exp(\rho \sigma_1 \sigma_2 T). \quad (21)$$

Dôkaz. Dôkaz je podrobne opísaný v [10]. □

Aby sme mohli pri oceňovaní put opcie na diskontný dlhopis, musíme dokázať, že sa riadi lognormálnym rozdelením.

Predpokladajme, že okamžitá úroková miera sa riadi Vašíčkovým modelom, teda spĺňa rovnicu (6). Vieme, že podľa Itôvej lemy riešenie tejto rovnice pri počiatočnej hodnote r_0 má tvar

$$\begin{aligned} r_t &= \frac{\theta}{\alpha} + e^{-\alpha t} \left(r_0 - \frac{\theta}{\alpha} \right) + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \\ r_t &= \frac{\theta}{\alpha} + e^{-\alpha t} \left(r_0 - \frac{\theta}{\alpha} \right) + \sigma e^{-\alpha t} Z, \end{aligned}$$

kde pre Z platí

$$\int_0^t e^{\alpha s} dW_s = Z \sim N\left(0, \int_0^t e^{2\alpha s} ds\right).$$

Potom pre r_t platí

$$r_t \sim N\left(\frac{\theta}{\alpha} + e^{-\alpha t}\left(r_0 - \frac{\theta}{\alpha}\right), \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\right) \quad (22)$$

Ďalej budeme hľadať funkciu $g(x, t, T)$.

$$\begin{aligned} g(x, t, T) &= -\ln(P(t, T)|r_t = x) \\ &= -\ln E_Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) | r_t = x\right] \end{aligned} \quad (23)$$

Proces r_t je Markovovský proces, teda taký, ktorého budúca hodnota nezávisí od predošlých, ale len od poslednej hodnoty. Parametre θ , α a σ sú nezávislé. Vďaka týmto vlastnostiam ak proces štartuje v r_t , tak časový interval od t do s je analogický s intervalom od 0 do $s - t$.

$$r_s = \frac{\theta}{\alpha} + e^{-\alpha(s-t)}\left(x - \frac{\theta}{\alpha}\right) + \sigma e^{-\alpha(s-t)} \int_0^{s-t} e^{\alpha u} dW_u. \quad (24)$$

Integrovaním (24) a následnými úpravami dostávame:

$$\int_t^T r_s ds = \frac{\theta}{\alpha}(T - t) + \frac{1}{\alpha}\left(x - \frac{\theta}{\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha(T-t)}) + Z, \quad (25)$$

kde

$$Z \sim N(0, \tilde{\sigma}^2(t, T))$$

a pre $\tilde{\sigma}^2(t, T)$ platí

$$\tilde{\sigma}^2(t, T) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}(T - t) - \frac{2\sigma^2}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha(T-t)}). \quad (26)$$

Týmto sme dokázali, že vo Vašíčkovom modeli sú diskontné dlhopisy lognormálne rozdelené. Funkcia $g(x, t, T)$ má tvar

$$\begin{aligned} g(x, t, T) &= \ln E_Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) | r_t = x\right] \\ &= \frac{\theta}{\alpha}(T - t) + \frac{1}{\alpha}\left(x - \frac{\theta}{\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha(T-t)}) - \ln E_Q[\exp(-Z)] \\ &= \frac{\theta}{\alpha}(T - t) + \frac{1}{\alpha}\left(x - \frac{\theta}{\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha(T-t)}) - \ln E_Q\left[\exp\left(-Z - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(t, T) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(t, T)\right)\right] \\ &= \frac{\theta}{\alpha}(T - t) + \frac{1}{\alpha}\left(x - \frac{\theta}{\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha(T-t)}) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(t, T) \end{aligned} \quad (27)$$

Môžeme teda na výpočet hodnoty call opcie na diskontný dlhopis použiť Black-Scholesov vzorec (20) z tvrdenia 3.1, pričom realizačná cena $M = C$ a pre realizačnú cenu forwardového kontraktu platí:

$$F = \frac{P(t, t_i)}{P(t, t_{i-1})}. \quad (28)$$

Ďalej odvodíme disperziu $Var(\ln S_t)$. Vieme, že platí

$$\begin{aligned} -\ln(P(t_{i-1}, t_i)) &= g(r_{t_{i-1}}, t_{i-1}, t_i) \\ &= \frac{\theta}{\alpha}(t_i - t_{i-1}) + \frac{1}{\alpha} \left(r_{t_{i-1}} - \frac{\theta}{\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})}) - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}(t_{i-1}, t_i). \end{aligned} \quad (29)$$

Teda

$$\begin{aligned} Var(\ln S_{t_{i-1}}) &= Var(\ln P(t_{i-1}, t_i)) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})})^2 Var(r_{t_{i-1}}) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})})^2 \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t_{i-1}}) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha^3} (1 - e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})})^2 (1 - e^{-2\alpha t_{i-1}}) = \sigma^*(t_{i-1}, t_i). \end{aligned} \quad (30)$$

Hodnotu put opcie vyjadríme pomocou hodnoty call opcie na diskontný dlhopis využitím Put-Call parity. Pre put opciu v čase t platí

$$put_t = call_t + CP(t, t_{i-1}) - S_t. \quad (31)$$

V našom prípade $S_t = P(t, t_i)$. Teda hodnotu capletu v čase t vyplateného v čase t_i môžeme zapísať ako

$$\begin{aligned} V_i(t) &= (1 + K\delta)(P(0, t_{i-1})) \left[F\Phi \left(\frac{\ln \frac{F}{C} + \frac{1}{2}\sigma^{*2}(t_{i-1}, t_i)t_{i-1}}{\sigma^*(t_{i-1}, t_i)\sqrt{t_{i-1}}} \right) - C\Phi \left(\frac{\ln \frac{F}{C} - \frac{1}{2}\sigma^{*2}(t_{i-1}, t_i)t_{i-1}}{\sigma^*(t_{i-1}, t_i)\sqrt{t_{i-1}}} \right) \right] \\ &\quad + CP(t, t_{i-1}) - P(t, t_i). \end{aligned} \quad (32)$$

3.3 Floor

Opačným ekvivalentom derivátu cap je derivát floor, ktorý majiteľovi zabezpečuje v určených časových intervaloch výplatu vo výške rozdielu medzi realizačnou cenou K a

trhovou úrokovou mierou. Táto platba sa nazýva floorlet a jeho hodnotu vieme zapísať nasledovne:

$$X_i = \delta(K - L_\delta(t_{i-1}))^+. \quad (33)$$

Podobne ako pri derivátoch put a call, medzi platbami caplet a floorlet platí vzťah. Nazýva sa caplet-floorlet parita a vieme ho zapísať ako

$$\text{floorlet} - \text{caplet} = (1 + K\delta)P(t, t_i) - P(t, t_{i-1}), \quad (34)$$

pre hodnoty platieb v čase t a vyplácaných v čase t_i . Pomocou caplet-floorlet parity vieme vyjadriť vzorec na výpočet hodnoty floorletu. Upravíme rovnicu (34) na tvar

$$\text{floorlet} = \text{caplet} + (1 + K\delta)P(t, t_i) - P(t, t_{i-1}). \quad (35)$$

Za hodnotu capletu dosadíme vzorec na výpočet capletu (32) z predchádzajúcej podkapitoly. Dostaneme vzťah na výpočet hodnoty floorletu v čase t vyplácaného v čase t_i . Sčítaním hodnoty všetkých floorletov, ktoré budú vyplatené v čase od t do T dostaneme hodnotu derivátu floor v čase t .

4 Štruktúra programu

Naším cieľom je zistiť, či by investície do spomínaných derivátov mohli ovplyvniť hodnoty doplácania do garantovaných fondov. V našej práci to zistíme pomocou simulácií fungovania dlhopisového garantovaného fondu v prípadoch, kedy investujeme do rôznych derivátov. Vývoj okamžitej úrokovej miery simulujeme pomocou Vašíčkovho modelu opísaného v predošlých kapitolách. Pomocou vzorca (7) vypočítame časovú štruktúru úrokových mier, ktorú ďalej použijeme na ocenenie dlhopisov a derivátov.

V prvom kroku nastavíme počiatočné parametre, ktoré budeme používať. Za dĺžku trvania simulácie sme zvolili 20 rokov. Za počiatočnú okamžitú úrokovú mieru sme zvolili priemerný týždenný EURIBOR pre marec 2022, teda naše $r_0 = 0,00569$. V ďalších časových krokoch simulácie budeme simulovať okamžitú úrokovú mieru pomocou Vašíčkovho modelu. Použili sme parametre modelu použité v práci [11]. Pre Vašíčkov model v rizikovo neutrálnom svete

$$dr_t = (\theta - \alpha r_t)dt + \sigma dW_t \quad (36)$$

máme parametre

$$\begin{aligned}\theta &= 0,0095 \\ \alpha &= 0,1118 \\ \sigma &= 0,0263.\end{aligned}\tag{37}$$

V rizikovo neutrálnom svete oceňujeme dlhopisy a deriváty. Na simuláciu okamžitej úrokovej miery potrebujeme parametre pre Vašíčkov model v reálnom svete. Po prevedení do reálneho sveta dostávame parametre:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= \alpha \\ \tilde{\theta} &= r_{\infty}\alpha \\ \tilde{\sigma} &= \sigma,\end{aligned}\tag{38}$$

kde r_{∞} predstavuje očakávanú budúcu okamžitú úrokovú mieru. Zo vzorca pre $\tilde{\theta}$ vieme vyjadriť r_{∞} pre ktoré platí $r_{\infty} = \frac{\tilde{\theta}}{\alpha}$, teda vidíme vlastnosť mean-reversion spomínanú v podkapitole 2.1. V simuláciách budeme sledovať správanie portfólia pre rôzne hodnoty r_{∞} . Do simulácií vstupujeme s kapitálom rovným 1, pretože cieľom tejto práce je porovnať výkon portfólia pri rôznych alternatívach a doplatky do garantovaného fondu. V prípadoch, keď sú súčasťou portfólia deriváty úrokovej miery, v počiatočnom kroku si určíme hodnotu fixného úroku pre deriváty. S použitím zadaných parametrov vypočítame počiatočnú časovú štruktúru úrokových mier a hodnoty dlhopisov a derivátov použitím vzorcov uvedených v kapitole 3.

Vždy vedíme dve portfóliá, a to jedno čisto dlhopisové a druhé dlhopisové s jedným z derivátov úrokovej miery opísaných v kapitole 3. Pri portfóliu s derivátom najskôr kúpime daný derivát ocenený pomocou vzorcou z kapitoly 3 a zvyšok prostriedkov investujeme do dlhopisov. Cap a floor nakupujeme len v kladnej pozícii, ale do swapu vstupujeme aj v záporných pozíciách. Portfólio z dlhopisov budeme zostavovať rovnako ako je opísané v práci [11]. Teda nakupujeme par bondy s maturitou 1, 3, 5 a 10 rokov. Podiely nákupu dlhopisov s vybranými maturitami sme vypočítali pomocou úlohy lineárneho programovania

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{j=1}^m w_j C_j \\
& \text{s.t. } W D_{portf} + (1 - W) \sum_{j=1}^m w_j D_{FW_j} \leq D_{ciel} \\
& \sum_{j=1}^m w_j = 1 \\
& w_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, m.
\end{aligned} \tag{39}$$

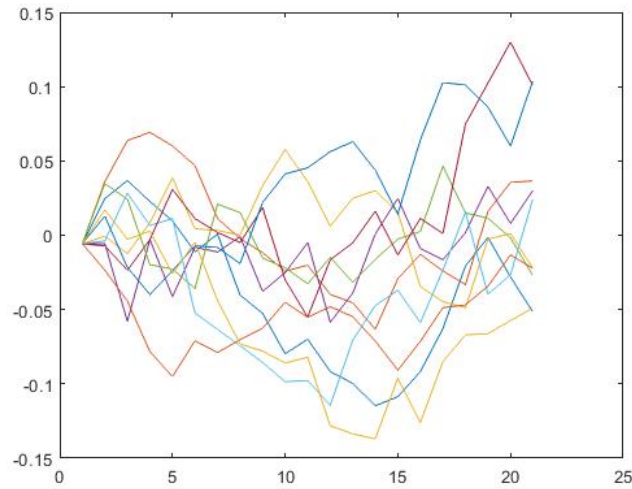
Kde C_j predstavuje kupón dlhopisu s j -tou maturitou, w_j je váha kapitálu, za ktorý nakúpime dlhopisy s j -tou maturitou, W je časť portfólia držaná v dlhopisoch, D_{portf} je durácia aktuálne držaného portfólia, D_{FW_j} predstavuje duráciu dlhopisu s j -tou maturitou a D_{ciel} označuje cieľovú duráciu. Teda maximalizujeme hodnotu vyplácaných kupónov s udržiavaním zvolenej cieľovej durácie portfólia. Navyše musí byť splnená podmienka spodného ohraničenia pre váhu kapitálu investovaného do jednoročných dlhopisov

$$w_1 \geq \max \left(0, \frac{W_{1Y}(kapital + PV_{portf}) - PV_{1Y}}{kapital} \right), \tag{40}$$

kde W_{1Y} predstavuje podiel aktuálne držaných dlhopisov s maturitou 1 rok, PV_{portf} je súčasná hodnota dlhopisov v portfóliu, PV_{1Y} je súčasná hodnota jednoročných dlhopisov aktuálne v portfóliu a $kapital$ predstavuje časť hodnoty portfólia ktorú máme vo forme hotovosti k dispozícii na nákup nových dlhopisov. Táto podmienka zabezpečuje, že v ďalšom roku budeme mať dostatok prostriedkov na nákup nových dlhopisov a prípadné vyplácanie záporných kupónov. Podrobnejšie sa tomu venuje práca [11].

Pre každý rok simulácie najskôr vygenerujeme okamžitú úrokovú mieru pomocou Vašíčkovho modelu. Príklad priebehu okamžitých úrokových mier pre niekoľko simulácií vidíme na obrázku 1. Pre vygenerovanú hodnotu následne vypočítame krivku časovej štruktúry úrokových mier pomocou vzorca (7). Vyplatíme kupóny a zmaturované dlhopisy, v portfóliu s derivátom aj jeho výplatu. Následne za získaný kapitál nakúpime nové dlhopisy. Pre obe portfóliá vypočítame aktuálnu hodnotu dôchodkovej jednotky.

Od desiateho roku v simulácii zisťujeme, či došlo k poklesu dôchodkovej jednotky. Ak k poklesu došlo, vypočítame hodnotu doplatku do garantovaného fondu a túto hodnotu pripočítame k hodnote fondu.



Obr. 1: Simulované okamžité úrokové miery

5 Stratégia zabezpečenia garantovaných fondov

Garantované dlhopisové fondy v časoch s nízkou úrokovou mierou sú málo výnosné. Na začiatku roka 2022 všetky slovenské dôchodkové správcovské spoločnosti mali záporné zhodnotenie majetku v garantovaných dlhopisových fondoch.[5] Aj keď koncom roka 2022 a začiatkom roka 2023 začali byť výnosnejšie a v krátkodobých horizontoch majú kladné výnosy, v ročnom horizonte sú výnosy stále v záporných číslach. [4] V našej práci skúmame ako ovplyvní investícia do jednotlivých derivátov úrokových mier zhodnocovanie fondu a tým aj výšku doplatkov, ktoré musí dôchodková správcovská spoločnosť doplácať v prípade poklesu majetku vo fonde.

Pozorovali sme správanie sa fondu s investíciami do derivátov pri rôznych očakávaných úrokových mierach: $r_\infty = \{-0,01; 0; 0,03; 0,05\}$. Pre každú očakávanú úrokovú mieru sme nakupovali deriváty s rôznymi hodnotami fixných úrokových mier $K = \{-0,01; 0; 0,03; 0,05\}$. Podľa výplatnej funkcie daného derivátu a podľa vzťahu jednotlivej kombinácie r_∞ a K sme do nákupu derivátu vstupovali v kladnej alebo zápornej pozícii v prípade swapu a len v kladnej pozícii v prípadoch capu a flooru. Sledovali sme aj výsledky portfólií pri rozličných maturitách (5, 10 a 20 rokov) a rozličných častiach počiatočného kapitálu, ktoré sme sa rozhodli kryť derivátom. Použili sme $h = \{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{10}; \frac{1}{50}\}$. Pre každú z alternatív sme spravili 1000 simulácií.

Sledujeme tri výstupy zo simulácií. Počet zlých simulácií, ktorý vyjadruje počet jednotlivých simulácií, v ktorých bolo potrebné doplácať do fondu z celkového počtu 1000 simulácií. Priemerný doplatok predstavuje priemernú hodnotu doplatku vyplácaného v zlej simulácii. Vypočítali sme ho ako

$$\text{priemerný doplatok} = \frac{\sum HD_n}{\text{počet zlých simulácií}}, \quad (41)$$

kde HD_n predstavuje celkovú hodnotu doplatkov v n -tej simulácii. Posledným sledovaným výstupom je celková hodnota doplatku počas simulácií. Predstavuje hodnotu doplatkov, ktorú sme doplatili do fondu za všetkých 1000 simulácií pre portfólio s derivátom s danými parametrami. Vypočítame ju ako

$$\text{celková hodnota doplatku} = \text{počet zlých simulácií} * \text{priemerný doplatok}. \quad (42)$$

5.1 Portfólio bez derivátov

Predtým, ako rozoberieme výsledky portfólií s jednotlivými derivátmi, sa pozrieme na portfólio bez derivátov. V každom sete simulácií s danou kombináciou vstupných parametrov, a to maturity derivátu, očakávanej úrokovej miery r_∞ , fixnej úrokovej miery derivátu K a zabezpečovanej časti portfólia derivátom h sa okrem portfólia s daným derivátom paralelne simulovalo aj portfólio bez derivátov. Toto portfólio bolo ovplyvňované len zmenami očakávanej úrokovej miery r_∞ a zmeny ostatných vstupných parametrov neovplyvňujú výkonnosť tohto portfólia, teda mali sme veľa výsledkov pre portfólio s rovnakými vlastnosťami. Pre jednoduchosť analyzovania a porovnávania výsledkov s portfóliom s derivátom budeme v tejto podkapitole štatisticky analyzovať priemerné hodnoty sledovaných výstupov pre rôzne očakávané úrokové miery r_∞ .

V tabuľke 1 sú uvedené výsledky bezderivátového portfólia. Ako sme očakávali, so zvyšujúcou očakávanou úrokovou mierou r_∞ sa znižuje počet simulácií, v ktorých bolo potrebné doplácať do fondu. Taktiež sa aj postupne znižuje priemerná hodnota doplatku, pričom pri kladných hodnotách r_∞ už zostáva takmer nezmenená.

r_∞	Počet zlých simulácií		Priemerný doplatok	
	Priemer	Štandardná odchýlka	Priemer	Štandardná odchýlka
-0,01	616	14,498	0,572	0,022
0	559	17,231	0,517	0,024
0,03	395	15,508	0,318	0,021
0,05	299	15,384	0,316	0,020

Tabuľka 1: Výsledky portfólia bez derivátov

5.2 Swap

V simuláciách budeme používať obe spomínané alternatívy vstúpenia do swapu, a to s fixnou mierou vypočítanou tak, aby sa v čase nákupu jeho hodnota rovnala nule a s dopredu určenou fixnou mierou za príslušnú cenu. Do swapu budeme vstupovať v kladnej alebo zápornej pozícii. V kladnej nám budú v ročných intervaloch vyplácané čiastky $(L_\delta(t_{i-1}) - K)$ a cenu swapu vypočítame pomocou vzorca

$$cenaSwap_+ = - \left(\sum_{i=1}^n K \delta P(t, t_i) + P(t, t_n) \right) + 1. \quad (43)$$

V zápornej pozícii swapu nám bude vyplácať $(K - L_\delta(t_{i-1}))$ a jeho hodnota bude

$$cenaSwap_- = -cenaSwap_+. \quad (44)$$

5.2.1 Swap s nulovou počiatočnou hodnotou

Tento derivát môžeme považovať za najjednoduchší spôsob zabezpečenia fondu, keďže počiatočný vstup doň je zadarmo. V počiatočnej časti vypočítame fixnú úrokovú mieru, pri ktorej má swap nulovú hodnotu pomocou (9). Pre rôzne maturity derivátu sme dostali rôzne hodnoty fixnej úrokovej miery K , uvedené sú v tabuľke 2.

Podľa hodnoty fixnej úrokovej miery K a hodnoty očakávanej úrokovej miery r_∞ vstupujeme do kladnej alebo zápornej pozície Swapu. Ak $r_\infty > K$, tak vstupujeme do kladnej pozície a naopak, ak $r_\infty < K$, vstupujeme do zápornej pozície.

Výsledky simulácií sú zobrazené na stĺpcových grafoch. Každá farba zodpovedá výsledkom s danou očakávanou úrokovou mierou r_∞ , stĺpcami sú zobrazené výsledky portfólia so

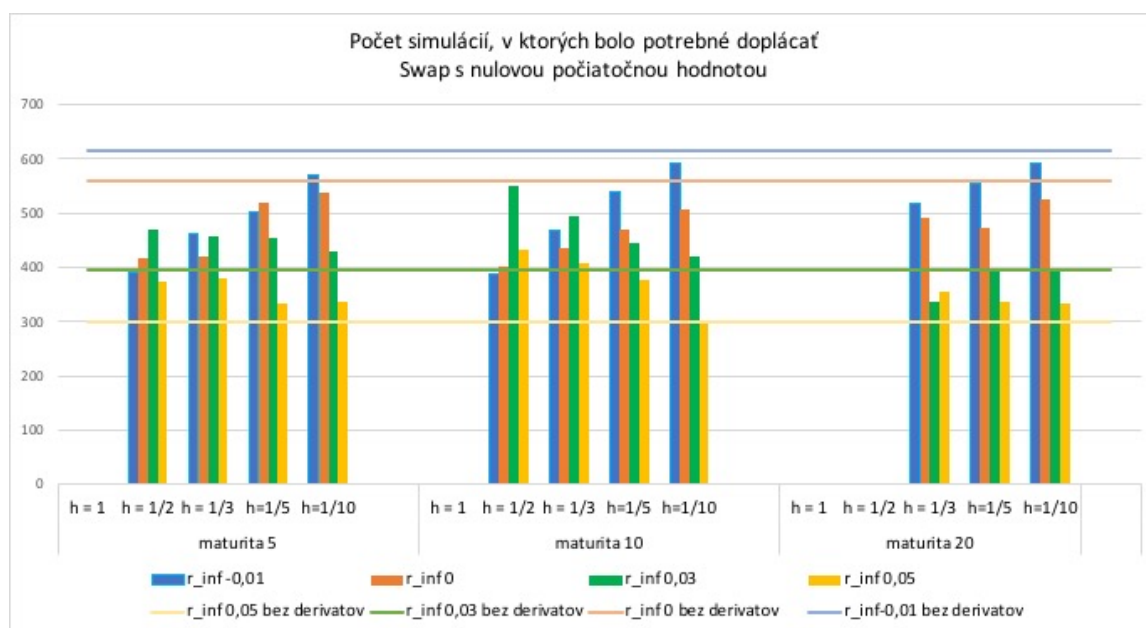
Maturita	K
5 rokov	0,0135
10 rokov	0,0243
20 rokov	0,0346

Tabuľka 2: Fixné úrokové miery pre Swap s nulovou počiatočnou hodnotou

Swapom a horizontálnymi čiarami sú zobrazené výsledky portfólia bez derivátu opísané v podkapitole vyššie. Stĺpce sú zlúčené do skupín s rovnakou maturitou a do ďalších podskupín s rovnakou časťou portfólia, ktorú zabezpečujeme derivátom h .

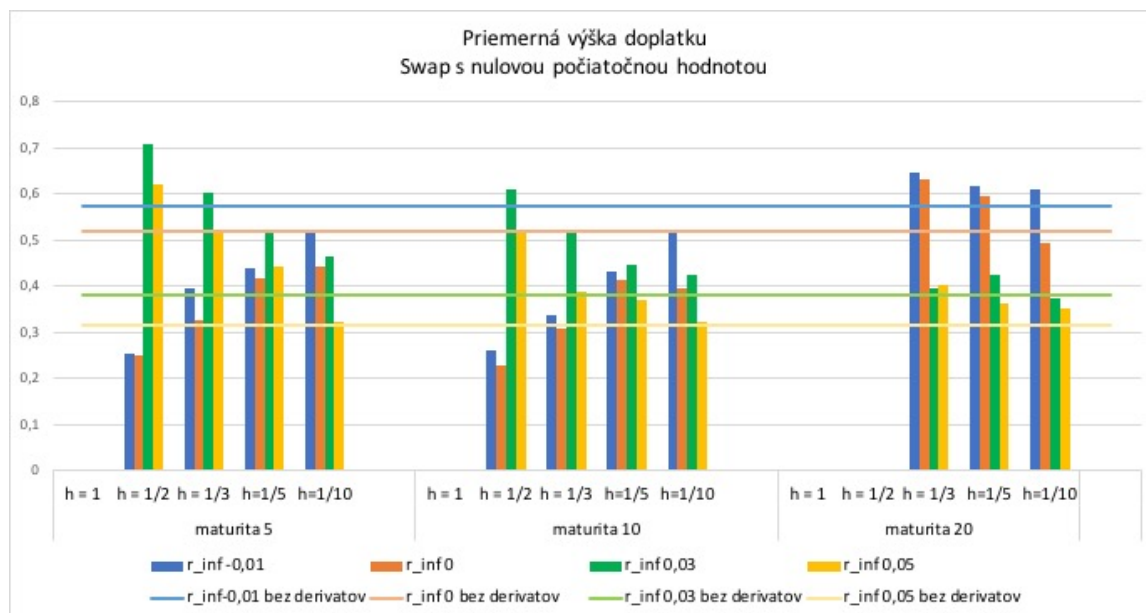
Počet simulácií, v ktorých bolo potrebné doplácať zobrazuje obrázok 2. Vidíme, že so znižujúcim sa h rastú počty simulácií, v ktorých sa dopláca pre portfóliá, v ktorých sme do Swapu vstupovali v zápornej pozícii. Pre portfóliá so Swapom s maturitou 5 a 10 rokov sú to simulácie, v ktorých bola očakávaná úroková miera $r_\infty = -0,01$ a $r_\infty = 0$ (modré a oranžové stĺpce). Pri portfóliu so Swapom s maturitou 20 rokov sme do zápornej pozície vstupovali aj pri $r_\infty = 0,03$. Naopak počet simulácií, kedy sa muselo doplácať pre portfóliá so Swapom do ktorého sme vstupovali v kladnej pozícii klesá s klesajúcim h . V porovnaní s portfóliom bez derivátu, portfólio, v ktorom sme vstupovali do swapu v zápornej pozícii dosahuje lepšie výsledky, teda nižší počet jednotlivých simulácií, v ktorých sa doplácalo do fondu. Zabezpečiť celé portfólio nebolo možné, pretože došlo k situácii, kedy sme potrebovali viac ako jeden-násobok hodnoty portfólia investovať do jednoročných dlhopisov, aby bolo možné vyplatiť záporné kupóny.

Graf na obrázku 3 opisuje **priemerné výšky doplatkov** v simuláciách. Výrazný je rozdiel medzi priemerným doplatkom do portfólií so swapom v zápornej pozícii a doplatkom do portfólií so swapom v kladnej pozícii hlavne pri veľkých h a pri portfóliách so swapom s maturitou 5 a 10 rokov. Do portfólií so swapom v kladnej pozícii a s maturitou 5 a 10 rokov doplácame výrazne viac ako do čisto dlhopisových portfólií. So znižujúcim sa h sa znižuje aj tento rozdiel v doplatkoch. Pri portfóliu so swapom s maturitou 10 rokov keď kryjeme $\frac{1}{10}$ portfólia máme pre $r_\infty = 0,03$ a $r_\infty = 0,05$ veľmi blízke hodnoty priemerných doplatkov s čisto dlhopisovým portfóliom. Pre $r_\infty = -0,01$ a $r_\infty = 0,03$ dosahujú portfóliá s 5-ročným a 10-ročným Swapom lepšie výsledky ako dlhopisové portfólio



Obr. 2: Počet simulácií, v ktorých bolo potrebné doplácať

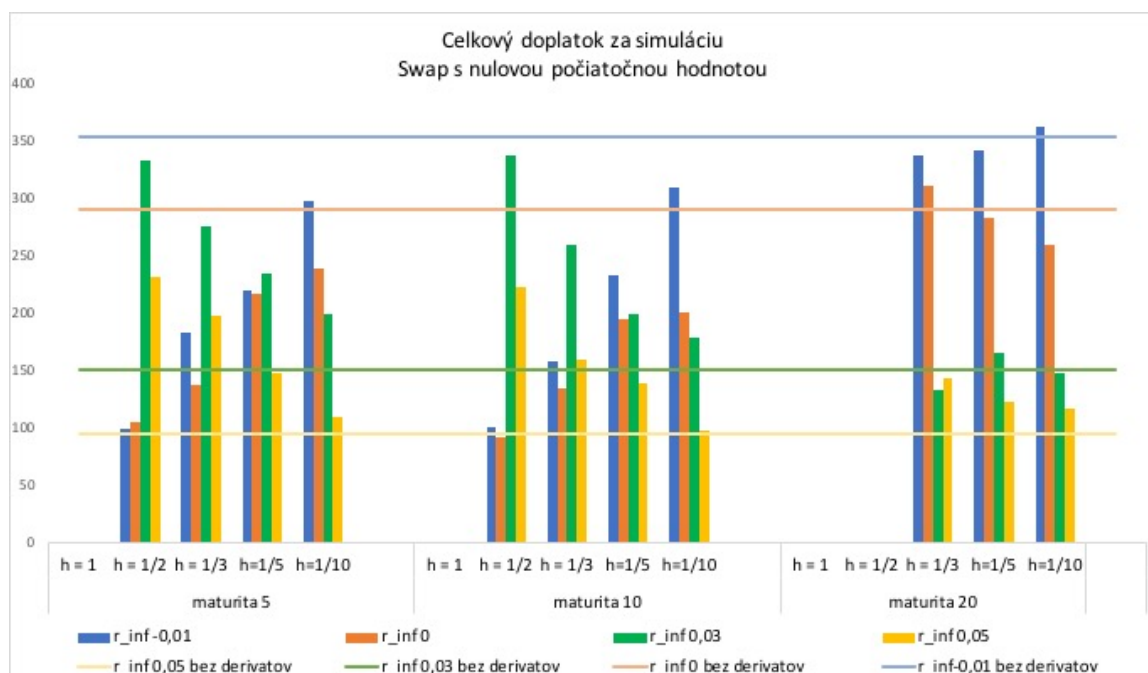
pre všetky h . Priemerné výšky doplatku do portfólia so swapom s maturitou 20 rokov sú takmer vo všetkých prípadoch vyššie ako priemerné doplatky do čisto dlhopisového portfólia.



Obr. 3: Priemerný doplatok

Najlepšie uvidíme výsledok portfólia, keď sa pozrieme na **celkový doplatok** za si-

muláciu. Celkový doplatok za simuláciu je súčin priemerného doplatku a počtu simulácií, v ktorých sa doplaca. Na obrázku 4 vidíme, že celkový doplatok sa správa podobne ako priemerný doplatok. Zlý výkon portfólia so swapom v kladnej pozícii môže byť spôsobený tým, že ak je okamžitá úroková miera nízka dostávame zápornú výplatu. Teda v časoch, kedy práve potrebujeme portfólio zabezpečiť strácame ešte ďalšie prostriedky tým, že vyplácame zápornú výplatu swapu.



Obr. 4: Celkový doplatok za všetky simulácie

5.2.2 Swap s nenulovou počiatočnou hodnotou

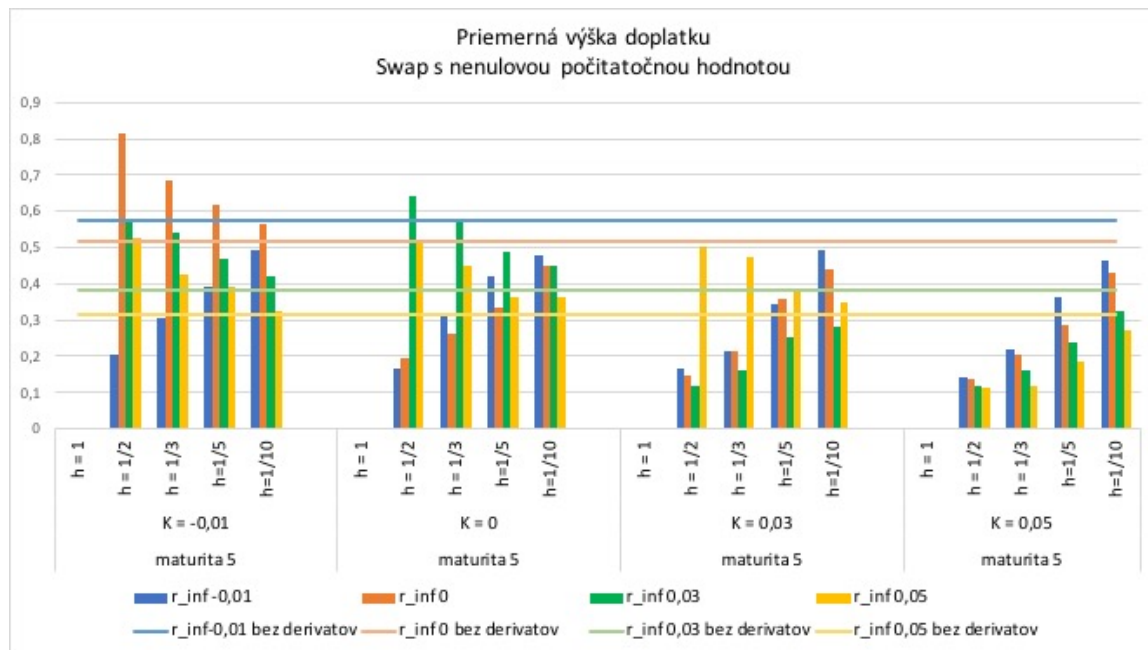
Pri tomto druhu swapu sme si určili hodnotu fixného úroku K a dopočítali sme cenu derivátu pomocou (43). Či vstupujeme do kladnej alebo zápornej pozície sme určovali podľa vzťahu medzi K a r_∞ rovnako ako pri swape s nulovou počiatočnou hodnotou. Simulovali sme fungovanie portfólií s derivátom so všetkými kombináciami parametrov uvedených v tabuľke 3.

Výsledky sú zobrazené podobne na stĺpcových grafoch. Keďže sledujeme výkon portfólia pri zmenách viacerých parametrov, máme na jednom grafe zobrazený jeden sledovaný výstup simulácií portfólia s danou maturitou. Stĺpce sú zoskupené podľa časti portfólia, ktorú zabezpečujeme h a podľa fixnej úrokovej miery K . Simulácie s rôznymi očakávanými

Maturita	5 rokov	10 rokov	20 rokov	
K	-0,01	0	0,03	0,05
r_{∞}	-0,01	0	0,03	0,05
h	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{10}$

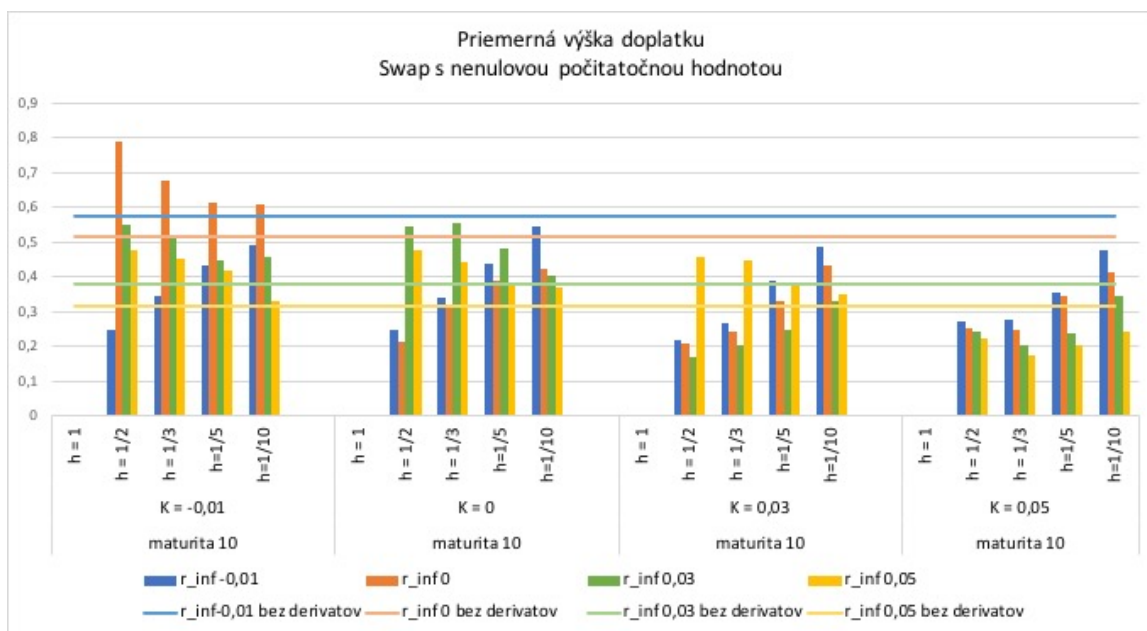
Tabuľka 3: Prehľad parametrov použitých v simulácii swapu s nenulovou počiatkovou hodnotou

úrokovými mierami sú od seba odlíšené farebne, ako bolo opísané vyššie.

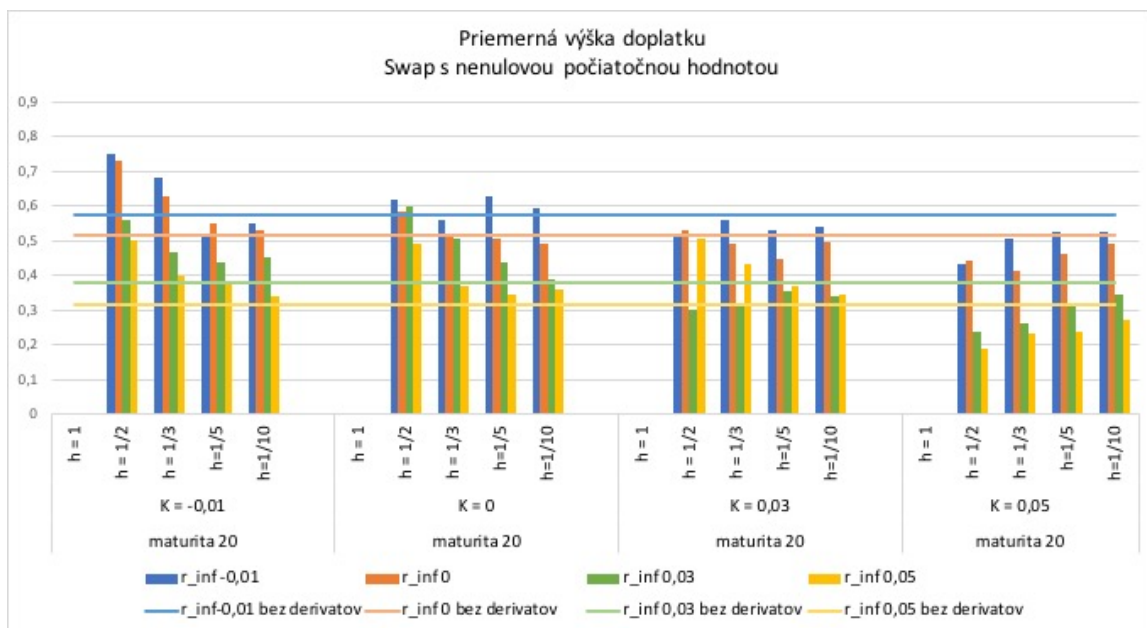


Obr. 5: Priemerný doplatok, swap s maturitou 5 rokov

Na obrázkoch 5, 6 a 7 sú zobrazené **priemerné doplatky**. Vidíme, že keď vstupujeme do zápornej pozície, teda keď $r_{\infty} < K$, tak je hodnota priemerných doplatkov nižšia oproti prípadom, kedy vstupujeme do kladnej pozície swapu. To, v akej pozícii do swapu vstupujeme ovplyvňuje aj závislosť výšky priemerného doplatku od časti portfólia, ktorú zabezpečujeme. Pri kladnej pozícii s klesajúcou zabezpečovanou časťou h klesá aj výška priemerného doplatku. Naopak, pri zápornej pozícii doplatky rastú s klesajúcim h pri ostatných parametroch rovnakých. Výnimkou je portfólio s 20-ročným swapom, kde zmeny v priemerných doplatkoch pri zmene pozície nie sú viditeľné. Pre všetky sledované maturity



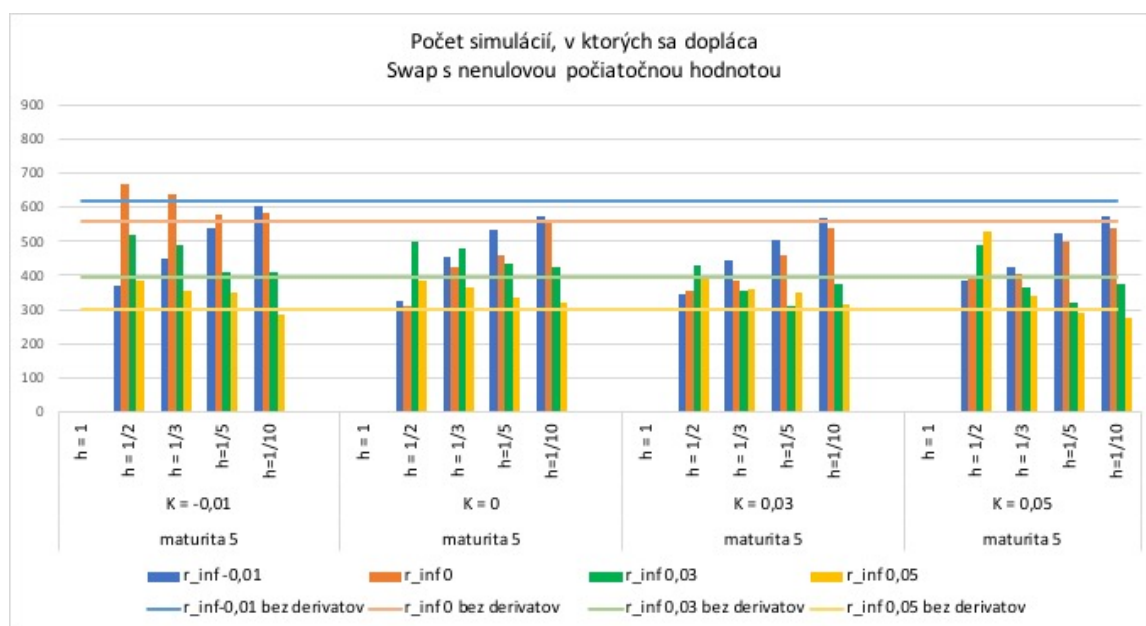
Obr. 6: Priemerný doplatok, swap s maturitou 10 rokov



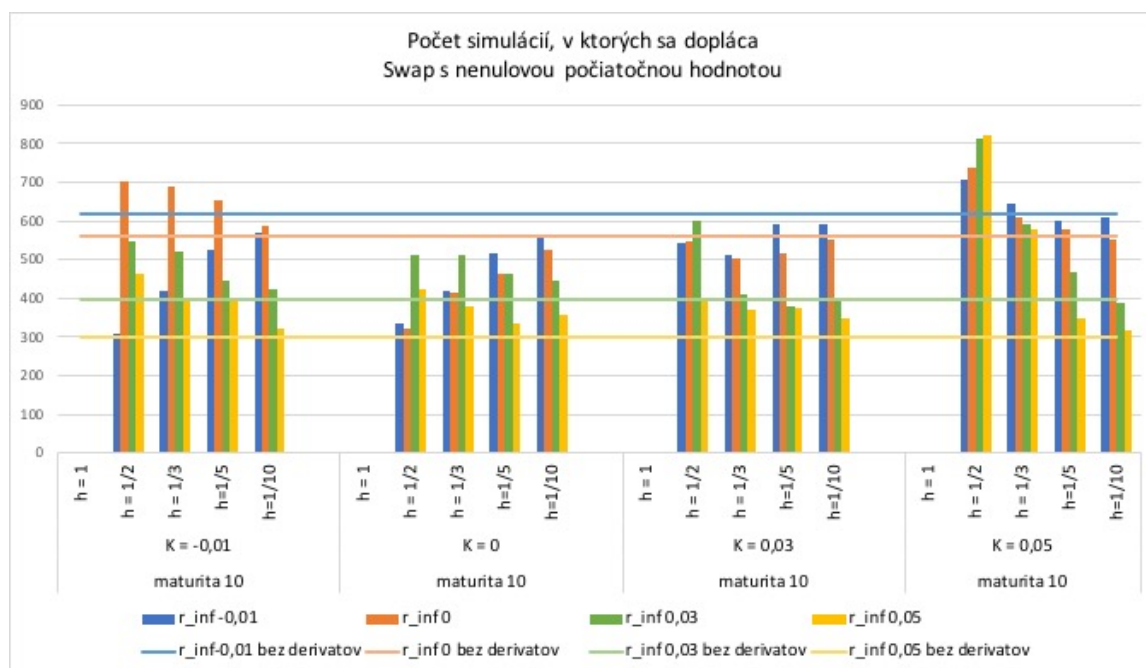
Obr. 7: Priemerný doplatok, swap s maturitou 20 rokov

je pozorovateľné, že so zvyšujúcou sa fixnou úrokovou mierou K klesá výška priemerného doplatku.

Počet simulácií s doplatkom sa správa pri zmenách parametrov podobne ako priemerný doplatok, ale zmeny sú menej výrazné. Avšak na rozdiel od priemerného doplatku,

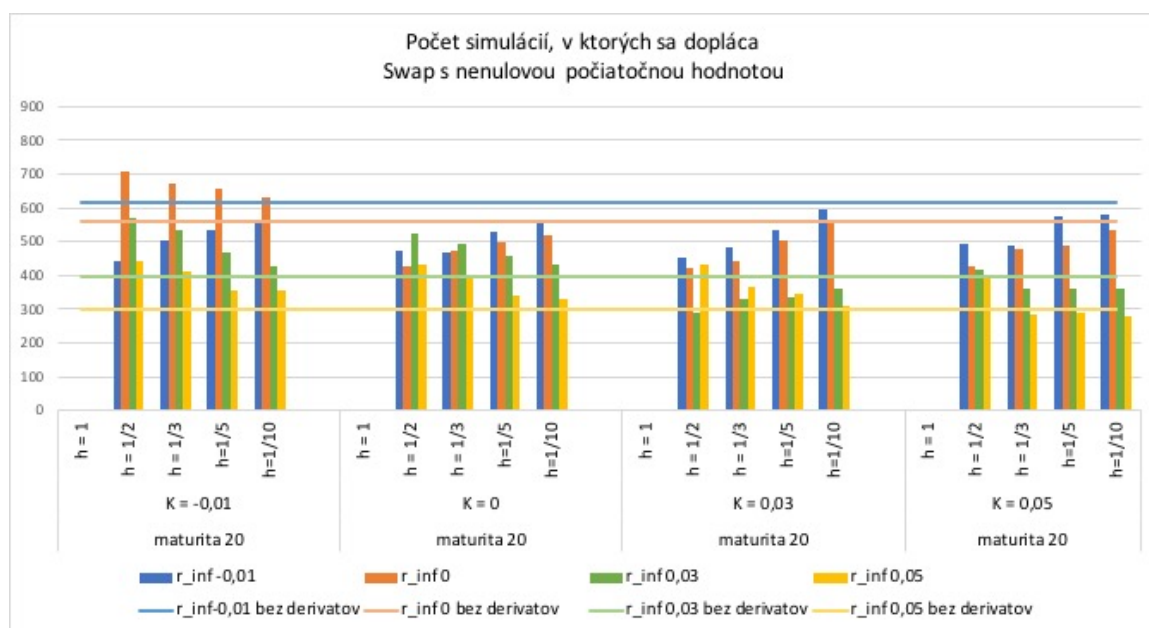


Obr. 8: Počet simulácií, v ktorých bolo potrebné doplácať do fondu, swap s maturitou 5 rokov



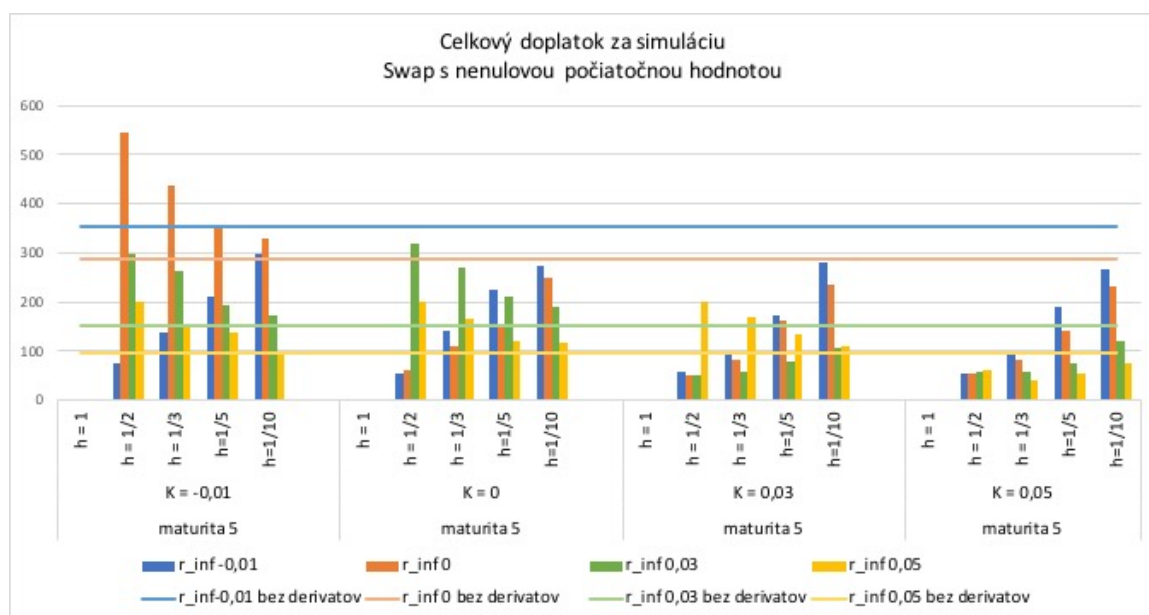
Obr. 9: Počet simulácií, v ktorých bolo potrebné doplácať do fondu, swap s maturitou 10 rokov

pri swapoch s maturitou 20 rokov vidíme najvýraznejšie rozdiel v počte simulácií s doplatkom pri vstupovaní do swapu v kladnej alebo zápornej pozícii. Rovnako ako pri priemernom doplatku, aj teraz sa mení závislosť počtu simulácií s doplatkom od zabezpečovanej

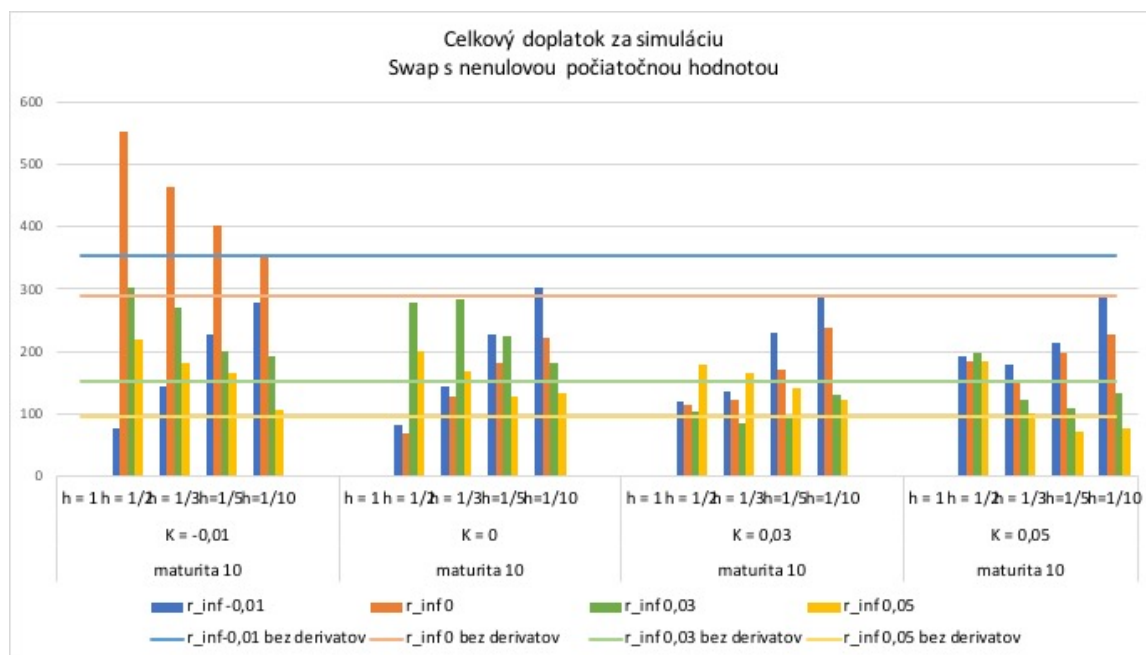


Obr. 10: Počet simulácií, v ktorých bolo potrebné doplacať do fondu, swap s maturitou 20 rokov

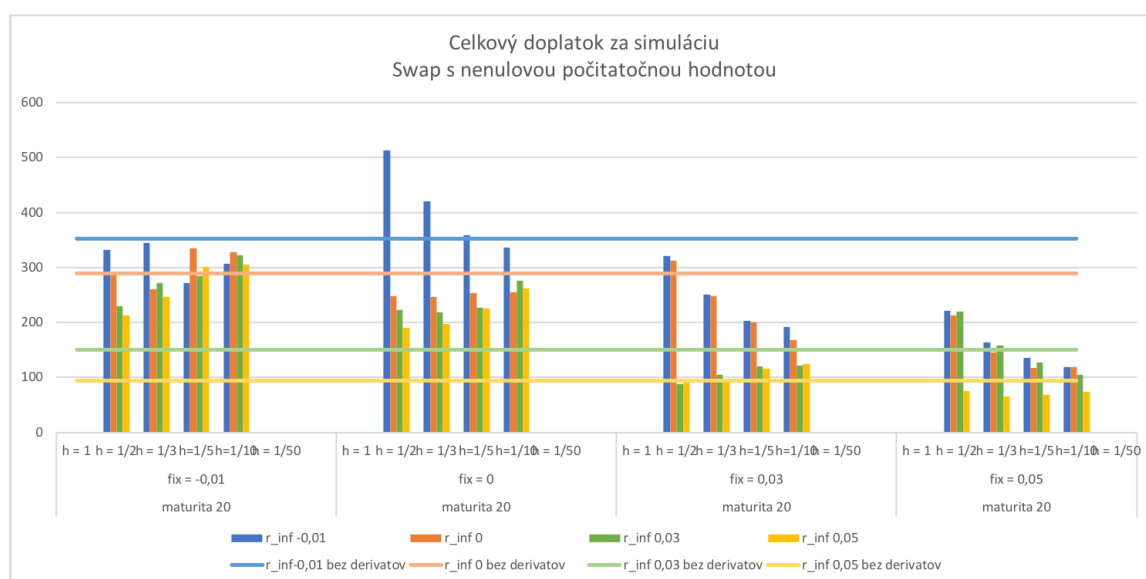
časti podľa toho, či vstupujeme do swapu v kladnej alebo zápornej pozícii. Hlavne pri malých zabezpečovaných častiach portfólia môžeme pozorovať pokles počtu simulácií s doplatkom s rastúcou očakávanou úrokovou mierou r_{∞} .



Obr. 11: Celkový doplatok do fondu za 1000 simulácií, swap s maturitou 5 rokov



Obr. 12: Celkový doplatok do fondu za 1000 simulácií, swap s maturitou 10 rokov



Obr. 13: Celkový doplatok do fondu za 1000 simulácií, swap s maturitou 20 rokov

So zvyšujúcou sa maturitou rastú aj **celkové doplatky** do fondov. Najnižšie celkové doplatky boli do portfólia s 5-ročným swapom s fixnou úrokovou mierou $K = 0,05$ pri zabezpečovaní polovice portfólia, teda $h = \frac{1}{2}$. Doplatky do tohto fondu boli nižšie ako do portfólia bez derivátov pri ktorejkoľvek očakávanej úrokovej miere r_∞ .

5.3 Cap

Na rozdiel od oboch variácií swapu, cap nám vypláca výplaty len ak okamžitá úroková miera prekročí danú hranicu K . Výšku výplaty, teda capletu vypočítame pomocou (11). Výhodou oproti swapu teda je, že ak vstupujeme do derivátu v kladnej pozícii, tak nikdy nemusíme vyplácať záporné výplaty. Avšak vstupovať do zápornej pozície nie je vhodné pre účely zabezpečovania fondov, pretože nemáme možnosť dostať kladnú výplatu. Do zápornej pozície sme nevstupovali a cap sme nakupovali len v prípadoch, keď pre fixnú úrokovú mieru K a očakávanú úrokovú mieru r_∞ platilo $r_\infty \geq K$.

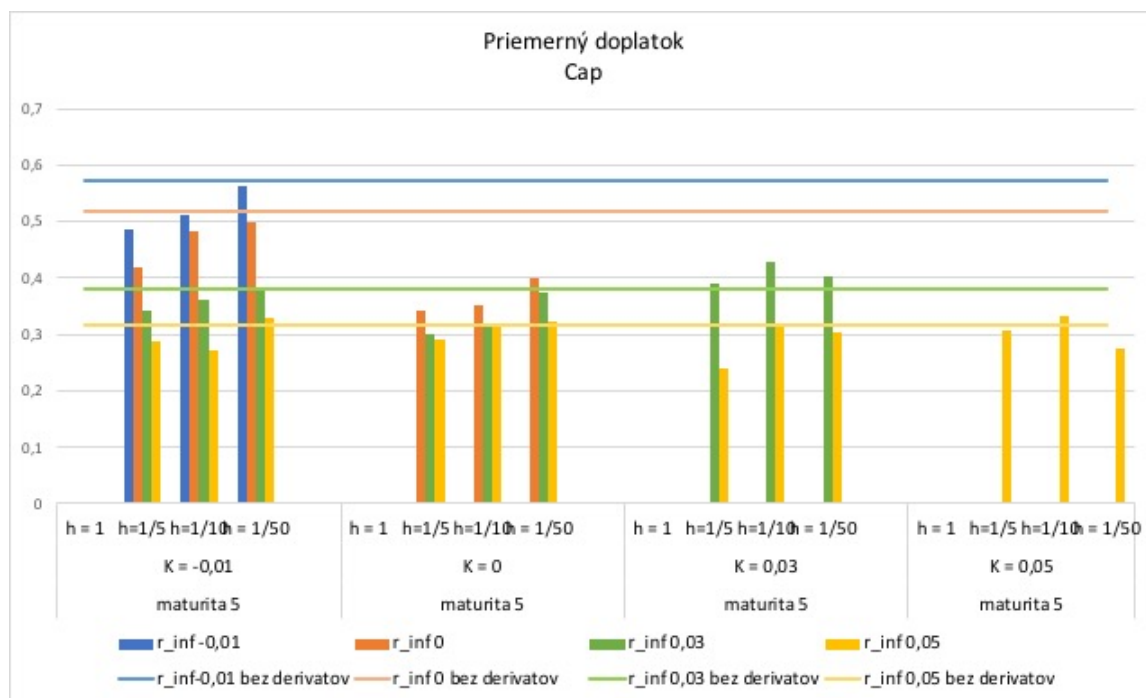
Výsledky simulácií budeme hodnotiť na základe rovnakých výstupov ako pre swap, teda ne základe priemerného doplatku, počtu simulácií, v ktorých bolo potrebné doplácať a celkovej hodnote doplatkov za všetky simulácie. Výsledky sú zobrazené na grafoch, ktoré majú taktiež rovnakú štruktúru ako v prípade swapov.

Zatiaľ čo v prípade portfólia so swapom nám zlyhali simulácie len pre prípady, kedy sme chceli zabezpečiť celé portfólio, v prípade portfólia s capom zlyhali simulácie aj keď sme zabezpečovali menšiu časť portfólia. Zlyhanie simulácií bolo spôsobené tým, že by sme potrebovali niekoľko násobok hodnoty nášho fondu na nákup jednoročných dlhopisov, aby bolo možné v nasledujúcom kroku simulácie vyplatiť všetky záporné kupóny. So zvyšujúcou sa maturitou sa zvyšoval počet prípadov, kedy nám zlyhala simulácia.

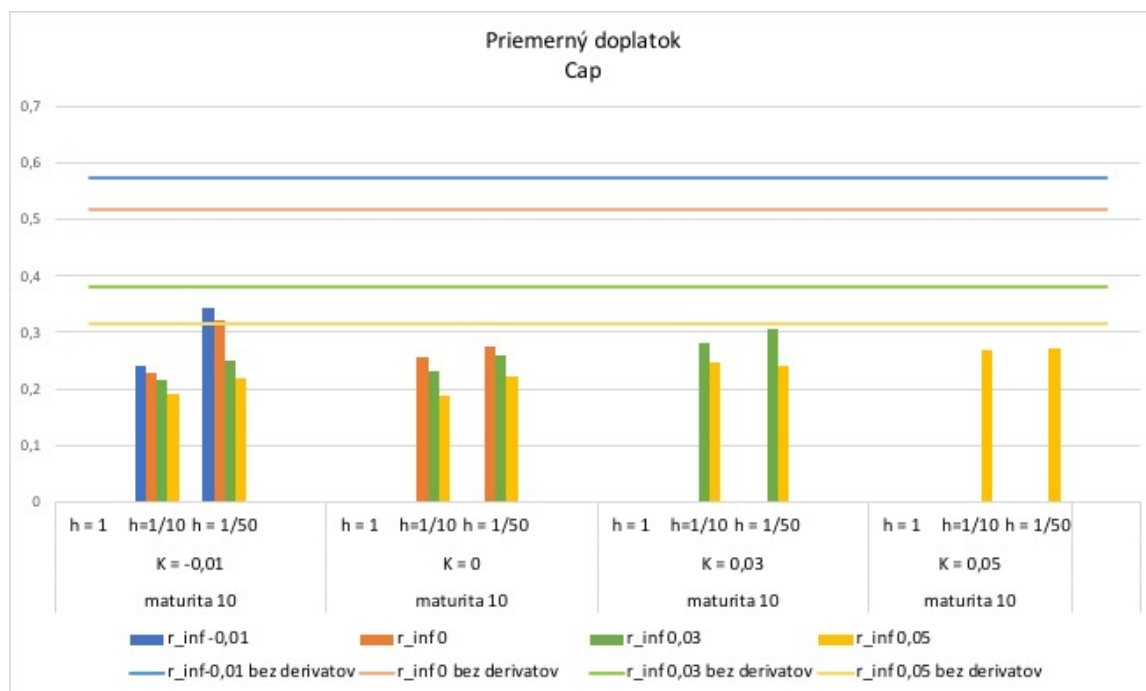
Postupne so zvyšujúcou sa fixnou úrokovou mierou K sa znižujú počty alternatív pre očakávanú úrokovú mieru, kedy nakupujeme cap. To z dôvodu, že do capu nevstupujeme v zápornej pozícii. Najnižšie hodnoty priemerných doplatkov dosahujú prípady s 10-ročným capom a fixnou úrokovou mierou $K = -0,01$, keď zabezpečujeme $h = \frac{1}{10}$ portfólia.

Pri počte simulácií, v ktorých bolo potrebné doplácať vidíme výrazné odlišnosti medzi rôznymi maturitami derivátu. Výsledky portfólia s 5-ročným capom sa pohybujú blízko hodnôt, ktoré dosiahlo čisto dlhopisové portfólio. Pri portfóliu s capom s maturitou 10 rokov sú počty simulácií s doplatkom vyššie ako pri portfóliu bez derivátov. Najviac simulácií s doplatkom vzniká pri vyšších fixných úrokových mierach K . V prípade zabezpečovania 20-ročným capom v kladnej pozícii sú počty simulácií s doplatkami blízke 1000, teda doplácalo sa takmer v každej simulácii.

Celkový doplatok za simulácie sa správa podobne ako počet simulácií, v ktorých bolo potrebné doplácať. Pre portfólio zabezpečené capom s 5-ročnou maturitou bola výška

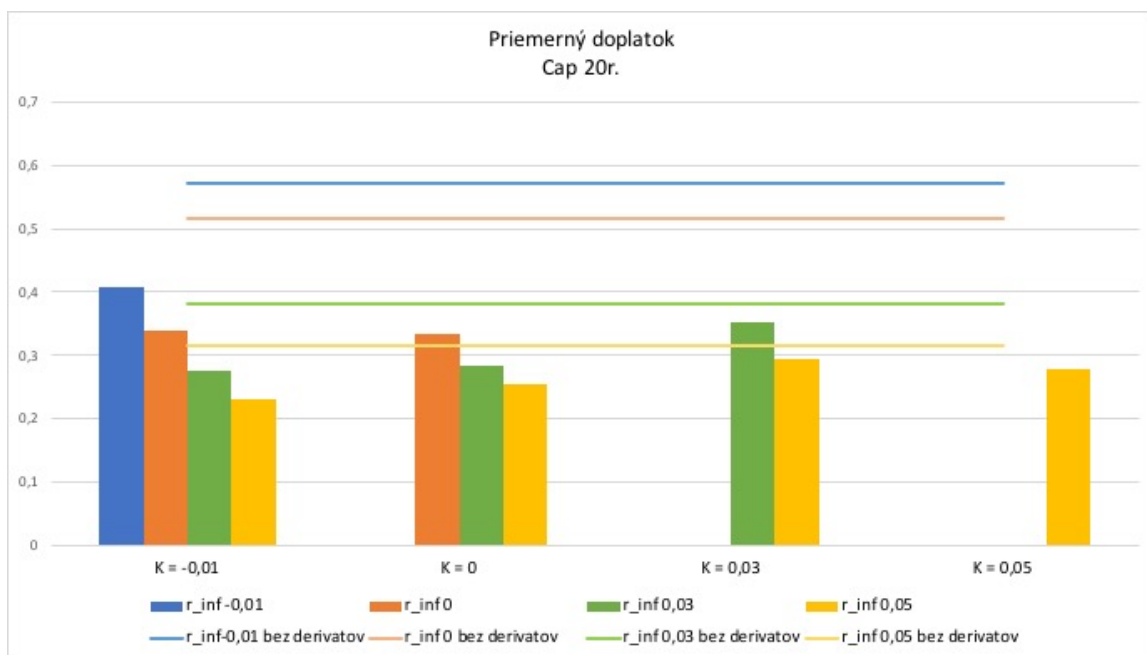


Obr. 14: Priemerný doplatok, cap s maturitou 5 rokov

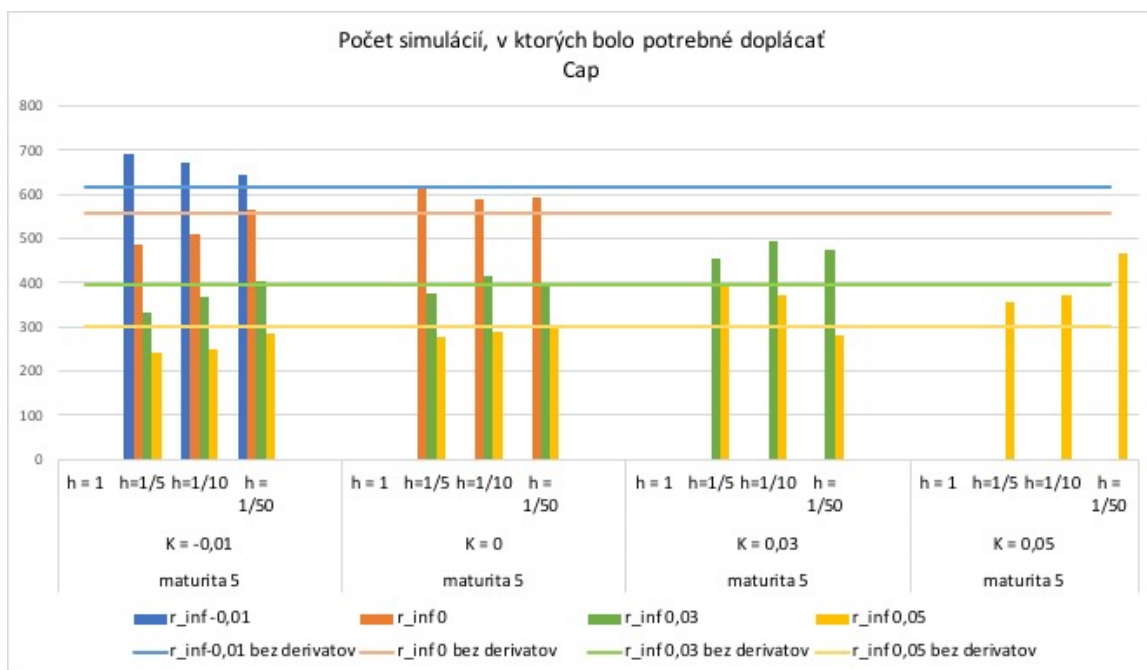


Obr. 15: Priemerný doplatok, cap s maturitou 10 rokov

celkových doplatkov v okolí výsledkov portfólia bez derivátov. Najnižšie doplatky boli do portfólia zabezpečeného 10-ročným capom s fixnou úrokovou mierou $K = -0,01$. Aj keď

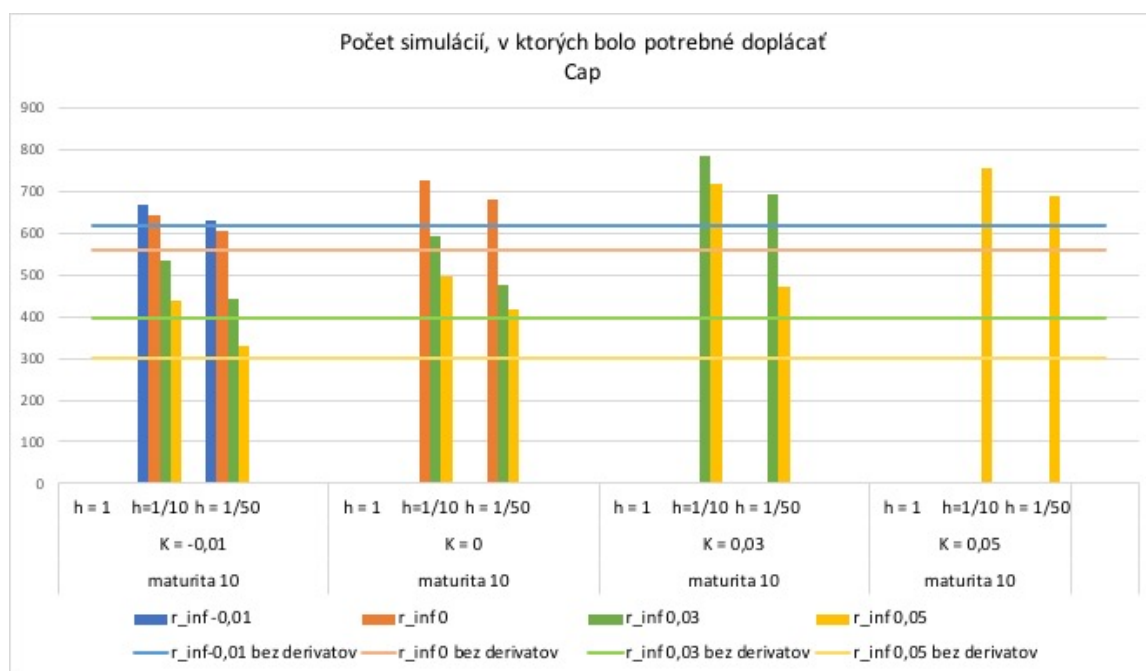


Obr. 16: Priemerný doplatok, cap s maturitou 20 rokov

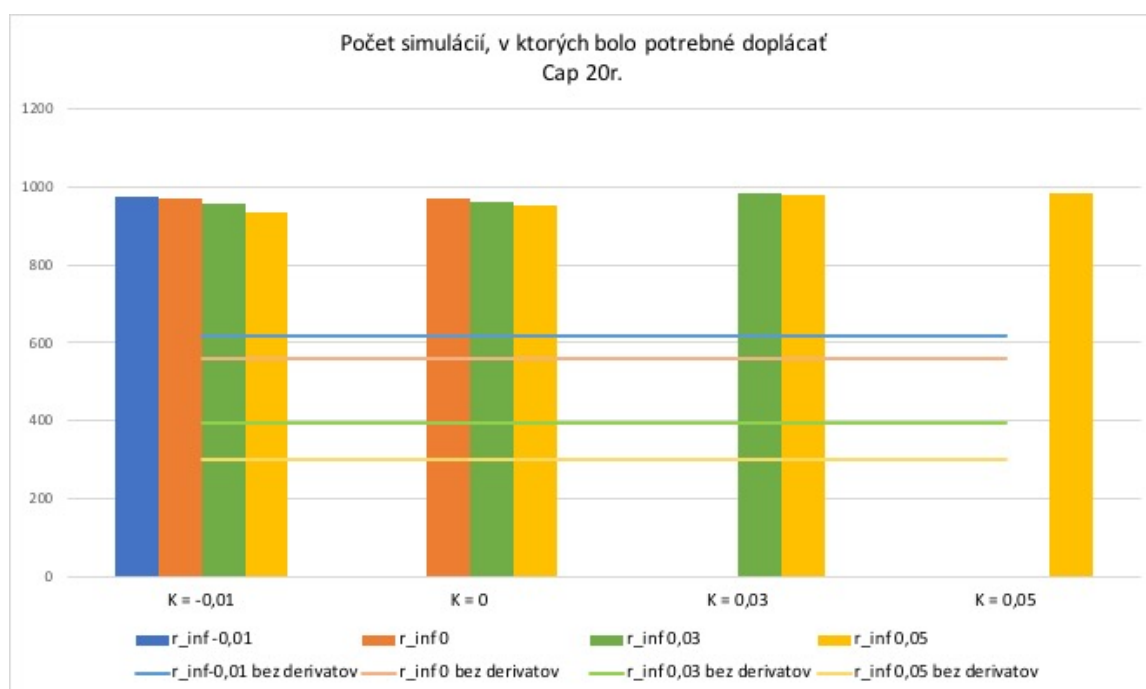


Obr. 17: Počet simulácií, v ktorých bolo potrebné doplácať do fondu, cap s maturitou 5 rokov

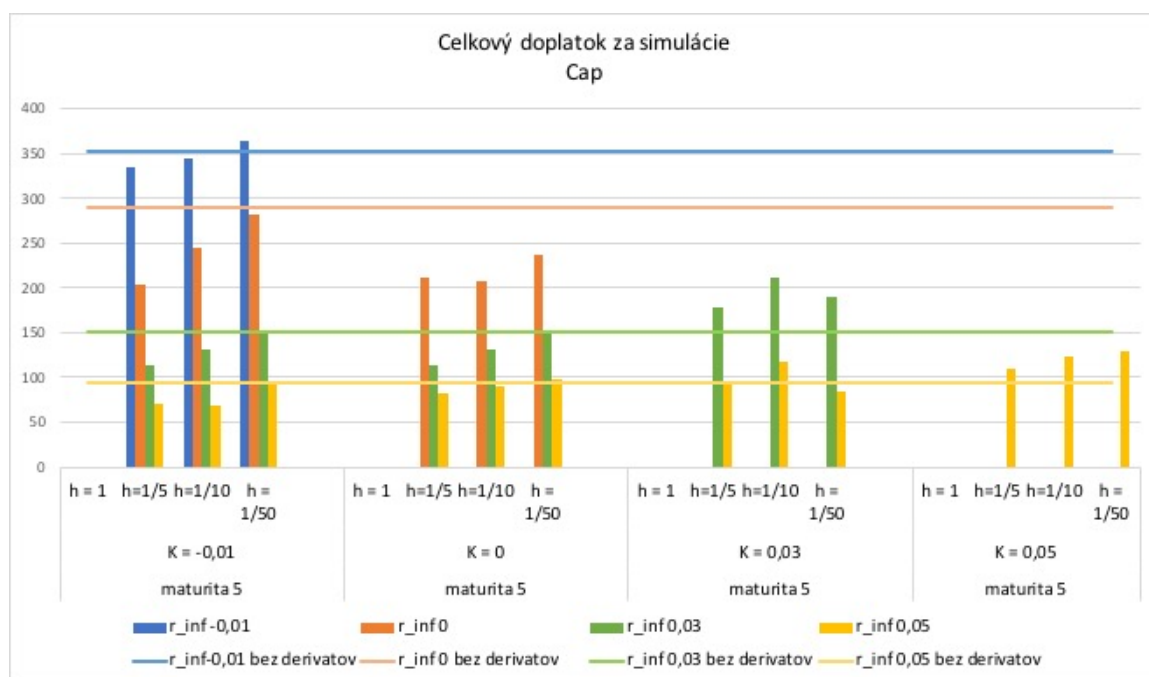
boli v tomto prípade capu vyššie počty simulácií, kedy sa doplácalo, nízke celkové doplatky boli zabezpečené nízkymi priemernými hodnotami doplatkov. Naopak pri 20-ročnom cape boli celkové doplatky vo väčšine alternatív vyššie ako celkové doplatky čisto dlhopisového



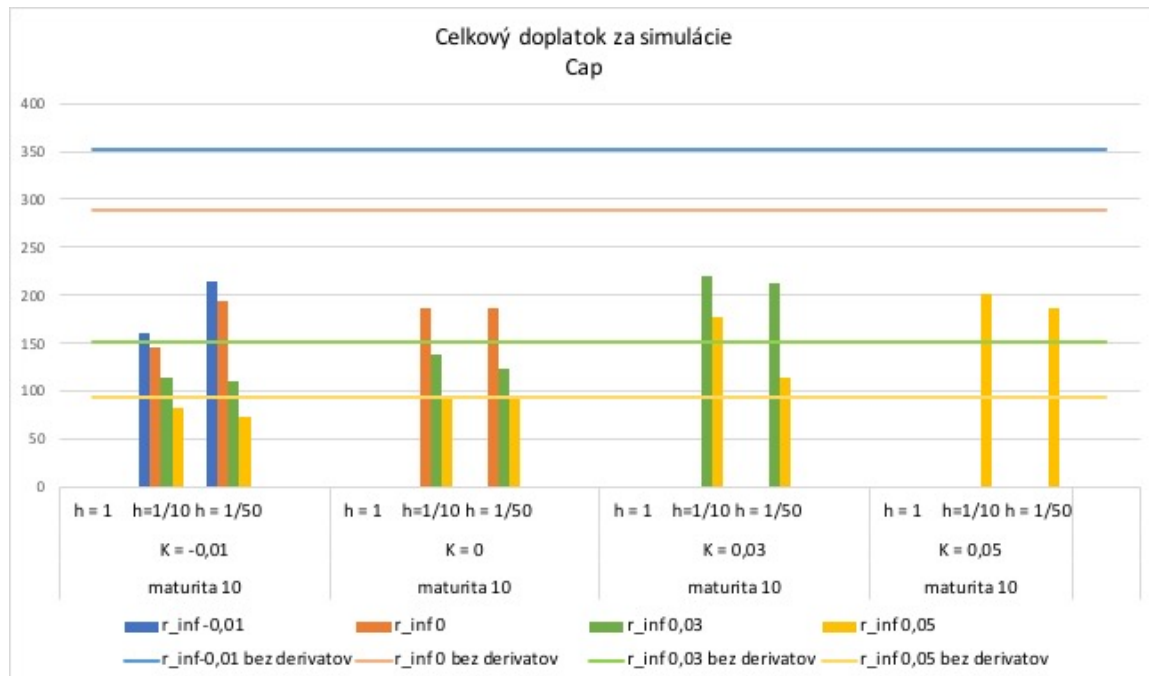
Obr. 18: Počet simulácií, v ktorých bolo potrebné doplácať do fondu, cap s maturitou 10 rokov



Obr. 19: Počet simulácií, v ktorých bolo potrebné doplácať do fondu, cap s maturitou 20 rokov

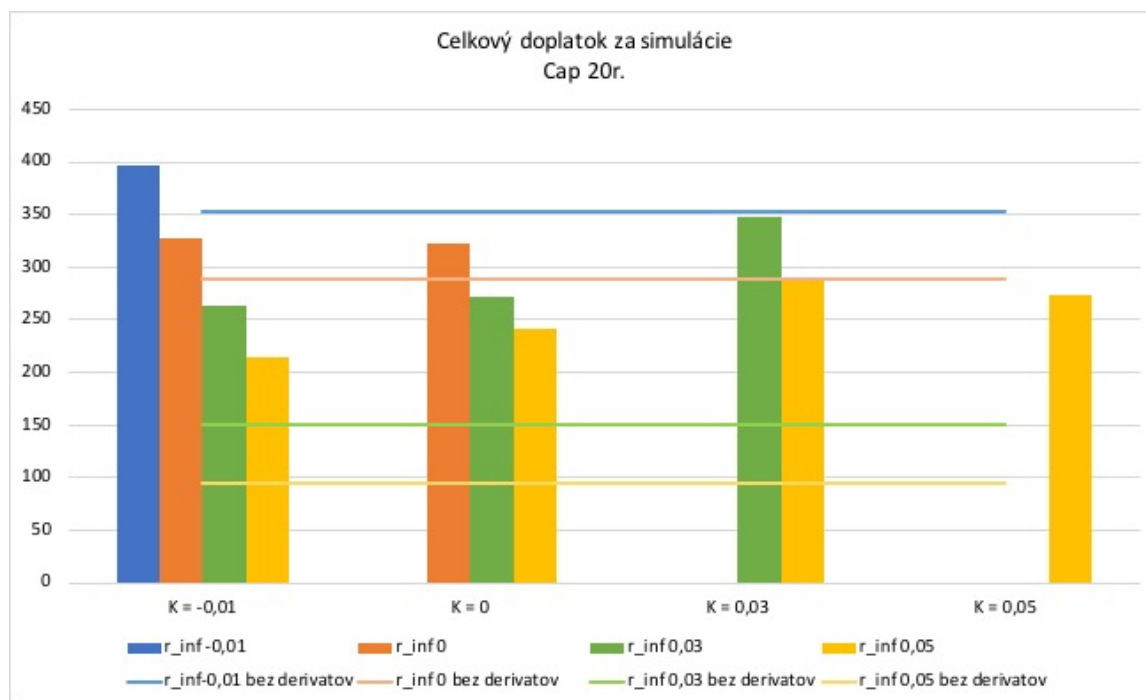


Obr. 20: Celkový doplatok do fondu za 1000 simulácií, cap s maturitou 5 rokov



Obr. 21: Celkový doplatok do fondu za 1000 simulácií, cap s maturitou 10 rokov

portfólia.



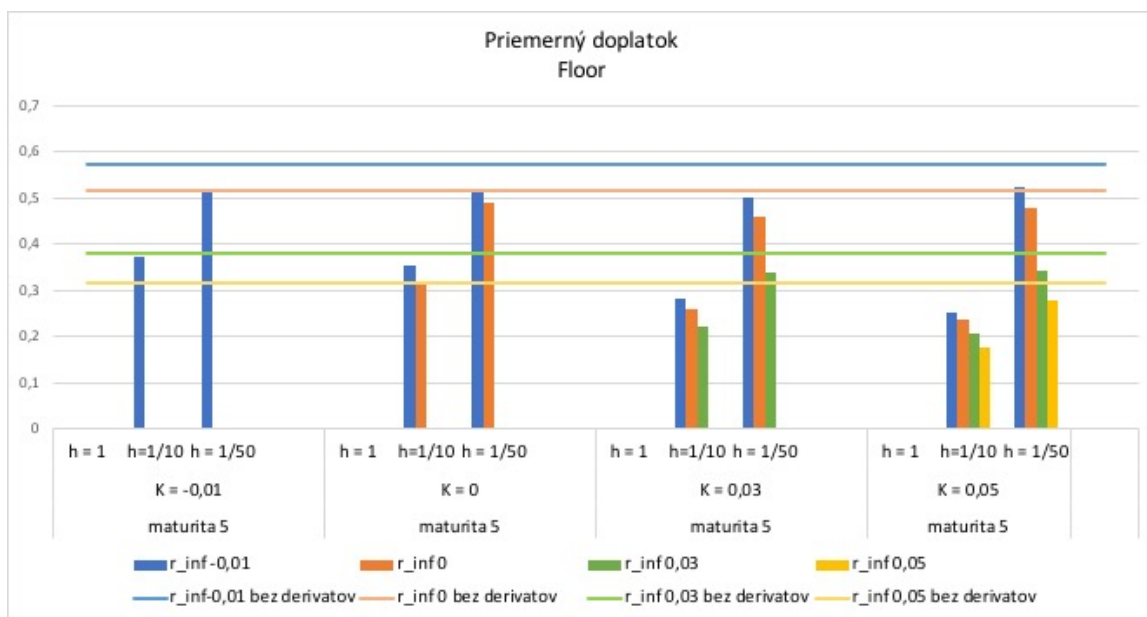
Obr. 22: Celkový doplatok do fondu za 1000 simulácií, cap s maturitou 20 rokov

5.4 Floor

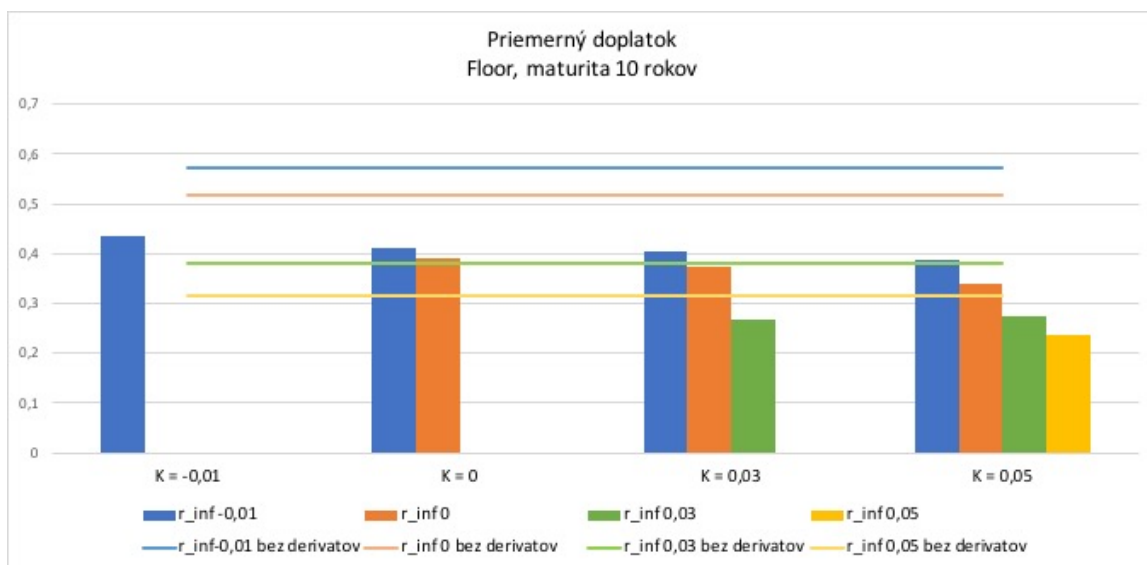
Floor môže slúžiť ako ochrana proti nízkej úrokovej miere, keďže nám vypláca floorlety v prípade keď je okamžitá úroková miera nižšia ako daná fixná úroková miera. Rovnako ako pri capoch, nevstupujeme do zápornej pozície, pretože nie je možné aby sme dostali kladnú výplatu a takáto investícia nie je vhodná na zabezpečovanie fondov.

Na zobrazenie výsledkov používame rovnaký druh grafov ako pre cap a swap s nenulovou počiatočnou hodnotou. Podobne ako v prípadoch portfólií s capom, aj teraz nám zlyhali simulácie pre väčšie zabezpečované časti. Pre portfóliá s floorom s maturitou 10 a 20 rokov simulácia zbehla len pri zabezpečovanej časti $h = \frac{1}{50}$ zo skúmaných hodnôt.

Priemerné doplatky sú klesajúce s rastúcou fixnou úrokovou mierou K . Tento trend je viditeľný napríklad na obrázku 23 pri zabezpečovanej časti portfólia floorom $h = \frac{1}{10}$, ale taktiež aj pri portfóliách zabezpečovaných 10-ročným a 20-ročným floorom. Najnižšie priemerné doplatky sme doplávali do fondu s floorom s fixnou úrokovou mierou $K = 0,05$ a maturitou 5 rokov pri zabezpečovaní $\frac{1}{10}$ portfólia. Avšak lepšie výsledky ako portfólio bez derivátov majú všetky portfóliá s fixnou úrokovou mierou $K = 0,05$ pre všetky očakávané úrokové miery r_{∞} .

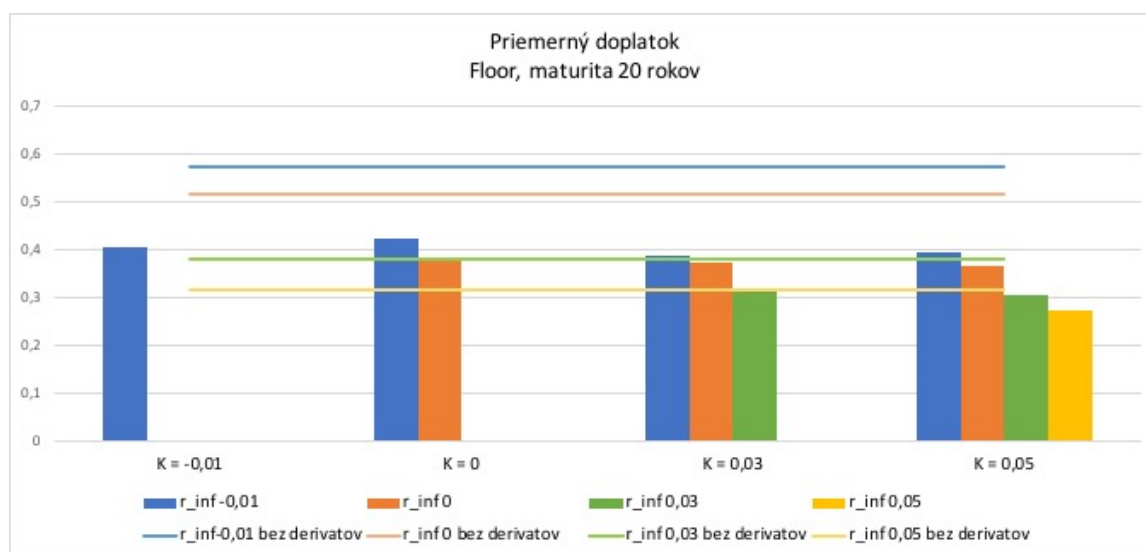


Obr. 23: Priemerný doplatok, floor s maturitou 5 rokov

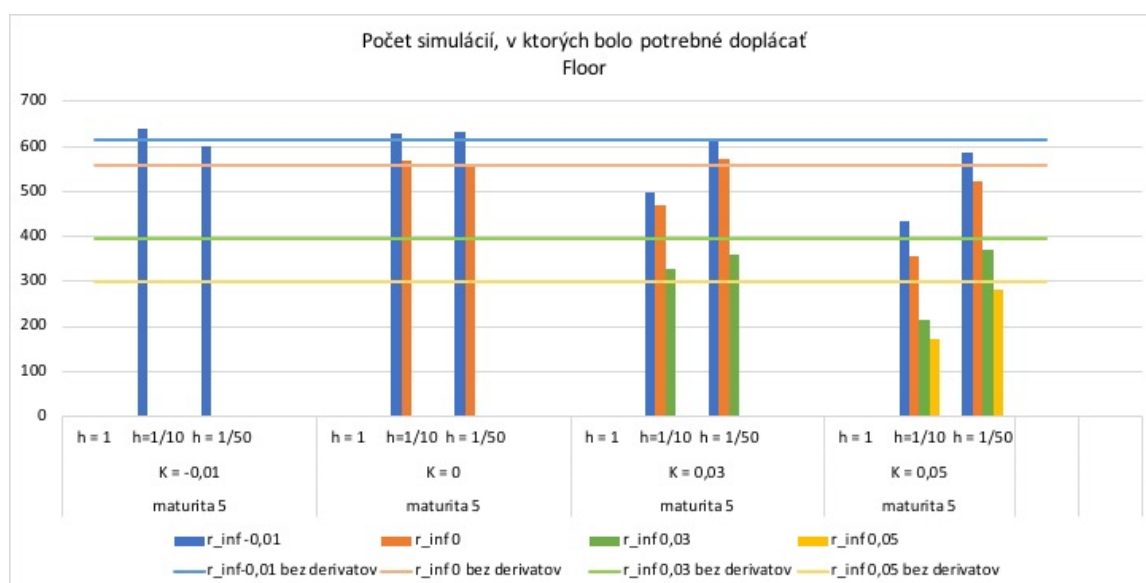


Obr. 24: Priemerný doplatok, floor s maturitou 10 rokov

Počet simulácií, kedy sa doplávalo sa správa podobne ako v prípade capu. Do portfólia zabezpečeného 5-ročným floorom bolo potrebné doplávať približne v toľkých prípadoch, ako do čisto dlhopisového portfólia. Podobne to bolo aj v prípade zabezpečenia floorom s maturitou 10 rokov. Najväčší počet simulácií, v ktorých sme museli doplávať do fondu sme zaznamenali pri portfóliu s 20-ročným derivátom, kedy vo väčšine prípadov bol počet simulácií s doplatkom blízky 1000.

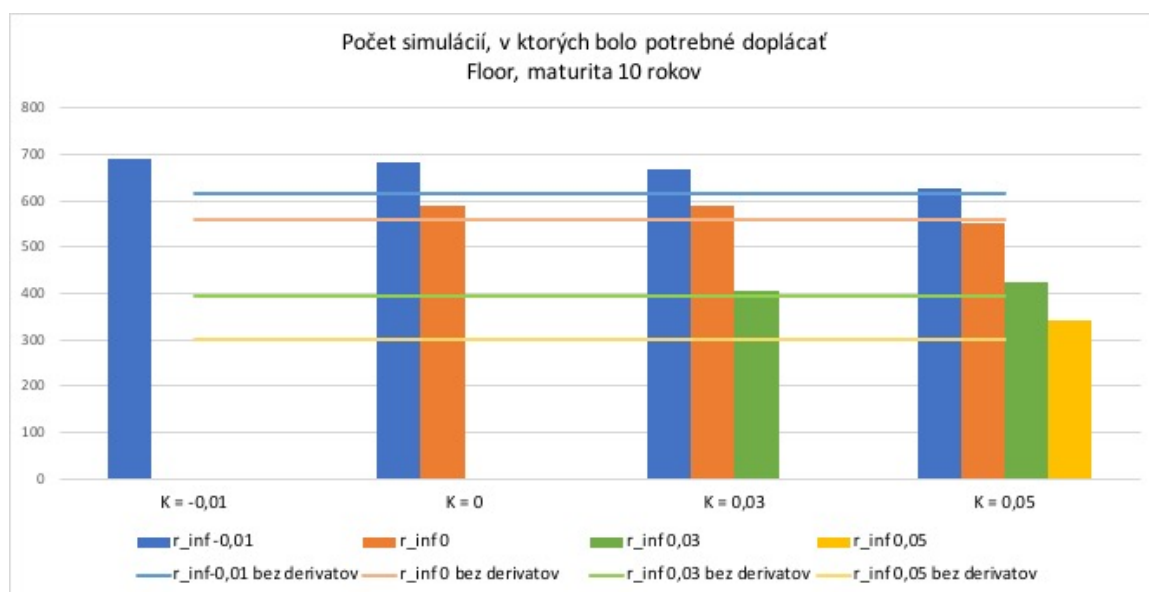


Obr. 25: Priemerný doplatok, floor s maturitou 20 rokov

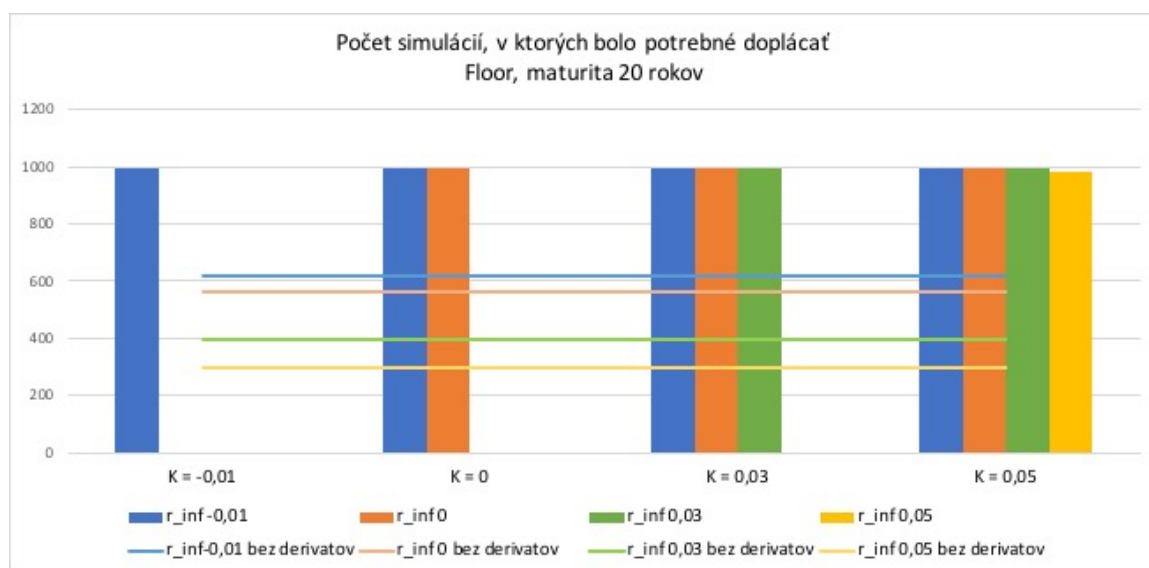


Obr. 26: Počet simulácií, v ktorých bolo potrebné doplácať do fondu, floor s maturitou 5 rokov

Najnižší celkový doplatok do fondu sme zaplatili v prípade zabezpečenia $\frac{1}{10}$ portfólia floorom s maturitou 5 rokov a fixnou úrokovou mierou $K = 0,05$. V tomto prípade vstupujeme do flooru v kladnej pozícii pre ktorékoľvek zo sledovaných očakávaných úrokových mier r_∞ . Nižšie celkové doplatky ako v prípade bezderivátového portfólia sú aj pre portfólio zabezpečené z $\frac{1}{50}$ floorom s fixnou úrokovou mierou $K = 0,05$ a maturitami

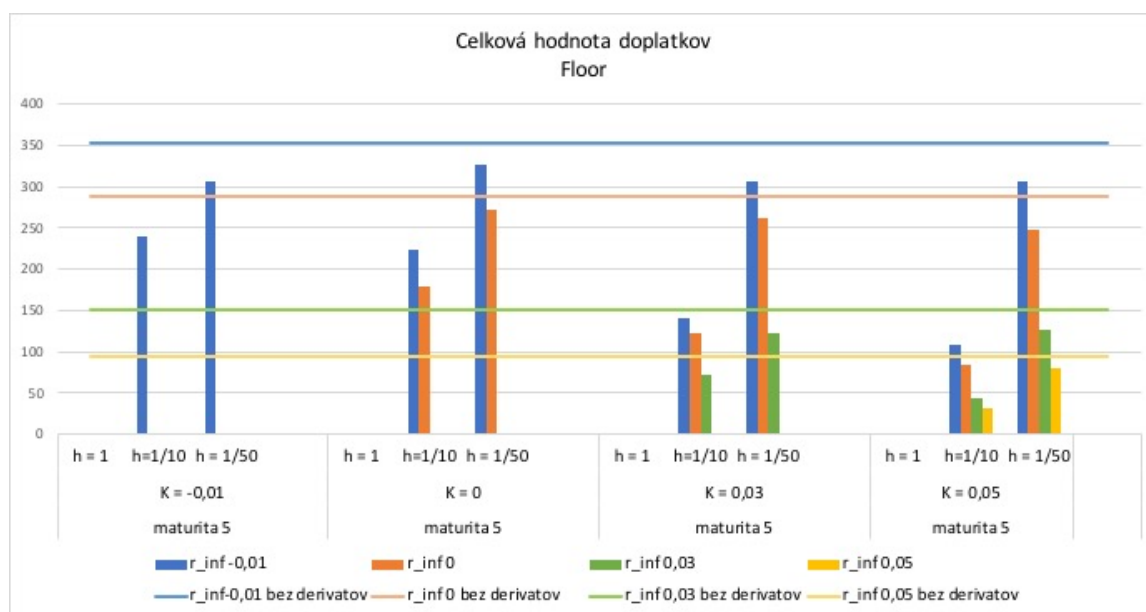


Obr. 27: Počet simulácií, v ktorých bolo potrebné doplácať do fondu, floor s maturitou 10 rokov

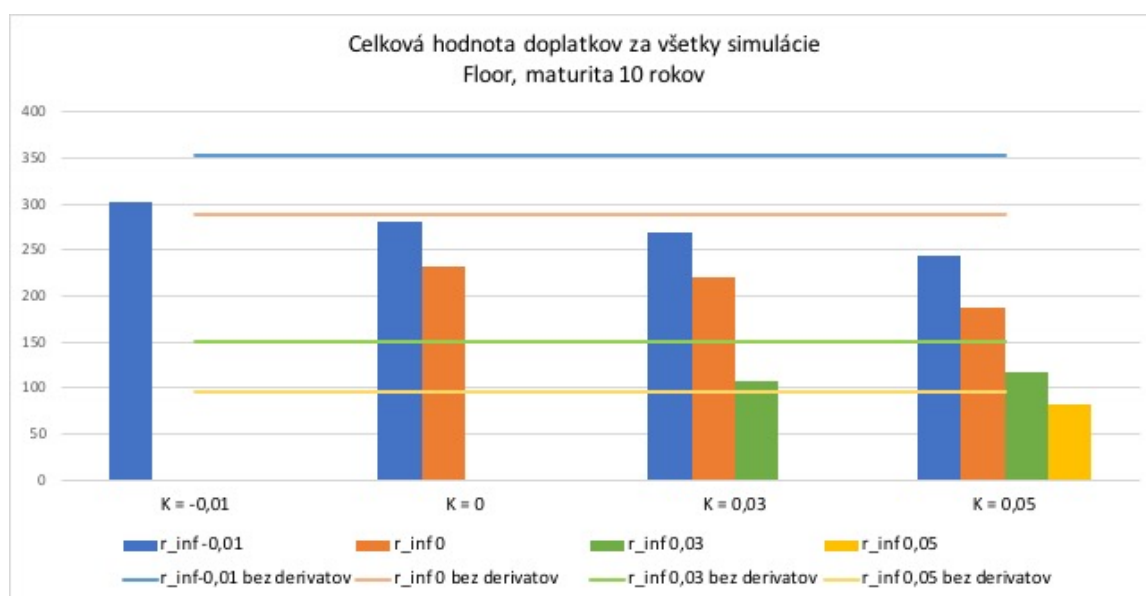


Obr. 28: Počet simulácií, v ktorých bolo potrebné doplácať do fondu, floor s maturitou 20 rokov

5 a 10 rokov.



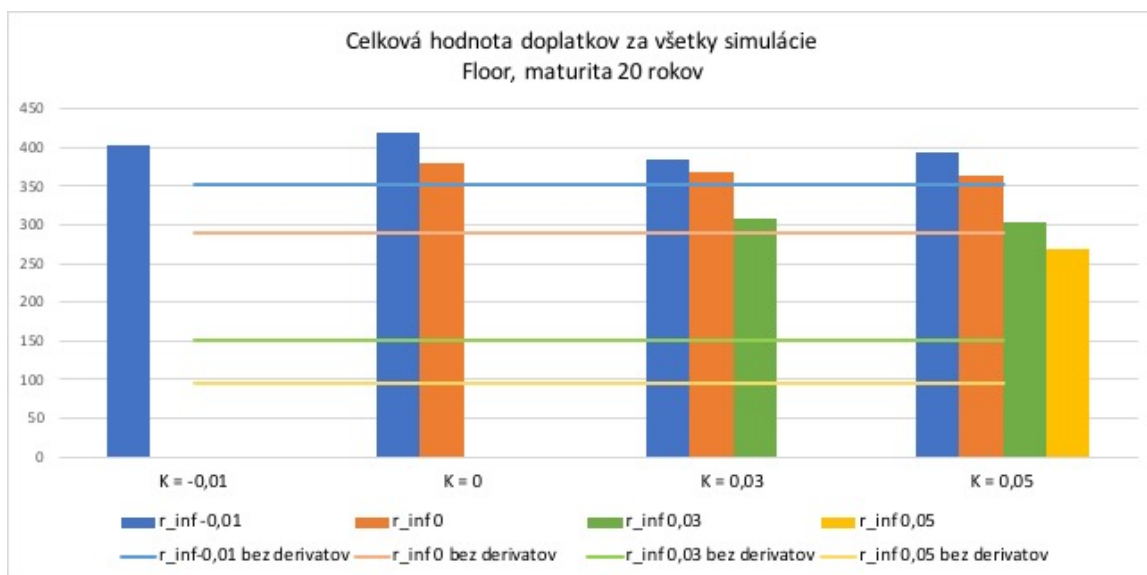
Obr. 29: Celkový doplatok do fondu za 1000 simulácií, floor s maturitou 5 rokov



Obr. 30: Celkový doplatok do fondu za 1000 simulácií, floor s maturitou 10 rokov

Záver

V spoločnosti je zabezpečenie sa na dôchodok dôležitou témou. S aktuálnymi predpo-
ved'ami pre demografický vývoj na Slovensku je čoraz dôležitejšie nespoliehať sa len na
prvý pilier dôchodkového systému, ktorý je priebežný, ale aj sústrediť sa na možnosti
sporenia kapitálu. Práve to ponúka aj druhý pilier, ktorému sme sa venovali v tejto



Obr. 31: Celkový doplatok do fondu za 1000 simulácií, floor s maturitou 20 rokov

práci. Konkrétne garantovaným dlhopisovým fondom, ktoré sú dôchodkové správcovské spoločnosti povinné spravovať. Keďže ide o garantované fondy, DSS je povinná za určitých podmienok doplácať do týchto fondov. Cieľom našej práce bolo nájsť možnú stratégiu zabezpečenia garantovaných dlhopisových fondov pomocou derivátov úrokovej miery.

V úvode našej práce sme zhrnuli štruktúru slovenského dôchodkového systému. Taktiež sme vysvetlili podmienky a spôsob dopĺčania do garantovaných dlhopisových fondov. V januári 2023 vošla do účinnosti novela zákona [15], ktorá okrem iného upravuje aj garanciu fondov. V našej práci však uvažujeme spôsob garancie z obdobia pred novelou zákona.

V druhej kapitole sme opísali vzťahy medzi krátkodobou úrokovou mierou a časovou štruktúrou úrokových mier. Taktiež sme krátko predstavili modely úrokových mier, špeciálne Vašíčkov model, ktorý bol použitý aj v simuláciách.

Samotným derivátom úrokovej miery sme sa venovali v tretej kapitole. Opísali sme dva rôzne spôsoby investovania do swapu. A to swap s nulovou počiatočnou hodnotou, kedy zo vzorca 9 vyjadríme a dopočítame fixnú úrokovú mieru, a swap s nenulovou počiatočnou hodnotou, kedy si určíme hodnotu fixnej úrokovej miery a dopočítame príslušnú cenu swapu. Odvodili sme vzorec na ocenenie capletu (32), výplaty capu, ktorý sme neskôr v práci používali na oceňovanie capov. Následne sme pomocou caplet-floorlet parity odvodili vzorec na ocenenie floorletu a teda aj flooru.

V kapitole 4 sme sa venovali simuláciám. Na simulovanie sme používali Vašíčkov mo-

del s parametrami odhadnutými v práci [11] v rizikovo neutrálnom svete na oceňovanie dlhopisov a derivátov vo фонде. Na simulovanie okamžitej úrokovej miery sme parametre pretransformovali do reálneho sveta. V každej simulácii sme sledovali vývoj portfólia s derivátom ale aj portfólia bez derivátu súčasne a zaznamenávali či došlo k doplácaniu do fondu a výšku prípadného doplatku.

Simulovali sme 720 alternatívnych portfólií, každé s derivátom s inými parametrami. Porovnávali sme však len výsledky 346 alternatív, pretože simulácie niektorých portfólií s derivátom zlyhali a taktiež sme sa rozhodli neinvestovať do capov a floorov v záporných pozíciách. Zlyhanie simulácií bolo spôsobené vysokým spodným ohraničením na váhy jednoročných dlhopisov. To znamená, že by sme potrebovali investovať do jednoročných dlhopisov viac, ako je celkový majetok vo фонде aby sme v ďalšom roku mohli nakúpiť nové dlhopisy a vyplatiť prípadné záporné kupóny. Simulácie ukázali, že nie je vhodné zabezpečovať portfólio derivátmi s vysokou maturitou. Výsledky portfólií s derivátom s maturitou 20 rokov mali vo väčšine prípadov výrazne horšie výsledky ako čisto dlhopisové portfólio. Taktiež vo výsledkoch vidíme, že najväčší zmysel má zabezpečovať garantovaný fond pri nízkych očakávaných úrokových mierach. To poukazuje na to, že cap nie je vhodným derivátom na zabezpečovanie fondu, keďže pri nízkych očakávaných úrokových mierach vstupujeme do kladnej pozície len pre nízke realizačné ceny K . Najlepšie výsledky portfólia s derivátom sme dosiahli pre 5-ročný floor a 5-ročný swap s fixnou úrokovou mierou $K = 0,05$.

Zabezpečovanie pomocou derivátov úrokovej miery je téma, ktorá ponúka bohatý priestor na ďalšie skúmanie. Ďalej je možné simulovať výkon portfólií s kombináciami rôznych maturít derivátov, podobne, ako bolo simulované dlhopisové portfólio. Taktiež môžeme uvažovať o investovaní do rôznych derivátov v jednom portfóliu. Nedávna zmena v zákone takisto poskytuje nové možnosti analýz.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Csernák P.: Garantované fondy vás môžu pripraviť o desaťtisíce eur, Finsider (dostupné online 13.1.2022 na: <https://www.finsider.sk/dochodok/garantovane-fondy-vas-mozu-pripravit-o-desattisice-eur/>)
- [2] Halgašová, J., Stehlíková, B., Bučková, Z.: Estimating the short rate from the term structures in the Vasicek model, Tatra Mountains Mathematical Publications 61 (2014), str. 87-104
- [3] <https://www.adss.sk/dochodkovy-system#trojpilierovy-dochodkovy-system> (dostupné online 13.01.2022)
- [4] https://www.adss.sk/preview-file/adss_23_04_28-903.pdf (dostupné online 03.05.2023)
- [5] <https://www.adss.sk/zhodnotenie-vo-fondoch?year=2022#documents> (dostupné online 03.05.2023)
- [6] <https://www.emmi-benchmarks.eu/benchmarks/eonia/rate/> (dostupné online 03.01.2022)
- [7] <https://ekonomika.sme.sk/c/22754285/vlada-by-mala-zaviest-opatrenia-na-zvysenie-vynosnosti-v-druhom-pilieri-tvrdi-viceprezident-nbs.html> (dostupné online 13.01.2022)
- [8] <https://www.employment.gov.sk/sk/socialne-poistenie-dochodkovy-system/dochodkovy-system/ii-pilier-starobne-dochodkove-sporenie/nastiahnutie/zmeny-suvisiace-s-ochorenim-COVID-19/.html> (dostupné online 03.05.2023)
- [9] <https://nbs.sk/dohlad-nad-financnym-trhom-prakticke-informacie/publikacie-a-vybrane-udaje/vybrane-udaje/aktualna-hodnota-dochodkovej-jednotky-a-cista-hodnota-majetku-v-dochodkovom-fonde/vyvoj-aktualnej-hodnoty-dss1/> (dostupné online 03.01.2022)

- [10] Melicherčík I.; Olšarová L.; Úradníček V.: Kapitoly z finančnej matematiky, Epos, Bratislava, 2005, ISBN 80-8057-651-3
- [11] Podstrelená, N.: Ocenenie garancií dôchodkovej správcovskej spoločnosti, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2020
- [12] Remiarová, K.: Správa garantovaného fondu v dôchodkovom systéme na Slovensku, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2017
- [13] Urbánová Csajková A.: Calibration of term structure models, dizertačná práca, FMFI UK, Bratislava, 2007
- [14] Zákon č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov
- [15] Zákon č. 399/2022 Z. z.
- [16] Zákon č. 530/1990 Z. z. o dlhopisoch
- [17] Zákon č. 650/2004 Z. z. o doplnkovom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov