

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



APLIKÁCIE TEÓRIE HIER V EVOLUČNÝCH
FINANCIÁCH

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**APLIKÁCIE TEÓRIE HIER V EVOLUČNÝCH
FINANCIÁCH**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor: Matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Tomáš Švihorík
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Aplikácie teórie hier v evolučných financiách
Application of the Game Theory to the Evolutionary Finance

Anotácia: Teória hier má významné aplikácie aj v evolučných financiách. Práca sa zaoberá teóriou modelovania z tejto oblasti, založeného na koncepte evolučne stabilných stratégií. Teória je ilustrovaná riešenými príkladmi.

Vedúci: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Dátum zadania: 12.01.2022

Dátum schválenia: 14.01.2022
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Predhovor

Ľudia majú odnepamäti snahu prísť na to, ako veci fungujú. Táto snaha porozumieť, nás priviedla takmer ku všetkým veľkým objavom počas histórie ľudstva. Inak tomu nie je ani v mojom prípade a ako motivácia mi pri výbere témy, aj písaní tejto práce, slúžila chuť popísať komplikovaný svet ekonómie pomocou jednoduchších matematických modelov. Ich presnému fungovaniu rozumiem, lebo sa správajú podľa daných matematických zákonitostí a viem povedať, prečo sa v nich veci dejú práve tak, ako sa dejú. Toto mi pomohlo hlbšie porozumieť skúmaným odvetviam trhu a verím, že moje nadšenie budú po preštudovaní tejto diplomovej práce zdieľať aj iní a výskum v tejto oblasti bude pokračovať.

Chcel by som vyjadriť svoju vďaku vedúcemu mojej diplomovej práce doc. RNDr. Jánovi Pekárovi, PhD. za všetky konzultácie a odborné rady, ktoré mi venoval, pretože práve tieto ma utvrdili v mojom smerovaní. Taktiež mu ďakujem za ochotu poskytnúť odborné zdroje a materiály, ktoré mi pomohli zorientovať sa v problematike, ako aj pri ďalšej tvorbe tejto práce.

Abstrakt v štátnom jazyku

V našej práci sa zaoberáme teóriou evolučných hier a jej aplikáciami v evolučných financiách. Na niekoľkých ekonomických modeloch venujúcich sa rôznym odvetviam trhu ukazujeme, ako nám vie teória evolučných hier pomôcť pri ich riešení a aké závery do reálneho života vieme vďaka nej z týchto modelov vyvodiť. Tieto modely riešime analyticky, ale aj pomocou počítačových simulácií, aby sme naše výsledky mohli porovnať a získali tiež širší náhľad do správania sa modelovaných odvetví trhu. Na toto nám slúžia hlavne fázové portréty riešení systémov diferenciálnych rovníc a časový vývoj populácie v simuláciách. Na začiatku práce tiež budujeme a vysvetľujeme teóriu, ktorú v nej neskôr využívame a ktorá je potrebná na pochopenie riešení našich evolučno-finančných modelov a na porozumenie získaným výsledkom, ako aj ich významu v reálnom živote. Naším záverom tiež dodáva rigorózný základ.

Kľúčové slová: Teória evolučných hier, Evolučné financie, Funkcia užitočnosti, Multiplikátory, Diferenciálna rovnica, Fázový portrét, Evolučne stabilná stratégia

Abstract

In our work we investigate evolutionary game theory and its applications in evolutionary finance. We demonstrate on several economic models that each target different sector of market how evolutionary game theory can help us with their solving and which conclusions can we draw from these models into real life thanks to it. We solve these models analytically, but also with the help of computer simulations, so that we can compare the results and also gain broader insight into the behaviour of modelled sectors of the market. For this we use mainly phase portraits of solutions of systems of differential equations and time development of population in simulations. We also build and explain theory at the beginning of the thesis which we later use in it and which is necessary for understanding of the solutions of our evolutionary finance models and for comprehension of obtained results as well as their meaning in real life. It also provides a rigorous basis for our conclusions.

Key words: Evolutionary game theory, Evolutionary finance, Utility function, Multipliers, Differential equation, Phase portrait, Evolutionary stable strategy

Obsah

Úvod	11
1 Úvod do teórie evolučných hier	14
1.1 Predpoklady, dôležité pojmy a pomenovania	14
1.2 Odvodenie potrebnej teórie evolučných hier	15
2 Model pracovného trhu	19
2.1 Funkcie užitočnosti účastníkov pracovného trhu	19
2.2 Simulácie a analýza modelu pracovného trhu	22
2.3 Vyvodenie záverov o pracovnom trhu	26
3 Model trhu s nehnuteľnosťami	28
3.1 Funkcie užitočnosti záujemcov o kúpu nehnuteľnosti	29
3.2 Simulácie a analýza modelu trhu s nehnuteľnosťami	31
3.3 Vyvodenie záverov o trhu s nehnuteľnosťami	35
4 Model trhu ojazdených áut	37
4.1 Funkcie užitočnosti predávajúcich a kupujúcich	38
4.2 Porovnanie modelov krátkodobej a dlhodobej optimalizácie	41
4.3 Simulácie a analýza vybraného modelu trhu ojazdených áut	43
4.4 Vyvodenie záverov o trhu ojazdených áut	46
Záver	48
Zoznam použitej literatúry	50
Kódy v MATLABe	51

Úvod

Teória hier je odborom matematiky, ktorý sa vo veľkom využíva v rôznych oblastiach. V matematike sú nimi napríklad optimalizácia a ekonómia, no mieru využiteľnosti teórie hier pochopíme až vtedy, keď si uvedomíme, že sa objavuje aj v iných vedných disciplínach, ako sú biológia či dokonca filozofia. Niet sa čomu čudovať, veď kdekoľvek a kedykoľvek sa musí niekto alebo niečo rozhodnúť pre jednu z viacerých možností, prichádza na scénu práve aparát teórie hier a jej funkcie výplat. Práve táto schopnosť oceniť a následne tak porovnať dva alebo viacero scenárov, nám dáva možnosť maximalizovať, racionálne sa rozhodnúť, predpovedať reakciu súpera, či aspoň sa lepšie zorientovať v aktuálnom probléme, ktorý riešime.

Teória evolučných hier, ako časť teórie hier, vo všeobecnosti skúma problémy, kde sa nejaký rozhodovací proces deje za podobných podmienok viackrát v čase. Je to teda oblasť teórie hier, zaoberajúca sa hrami, ktoré prebiehajú opakovane. V nich použité stratégie majú potom priestor sa vyvíjať, čiže mutovať, alebo sa množiť. Pri problémoch tohto typu sa pozeráme na časový vývoj populácie, úžitok a perspektívnosť rôznych stratégií oproti ostatným a na ich základe pomocou matematického teoreticko-evolučno-herného aparátu modelujeme, vysvetľujeme a predpovedáme správanie sa jedincov a tak aj celého systému.

Naša práca je z oblasti evolučných financií, čiže oblasti aplikovanej matematiky, kde sa využívajú poznatky z teórie evolučných hier, napríklad na popísanie diania na finančnom trhu. Tieto nám pomáhajú lepšie opísať a vysvetliť ekonomické procesy, vďaka čomu ich vieme modelovať a ukázať ich matematické pozadie, čím dodáme odpozorovaným ekonomickým javom rigorózný základ. Evolučné financie sú jedna z novších oblastí matematického výskumu v ekonómii. Významnými dielami v tejto oblasti sú hlavne [2] a [3], ale aj články [6] a [7]. Všetky tieto práce majú medzi autormi spoločné dve mená, Igor V. Evstigneev a Thorsten Hens. Práve títo autori sa najviac zaslúžili o rozvoj evolučných financií.

Prvým cieľom našej práce bude ukázať aplikácie teórie hier v evolučných financiách. Vďaka týmto aplikáciám budeme schopní vytvoriť teoreticko-herné modely z oblasti ekonómie, ktorých riešením vysvetlíme dianie v rôznych odvetviach trhu a nájdeme v nich ekvilibriá, podobne ako v [1]. Následne spätným porovnaním výstupov týchto modelov s odpozorovanými výsledkami z reálneho života získame možnosť nie len odhadnúť, aké

faktory vstupujú do skutočného modelu, ale aj vytvoriť akúsi pomyselnú pevnú pôdu pod nohami ekonomickej teórie. Odporcovia modernej ekonómie jej totiž často vyčítajú, že je viac založená na opisoch toho, čo sa deje, ako na odôvodnení aktuálneho diania a ak aj náhodou vysvetlenie má, nie je podložené matematickými argumentami a rigoróznymi dôkazmi. Popíšeme komplikovaný svet ekonómie pomocou jednoduchších matematických modelov, ako to urobili aj autori [6] a [7]. Tým sa naplní náš druhý cieľ, a síce ponúknuť modernej ekonómii, pri vysvetľovaní stavu aspoň niekoľkých oblastí trhu, základ vo forme dôkazov, na ktorých je vybudovaný aparát teórie evolučných hier. Ukážeme tak nie len matematickú pravdivosť našich modelov, ale aj skutočnosť, že nijako inak to ani v reálnom svete nemôže byť, ak veríme v platnosť teórie evolučných hier. Nebudeme sa však snažiť o dokonalú replikáciu empirických výsledkov. O to sa môžu pokúsiť, odrážajúc sa od našich poznatkov, ďalšie práce. Naším hlavným cieľom je len ukázať, že zdanlivo zložité systémy v ekonomike sa správajú podľa popísateľných matematických zákonitostí a vonkajšie prejavy týchto systémov sú priamym dôsledkom spôsobu ich fungovania. Laicky povedané, ak rovnica má riešenie, tak aj ekonomika má predurčený výsledok, ktorý nie je náhodný.

V 1. kapitole tejto práce odvodíme a vysvetlíme teóriu potrebnú na porozumenie problematike, ktorou sa zaoberáme. Budeme pritom čerpať hlavne z [4] a [5]. Odvádzanie už objavenej teórie považujeme za potrebné, nakoľko sa jedná o kľúčové poznatky, ktoré umožnili výskum v oblasti evolučných financií a teda aj vznik tejto práce samotnej. Tiež zavedieme predpoklady, zaručujúce zmysluplnosť použitia aparátu evolučných hier. Ďalej zadefinujeme dôležité teoreticko-herné pojmy a vysvetlíme význam používaných výrazov, čím dosiahneme lepšiu čitateľnosť našej práce. Obsah 2. kapitoly bude tvoriť zostavenie a kvalitatívna analýza modelu pracovného trhu spolu s jeho simuláciou. Na základe zistení získaných touto analýzou, ale aj počítačovými simuláciami, utvoríme po porovnaní s empirickými skúsenosťami z reálneho sveta závery, z ktorých bude vyplývať jasnosť a predpovedateľnosť niektorých ekonomických javov. V kapitole 3 sa budeme venovať modelu trhu s nehnuteľnosťami, aj s jeho odvodením a skúmaním. Pomocou simulácií a matematickej analýzy riešenia a stability modelu dokážeme, ako môžu špekulatívne investície do tohto odvetvia vytvárať takzvané cenové bubliny a nájdeme jeden z možných dôvodov, prečo aj napriek stavbe nových bytov nemajú ľudia kde bývať. Obsahom 4. kapitoly bude zostavenie a následné analyzovanie modelu trhu ojazdených áut a tiež simulovanie zmien

správania sa predajcov v závislosti od toho, či chcú na trhu pôsobiť dlhodobo, alebo nie. Následne budeme riešiť prípad dlhodobého pôsobenia na trhu, nakoľko tento je kvalitatívne rôzny od modelu trhu s nehnuteľnosťami a ukážeme, že tento model má niektoré prvky spoločné s kartelom. V tejto časti tiež vysvetlíme, prečo sú v danom odvetví niektoré autá nekvalitné s vymontovanými súčiastkami, no nie všetky. Týmto modelom tiež overíme, že skontrolované autá musia byť drahšie, ako neskontrolované.

1 Úvod do teórie evolučných hier

V tejto kapitole pripravíme čitateľa na lepšie porozumenie obsahu a výsledkom práce tým, že zadefinujeme dôležité pojmy, predostrieme v práci používané výrazy, objasníme ich význam a odvodíme potrebnú teóriu z oblasti evolučných hier. Práve tieto vybrané poznatky z teórie evolučných hier sú kľúčový nástroj k pochopeniu prínosu našej práce, preto sa venujeme aj ich odvodeniu a vysvetleniu, nie len ich predloženiu alebo citovaniu z prác iných autorov.

Čitateľ by mal byť už oboznámený so základnými pojmami z teórie hier [4], ako sú funkcia užitočnosti, výplata, stratégia, hráč atď., nakoľko tieto pojmy vysvetľovať nebudeme. Pre lepšie porozumenie bude niekedy prítomné ich priblíženie k veciam z reálneho sveta, napríklad užitočnosť môže byť plat zamestnanca.

1.1 Predpoklady, dôležité pojmy a pomenovania

V práci sa často vyskytujú pojmy úžitok, plat, výplata a zisk. Rozumieme tým to isté a síce číselnú hodnotu, koľko prinesie jedincovi daná stratégia. Môže to byť merané v eurách, ale aj bezrozmerné. Platí len, že viac je lepšie. Funkcia výplat, alebo funkcia užitočnosti je potom funkcia, ktorá po dosadení argumentov dáva číselnú hodnotu úžitku spomínanú vyššie.

Ekonomické subjekty, ktoré budú vystupovať v našich modeloch, budú jednotliví ľudia, no môžu to byť aj väčšie celky, napríklad manželia. Všetky tieto subjekty však budeme volať jedinci alebo hráči, lebo každý jedinec sa správa samostatne a nezávisle od ostatných a volí si práve jednu svoju stratégiu z možných. Všetci jedinci aktuálne vystupujúci v danom modeli spolu tvoria populáciu, pričom počet jedincov v nej je nemenný, mení sa len podiel jedincov v celkovej populácii, ktorí používajú danú stratégiu. Pripúšťame kvôli lepšej interpretovateľnosti to, že nejakí jedinci z populácie odídu a sú ihneď nahradení rovnakým počtom jedincov, avšak tak, aby sa podiel hrania jednotlivých stratégií vyvíjal spôsobom zodpovedajúcim teórii replikátorov. Znamená to, že novopríchodzí jedinci budú vždy hrať takú stratégiu, akú by hrali v tom čase pravé odídení hráči, ak by neodišli.

V celej práci využívame predpoklad, že každý hráč pozná svoju funkciu užitočnosti a vie pomocou nej vyčíslieť svoj úžitok na základe faktorov vystupujúcich v modeli.

Pri zostavovaní modelov, ale aj pri ich analýze budeme vždy uvažovať úplnú racionalitu všetkých subjektov, teda každý jedinec sa vždy rozhoduje iba na základe svojej výplaty a vždy sa ju snaží maximalizovať. Predpokladáme teda, že vo funkcii užitočnosti každého jedinca v populácii sú už zahrnuté všetky jeho životné hodnoty, aj rozhodovacie procesy a výsledný úžitok v sebe obsahuje úplnú informáciu, ako veľmi si daný človek cení výsledok z hrania danej stratégie.

Keď v práci neuvádzame niektoré argumenty, indexy alebo iné upresňujúce okolnosti, predpokladáme, že čitateľovi je zrejmé, aké parametre sú vynechané a kvôli lepšej prehľadnosti ich netreba písať.

1.2 Odvodenie potrebnej teórie evolučných hier

Aby sme mohli modelovať vývoj populácie v rámci navrhnutého modelu, potrebujeme aparát, ktorý od seba nejako odlíši a zvýhodní tých jedincov, ktorí sú lepšie prispôsobení na aktuálnu situáciu na trhu, čiže používajú stratégiu, ktorá im prináša vyšší zisk. Lepšie prispôsobení jedinci by sa potom mali v populácii množiť na úkor tých, ktorým sa tak dobre nedarí. Presne takýto aparát nájdeme v teórii evolučných hier pod názvom teória replikátorov. V našich modeloch však nepôjde o biologické rozmnožovanie a umieranie, pretože počet jedincov v populácii bude nemenný. Zmena nastane tak, že časť tých jedincov, ktorí majú nižší zisk, sa rozhodne zmeniť svoju stratégiu na tú, ktorá prináša väčší úžitok.

Replikátory:

- Majme konečnú populáciu hráčov, ktorí hrajú čisté stratégie e_i , kde $i = 1, 2, \dots, k$ v symetrickej hre dvoch hráčov
- Označme $p_i(t)$ počet hráčov hrajúcich stratégiu i v čase t , celkový počet jedincov v populácii bude potom $p(t) = \sum_{i=1}^k p_i(t)$
- $x_i(t) = \frac{p_i(t)}{p(t)}$ je podiel hráčov hrajúcich stratégiu i v čase t z celkovej populácie
- Pod stavom populácie $X(t)$ rozumieme vektor $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t))^T$

Z definície $x_i(t)$ je zrejmé, že platí

$$\forall i = 1, 2, \dots, k : x_i(t) \in \langle 0, 1 \rangle \wedge \sum_{i=1}^k x_i(t) = 1$$

Teraz je dôležité si uvedomiť, že stav populácie $X(t)$ tak môžeme formálne považovať za zmiešanú stratégiu, keďže jeho zložky sa dajú interpretovať ako pravdepodobnosti, s akými sa zahrajú jednotlivé čisté stratégie, ak stretne náhodného hráča z tejto populácie. Tento poznatok nám totiž umožní previesť hru dvoch hráčov na pomyselnú hru každého hráča proti všetkým ostatným. Očakávaná výplata z hrania čistej stratégie e_i v populácii X , čiže v populácii kde s pravdepodobnosťami x_i stretneme hráča hrajúceho i -tu čistú stratégiu, je teda rovnaká ako výplata z hrania čistej stratégie e_i proti hráčovi hrajúcemu zmiešanú stratégiu X . Táto výplata je $u(e_i, X)$. Toto oveľa lepšie popisuje interakcie na trhu v reálnom svete, pretože ľudia nesúperia s nejakým konkrétnym iným človekom, ale so všetkými naraz, teda akoby proti trhu samotnému. Týmto uvedením dodáme modelom v kapitolách 2, 3 a 4 zase o niečo viac presnosti. Priemerná výplata v populácii X je úžitok, ktorý má hráč hrajúci zmiešanú stratégiu X proti inému hráčovi, ktorý tiež hrá X .

$$u(X, X) = \sum_{i=1}^k x_i \cdot u(e_i, X) \quad (1)$$

Výplata hráča určuje, ako veľmi sa mu darí. Preto by množstvo potomkov, ktoré vytvorí, respektíve hráčov, ktorých presvedčí hrať jeho stratégiu, malo závisieť aj od tohto faktoru. Predpokladajme, že reprodukcia prebieha spojito, každý potomok hrá rovnakú stratégiu ako jeho rodič, akoby zdedil jeho genetickú informáciu, a každý potomok má iba jedného rodiča. Ďalej, každý jedinec vytvorí $\beta - \delta + u(e_i, X)$ nových jedincov. Koeficient β určuje, koľko potomkov vytvorí každý jedinec nezávisle od toho ako sa mu darí v populácii, čiže ide o prirodzenú mieru rastu. Podobne koeficient δ určuje, koľko potomkov prirodzene zomrie. Ak počet hráčov pôjde limitne k nekonečnu, teda populácia nemôže vymrieť, absolútna zmena počtu hráčov hrajúcich danú stratégiu je potom množstvo potomkov od každého jedinca hrajúceho túto stratégiu vynásobené ich počtom.

$$\dot{p}_i = [\beta - \delta + u(e_i, X)]p_i \quad (2)$$

Toto je základná dynamika pre množstvo hráčov hrajúcich danú stratégiu v celkovej populácii. Z definície $p = \sum_{i=1}^k p_i$ a skutočnosti, že derivácia súčtu je súčet derivácií, dostávame dynamiku aj pre celkový počet jedincov.

$$\dot{p} = \sum_{i=1}^k [\beta - \delta + u(e_i, X)]p_i \quad (3)$$

Odvodíme teraz dynamiku pre $x_i(t)$.

$$x_i = \frac{p_i(t)}{p}$$

$$x_i \cdot p(t) = p_i$$

$$\dot{x}_i p + x_i \dot{p} = \dot{p}_i$$

$$\dot{x}_i p = \dot{p}_i - x_i \dot{p}$$

Teraz využijeme (2) a (3):

$$\dot{x}_i p = [\beta - \delta + u(e_i, X)]p_i - x_i \sum_{j=1}^k [\beta - \delta + u(e_j, X)]p_j$$

$$\dot{x}_i p = [\beta - \delta + u(e_i, X)]p_i - x_i \sum_{j=1}^k (\beta - \delta)p_j - x_i \sum_{j=1}^k u(e_j, X)p_j$$

$$\dot{x}_i p = [\beta - \delta + u(e_i, X)]p_i - x_i(\beta - \delta) \sum_{j=1}^k p_j - x_i p \sum_{j=1}^k u(e_j, X)x_j$$

Využijeme vzťah (1):

$$\dot{x}_i p = [\beta - \delta + u(e_i, X)]p_i - x_i(\beta - \delta)p - u(X, X)x_i p$$

$$\dot{x}_i p = [\beta - \delta + u(e_i, X)]p_i - [\beta - \delta + u(X, X)]x_i p$$

$$\dot{x}_i = [\beta - \delta + u(e_i, X)]x_i - [\beta - \delta + u(X, X)]x_i$$

$$\dot{x}_i = [u(e_i, X) - u(X, X)]x_i \quad (4)$$

Toto je dynamika replikátora podielu hráčov hrajúcich stratégiu e_i v populácii X a je to najdôležitejší mechanizmus z teórie evolučných hier, ktorý budeme v práci používať. Vidíme, že rýchlosť rastu tejto časti populácie nezávisí od parametrov β a δ , keďže tieto sú rovnaké pre všetky stratégie, ale závisí iba od rozdielu výplaty z hrania i -tej čistej stratégie e_i oproti výplate z hrania zmiešanej stratégie X , čiže oproti priemernej výplate v populácii. Ak je teda stratégia e_i ziskovejšia, ako priemer populácie, bude sa rozmnožovať, naopak ak je menej zisková, bude jej podiel v celkovej populácii klesať.

Dynamiku replikátora sme v tomto tvare odvádzali preto, lebo o tom, ako sa jednotlivým stratégiám darí, najlepšie hovorí ich podiel v celkovej populácii. Najefektívnejšie stratégie budú v populácii zastúpené najväčším podielom a pri porovnávaní podielov sa nemusíme zaujímať o absolútne počty jedincov. Vďaka tomu sa dá táto dynamika využiť

na modelovanie populácií, nezávisle od toho, či sa v nich mení počet jedincov alebo nie. Môžeme teda $\dot{x}_i$ interpretovať dvomi spôsobmi. Tak, že počet jedincov p_i hrajúcich stratégiu e_i sa oproti celkovému počtu jedincov p zmenil tým, že niektoré stratégie mali viac, či menej potomkov, alebo sa zmenil tým, že časť jedincov hrajúcich i zmenilo svoju stratégiu na inú, respektíve niektorí hráči, čo predtým nehrali e_i , ju teraz hrajú. Získali sme tak nástroj, ktorým vieme modelovať vývoj takej populácie, aká najviac pripomína dianie na trhu. Zmeny x_i sa dejú skôr zmenami hranej stratégie než zmenou počtu jedincov v modeli a úspech nejakej stratégie nezávisí na ničom inom, len na veľkosti úžitku oproti ostatným členom populácie. Presne teda odzrkadľuje kapitalistické súperenie o maximalizáciu svojho osobného zisku, čo je podľa modernej ekonomickej teórie hnacia sila celého trhu.

Evolučná stabilita:

Potrebuje definovať matematický koncept, ktorý nám povie, či je nejaký stav populácie, teda korešpondujúca zmiešaná stratégia X , stabilný. Ukáže nám teda, či má populácia tendenciu do tohto stavu konvergovať alebo tiež po vychýlení sa do neho vrátiť. Takýmto konceptom sú evolučne stabilné stratégie. Množinu evolučne stabilných stratégií budeme značiť θ_{ESS} . Formálna definícia

$$X \in \theta_{ESS} \Leftrightarrow u[X, \epsilon Y + (1 - \epsilon)X] > u[Y, \epsilon Y + (1 - \epsilon)X]$$

z prednášok [5] hovorí, že stratégia X je evolučne stabilná práve vtedy, keď ak vstúpi do populácie malé množstvo ϵ hráčov hrajúcich ľubovoľnú inú stratégiu Y , tak hranie X bude hráčom prinášať aj naďalej väčšiu výplatu ako hranie Y . Znamená to, že existuje nejaké okolie bodu X , kde hranie X prináša ostro vyššiu výplatu, lebo žiadnou inou stratégiou neviem v novej zmiešanej populácii získať rovnú alebo vyššiu výplatu. Vezmúc do úvahy teóriu replikátorov, ktorá posúva aktuálnu populáciu tam, kde sa maximalizuje výplata, dostávame, že stratégia X je evolučne stabilná práve vtedy, keď existuje okolie bodu X , pre ktoré platí, že pre čas idúci do nekonečna, ide každá populácia Y z tohto okolia do bodu X . Formálne:

$$X \in \theta_{ESS} \Leftrightarrow \exists O_X; \forall Y \in O_X : \lim_{t \rightarrow \infty} Y = X$$

Práve túto definíciu evolučnej stability budeme v práci využívať.

2 Model pracovného trhu

Predmetom tejto kapitoly bude zostrojenie modelu pracovného trhu pomocou teórie evolučných hier a jeho následného skúmania analyticky aj numerickým riešením fázového portréту. Na základe získaných poznatkov utvoríme v poslednej podkapitole závery, ktoré budú vypovedať o správnom fungovaní reálneho sveta, čím naplníme jeden z cieľov našej práce.

V tomto modeli budeme uvažovať tri rôzne stratégie, ktoré môžu jedinci využívať - zamestnanec, podnikateľ, nezamestnaný. Ich podiely v celkovej populácii budeme označovať Z , P a N , pričom platí $Z, P, N \in \mathbb{R} \wedge Z, P, N \in \langle 0, 1 \rangle$ a $Z + P + N = 1$. Ak však podiel niektorej zo stratégií bude rovný 0, aparát teórie evolučných hier zaistí vývoj populácie len na stene, prípadne dokonca hrane simplexu, na ktorom sa nachádza naša populácia. Ako vyplýva z odvodu v podkapitole 1.2, ak totiž nejaká stratégia nie je vôbec zastúpená v populácii, jej podiel sa nemôže zvýšiť na nenulovú hodnotu. Takýmito degenerovanými prípadmi sa budeme zaoberať len v krátkosti, keďže sú z ekonomického pohľadu nereálne a často triviálne na riešenie. Teraz pre každú z týchto stratégií vytvoríme funkciu užitočnosti, ktorá v prípade zamestnancov a podnikateľov bude odpovedať ich zárobku, no v prípade nezamestnaných pôjde o hodnotu, na ktorú si cenia dávku v nezamestnanosti plus to, že majú veľa voľného času. V našom modeli nebudeme uvažovať štátom vyberané dane.

2.1 Funkcie užitočnosti účastníkov pracovného trhu

Funkcia užitočnosti pre zamestnancov musí nejako závisieť od počtu pracovných miest na trhu práce. Konkrétnejšie, každý podnikateľ prinesie na trh nové pracovné miesta, ktoré sa môžu obsadiť. Ak ich bude málo, plat zamestnancov klesne, lebo musia o tieto miesta medzi sebou súperiť a teda ponúknuť výhodnejšie podmienky pre svojho zamestnávateľa. Naopak, s rastúcim počtom podnikateľov bude na trhu viac pracovných miest a podnikatelia sa budú musieť predháňať v tom, kto ponúkne zamestnancom vyšší plat, čo spôsobí rast plátov zamestnancov. Z výsledkov Sčítania obyvateľov, domov a bytov (SODB) v roku 2011 vyplynulo, že na jedného podnikateľa pripadá asi 5,33 zamestnanca. V roku 2021 to bolo už 5,67. Do nášho modelu preto zvolíme ako rovnovážny pomer 5,5 zamest-

nanca na podnikateľa. Za posledných 10 rokov sa priemerná mzda pohybovala v rozmedzí 786€ až 1211€. Určíme preto konštantu zárobku na priemerných 1000€, ak by bol trh v rovnováhe. Z týchto požiadaviek na funkciu užitočnosti zamestnancov ju navrhne v tvare:

$$u_Z(Z, P) = \frac{1000}{\frac{Z}{5,5P}}$$

Pre podnikateľov bude funkcia užitočnosti závisieť samozrejme od mzdy zamestnancov. Aký plat majú, tolko im musí predsa zaplatiť podnikateľ. Predpokladajme, že z práce jedného zamestnanca vie podnikateľ zarobiť asi o 30% viac, ako je rovnovážna hodnota platu zamestnanca, teda každý zamestnanec zarobí podnikateľovi 1300€. Funkcia užitočnosti podnikateľov musí ešte závisieť od počtu zamestnancov, ktorý získame ako podiel zamestnancov a podnikateľov na pracovnom trhu, teda budeme predpokladať, že sa všetci zamestnanci zamestnávajú u podnikateľov rovnomerne. Každý podnikateľ by mal mať ešte aj nejaké fixné náklady za to, že vedie podnik. Do toho môže spadať prenájom priestorov, či záporný úžitok pre neho samotného, nakoľko má stresujúcejšiu prácu, lebo musí viesť podnik. Túto konštantu môžeme opäť raz stanoviť na 1000€. Z daných požiadaviek utvoríme funkciu užitočnosti pre podnikateľov:

$$u_P(Z, P) = [1300 - u_Z(Z, P)] \cdot \frac{Z}{P} - 1000$$

Poslednou skupinou sú nezamestnaní. Ich funkcia užitočnosti musí závisieť od ich podielu v celkovej populácii. Ak ich totiž bude príliš veľa, sociálny systém si nebude môcť dovoliť im vyplácať také veľké dávky a naopak, ak ich bude málo, môže sa hodnota podpory zvýšiť. Dávka v hmotnej núdzi na Slovensku je 68,8€ mesačne, teda môžeme stanoviť konštantu, koľko by mal každý jedinec dostať peňazí, ak by nikto nepracoval, na 70€. Samozrejme, ak by nikto nepracoval, nebolo by z čoho tieto peniaze vyplácať, preto môžeme nastoliť predpoklad, že každý nezamestnaný má úžitok aj z toho, že má veľa voľného času a nemusí chodiť do práce. Táto hodnota 70 nevyjadruje preto presnú sumu peňazí, ale len akúsi predpokladanú užitočnosť. Pre nezamestnaných z týchto požiadaviek utvoríme funkciu užitočnosti v tvare:

$$u_N(N) = \frac{70}{1 - N}$$

Keďže však platí, že $Z + P + N = 1$, môžeme $u_N(N)$ vyjadriť pomocou Z a P :

$$u_N(Z, P) = \frac{70}{1 - Z - P}$$

Zostrojili sme teoreticko-herný model, kde množina čistých stratégií je $s = \{\text{zamestnanec, podnikateľ, nezamestnaný}\}$ a funkcie výplat sú:

$$\begin{aligned} u_Z(Z, P) &= \frac{1000}{\frac{Z}{5,5P}} \\ u_P(Z, P) &= [1300 - u_Z(Z, P)] \cdot \frac{Z}{P} - 1000 \\ u_N(Z, P) &= \frac{70}{1 - Z - P} \end{aligned} \tag{5}$$

Všimnime si, že Z aj P sú v menovateli a pritom pripúšťame ich nulovosť. To je však ošeterené tým, že ak je príslušný podiel stratégie v populácii nulový, nemá zmysel ani vyčíslovať úžitok z hrania tejto stratégie. Napríklad, ak $Z = 0$, tak niečo ako plat zamestnancov neexistuje a tiež podnikatelia nemajú žiadnych zamestnancov, teda nič nevyrobia a nepredajú. Preto ich zisk bude záporný kvôli nákladom.

Teraz aplikujeme na tento model poznatky z teórie evolučných hier získané v kapitole 1. Na základe funkcií užitočnosti odvodíme replikátory pre každú zo stratégií, ktorá môže byť v našom modeli pracovného trhu použitá, postupne teda pre zamestnancov, podnikateľov, aj nezamestnaných. Všeobecný tvar rovnice replikátora:

$$\dot{x} = x \cdot [u(x|X) - u(X|X)]$$

V tomto prípade x , teda podiel stratégie v populácii, bude Z . Ďalej za $u(x|X)$ vieme dosadiť priamo funkciu užitočnosti zamestnancov, keďže tá presne vyjadruje úžitok z hrania stratégie zamestnanec v závislosti od podielov Z a P , teda v rámci aktuálnej populácie. Za $u(X|X)$ dosadíme priemernú výplatu v celkovej populácii X , teda funkciu užitočnosti pre každú z možných stratégií, vynásobenú podielom príslušnej stratégie v populácii. Práve vynásobením týmto podielom získame požadovaný efekt váženého spriemerovania výplat. Dostávame rovnicu replikátora pre stratégiu zamestnaných:

$$\dot{Z} = Z \cdot [u_Z(Z, P) - Z \cdot u_Z(Z, P) - P \cdot u_P(Z, P) - N \cdot u_N(Z, P)]$$

Pri zápise rovnice replikátora však miestno N , podielu nezamestnaných v populácii, využijeme vzťah $Z + P + N = 1$, odkiaľ vyjadríme N . Po dosadení $N = 1 - Z - P$ už získame rovnicu replikátora pre stratégiu zamestnancov v potrebnom tvare:

$$\dot{Z} = Z \cdot [u_Z(Z, P) - Z \cdot u_Z(Z, P) - P \cdot u_P(Z, P) - (1 - Z - P) \cdot u_N(Z, P)]$$

Analogickým postupom dostaneme rovnicu replikátora pre stratégiu podnikateľov:

$$\dot{P} = P \cdot [u_P(Z, P) - Z \cdot u_Z(Z, P) - P \cdot u_P(Z, P) - (1 - Z - P) \cdot u_N(Z, P)]$$

Opäť analogickým postupom, ako pri odvodení rovníc replikátora pre predošlé dve stratégie, získame rovnicu pre tých jedincov, ktorí hrajú stratégiu nezamestnaný.

$$\dot{N} = (1 - Z - P) \cdot [u_N(Z, P) - Z \cdot u_Z(Z, P) - P \cdot u_P(Z, P) - (1 - Z - P) \cdot u_N(Z, P)]$$

Pomocou poznatkov z teórie evolučných hier sme tak z modelu s funkciami užitočnosti odvodili systém nelineárnych diferenciálnych rovníc:

$$\dot{Z} = Z \cdot [u_Z(Z, P) - Z \cdot u_Z(Z, P) - P \cdot u_P(Z, P) - (1 - Z - P) \cdot u_N(Z, P)]$$

$$\dot{P} = P \cdot [u_P(Z, P) - Z \cdot u_Z(Z, P) - P \cdot u_P(Z, P) - (1 - Z - P) \cdot u_N(Z, P)] \quad (6)$$

$$\dot{N} = (1 - Z - P) \cdot [u_N(Z, P) - Z \cdot u_Z(Z, P) - P \cdot u_P(Z, P) - (1 - Z - P) \cdot u_N(Z, P)]$$

Z dôvodu, že súčet $Z + P + N = 1$ musí po derivácii platiť aj $\dot{Z} + \dot{P} + \dot{N} = 0$, preto môžeme poslednú rovnicu prepísať aj v nasledujúcom tvare:

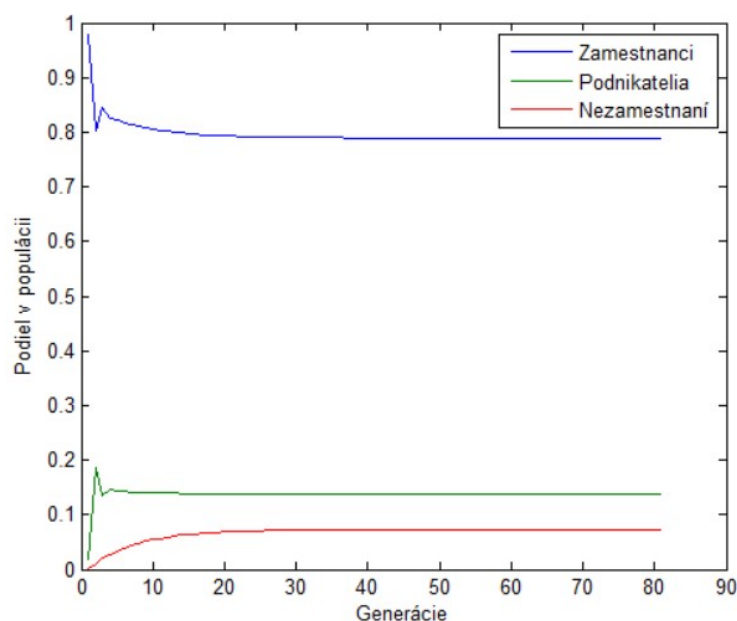
$$\dot{N} = -\dot{Z} - \dot{P}$$

Skúmaním systému zjednodušeného vynechaním závislej premennej $\dot{N}$ sa budeme zaoberať v ďalšej podkapitole 2.2.

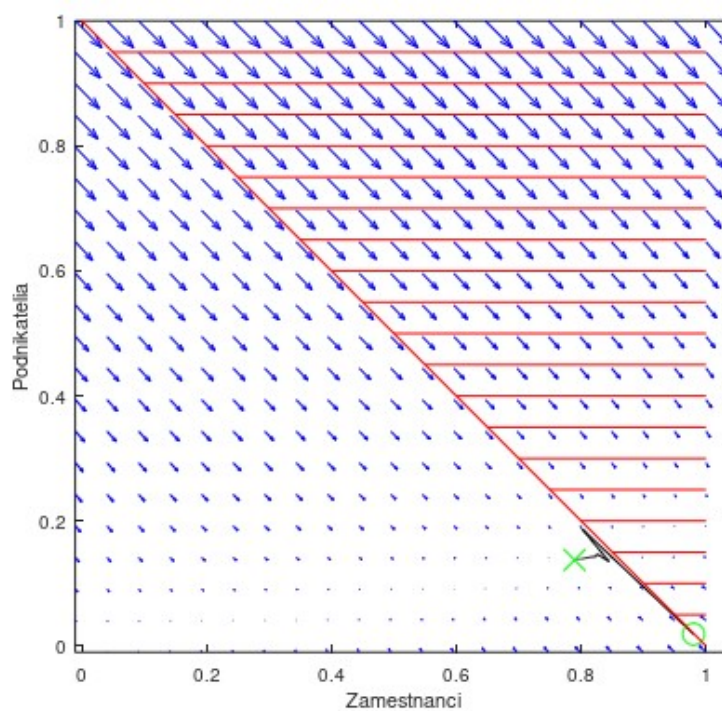
2.2 Simulácie a analýza modelu pracovného trhu

Tento systém nelineárnych diferenciálnych rovníc sme numericky implementovali v programe MATLAB. Na Obr. 1 vidíme vývoj populácie pre počiatočné hodnoty podielov jednotlivých stratégií v celkovej populácii, ktoré sme určili ako $Z = 0,98$, $P = 0,019$ a $N = 0,001 = 1 - 0,98 - 0,019$. Na vodorovnej osi sú generácie, nakoľko sa jedná o numerické riešenie. Simulácia skončila, keď výplaty všetkých stratégií dosiahli hodnotu v rozmedzí 0,01. Túto hodnotu sme zvolili, pretože predstavuje 1 cent, teda najmenšiu hodnotu, nad ktorou ľudia uvažujú a presnosť na dve desatinné miesta bude pre potreby našej práce stačiť. Úžitok všetkých jedincov je v tomto stave 958,62 a populácia sa ustálila v bode, kedy zamestnanci tvorili 78,94% celkovej populácie, podnikatelia 13,76% a nezamestnaní len 7,3% populácie. V MATLABe sme si nechali vykresliť aj Obr. 2, fázový

Obr. 1: Vývoj populácie v čase



Obr. 2: Fázový portrét a trajektória populácie



portrét tohto systému spolu s trajektóriou vývoja populácie. Práve z dôvodu, že premenná N je závislá od Z a P , sme sa rozhodli k problému pristupovať zjednodušene a považovať ho za dvojrozmerný. Fázový portrét aj trajektória preto znázorňujú iba pohyb populácie v dvojrozmernom poli premenných podielu počtu zamestnancov a podnikateľov v systéme.

Keďže sa naša populácia nachádza na simplexe a je vždy v súčte rovná 1, nedosiahnuteľná časť portréту je vyšrafovaná. Počiatočná populácia je na obrázku znázornená krúžkom a konečná populácia krížikom.

Fázový portrét ukazuje, že by mohlo ísť o ekvilibrium E systému, keďže všetky derivácie smerujú k nemu. Takýto systém má dva pevné body, no jeden je triviálny, ak $Z = P = 0$ a ako neskôr ukážeme, nestabilný. To, že sa naozaj jedná o pevný bod môžeme ľahko overiť dosadením $Z = 0$ a $P = 0$ do predpisov pre $\dot{Z}$ a $\dot{P}$, z čoho dostaneme $\dot{Z} = \dot{P} = 0$. Ak sú zmeny podielov Z a P nulové, tak aj tieto podiely zostanú rovnaké, teda nulové. Ak zistíme, že netriviálny pevný bod nášho systému je stabilný, musí ísť práve o nájdené ekvilibrium, inak by do neho simulácia neskonvergovala. To, či sa skutočne jedná o stabilné ekvilibrium, zistíme pomocou Jacobiho matice nášho systému. Do (6) dosadíme (5) a následne zderivujeme:

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= -1300Z^2 + 1000ZP - 70Z + 5500P \\ \dot{P} &= 1000P^2 - 1300ZP + 1300Z - 6570P \\ J &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} & \frac{\partial \dot{Z}}{\partial P} \\ \frac{\partial \dot{P}}{\partial Z} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2600Z + 1000P - 70 & 1000Z + 5500 \\ -1300P + 1300 & -1300Z + 2000P - 6570 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Táto matica má dve vlastné hodnoty. Nájdené ekvilibrium tohto systému bude stabilné, ak reálna časť oboch týchto vlastných hodnôt bude záporná. Podľa [1] to bude platiť práve vtedy, keď Jacobiho determinant bude kladný, teda obe vlastné hodnoty majú rovnaké znamienko a stopa bude záporná, teda toto rovnaké znamienko musí byť záporné. Ak je ekvilibrium systému stabilné, tak je stratégia hrať toto ekvilibrium evolučne stabilná, lebo po vychýlení populácie z tohto stavu sa bude k nemu populácia opäť v čase približovať, čo spĺňa definíciu evolučnej stability z 1.2. Teda platí:

$$E \in \theta_{ESS} \Leftrightarrow \det(J) > 0 \wedge \text{tr}(J) < 0$$

Overíme platnosť podmienok.

$$\text{tr}(J) = -3900Z + 3000P - 6640$$

$$\det(J) = 3380000Z^2 + 2000000P^2 - 5200000ZP + 15873000Z + 440000P - 6690100$$

Keď dosadíme triviálny pevný bod $Z = P = 0$, tak $\text{tr}(J) < 0 \wedge \det(J) < 0$, teda vlastné hodnoty majú rôzne znamienko, z ktorých tá v absolútnej hodnote väčšia má záporné

znamienko. Ide teda o pevný bod typu sedlo.

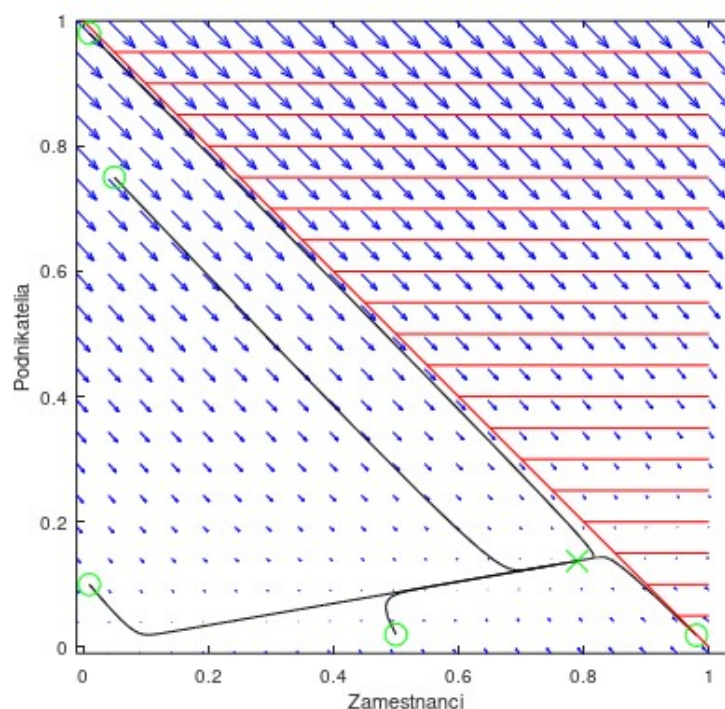
Ak teraz vezmeme do úvahy, že skúmané ekvilibrium je v okolí bodu $Z = 0,7894$ a $P = 0,1376$, tak môžeme predpokladať, že v skutočnom ekvilibriu E je hodnota $Z > 0,7$ a keďže veľkosť celkovej populácie je 1, tak $P < 0,3$. Pre tieto predpoklady je už ľahké overiť, že obe podmienky na stabilitu E sú splnené:

$\text{tr}(J) < 0$ pre ľubovoľné prípustné hodnoty Z a P .

To, že $\det(J) > 0$ vidíme, aj ak zanedbáme všetky kladné členy, okrem $15873000Z$. Pre $Z > 0,7$ a ľubovoľné prípustné P už potom nerovnosť platí triviálne.

Podmienky na evolučnú stabilitu sú splnené, E je teda skutočne evolučne stabilná stratégia, čo potvrdzuje aj Obr. 3, na ktorom sú pre lepšiu predstavu znázornené trajektórie vývoja populácie z vybraných kvalitatívne rôznych počiatočných bodov.

Obr. 3: Trajektórie vývoja populácie v čase



Vidíme, že všetky populácie skonvergovali do toho istého stabilného stavu.

Parameter v kóde, ktorý ovplyvňuje prevrátenú hodnotu elasticity dopytu a ponuky práce, sme pre tento obrázok kvôli lepšej prehľadnosti výrazne zvýšili. Trajektórie sú preto hladšie, lebo zmeny v populácii sú pomalšie.

2.3 Vyvodenie záverov o pracovnom trhu

Počiatočnú populáciu $Z = 0,98$, $P = 0,019$ a $N = 0,001$ sme nevybrali náhodou. Je to priblíženie sa k stavu, aký bol v našom hospodárstve pri páde socialistického režimu. Prakticky neexistovala nezamestnanosť a súkromné vlastníctvo bolo do veľkej miery obmedzené. Po liberalizácii trhu v našej simulácii prudko vyskočil počet podnikateľov, čo nápadne pripomína boom podnikania v 90tych rokoch minulého storočia. Počet nezamestnaných narástol, nakoľko pre nich na trhu nebolo miesto ponúkajúce väčší úžitok, ako voľný čas a podpora od štátu a na otvorenom pracovnom trhu si môže človek zvoliť aj možnosť byť nezamestnaný. Našou analýzou sme zistili, že triviálne ekvilibrium $Z = P = 0$ a $N = 1$ je nestabilné, teda v populácii, ktorú tvoria iba nezamestnaní, stačí ľubovoľne malé vychýlenie na to, aby sa našli ľudia, ktorí si radšej nájdu prácu. Podľa nášho modelu sa teda nemusíme obávať stavu, že nikto nechce pracovať. Ďalej sme simulčne našli netriviálne ekvilibrium $Z = 0,7894$, $P = 0,1376$ a $N = 0,073$ a dokázali sme o ňom, že sa jedná o jediné stabilné ekvilibrium tohto systému a preto ľubovoľná netriviálna počiatočná populácia do neho skonverguje. Stratégia v tomto ekvilibriu je evolučne stabilná, preto aj vychýlenie populácie z tohto stavu vonkajším šokom bude len dočasné a populácia sa opäť vráti do ekvilibria. Pomer zamestnancov a podnikateľov vyšiel podľa očakávaní blízky 5,5, konkrétne 5,74, čo je podobné aktuálnemu stavu v slovenskej ekonomike. Na obr.3 si môžeme tiež všimnúť, že všetky trajektórie vchádzajú do ekvilibria pozdĺž tej istej priamky. Jej sklon sa graficky zhoduje s priamkou so sklonom $\frac{1}{5,74}$, teda je to priamka, pozdĺž ktorej sa nachádzajú body s rovnovážnym podielom zamestnancov a podnikateľov. Všetky populácie najprv skonvergujú do tohto rovnovážneho podielu a až potom sa vyrovnáva podiel nezamestnaných na trhu. Trh teda rýchlejšie reaguje na zmeny v dopyte a ponuke práce, ako na aktuálnu nezamestnanosť. Podľa nášho modelu je teda výrazne jednoduchšie zmeniť prácu, či vymeniť zamestnanca, ako pracovné miesto vytvoriť alebo niekoho úplne vyhodiť. Toto môžeme pozorovať aj v reálnej ekonomike, kde sa pracovné príležitosti menia rýchlejšie, ako sa hýbe dlhodobá nezamestnanosť. Podiel nezamestnaných na trhu práce je v našom modeli len o pol percenta vyšší, ako bola nezamestnanosť na Slovensku v roku 2021, teda na konci obdobia, z ktorého sme čerpali údaje na nastavenie nášho modelu. Priemerný úžitok v populácii vyšiel podľa očakávaní okolo 1000, presnejšie 958,62.

Z vyššie popísaného vyplýva, že aktuálny stav na trhu práce nie je akousi náhodou, ale že ak v presne popísanom matematickom modeli nastavíme parametre podľa aktuálnych hodnôt v ekonomike, podložená matematická teória a aparát teórie evolučných hier prinesú veľmi podobný výsledok. Znamená to, že dianie na trhu práce, ktoré popisuje moderná ekonómia, sa dá s rovnakými princípmi, ako napríklad maximalizácia úžitku, odôvodniť aj presne matematicky.

3 Model trhu s nehnuteľnosťami

V tejto kapitole zostrojíme a následne budeme skúmať model trhu s nehnuteľnosťami. Podobne ako v kapitole 2 a v súlade s cieľom našej práce, aj tu na zostrojenie modelu využijeme teóriu odvodenú v kapitole 1. Model následne zanalyzujeme a v podkapitole 3.3 zosumarizujeme príslušné zistenia. Tieto budú blízke empirickým pozorovaniam, čím ukážeme, že dianie na trhu nehnuteľností je vďaka evolučno-hernému aparátu matematicky popísateľné. Naplníme tak aj druhý cieľ našej práce.

Na rozdiel od predošlého modelu pracovného trhu, tu budú prítomné dve populácie, pričom v každej z nich budeme uvažovať tie isté dve čisté stratégie - kúpiť a nekúpiť. Prvou populáciou budú takzvaní mladomanželia, jednoducho človek alebo ľudia, ktorí si chcú kúpiť nehnuteľnosť, lebo si chcú založiť vlastné bývanie. Túto kúpu musia uskutočniť z objektívnych dôvodov, aby mali kde bývať. Príslušníci tejto populácie sa môžu rozhodnúť si nehnuteľnosť za aktuálnu cenu kúpiť alebo zvoliť akciu nekúpiť a s kúpou ešte počkať. Podiel mladomanželov, ktorí si už nehnuteľnosť kúpili, z celkovej populácie mladomanželov, budeme značiť M . Špecialitou tohto modelu bude, že podielu M nedovolíme klesať. V prípade teóriou replikátorov odporúčaného poklesu M zmeníme pri numerickom riešení $\dot{M}$ na rovné 0. Tým modelujeme správanie sa tejto skupiny ľudí na reálnom trhu s nehnuteľnosťami, nakoľko títo ich chcú kúpiť pre seba a už nepredať, ale v nej bývať. Ak cena nie je príliš vysoká, stále viac mladomanželov nakupuje nehnuteľnosti a ak už cena prekročí maximálnu, ktorú sú ochotní zaplatiť, premietne sa to do ich záporného úžitku a teda kúpu neuskutočnia. Druhú populáciu bude v našom modeli tvoriť skupina jedincov, ktorú nazveme špekulanti. Tento typ účastníkov trhu s nehnuteľnosťami ich chce kúpiť, len ak v tom vidí investičný zmysel. Ak bude cena nehnuteľností dostatočne rýchlo rásť, tak vidina zisku z kúpy a následného predaja za lepšiu cenu bude poháňať časť špekulantov ku kúpe. Podiel tých špekulantov, ktorí v našom modeli aktuálne vlastnia nehnuteľnosť, označíme S . Platí $M, S \in \mathbb{R} \wedge M, S \in \langle 0, 1 \rangle$. Aj tu platí, že ak podiel niektorej zo stratégií bude rovný 0, bude sa populácia pohybovať na množine nižšieho rozmeru. Vyplýva to z odvodenia v 1.2. Budeme sa preto týmto prípadom zaoberať iba okrajovo. Pre každú z týchto dvoch stratégií vytvoríme v nasledujúcej podkapitole 3.1 funkcie užitočnosti. Tieto by mali zodpovedať množstvu ušetrených financií v prípade mladomanželov a množstvu zárobku získaného špekulatívnym obchodom špekulantov.

3.1 Funkcie užitočnosti záujemcov o kúpu nehnuteľnosti

Nech cena každej nehnuteľnosti na začiatku je 100000. Predpokladajme, že ak by si všetci mladomanželia aj všetci špekulanti kúpili nehnuteľnosť, ich cena by z dôvodu vysokého dopytu vzrástla na dvojnásobok, teda 200000. V modeli budeme uvažovať, že cena rastie s podielom jedincov, ktorí si už kúpili nehnuteľnosť lineárne. Z toho dostávame nasledujúci vzťah medzi cenou nehnuteľnosti P a podielmi M a S . Lahko vidíme, že tento vzťah spĺňa všetky naň kladené požiadavky.

$$P = 100000 + (M + S) \cdot 50000$$

Uvažujme, že mladomanželia sú ochotní kúpiť nehnuteľnosť, len ak je jej cena menšia alebo rovná 160000€. Vyplýva z toho, že ak už si v súčte aspoň 60% jedincov z oboch populácií kúpi nehnuteľnosť, ďalší mladomanželia si ju už nebudú môcť dovoliť. Toto ohraničenie má prirodzený základ v tom, že ľudia hľadajúci si prvé samostatné bývanie spravidla nemajú veľa peňazí a sú limitovaní napríklad hypotékou. Jednoduchá funkcia užitočnosti, ktorá zároveň spĺňa túto požiadavku, je lineárna funkcia, kde úžitok z kúpy nehnuteľnosti je priamo úmerný množstvu ušetrených peňazí. Funkcia užitočnosti pre mladomanželov má teda tvar:

$$u_M(M, S) = 160000 - P$$

Dosadíme za P a upravíme:

$$u_M(M, S) = 160000 - [100000 + (M + S) \cdot 50000]$$

$$u_M(M, S) = 60000 - (M + S) \cdot 50000$$

Toto je samozrejme úžitok, ak sa rozhodnú zvoliť akciu kúpiť nehnuteľnosť. V prípade, že zvolia akciu nekúpiť, ich úžitok bude 0. Špekulanti sa snažia zarobiť peniaze špekulatívnym obchodom, čiže kúpiť nehnuteľnosť lacnejšie, ako ju predajú. Kúpu budú teda ochotní uskutočniť, len ak bude cena nehnuteľností rásť, lebo vtedy je veľká nádej na zbohatnutie pomocou tejto transakcie. Cena nehnuteľnosti rastie, ak sa zvyšuje podiel ľudí na trhu, ktorí si nehnuteľnosť už kúpili. Ďalej, ak by každý špekulant čerstvo kúpenú nehnuteľnosť hneď predal, nič by nezarobil. Tiež nie je možné, aby sa všetky úkony s kúpou a predajom nehnuteľnosti vyriešili okamžite. Do jeho funkcie užitočnosti preto zakomponujeme aj časový interval, o ktorom si špekulant myslí, že sa bude trh správať tak, ako sa správa

práve teraz, čiže cena rastie a vidina zisku je vysoká, a za ktorý stihne uskutočniť kúpu aj predaj. Zmena ceny bude teda násobená 10 na znak toho, že spomínaný časový interval má dĺžku asi 10 časových jednotiek, čo môžeme v numerickom riešení chápať zhruba ako 10 mesiacov. Špekulanti majú však obvykle aj iné možnosti zárobku a obchod s nehnuteľnosťami nie je jediné, čo môžu so svojimi peniazmi urobiť. Ak by ich neminuli na kúpu, ale ich investovali do akciových fondov, mohli na tom zarobiť. Budeme teda od zisku z kúpy odčítavať 5% minutých peňazí, čo bude predstavovať ušlý zisk z výnosov. Všetky spomenuté požiadavky vie najjednoduchšie uspokojiť nasledujúca funkcia užitočnosti:

$$u_S(M, S) = 10 \cdot (\dot{M} + \dot{S}) \cdot 50000 - [100000 + (M + S) \cdot 50000] \cdot 0.05$$

Ak hráči v populácii špekulantov zahrajú akciu nekúpiť, ich úžitok určíme ako 0, keďže nič nové so svojimi peniazmi nerobia. Zisk z investovania nevyužitých finančných prostriedkov už je zarátaný ako ušlý zisk pri akcii kúpiť.

Odvodili sme teoreticko-herný model, v ktorom sú dve populácie hráčov - mladomanželia a špekulanti. Možné akcie pre hráčov z oboch populácií sú $s = \{\text{kúpiť, nekúpiť}\}$ a funkcie užitočnosti pre príslušné typy hráčov sú:

$$u_M(M, S) = 60000 - (M + S) \cdot 50000$$

$$u_S(M, S) = 10 \cdot (\dot{M} + \dot{S}) \cdot 50000 - [100000 + (M + S) \cdot 50000] \cdot 0.05 \quad (7)$$

ak hráči zvolia akciu kúpiť a

$$u_M = u_S = 0$$

ak hráči zvolia akciu nekúpiť.

Podobne ako v kapitole 2, aj tu teraz aplikujeme poznatky z teórie evolučných hier. Dosadíme funkcie užitočnosti (7) pre oba typy jedincov do rovnice dynamiky replikátora (4), odvodenéj v podkapitole 1.2. Výplata priemernej populácie tu bude značne zjednodušená, vysvetlenie ponúkame nižšie.

$$\begin{aligned} \dot{M} &= M \cdot [u_M(M, S) - M \cdot u_M(M, S)] \\ \dot{S} &= S \cdot [u_S(M, S) - S \cdot u_S(M, S)] \end{aligned} \quad (8)$$

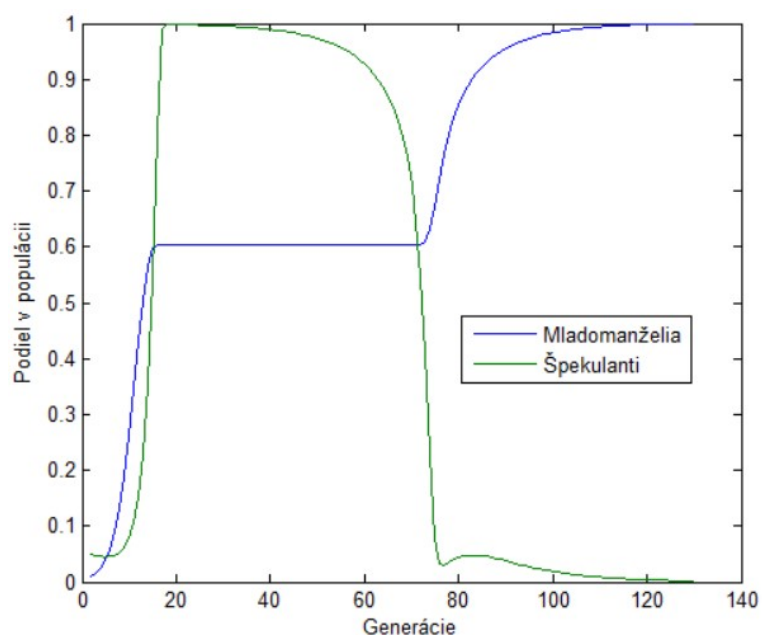
Keďže jedinci voliaci akciu nekúpiť majú úžitok rovný 0, ich členy zo vzťahu pre dynamiku replikátora v týchto populáciách vypadli. Všimnime si, že na rozdiel od modelu pracovného trhu v časti 2.1, populácie mladomanželov a špekulantov sú na prvý pohľad na sebe

nezávislé. Áno, funkcie užitočnosti u_M a u_S už závisia aj na podiele jedincov z druhej populácie, no samotná dynamika replikátora medzi sebou porovnáva iba výplaty existujúcich stratégií z danej jednej populácie. Toto je dôsledok toho, že v predošlom modeli bola len jedna spoločná populácia a 3 rôzne stratégie, zatiaľ čo tu sú dve populácie po dve stratégie. Podiel mladomanželov teda závisí na prvý pohľad iba na tom, akú vysokú výplatu majú tí mladomanželia, ktorí by nehnuteľnosť kúpili teraz, oproti tým, ktorí by ho za aktuálnu cenu nekúpili. Nezávisí priamo od výplat špekulantov. Podobne podiel špekulantov závisí len od výplat tých, ktorí by nehnuteľnosť kúpili, v porovnaní s výplatou tých, ktorí by ju nekúpili, nie od výplat mladomanželov. Skúmaním tohto modelu a stabilitou jeho riešenia sa bude zaoberať kapitola 3.2.

3.2 Simulácie a analýza modelu trhu s nehnuteľnosťami

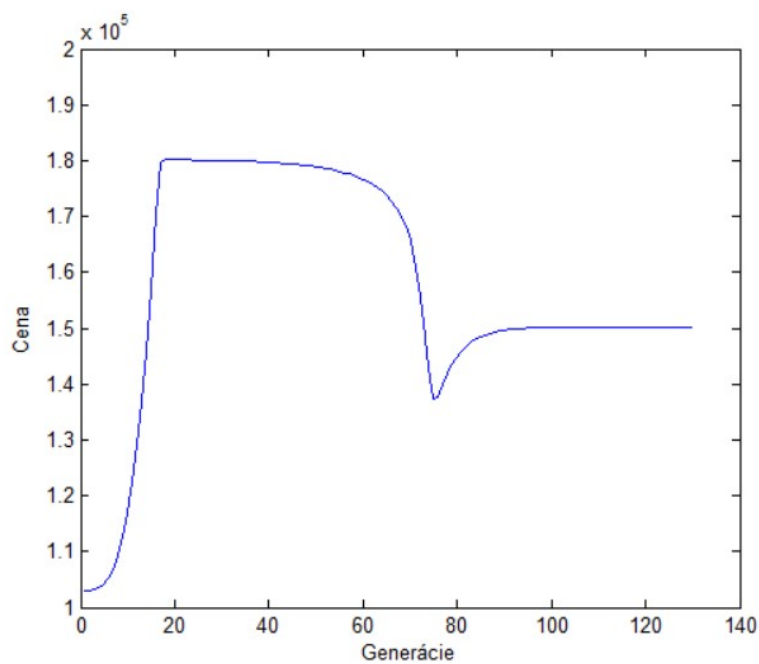
Model vytvorený v predchádzajúcej podkapitole sme numericky implementovali v programe MATLAB. Počiatočný podiel jedincov v oboch populáciách, ktorí už nehnuteľnosť vlastní, sme zvolili veľmi nízky, aby sme vytvorili situáciu na trhu, keď sa postaví nový bytový komplex a ide sa predávať, alebo keď príde nová vlna mladých ľudí, čo práve skončili štúdium a hľadajú si bývanie. Podiel M sme zvolili rovný 0,01 a podiel $S = 0,05$, teda takmer žiadny mladomanželia nevlastnia nehnuteľnosť a iba malé množstvo predvídavých špekulantov vlastní nehnuteľnosť. Opäť pripomenieme, že kvôli správne fungovaniu aparátu teórie evolučných hier pri numerickom modelovaní takýchto populácií musíme v každom okamihu zaručiť nenulovosť všetkých možných stratégií. Simulácia skončila, keď medzigeneračné zmeny v oboch populáciách boli pod zvolenou toleranciou, čo bolo po asi 180 generáciách. Kvôli prehľadnosti grafu sme sa však rozhodli vykresliť časový vývoj populácií iba pre prvých 130 generácií, nakoľko zvyšok času už obe populácie len veľmi pomaly konvergovali do konečného stavu. Zaznamenaný vývoj oboch populácií v čase môžeme vidieť na Obr. 4. Časový vývoj populácií vieme jasne rozdeliť na dve časti. V prvej sa populácia mladomanželov s kúpenou nehnuteľnosťou zvýšila na $\sim 0,6$ a zostala bez zmeny dlhú dobu, zatiaľ čo podiel špekulantov prudko vyskočil až na úroveň, kedy takmer všetci vlastnili nehnuteľnosť, čo vyhnalo cenu nehnuteľnosti nad maximálnu úroveň, kedy sú si ešte mladomanželia ochotní ju kúpiť. V druhej časti sa už neoplatilo špekulantom nehnuteľnosť vlastniť, keďže jej cena nerástla, a predali ju, čím jej cena klesla, a zvyšok

Obr. 4: Vývoj populácií v čase



mladomanželov si mohol opäť dovoliť jej kúpu. Výsledný stav bol $M \doteq 1$ a $S \doteq 0$. Trend vývoja ceny nepriamo popísaný vyššie vidíme presne na Obr. 5.

Obr. 5: Vývoj ceny nehnuteľnosti v čase



Napriek tomu, že dosiahnutý konečný stav populácií sa javí ako stabilný, túto skutočnosť si teraz overíme analyticky. Do dynamík replikátorov (8) pre populácie v našom

modeli dosadíme funkcie užitočnosti oboch typov jedincov (7):

$$\begin{aligned}\dot{M} &= 50000M^3 + 50000M^2S - 110000M^2 - 50000MS + 60000M \\ &\quad - 25 \cdot 10^9 M^3 S^2 - 25 \cdot 10^9 M^2 S^3 + 25 \cdot 10^9 M^3 S + 80 \cdot 10^9 M^2 S^2 + 25 \cdot 10^9 M S^3 \\ \dot{S} &= \frac{-55 \cdot 10^9 M^2 S - 54999997500 M S^2 + 2500 S^3 + 29999997500 M S + 2500 S^2 - 5000 S}{500000 S^2 - 500000 S + 1}\end{aligned}$$

Teraz zderivujeme $\dot{M}$ a $\dot{S}$ postupne podľa M a S , aby sme dostali Jacobiho maticu, ktorá bude neskôr slúžiť na skúmanie stability nájdeného riešenia systému:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{M}}{\partial M} & \frac{\partial \dot{M}}{\partial S} \\ \frac{\partial \dot{S}}{\partial M} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Pre veľkosť členov Jacobiho matice sme sa rozhodli ich kvôli čitateľnosti napísať zvlášť:

$$a = 150000M^2 + 100000MS - 220000M - 50000S + 60000$$

$$b = 50000M^2 - 50000M$$

$$\begin{aligned}c &= \frac{-75 \cdot 10^9 M^2 S^2 - 50 \cdot 10^9 M S^3 + 75 \cdot 10^9 M^2 S + 160 \cdot 10^9 M S^2 \\ &\quad + 25 \cdot 10^9 S^3 - 110 \cdot 10^9 M S - 54999997500 S^2 + 29999997500 S}{500000 S^2 - 500000 S + 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d &= \frac{(-50 \cdot 10^9 M^3 S - 75 \cdot 10^9 M^2 S^2 + 25 \cdot 10^9 M^3 + 160 \cdot 10^9 M^2 S + 75 \cdot 10^9 M S^2 - 55 \cdot 10^9 M^2 + 7500 S^2 \\ &\quad - 109999995000 M S + 29999997500 M + 5000 S - 5000) \cdot (500000 S^2 - 500000 S + 1) - (-25 \cdot 10^9 M^3 S^2 \\ &\quad - 25 \cdot 10^9 M^2 S^3 + 25 \cdot 10^9 M^3 S + 80 \cdot 10^9 M^2 S^2 + 25 \cdot 10^9 M S^3 - 55 \cdot 10^9 M^2 S + 2500 S^3 \\ &\quad - 54999997500 M S^2 + 29999997500 M S + 2500 S^2 - 5000 S) \cdot (1000000 S - 500000)}{(500000 S^2 - 500000 S + 1)^2}\end{aligned}$$

Jacobiho matica J , popisujúca náš systém diferenciálnych rovníc, má dve vlastné hodnoty. Konečný stav populácií nášho modelu $M = 1$ a $S = 0$ je pevný bod tohto systému práve vtedy, keď pre vlastné hodnoty J platí, že ich reálne časti sú menšie ako 0. Analogicky ako v predchádzajúcom modeli z podkapitoly 2.2, aj tu využijeme na dôkaz zápornosti reálnych častí oboch vlastných hodnôt Jacobiho matice J skutočnosť, že:

$$Re(\lambda_1) \wedge Re(\lambda_2) < 0 \Leftrightarrow det(J) > 0 \wedge tr(J) < 0$$

Do J dosadíme hodnoty $M = 1$ a $S = 0$ a overíme platnosť tohto tvrdenia:

$$\det(J) = (150000 - 220000 + 60000)(25 \cdot 10^9 - 55 \cdot 10^9 + 29999997500 - 5000) - 0$$

$$\det(J) = (-10000) \cdot (-7500) = 75000000 > 0$$

$$\text{tr}(J) = 150000 - 220000 + 60000 + 25 \cdot 10^9 - 55 \cdot 10^9 + 29999997500 - 5000$$

$$\text{tr}(J) = -10000 - 7500 = -17500 < 0$$

Vidíme, že obe podmienky sú splnené, čo dokazuje, že daný bod je naozaj pevným bodom sústavy diferenciálnych rovníc popisujúcich náš model trhu s nehnuteľnosťami. Z toho vyplýva, že existuje jeho požadované okolie v súlade s definíciou evolučne stabilnej stratégie z 1.2, teda pre hráčov v populácii mladomanželov je evolučne stabilnou stratégiou hrať akciu kúpiť s pravdepodobnosťou 1 a pre hráčov v populácii špekulantov je evolučne stabilnou stratégiou hrať akciu nekúpiť s pravdepodobnosťou 1. Okrem pevného bodu $M = 1$ a $S = 0$ existuje pre tento systém diferenciálnych rovníc ešte aj triviálny pevný bod $M = 0$ a $S = 0$. Toto môžeme ľahko overiť dosadením $M = 0$ a $S = 0$ do predpisov pre $\dot{M}$ a $\dot{S}$, z čoho dostaneme $\dot{M} = \dot{S} = 0$. Ak sú zmeny podielov M a S nulové, tak aj tieto podiely zostanú rovnaké, teda nulové. Stabilitu tohto pevného bodu vyšetríme dosadením $M = 0$ a $S = 0$ do J a overíme, či platí $\det(J) > 0 \wedge \text{tr}(J) < 0$:

$$\det(J) = 60000 \cdot (-5000) - 0 = -300000000 < 0$$

$$\text{tr}(J) = 60000 - 5000 = 55000 > 0$$

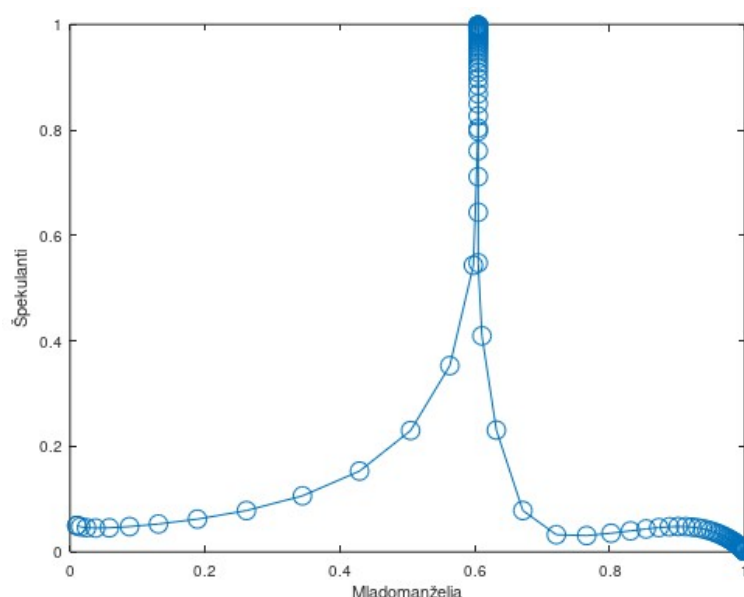
Vidíme, že podmienky stability splnené nie sú, teda ľubovoľne malé vychýlenie spôsobí divergenciu populácií od tohto pevného bodu.

Zostáva určiť, či všetky počiatočné populácie konvergujú do stabilného pevného bodu $M = 1$ a $S = 0$ alebo nie. Na toto nám bude stačiť nasledujúca úvaha. Podiel špekulantov, ktorí si kúpia nehnuteľnosť rastie, iba ak rastie celkový podiel jedincov, ktorí si aktuálne kupujú nehnuteľnosť. Toto sa však nemôže diať donekonečna, keďže z funkcie užitočnosti u_S je implicitne definovaná minimálna kladná rýchlosť rastu $M + S$, odrazená od 0, ktorá je potrebná na to, aby rástol podiel S . Ak S rastie, tak podiel jedincov v oboch populáciách, ktorí vlastnia nehnuteľnosť, musí teda v konečnom čase dosiahnuť maximum. Podiel S potom už nebude môcť stúpať. Podiel M sme definovali ako neklesajúci a z u_M

vieme, že M rastie, iba ak $M + S < 1,2$, lebo iba vtedy je $u_M > 0$. Akonáhle teda $M + S$ presiahne úroveň $1,2$, M prestane rásť. V konečnom čase sa zastaví aj rast S a keď sa rast oboch zastaví, S začne klesať. Keď klesne $M + S$ pod $1,2$, tak si nenulové množstvo mladomanželov kúpi nehnuteľnosť, M začne rásť a tento teoretický cyklus sa môže začať znovu. Vždy sa pri tom však M priblíži k 1 , teda populácia mladomanželov musí konvergovať do 1 . Táto konvergencia je len prerušovaná zdvihnutím ceny špekulantami. Keď už bude v populácii podiel mladomanželov blízky $M = 1$, tak nebude mať čo spôsobiť dostatočne prudký počiatočný nárast jedincov kupujúcich si nehnuteľnosť, teda S nebude môcť začať rásť, čiže skonverguje do 0 . Vidíme, že ľubovoľná počiatočná populácia, pre ktorú platí $M, S \in (0, 1)$, musí skonvergovať do ekvilibria nášho modelu $M = 1, S = 0$.

Trajektóriu vývoja podielov jedincov vlastniacich nehnuteľnosť v oboch populáciách môžeme pre nami skúmaný počiatočný stav $M = 0,01$ a $S = 0,05$ vidieť na Obr. 6.

Obr. 6: Trajektória vývoja populácií v čase



Krúžky v grafe znázorňujú stav v jednotlivých generáciách. Ich hustota pozdĺž trajektórie nám dodáva informáciu, ako rýchlo sa populácie hýbali.

3.3 Vывodenie záverov o trhu s nehnuteľnosťami

V časti 3.2 sme dokázali, že jediný stabilný pevný bod nášho modelu trhu s nehnuteľnosťami je bod $M = 1$ a $S = 0$, ktorý je zároveň evolučne stabilnou stratégiou pre populáciu

mladomanželov, aj špekulantov. To znamená, že ľubovoľná počiatočná populácia, ktorá spĺňa $M, S \in (0, 1)$ konverguje do tohto ekvilibria. Z tohto a aj z úvahy na konci predošlej podkapitoly dostávame, že hnacou silou na trhu s nehnuteľnosťami sú mladomanželia a trh sa dostane do stabilného stavu, keď všetci jedinci z populácie mladomanželov uspokojia svoj dopyt. Špekulanti na trhu spôsobujú iba dočasné obdobia umelého zvyšovania cien nehnuteľností kvôli vidine zisku, čo spomaľuje konvergenciu k trhovej rovnováhe. Keď na trh prišla nová ponuka nehnuteľností, mladomanželia ich začali okamžite nakupovať, lebo boli za vhodnú cenu. Rast cien nehnuteľností spôsobil prudký nárast záujmu špekulantov o kúpu nehnuteľnosti, čo ešte viac urýchlilo rast cien. Za takúto vysokú cenu už si mladomanželia nedokázali nehnuteľnosť kúpiť, no cena aj naďalej rástla, lebo stále ďalší špekulanti nehnuteľnosti kupovali kvôli rastúcej cene, čo opäť navyšovalo cenu. Nehnuteľnosti boli v tomto bode simulácie vysoko nadhodnotené kvôli špekulantom a na trhu vznikla takzvaná bublina. Keď už si všetci špekulanti kúpili nehnuteľnosť, nemal si ich kto ďalší kupovať, čo zastavilo rast ich ceny. Toto spôsobilo prasknutie cenovej bubliny na trhu a špekulanti začali nehnuteľnosti vo veľkom predávať. Po tom, čo cena opäť klesla pod úroveň, kedy sú mladomanželia ochotní kúpiť si nehnuteľnosť, začali títo opäť voliť akciu kúpiť, čo síce zase zdvihlo ceny nehnuteľností, no nárast už nebol taký prudký, aby to špekulanti vyhodnotili ako príležitosť zbohatnúť. Trh sa ustálil po tom, ako si všetci mladomanželia kúpili nehnuteľnosť. Tento scenár môžeme vidieť aj v realite, kde sa ceny nehnuteľností správajú podobne, ako na Obr. 5. Náš model ponúka vysvetlenie takéhoto správania sa trhu. Ľudia, ktorí si potrebujú kúpiť byt alebo dom na osobné užívanie nalákajú do tohto odvetvia špekulatívnych investorov, ktorí umelo nafúknu ceny. Táto situácia môže zájsť až do extrému, kedy tí, čo si pôvodne chceli nehnuteľnosť kúpiť z objektívnych príčin na to nemajú dosť peňazí, no ceny aj naďalej rastú a vzniká cenová bublina. Keď si to účastníci trhu, čo sú v tomto bode hlavne špekulanti, uvedomia, začnú nehnuteľnosti predávať, bublina praskne a ceny klesnú. Trh sa neskôr postupne dostane do stabilného stavu a cena dosiahne optimum.

4 Model trhu ojazdených áut

Náplňou kapitoly bude odvodenie a následné skúmanie modelu trhu ojazdených áut. Opäť pomocou teórie evolučných hier, odvodennej v 1. kapitole, zostrojíme v časti 4.1 funkcie užitočnosti jedincov vstupujúcich do modelu a z nich odvodíme systém diferenciálnych rovníc, ktorý bude popisovať vývoj populácie tohto modelu v čase. Funkcií užitočnosti budú dve sady, aby sme mohli ukázať, ako maximalizácia zisku na rôzne dlhý horizont ovplyvní správanie sa jedincov v populácii. Neskôr v 4.3 podrobne popíšeme výsledky simulácií, uskutočnené v programe MATLAB a pre vybranú sadu funkcií užitočnosti vyšetríme stabilitu príslušného systému. Nakoniec v podkapitole 4.4 vyvodíme zo získaných výsledkov závery o tom, ako horizont pôsobenia na trhu ovplyvnil populáciu predajcov ojazdených áut a zhrnieme poznatky získané našou analýzou.

Rovnako, ako v predošlej kapitole 3, populáciu budú v tomto modeli tvoriť dve samostatné populácie jedincov, ktoré sa navzájom ovplyvňujú. Prvú populáciu budú tvoriť kupujúci, čiže jedinci, ktorí si chcú kúpiť ojazdené auto. Títo sa rozhodujú, či si kúpia skontrolované auto za pevnú cenu alebo neskontrolované auto. Cena neskontrolovaného bude nižšia, ale budú riskovať, že predajca z auta predtým vymontoval niektoré súčiastky, aby ich mohol zvlášť predáť a zvýšiť tak svoj zisk. Nech skontrolované ojazdené auto stojí 20000. Cenu sme určili ako konštantnú, lebo predpokladáme, že takéto autá predávajú stáli a hodnoverní predajcovia. Ak sa záujemca o kúpu ojazdeného auta rozhodne pre neskontrolované, môže oproti skontrolovanému ušetriť. Cena neskontrolovaného auta sa bude lineárne odvíjať od dopytu, nakoľko tento trh je viac živelný a žiadny účastník trhu presne nevie, ako oceniť riziko kúpy nekvalitného automobilu, teda takého, z ktorého boli vymontované súčiastky. Druhou populáciou budú predajcovia neskontrolovaných ojazdených áut. Z rovnakých dôvodov, ako sme už spomínali, by modelovanie na trhu so skontrolovanými autami nebolo také zaujímavé, preto budeme skúmať iba odvetvie trhu s neskontrolovanými autami. Predajca sa môže rozhodnúť, že z predávaného auta ešte vymontuje niektoré kvalitné súčiastky tak, aby to kupujúci na prvý pohľad nevedel rozoznať a on ich bude môcť ešte speňažiť na trhu s náhradnými dielmi. Ak to urobí, zarobí okrem kúpno-predajnej ceny aj 3000 za predaj týchto súčiastok zvlášť. Ak si však kupujúci kúpi auto, z ktorého boli vymontované súčiastky, po istom čase používania si to všimne a bude musieť na jeho uvedenie do dobrého stavu zaplatiť až 5000. Okrem nákupu vymontova-

ných súčiastok v hodnote 3000, ich navyše bude musieť zháňať a zaplatiť mechanika, čo ich vymení. Túto príťaž v hodnote 2000 predávajúci nemá, pretože predpokladáme, že sa v tejto oblasti vyzná a všetko je pre neho ľahšie, ak sa pre vymontovanie súčiastok sám rozhodne. V tomto modeli budeme uvažovať populáciu kupujúcich dynamickú, teda že ak si v jednej generácii už auto kúpia, z trhu odídu, no nahradí ich rovnaký počet nových záujemcov o kúpu ojazdeného automobilu. Populáciu teda nebudú tvoriť konkrétni jedinci, ako tomu bolo v predošlom modeli trhu s nehnuteľnosťami z kapitoly 3, ale populácia bude vyjadrovať len podiel zastúpenia jednotlivých stratégií medzi jedincami. Naopak, populácia predávajúcich bude stála. Budú sa teda správať, ako by predávali viac áut, čiže jedincami v populácii predajcov budú autobazáre. Opäť to má byť v súlade s tým, že predávajúci sa v tomto odvetví trhu vyzná a má možnosť zvoliť nekalú praktiku vymontovania kvalitných súčiastok z práve predávaného auta.

4.1 Funkcie užitočnosti predávajúcich a kupujúcich

Cenu neskontrolovaného auta určíme vzťahom $1000 + 19000 \cdot K$, kde K je podiel jedincov v populácii záujemcov o kúpu ojazdeného auta, ktorí sa rozhodnú kúpiť si neskontrolované auto. Konštanta 1000 zase vyjadruje, že ak by aj nikto neskontrolované auto nechcel, pre predajcu má stále nejakú hodnotu a nepredá ho zadarmo, čo môžeme pozorovať aj v reálnom svete. Aj keď niektoré ojazdené autá nikto nechce, ich cena sa už ďalej neznižuje a jednoducho sa nepredajú. Predávajúci totiž môže toto auto využiť na niečo iné, čokoľvek aspoň nenulovo prospešné, napríklad ako zamknutý odkladací priestor. Vidíme, že s dopytom rastie aj cena, čo je prirodzené. Úžitok, ktorý budú mať kupujúci, vyčíslime pomocou množstva peňazí, ktoré ušetria, oproti kúpe skontrolovaného auta. Kupujúci však bude pritom prihliadať na očakávanú cenu auta, teda že s pravdepodobnosťou $1 - P$ bude musieť zaplatiť ešte 5000 za výmenu dielov, ak si kúpi nekvalitné auto, teda také, z ktorého predajca vymontoval súčiastky. P je podiel poctivých predajcov na trhu a $1 - P$ je podiel tých, ktorí vymontovávali z nimi predaných áut súčiastky. Na nepoctivého predajcu preto narazí kupujúci s pravdepodobnosťou $1 - P$. Keďže populácia kupcov je dynamická, na trhu je dostupná informácia, aký podiel predajcov predáva kvalitné neskontrolované a aký podiel predáva nekvalitné neskontrolované autá. Funkcia užitočnosti záujemcov o ojazdené auto bude teda očakávaná úspora peňazí, oproti kúpe skontrolovaného, čiže isto

kvalitného auta za 20000.

$$u_K(K, P) = P[20000 - (1000 + 19000K)] + (1 - P)[20000 - (1000 + 19000K) - 5000]$$

$$u_K(K, P) = P(19000 - 19000K) + (1 - P)(14000 - 19000K)$$

Úžitok predávajúcich, ktorí nevymontujú z auta súčiastky, je jednoducho množstvo peňazí, ktoré získajú z predaja.

$$u_{P_n}(K, P) = 1000 + 19000K$$

Úžitok predávajúcich, ktorí vymontujú z auta súčiastky, je cena samotného auta, plus 3000 za predaj súčiastok na trhu s náhradnými dielmi.

$$u_{P_v}(K, P) = 1000 + 19000K + 3000$$

$$u_{P_v}(K, P) = 4000 + 19000K$$

Model, kde budeme používať takúto funkciu užitočnosti pre nepoctivého predávajúceho, nazveme M .

Keď porovnáme u_{P_n} a u_{P_v} , všimneme si, že nepoctiví predajcovia majú vždy vyšší zisk, ako poctiví. Takýto model bude preto konvergovať do stavu, kde všetci predávajúci vymontovávajú z áut súčiastky a zo strany kupujúcich bude o neskontrolované autá taký záujem, aby výsledná cena bola 15000, teda boli oproti skontrolovaným lacnejšie presne o takú sumu, akú musia do auta ešte investovať, aby bolo rovnako dobré. Takýto model nebude veľmi zaujímavý a neskôr v časti 4.3 ešte dokážeme, že takéto správanie sa predajcov je navyše neoptimálne a funkcia užitočnosti nie dostatočne odzrkadľuje maximalizáciu zisku predajcami. Zavedme preto modifikovanú funkciu užitočnosti nepoctivých predajcov, ktorá v sebe zohľadňuje pokles záujmu kupujúcich o neskontrolované autá a teda aj ich ceny, vyvolaný vymontovávaním súčiastok. Efekt poklesu záujmu kupcov o neskontrolované autá zohľadníme tým, že u_{P_v} vynásobíme K . Bez vymontovávania by totiž K konvergovalo k 1, teda cena by bola vyššia a zarobili by viac ako za zvlášť predané súčiastky. S vymontovávaním však bude klesať, čo sa odrazí na úžitku predajcov.

$$u_{P_v}^*(K, P) = K(4000 + 19000K)$$

Model, kde budeme používať túto modifikovanú funkciu užitočnosti pre predávajúceho, ktorý vymontováva súčiastky z ním predávaných áut, nazveme M^* .

Odvodili sme 2 evolučno-teoreticko-herné modely - M a M^* , ktoré oba majú dve populácie hráčov. Prvou populáciou sú v oboch modeloch kupujúci, ktorí majú záujem o kúpu ojazdeného auta. Množina akcií, ktoré si môžu zvoliť je $s_K = \{\text{neskontrolované, skontrolované}\}$. Ich funkcie užitočnosti sú:

$$u_K(K, P) = P(19000 - 19000K) + (1 - P)(14000 - 19000K)$$

ak zvolia akciu neskontrolované a

$$u_K = 0$$

ak zvolia akciu skontrolované.

Druhou populáciou sú v oboch modeloch predávajúci, ktorí sa snažia speňažiť neskontrolované ojazdené auto. Množina akcií, ktoré môžu predajcovia zvoliť je $s_P = \{\text{nevymontovať, vymontovať}\}$. Ich funkcie užitočnosti sú:

$$u_{P_n}(K, P) = 1000 + 19000K$$

pre oba modely, ak zvolia akciu nevymontovať,

$$u_{P_v}(K, P) = 4000 + 19000K$$

pre model M , ak zvolia akciu vymontovať a

$$u_{P_v}^*(K, P) = K(4000 + 19000K)$$

pre model M^* , ak zvolia akciu vymontovať.

Analogicky, ako v predošlých kapitolách, na modely M a M^* aplikujeme nami odvodenú teóriu z kapitoly 1 a príslušné funkcie užitočnosti dosadíme do vzťahu (4) z časti 1.2. Pripomeňme ešte, že budeme sledovať vývoj K a P , teda podielov stratégie kupujúcich, ktorí sa rozhodnú pre kúpu neskontrolovaného auta a stratégie predávajúcich, ktorí sa rozhodnú z predávaného auta nevymontovať súčiastky. Pre model M dostaneme systém diferenciálnych rovníc nasledujúceho tvaru:

$$\dot{K} = K \cdot [u_K(K, P) - K \cdot u_K(K, P)]$$

$$\dot{P} = P \cdot [u_{P_n}(K, P) - P \cdot u_{P_n}(K, P) - (1 - P) \cdot u_{P_v}(K, P)]$$

Pre modifikovaný model M^* dostaneme nasledujúci systém diferenciálnych rovníc:

$$\dot{K} = K \cdot [u_K(K, P) - K \cdot u_K(K, P)]$$

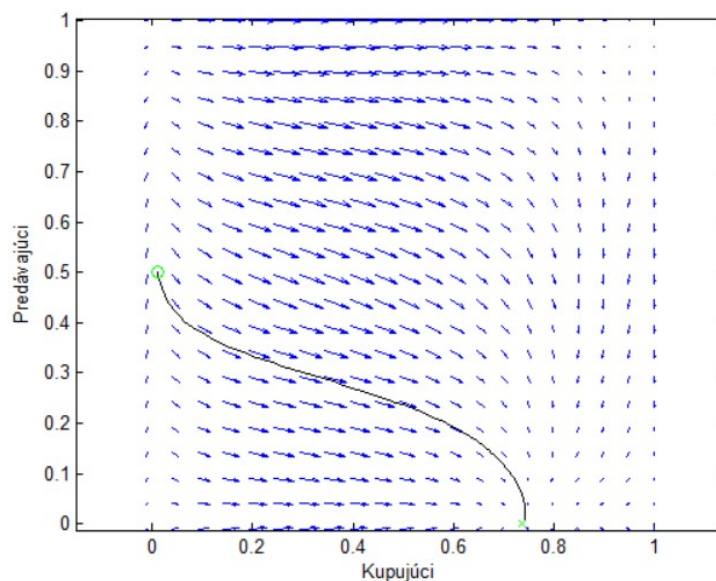
$$\dot{P} = P \cdot [u_{Pn}(K, P) - P \cdot u_{Pn}(K, P) - (1 - P) \cdot u_{Pv}^*(K, P)] \quad (9)$$

Porovnaniu modelov M a M^* sa budeme venovať v ďalšej podkapitole 4.2. Lepší z týchto dvoch modelov potom podrobnejšie zanalyzujeme a vyšetríme jeho evolučnú stabilitu v časti 4.3.

4.2 Porovnanie modelov krátkodobej a dlhodobej optimalizácie

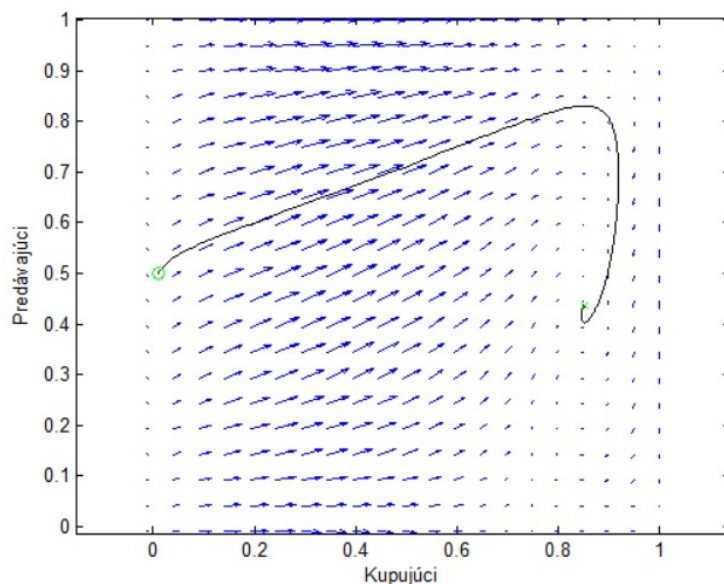
Systémy diferenciálnych rovníc, podľa ktorých sa správajú populácie modelov M aj M^* sme implementovali v programe MATLAB. Počiatočné populácie sme zvolili rovnaké a síce $K = 0,01$ a $P = 0,5$. To zodpovedá situácii, kedy sa trh s neskontrolovanými autami práve rozbieha, kupcov zaujímajúcich sa o túto stratégiu je zatiaľ málo a predajcovia sa nevedia rozhodnúť, či vymontovávať, alebo nevymontovávať súčiastky. Opäť z dôvodov správneho fungovania aparátu teórie replikátorov sme museli zvoliť $K, P \in (0, 1)$. Simulácie sme ukončili vždy po rovnakom počte iterácií, ktorý bol zvolený tak, aby sa v čase ukončenia populácie hýbali rýchlosťou o niekoľko rádov nižšou ako je presnosť modelu. Výslednú trajektóriu populácií v jednotlivých modeloch môžeme vidieť na nasledujúcich obrázkoch, pričom počiatočná populácia je znázornená krúžkom a konečná populácia krížikom. Modré šípky na obrázkoch reprezentujú fázový portrét daného systému. Ako vidíme aj na obr. 7,

Obr. 7: Trajektória vývoja populácií modelu M



populácie dokonvergovali podľa očakávaní z predchádzajúcej podkapitoly 4.1 do bodu na

Obr. 8: Trajektória vývoja populácií modelu M^*



hranici prípustnej množiny, kde $K = 0.7368$ a $P = 0$. Samozrejme, do bodu, kde $P = 0$, môže populácia v evolučno-teoreticko-hernom modeli dokonvergovať iba za nekonečný čas, no po zaokrúhlení numerického riešenia z programu MATLAB sme dostali 0. Cena, za ktorú sa predávajú v tomto bode neskontrolované autá je 15000 a keďže všetci predávajúci hrajú rovnakú stratégiu vymontovať, priemerný zisk medzi predajcami je:

$$\bar{u}_P = 15000 + 3000 = 18000$$

Z obr. 8 vidíme, že populácie modelu M^* skonvergovali do vnútorného bodu. Už len z tohto pohľadu je tento model zaujímavejší na hlbšie skúmanie. Populácie dokonvergovali do stavu $K = 0,8513$ a $P = 0,4349$. Kúpno-predajná cena neskontrolovaných áut je pritom 17174,68. Zhruba 43,5% predávajúcich teda zarába na predaji menej, ako keby vymontovávali z predávaných áut súčiastky. Zvyšných 56,5% predajcov však zarába vďaka vymontovávaniu súčiastok až $17174,68 + 3000 = 20147,68$, čo je výrazne viac, ako 18000 z modelu M . Aby sme vedeli oba modely dobre porovnať, musíme vypočítať priemerný úžitok predávajúcich z modelu M^* .

$$\bar{u}_P^* = 0,4349 \cdot 17174,68 + 0,5651 \cdot 20147,68 = 18869,87$$

Vidíme, že $\bar{u}_P^* > \bar{u}_P$, teda ak predajcovia berú do úvahy dlhodobý horizont a prispôbujú svoju stratégiu tomu, aby vymontovávaním súčiastok príliš neznížili cenu v budúcnosti

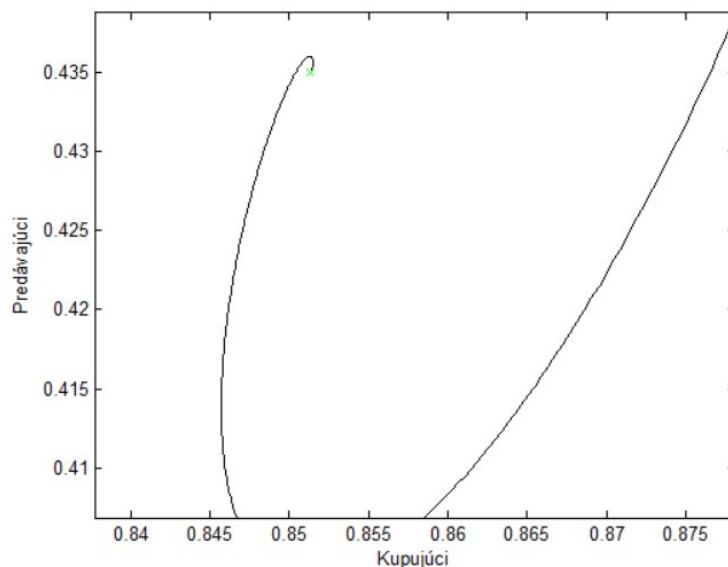
predávaných áut tým, že odradia kupujúcich predajom nekvalitných áut, tak dosiahnu v priemere vyšší úžitok. Toto dôležité zistenie nám ukazuje, že trh s neskontrolovanými ojazdenými autami sa správa istým spôsobom podobne, ako kartel. Časť populácie predávajúcich zarába menej, ako by mohla, aby zvyšok zarobil ešte viac. Aby naozaj nemuselo dochádzať k výmene zisku medzi jednotlivými predajcami, môže každý predajca vymontovávať súčiastky len z 56,5% ním predaných áut a zarobí tak dlhodobo viac, ako keby vymontovával súčiastky zo všetkých ním predaných áut. Samozrejme krátkodobo sa každému predávajúcemu oplatí vymontovávať súčiastky zo všetkých áut a preto sú kartelové dohody nestabilné. V modeli M sme nastavili funkciu užitočnosti predávajúcim tak, aby išli za vyšším okamžitým ziskom, čo by viedlo k porušeniu nepísanej kartelovej dohody. V modeli M^* sme modifikovali ich funkciu užitočnosti tak, aby maximalizovali budúci zisk a vidíme, že sa to predávajúcim naozaj oplatí a zarobia viac. Z dôvodov vyššej zaujímavosti modelu M^* a hlavne vyššieho úžitku predajcov v ňom sa budeme v podkapitole 4.3 venovať podrobnejším simuláciám a analýze práve modelu M^* .

Zaujímavou skutočnosťou však je, že aj napriek modifikovanej funkcii užitočnosti je v optime modelu M^* priemerný úžitok medzi predávajúcimi nižší, ako by bol, keby nikto z áut súčiastky nevymontovával. Vtedy by sa všetky autá predávali za maximálnu cenu, ktorú sú kupujúci ochotní zaplatiť a to 20000. V M^* teda predávajúci stále neoptimalizujú dokonale dlhodobo a možnosť okamžitého zvýšenia zisku je príliš lákavá na to, aby ju nevyužili, čím si v konečnom dôsledku uškodia.

4.3 Simulácie a analýza vybraného modelu trhu ojazdených áut

Zo simulácie vývoja populácie nášho modelu v čase na obr. 8 vidíme, že na začiatku rástol podiel poctivých predávajúcich. Týmto sa snažili docieľiť, aby rástla cena neskontrolovaných áut a zarobili tak viac. Keď už bola cena dostatočne vysoká, už dlhšie nevedeli predajcovia vydržať a začali z časti svojich áut vymontovávať súčiastky, aby tak ešte zvýšili svoje zisky. Do konečného bodu populácia M^* konverguje po špirále, čo môžeme vidieť ešte lepšie po priblížení na obr. 9. Zvýšenie podielu nepoctivých predávajúcich negatívne ovplyvní úžitok kupujúcich, ktorých časť si začne radšej kupovať skontrolované autá. Nižší záujem o neskontrolované autá zníži aj ich cenu, čo vyvolá medzi predajcami opäť snahu vymontovávať súčiastky z menej áut, aby zvýšili svoju dôveryhodnosť a tým aj cenu nimi

Obr. 9: Priblížená trajektória vývoja populácií modelu M^*



predávaných áut. Ak cena vzrastie, zase sa im začne oplácať vymontovávať súčiastky z viac áut a cyklus sa spustí znovu. Tieto zmeny sú však stále menšie, teda systém postupne konverguje po špirále do svojho pevného bodu. To, že bod $K = 0,8513$, $P = 0,4349$ je skutočne pevným bodom systému diferenciálnych rovníc popisujúcich správanie sa populácie modelu M^* overíme nasledujúcimi výpočtami.

Do dynamík replikátorov (9) pre stratégie kúpiť neskontrolované auto K a nevymontovať súčiastky P dosadíme príslušné funkcie užitočnosti.

$$\dot{K} = 19000K^3 - 5000K^2P - 33000K^2 + 5000KP + 14000K$$

$$\dot{P} = 19000K^2P^2 - 19000K^2P - 15000KP^2 + 15000KP - 1000P^2 + 1000P$$

Keďže náš systém diferenciálnych rovníc je dvojrozmerný, bude mať dva pevné body. Je ľahké overiť, že bod $K = 0$, $P = 0$ je triviálny pevný bod systému, analogickým postupom ako v predošlých modeloch. Druhý pevný bod, označme ho E , musí byť ten, do ktorého skonvergovala simulácia, inak by do neho postupnosť populácií nemohla konvergovať. Zároveň nám to dáva informáciu, že musí ísť o stabilný pevný bod. Numericky sme overili, že nájdené riešenie systému je pevným bodom, teda že v ňom $\dot{K} = \dot{P} = 0$. Pre nájdený bod $\tilde{E} = [0,8513; 0,4349]$ toto platí na 6 desatinných miest, preto ho pre naše potreby môžeme považovať za totožný s pevným bodom E modelu M^* . Stabilitu oboch nájdených

pevných bodov overíme pomocou Jacobiho matice systému.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{K}}{\partial K} & \frac{\partial \dot{K}}{\partial P} \\ \frac{\partial \dot{P}}{\partial K} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Pre veľkosť členov Jacobiho matice sme sa ich kvôli čitateľnosti rozhodli napísať zvlášť:

$$a = 57000K^2 - 10000KP - 66000K + 5000P + 14000$$

$$b = -5000K^2 + 5000K$$

$$c = 38000KP^2 - 38000KP - 15000P^2 + 15000P$$

$$d = 38000K^2P - 19000K^2 - 30000KP + 15000K - 2000P + 1000$$

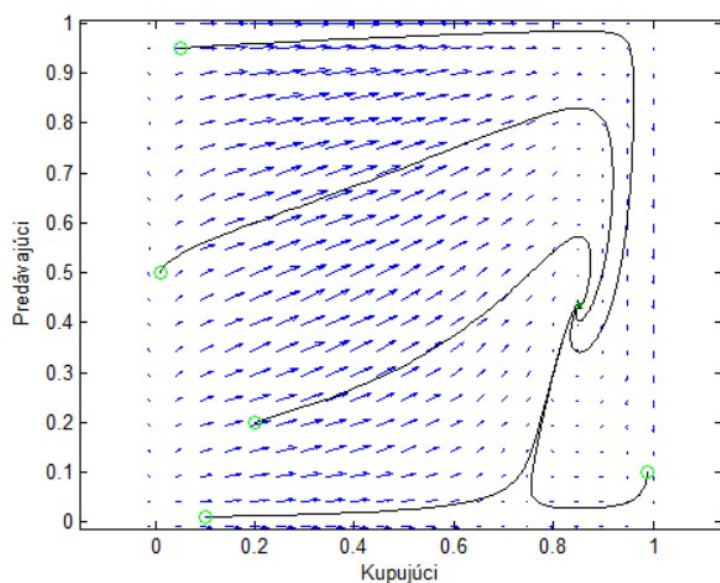
Rovnako, ako v kapitole 3, využijeme na dôkaz stability, alebo nestability pevných bodov skutočnosť, že pevný bod systému diferenciálnych rovníc je stabilný práve vtedy, keď sú reálne časti vlastných hodnôt Jacobiho matice systému záporné. To je ekvivalentné s tvrdením, že $\det(J) > 0 \wedge \text{tr}(J) < 0$. Triviálny pevný bod $K = 0, P = 0$ nespĺňa podmienku stability, lebo pre neho platí $\text{tr}(J) = 15000 \not< 0$, preto je nestabilný. Po dosadení presných konečných hodnôt zo simulácie za K a P dostávame:

$$\det(J) = 2698812,59 > 0$$

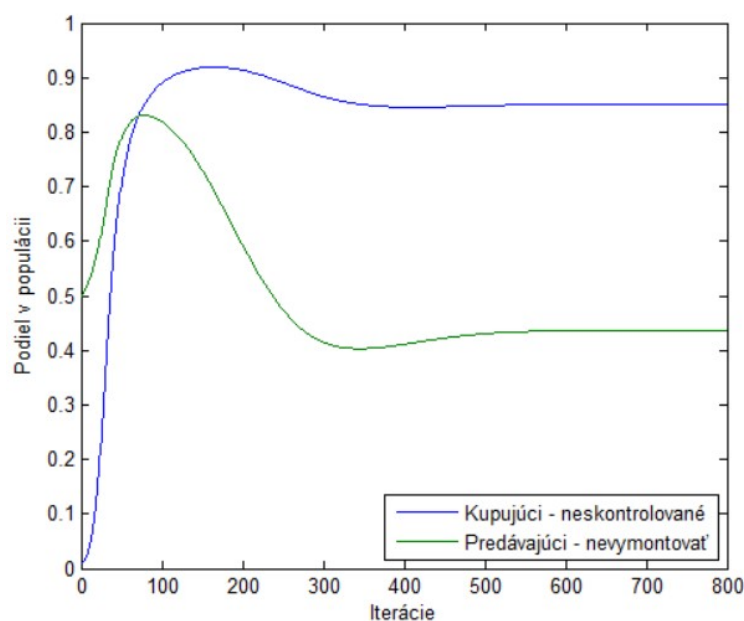
$$\text{tr}(J) = -6669,09 < 0$$

Dokázali sme, že bod $\tilde{E}$ je stabilným pevným bodom systému diferenciálnych rovníc popisujúcich správanie sa populácie modelu M^* . Podľa definície evolučne stabilnej stratégie z kapitoly 1.2 je teda stratégia, kde podiel 0,8513 zo všetkých záujemcov o kúpu ojazdeného auta hrá akciu neskontrolované a podiel 0,4349 zo všetkých predajcov neskontrolovaných ojazdených áut hrá akciu nevymontovať, evolučne stabilnou stratégiou. Zároveň sa jedná o jedinú evolučne stabilnú stratégiu v tejto populácii, preto akákoľvek počiatočná populácia modelu, spĺňajúca $K, P \in (0, 1)$, musí skonvergovať do tohto bodu. Ide teda zároveň o ekvilibrium modelu M^* . Potvrdzujú to aj konvergenčné trajektórie kvalitatívne rôznych počiatočných bodov z obr. 10, keďže všetky skonvergovali do nájdenej evolučne stabilnej stratégie $\tilde{E}$. Časový vývoj stratégií v populáciách modelu trhu s ojazdenými autami môžeme vidieť na obr. 11. Všimnime si, že extrémny oboch kriviek sú oproti sebe posunuté. Zmeny v populáciách sa totiž nedejú súčasne, ale jedna populácia reaguje na správanie druhej a naopak. Časový vývoj je vykreslený len pre prvých 800 iterácií, nakoľko neskôr už žiadne zo zmien neboli na grafe viditeľné.

Obr. 10: Trajektórie vývoja rôznych populácií modelu M^*



Obr. 11: Časový vývoj stratégií v populáciách



4.4 Vyvodenie záverov o trhu ojazdených áut

Modelovali sme trh s neskontrolovanými ojazdenými autami a v predchádzajúcej časti 4.3 sme dokázali, že bod $\tilde{E} = [0,8513; 0,4349]$ je jediný stabilný pevný bod modelu a tiež že prislúchajúca stratégia je evolučne stabilná. Vďaka simulácii sme zistili, že do tejto stratégie sa populácie kupujúcich a predávajúcich dostávajú po špirále. Nízka cena ne-

skontrolovaných áut donúti predajcov vymontovávať súčiastky z menej áut, aby zvýšili očakávaný úžitok medzi záujemcami o ojazdené autá, čím sa zvýši dopyt po neskontrolovaných a tým aj ich cena. Ak cena vzrastie, predajcom sa začne oplácať vymontovávať súčiastky z vyššieho podielu áut, aby zvýšili svoj úžitok, čo zase stlačí cenu neskontrolovaných trochu dolu, ale nie až tak hlboko, ako bola predtým. Celý cyklus tak začne znovu, no tentokrát už bližšie k ekvilibriu. Uvedomili sme si tiež, že zmeny v populáciách sa nedejú súčasne, ale jedinci jednej reagujú na zmenu správania v druhej, čo sa prejaví s oneskorením. To, že v ekvilibriu asi polovica predávaných neskontrolovaných áut má vymontované súčiastky a zvyšok nie, môže byť vysvetlenie toho, prečo ak si v reálnom živote kupujeme neskontrolované ojazdené auto, môžeme za podobnú sumu natrafiť na kvalitné, ale tiež nekvalitné auto. Rovnovážna cena, za ktorú sa neskontrolované autá predávali bola 17174,56, čo je vyššia cena, ako tá, za ktorú by sa predávali, ak by každý predajca maximalizoval iba okamžitý zisk. Dlhodobejšia optimalizácia zisku totiž vedie predajcov k tomu, aby sa správali čestnejšie a nekazili si príliš meno. V sekcii 4.2 sme tiež zistili, že správanie sa predávajúcich vykazuje známky kartelu. Pre každého predávajúceho je výhodnejšie sa zachovať nečestne a vymontovávať súčiastky zo všetkých ním predávaných áut, no ak sa takto začnú správať všetci, v konečnom dôsledku budú mať predávajúci menšie zisky, ako predtým, než sa začali nadmieru obohacovať. Dokonca, ak by všetky neskontrolované ojazdené autá boli predávané kvalitné, predajcovia by zarobili najviac, no akonáhle sme v modeli pripustili možnosť zvyšovať si zisky predávaním súčiastok z áut, optimálne je, aby každý predajca vymontovával súčiastky zo zhruba 56,5% ním predávaných áut. V našom modeli, kde jedinci neoptimalizujú ani dokonale krátkodobo, ani dokonale dlhodobo, vzniklo akési labilné optimum, ktoré sa oplatí porušiť len z krátkodobého hľadiska.

Záver

Naším prvým cieľom bolo ukázať aplikácie teórie hier v evolučných financiách. Tento cieľ sme naplnili zostrojením 3 evolučno-herných modelov, popisujúcich rôzne odvetvia v ekonomike. Na správne pochopenie myšlienky, okolo ktorej sme budovali jednotlivé modely, bolo nutné najprv uviesť a vysvetliť potrebnú teóriu. Toto bolo náplňou 1. kapitoly, kde sme najprv zadefinovali potrebné pojmy a potom odvodili dôležité koncepty z teórie evolučných hier. Išlo hlavne o teóriu replikátorov a koncept evolučne stabilnej stratégie, ktoré sme využívali ako základné stavebné kamene vo všetkých našich modeloch a aj vyvodzovaní záverov z týchto modelov.

Najskôr sme v kapitole 2 odvodili model fungovania trhu práce. Ukázali sme v ňom, že nenulová miera nezamestnanosti je prirodzená a nie je chybou systému. Akonáhle je možnosť byť nezamestnaný, niektorým jedincom sa to bude oplácať viac, ako pracovať. Tiež sme dokázali, že trh práce má vnútorný stabilný pevný bod, čiže má samoregulačný mechanizmus. Nerovnováha v pomere medzi ponukou a dopytom pracovných miest sa teda sama vyrovnáva. Vďaka našej analýze sme dospeli k záveru, že rýchlejšie sa na trhu práce vyrovná pomer podnikateľov a zamestnancov a až potom sa postupne vyrovnáva pomer pracujúcich ľudí a nezamestnaných. Znamená to, že podľa tohto modelu je výrazne jednoduchšie zmeniť prácu, ako ju nanovo získať alebo úplne stratiť.

Ako druhý sme zostrojili model trhu s nehnuteľnosťami, ktorému sme sa venovali v kapitole 3. Ukázali sme, že keď sa na trhu budú vyskytovať aj špekulanti, konvergencia do ekvilibriového stavu sa spomalí. Špekulatívni záujemcovia sa snažia na kúpe nehnuteľnosti zbohatnúť a kupujú ich, ak ich cena rastie, čo ju ešte viac navyšuje. To vedie k vzniku takzvaných bublín na trhu s nehnuteľnosťami, ktoré znamenajú, že ceny, za ktoré sa nehnuteľnosti predávajú, sú nadhodnotené a sú umelo nadvihované špekulantami. Ak sú ceny vyhnané špekulatívnymi obchodmi príliš vysoko, tak ľudia, ktorí si chcú kúpiť nehnuteľnosť, aby v nej mohli bývať, si kúpu spravidla nemôžu dovoliť. Dokázali sme, že potom trh, na ktorom sú jedinými záujemcami špekulanti, musí raz spadnúť, teda dôjde k prasknutiu cenovej bubliny. Až potom si môžu nešpekulatívni záujemci dovoliť kúpiť bývanie a trh sa dostane bližšie k rovnováhe.

Tretím modelom bol model trhu ojazdených áut z kapitoly 4, ktorý sme v 4.3 analyzovali. Zistili sme, že predajcom sa oplatí z časti neskontrolovaných áut vymontovávať

súčiastky a zvýšiť tak svoje zisky, no nie zo všetkých, lebo by príliš klesla ich kvalita v očiach kupujúcich a potom aj ich cena. To je možné vysvetlenie toho, prečo ak si kupujeme neskontrolované ojazdené auto, môžeme natrafiť na kvalitné, ale aj veľmi nekvalitné auto za zdanlivo rovnakú sumu. V podkapitole 4.2 sme vypočítali, že predajcom prinesie vyšší úžitok optimalizovať svoj zisk vzhľadom na dlhodobjší horizont, nie len siahnuť po okamžitom vyššom zisku. V modeli vzniklo akési labilné optimum, ktoré sa oplátilo porušiť len z krátkodobého hľadiska. Populácia predávajúcich v skúmanom modeli tak vykazovala známky kartelu.

Druhým a zároveň hlavným cieľom tejto práce bolo ukázať, že zdanlivo zložené behaviorálne systémy v ekonomike sa správajú podľa matematických zákonitostí a ich vývoj je popísateľný teóriou evolučných hier. Túto myšlienku sme demonštrovali na 3 rôznych evolučno-herných modeloch, z ktorých každý dokonvergoval k takému výsledku, aký môžeme pozorovať aj v reálnom svete. Tieto modely ponúkajú teóriou evolučných hier podložené vysvetlenie toho, kedy a prečo sa jednotlivé javy na trhu dejú a ako správanie sa účastníkov trhu naň vplýva. Dokázali sme tým, že nad ekonomickým dianím sa dá uvažovať aj rigorózne matematicky a odôvodnenie aktuálneho vývoja na trhu tak nie je iba, ľudovo povedané, veštenie z kariet. Naopak, vývoj v ekonomike je presný proces, ktorý sa hýbe podľa daných zákonitostí. V našej práci sme predostreli nový spôsob nazerania na trh, ktorého predpoklady sú s rastúcou technologickou vybavenosťou a vzdelanosťou ekonomických subjektov stále reálnejšie a má potenciál prinášať ešte presnejšie výsledky.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Zhi Li, Guanghao Jin, Shen Duan: *Evolutionary Game Dynamics for Financial Risk Decision-Making in Global Supply Chain*, Hindawi (2018), dostupné na internete (12.10.2022):
<https://www.hindawi.com/journals/complexity/2018/9034658/>
- [2] R. Amir, I. V. Evstigneev, T. Hens, Le Xu: *Evolutionary Finance and Dynamic Games*, Swiss Finance Institute (2010)
- [3] I. V. Evstigneev, T. Hens, K. R. Schenk-Hoppe: *Evolutionary Finance*, Swiss Finance Institute (2009)
- [4] J. Hledík: *Prednášky z predmetu Teória evolučných hier*, FMFI UK (2022)
- [5] J. Pekár: *Prednášky z predmetu Teória hier*, FMFI UK (2020)
- [6] R. Amir, I. V. Evstigneev, T. Hens, V. Potapova, K. R. Schenk-Hoppe: *Evolution in pecunia*, spolupráca (2020), dostupné na internete (18.1.2023):
<https://www.pnas.org/doi/10.1073/pnas.2016514118>
- [7] I. V. Evstigneev, T. Hens, K. R. Schenk-Hoppe: *Evolutionary stable stock markets*, Economic theory (2006), dostupné na internete (20.11.2022):
<https://core.ac.uk/download/pdf/159153628.pdf>

Kódy v MATLABe

```
%Kód k modelu pracovného trhu

format long; clear all

%Parametre modelu

c = 1000; g = 1300;

eps = 0.01;          %tolerancia modelu

dt = 6700;           %brzdíme rýchlosť rastu, aby sme nevybehli z prípustnej množiny
%tento parameter ovplyvňuje 1/elasticitu dopytu a ponuky práce na trhu

%Funkcie užitočnosti

uZ = @(Z,P) 5500/(Z/P);
uP = @(Z,P) (Z/P)*(g - uZ(Z,P)) -c;
uN = @(Z,P) 70/(1-Z-P);

dZ = @(Z,P) Z*(uZ(Z,P) - Z*uZ(Z,P) - P*uP(Z,P) - (1-Z-P)*uN(Z,P));
dP = @(Z,P) P*(uP(Z,P) - Z*uZ(Z,P) - P*uP(Z,P) - (1-Z-P)*uN(Z,P));
dN = @(Z,P) (1-Z-P)*(uN(Z,P) - Z*uZ(Z,P) - P*uP(Z,P) - (1-Z-P)*uN(Z,P));

f = @(t,Y) [dZ(Y(1),Y(2)); dP(Y(1),Y(2))];          %funkcia derivácií

%chystáme vektorové pole

y1 = linspace(-0.01,1,21); y2 = linspace(-0.01,1,21);          %hodnoty, na ktorých počítame
[x,y] = meshgrid(y1,y2);
u = zeros(size(x)); v = zeros(size(x)); t=0;

for i = 1:numel(x)
    VP = f(t,[x(i); y(i)]);          %naplnenie vektorového poľa
    u(i) = VP(1); v(i) = VP(2);
end

%Počiatočná populácia
```

$Z(1) = 0.98$; $P(1) = 0.019$;

$N(1) = 1 - Z(1) - P(1)$;

%Simulácia vývoja populácie

i = 1;

while (abs(uZ(Z(i),P(i)) - uP(Z(i),P(i))) + abs(uN(Z(i),P(i)) - uP(Z(i),P(i)))) > eps

diffZ = dZ(Z(i),P(i))/dt;

diffP = dP(Z(i),P(i))/dt;

diffN = dN(Z(i),P(i))/dt;

Z(i+1) = Z(i) + diffZ;

P(i+1) = P(i) + diffP;

N(i+1) = N(i) + diffN;

i = i+1;

if i>500 %kontrola zacyklenia

break

end

end

%Vykreslenie fázového portrétu

quiver(x,y,u,v,'b'); figure(gcf)

xlabel('Zamestnanci'); ylabel('Podnikatelia')

axis tight equal; hold on

%Vykreslenie trajektórie a ohraňení populácie modelu

plot(Z,P,'k')

plot(Z(1),P(1),'go') %počiatočný bod

plot(Z(end),P(end),'gx') %konečný bod

line([1 0],[0 1],'color','r')

line([0.2 1],[0.8 0.8],'color','r'); line([0.4 1],[0.6 0.6],'color','r')

line([0.6 1],[0.4 0.4],'color','r'); line([0.8 1],[0.2 0.2],'color','r')

```

line([0.1 1],[0.9 0.9],'color','r'); line([0.3 1],[0.7 0.7],'color','r')
line([0.5 1],[0.5 0.5],'color','r'); line([0.7 1],[0.3 0.3],'color','r')
line([0.9 1],[0.1 0.1],'color','r')
line([0.15 1],[0.85 0.85],'color','r'); line([0.35 1],[0.65 0.65],'color','r')
line([0.55 1],[0.45 0.45],'color','r'); line([0.75 1],[0.25 0.25],'color','r')
line([0.95 1],[0.05 0.05],'color','r'); line([0.05 1],[0.95 0.95],'color','r')
line([0.25 1],[0.75 0.75],'color','r'); line([0.45 1],[0.55 0.55],'color','r')
line([0.65 1],[0.35 0.35],'color','r'); line([0.85 1],[0.15 0.15],'color','r')
hold off

```

```

%Vykreslenie časového vývoja zastúpenia stratégií v populácii
figure; plot(1:i,Z, 1:i,P, 1:i,N)
xlabel('Generácie'); ylabel('Podiel v populácii');
legend('Zamestnanci', 'Podnikatelia', 'Nezamestnani');

```

```

%Výpis optimálnych hodnôt
uZ(Z(i), P(i))
uP(Z(i), P(i))
uN(Z(i), P(i))
Z(i)
P(i)
N(i)

```

```

%Kód k modelu trhu s nehnuteľnosťami

format long; clear all

%Parametre modelu

u = 160000;
p = 100000;
dt = 100000;      %brzdíme rýchlosť rastu, aby sme nevybehli z prípustnej množiny
%tento parameter ovplyvňuje 1/elasticitu dopytu po nehnuteľnostiach

%Funkcie užitočnosti

uM = @(M,S) u - (p + (M(end)+S(end))*50000);
uS = @(M,S) ((M(end)-M(end-1)) + (S(end)-S(end-1)))*50000)*10;

dM = @(M,S) M(end)*(uM(M,S) - M(end)*uM(M,S));
dS = @(M,S) S(end)*(uS(M,S) - S(end)*uS(M,S) - (1-S(end))*(p + (M(end)+S(end))*50000)*0.05);

f = @(t,Y) [dM(Y(1),Y(2)); dS(Y(1),Y(2))];      %funkcia derivácií

%Počiatočná populácia

M(1) = 0.01; S(1) = 0.05;
M(2) = 0.01; S(2) = 0.05;

%Simulácia modelu

i = 2;
while i<130
    diffM = dM(M,S)/dt;
    diffS = dS(M,S)/dt;

    uzitM(i-1) = uM(M,S);
    uzitS(i-1) = uS(M,S);

    M(i+1) = M(i) + diffM;

```

```

S(i+1) = S(i) + diffS;

i = i+1;
if M(i)<M(i-1)
    M(i) = M(i-1);
end
if S(i)>1
    S(i)=0.99;
elseif S(i)<0
    S(i)=0.01;
end
end

%Vykreslenie vývoja populácií v čase
plot(2:i,M(2:end), 2:i,S(2:end))
legend('Mladomanželia', 'Špekulanti')

%Vykreslenie vývoja ceny v čase
figure; plot(1:i,p+(M+S)*50000)
xlabel('Generácie'); ylabel('Cena')

%Vykreslenie trajektórie pohybu populácie modelu
figure; plot(M,S,'-o')
xlabel('Mladomanželia'); ylabel('Špekulanti')

```

```

    %Kód k modelu trhu s ojazdenými autami
format long; clear all
%Parametre modelu
s = 5000; z = 3000;
dt = 100000;          %brzdíme rýchlosť rastu, aby sme nevybehli z prípustnej množiny
%tento parameter ovplyvňuje 1/elasticitu dopytu a ponuky na trhu

%Funkcie užitočnosti
uK = @(K,P) P*(20000-(1000 + K*19000)) + (1-P)*(20000-s -(1000 + K*19000));
uP = @(K,P) 1000 + K*19000;

dK = @(K,P) K*(uK(K,P) - K*uK(K,P));
dP = @(K,P) P*(uP(K,P) - P*uP(K,P) - (1-P)*(uP(K,P)+z)*K);

f = @(t,Y) [dK(Y(1),Y(2)); dP(Y(1),Y(2))];          %funkcia derivácií

%chystáme vektorové pole
y1 = linspace(-0.01,1,21); y2 = linspace(-0.01,1,21);          %hodnoty, na ktorých počítame

[x,y] = meshgrid(y1,y2);
u = zeros(size(x)); v = zeros(size(x)); t=0;

for i = 1:numel(x)
    VP = f(t,[x(i); y(i)]);          %naplnenie vektorového poľa
    u(i) = VP(1); v(i) = VP(2);
end

%Počiatočná populácia
K(1) = 0.01; P(1) = 0.5;

%Simulácia vývoja populácie

```

```

for i=1:2000
    diffK = dK(K(i),P(i))/dt;
    diffP = dP(K(i),P(i))/dt;
    K(i+1) = K(i) + diffK;
    P(i+1) = P(i) + diffP;
end

%Vykreslenie fázového portrétu
quiver(x,y,u,v,'b'); figure(gcf)
xlabel('Kupujúci'); ylabel('Predávajúci')
axis tight equal; hold on

%Vykreslenie trajektórie
plot(K,P,'k')
plot(K(1),P(1),'go')           %počiatočný bod
plot(K(end),P(end),'gx')       %konečný bod
hold off

%Vykreslenie vývoja populácií v čase
figure; plot(1:800,K(1:800), 1:800,P(1:800))
xlabel('Iterácie'); ylabel('Podiel v populácii')
legend('Kupujúci - neskontrolované', 'Predávajúci - nevymontovať');

%Výpis optimálnych hodnôt
uK(K(end), P(end))
uP(K(end), P(end))
K(end)
P(end)

```