

Sylaby štátnej záverečnej skúšky

pre bakalársky študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Predmet : Matematický základ

1. Lineárna algebra a maticový počet

Vektorové priestory: Lineárna závislosť a nezávislosť vektorov, báza a dimenzia, lineárny obal, podpriestory, prienik, súčet a priamy súčet podpriestorov, projekcie, transformácie súradníc.

Lineárne zobrazenia: Matica, jadro a obraz lineárneho zobrazenia, transformácie súradníc a podobnosť matic lineárneho zobrazenia, vlastné čísla a vlastné vektory, invariantné podpriestory, charakteristický polynóm, kritériá diagonalizovateľnosti matic, Cayleyova-Hamiltonova veta, Jordanov normálny tvar.

Bilineárne a kvadratické formy: Matica bilineárnej formy v rôznych bázach, symetrické a kosymetrické formy, kanonický tvar kvadratickej formy, Lagrangeova metóda, Sylvestrov zákon zotrvačnosti, kladne definitné kvadratické formy a ich matice, vlastnosti kladne definitných matic.

Vektorové priestory so skalárnym súčinom: Euklidovský vektorový priestor, Gramova matica, základné metrické pojmy, vzťah normy a skalárneho súčinu, Gram-Schmidtov ortogonalizačný process, ortonormálna báza.

Gaussova eliminačná metóda a LU rozklad matice, Fredholmova alternatíva, ortogonálne matice a QR-rozklad, ortogonálne projekcie a metóda najmenších štvorcov, normálny systém lineárnych rovníc.

Komplexifikácia reálneho vektorového priestoru, zrealnenie komplexného vektorového priestoru, komplexné predĺženie reálneho lineárneho zobrazenia, reálna matica komplexného lineárneho zobrazenia. Hermitovský vektorový priestor, špeciálne komplexné matice, Schurov rozklad, unitárna ekvivalencia matic a normálne matice, spektrálny rozklad matice.

2. Matematická analýza

Funkcie jednej a viac premenných: Limita, spojitosť, diferencovateľnosť, derivácia, derivácia v smere, totálny diferenciál. Funkcie zadané implicitne, veta o implicitnej funkcii. Veta o inverznej funkcii. Derivácie vyšších rádov. Postačujúce podmienky na existenciu lokálneho extrému funkcií jednej premennej.

Číselné rady a rady funkcií, kritériá konvergenzie číselných radov (D'Alembert, Cauchy, Raabe, integrálne), rovnomerná konvergenzia radov funkcií, Weierstrassovo majorantné kritérium. Mocninové rady, Taylorov rozvoj, analytické funkcie. Fourierove rady.

Optimalizácia funkcií viac premenných: Voľné a viazané extrémy funkcií viac premenných. Nutné a postačujúce podmienky. Lagrangeove multiplikátory a ich geometrický význam (vzťah úrovňových množín optimalizovanej funkcie a nulovej úrovňovej množiny funkcie väzby).

Teória integrovania: Riemannov a Lebesgueov integrál. Integrál ako funkcia hornej hranice. Parametrické integrály. Spojitosť a diferencovateľnosť parametrických integrálov. Gama funkcia a jej základne vlastnosti. Viacrozmerné integrály (Riemannov a Lebesgueov integrál). Veta o substitúcii. Krivkové integrály. Nezávislosť krivkového integrálu od integračnej cesty, potenciál vektorového poľa. Greenova formula integrácie per partes pre viacrozmerné integrály.

Normované priestory, úplné priestory, otvorené, uzavreté a kompaktné množiny. Banachova veta o pevnom bode a jej aplikácie.

3. Diferenciálne a diferenčné rovnice

Diskrétny dynamický systém: Rovnovážne stavy a ich stabilita. Výpočet trajektórií.

Lineárne diferenciálne rovnice: Riešenie autonómnych homogénnych rovníc. Riešenie nehomogénnych rovníc metódou neurčitých koeficientov. Stabilita. Klasifikácia dvojrozmerných autonómnych rovníc.

Nelineárne diferenciálne rovnice: Rovnovážne stavy a ich stabilita. Trajektórie autonómnych rovníc. Fázové portréty dvojrozmerných autonómnych rovníc.

4. Pravdepodobnosť a matematická štatistika.

Klasická a axiomatická definícia: Náhodné udalosti, pravdepodobnosť. Podmienená pravdepodobnosť, Bayesov vzorec. Bernoulliho schéma, binomické a Poissonovo rozdelenie. Normálne rozdelenie a jeho vlastnosti.

Náhodná premenná: Rozdelenie pravdepodobnosti, distribučná funkcia náhodnej premennej, stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej, ich základne vlastnosti.

Diskrétny a spojitý náhodný vektor: Náhodné vektory, stredná hodnota a kovariančná matica náhodného vektora. Korelačný koeficient a jeho základné vlastnosti. Náhodný výber a jeho základné charakteristiky.

Centrálna limitná veta a zákon veľkých čísel

Parametrické triedy rozdelení: Trieda normálnych rozdelení. Vlastnosti a rozdelenie aritmetického priemeru a výberovej disperzie pri náhodnom výbere z normálneho rozdelenia.

Nevychýlené odhady: Raova-Cramerova nerovnosť. Metóda najmenších štvorcov a metóda maximálnej vierohodnosti.

Testovanie štatistických hypotéz: Testy o parametri binomického rozdelenia. Studentov jednostranný, dvojstranný a párový t-test. Porovnanie stredných hodnôt a disperzií dvoch normálnych rozdelení.

Literatúra

1. P. Zlatoš: Algebra a geometria, skriptá <http://thales.doa.fmph.uniba.sk/katc/>
G. Strang: Linear algebra and its applications, 1976 (ruský preklad 1980);
R.A. Horn, Ch. Johnson: Matrix Analysis, 1990.
2. T. Neubrunn, J. Vencko: Matematická analýza I, II. Skriptá UK Bratislava;
M. Barnovská, K. Smítalová: Matematická analýza III, IV. Skriptá UK Bratislava (Internet)

www.defm.fmph.uniba.sk/);

Z. Kubáček, J. Valášek: Cvičenia z matematickej analýzy I, II. Skriptá UK Bratislava, (Internet www.defm.fmph.uniba.sk/);

M. Kollár, Ľ. Kossaczká, D. Ševčovič: Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch, Knižničné a edičné centrum FMFI UK, 2012, tretie doplnené vydanie, (internet: www.fmph.uniba.sk/index.php?id=elst m www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/skripta/difint)

M. Barnovská a kol.: Cvičenia z matematickej analýzy III. Skriptá UK Bratislava (Internet www.defm.fmph.uniba.sk/);

3. P. Brunovský: Diferenčné a diferenciálne rovnice, Skriptá UK Bratislava, (Internet www.defm.fmph.uniba.sk/);

4. A.Pázman, K.Janková: Poznámky k prednáškam Pravdepodobnosť a mat. Štatistika
Zvára, Štěpán: Pravdepodobnosť a štatistika, Matfyzpress, 1997
C.R. Rao: Lineární statistické metody a jejich aplikace. Academia, 1979;
B. Riečan, F. Lamoš, C. Lenárt: Pravdepodobnosť a matematická štatistika. Alfa, 1983;
T. Amemiya: Introduction to Statistics and Econometrics. Harvard Univ. Press, 1994.

Predmet : Matematické metódy v ekonómii a financiách

1. Lineárne programovanie. Polyedrické množiny: Charakterizácia neohraničenosti. Krajné body množín $\{x \mid Ax \leq b\}$ a $\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Tvrdenie o vyjadrení stenou. Veta o reprezentácii polyedrickej množiny.

Simplexová metóda: Geometrická idea. Simplexová tabuľka a algoritmus. Konečnosť simplexovej metódy, anticyklická metóda. Duálna simplexová metóda. Revidovaná simplexová metóda.

Teória duality: Všeobecný tvar duálnej úlohy. Slabá veta o dualite a jej dôsledky. Silná veta o dualite. Veta o komplementarite. Aplikácie duality (sústavy lineárnych rovníc a nerovníc, overovanie optimality). Ekonomická interpretácia duality.

2. Nelineárne programovanie. Optimalizačné metódy (Prehľad a základné princípy): Minimalizácia funkcie jednej premennej. Minimalizácia funkcie n -premenných (gradientová metóda, Newtonova metóda, metóda združených gradientov a kvázinewtonovské metódy).

Nutné podmienky optimality: Lagrangeova veta a veta o senzitivnosti pre klasickú úlohu na viazaný extrém. Kuhn-Tuckerova veta pre úlohu matematického programovania (so zmiešaným typom ohraničení).

Sedlové body a veta o minmaxe: Prehľad základných typov extrémov a sedlových bodov. Existenčné vety pre extrém a sedlový bod typu "minmax". Pojem parciálneho extrému. Vzťah medzi sedlovým bodom typu "minmax" a úlohou na viazaný extrém. Konštrukcia Lagrangeovej funkcie pre úlohu matematického programovania. Charakteristika sedlového bodu typu "minmax" prostredníctvom kombinovaných parciálnych extrémov (tzv. veta o "minmaxe").

Všeobecný princíp duality v extrémálnych úlohách: Všeobecný pojem duálnej úlohy. (Aplikácia vety Roodeho a vety o "minmaxe".) Všeobecná konštrukcia duálnej úlohy v nelineárnom programovaní. Pojem Lagrangeovej a Wolfeovej duálnej úlohy. Príklady zovšeobecnených (neklasických) funkcií Lagrangea.

Konvexné programovanie: Veta Kuhna-Tuckera pre úlohu konvexného programovania. Slabá

a silná veta o dualite. Tvar duálnej úlohy k úlohe nelineárneho programovania so zmiešaným typom ohraničení.

3. Teória hier. Hry s úplnou informáciou v strategickom (normálnom) tvare. Pojem Nashovho ekvilibria. Nashovo ekvilibrium v čistých a zmiešaných stratégiách. Hry s úplnou informáciou v extenzívnom tvare. Spätná indukcia. Vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium.

4. Vybrané kapitoly ekonomickej teórie. Základné makroekonomické premenné: hrubý domáci produkt, miera nezamestnanosti, miera inflácie. Trh tovarov. Agregátny dopyt a jeho zloženie. Rovnovážny výstup ekonomiky. Dynamika trhu tovarov. Finančné trhy. Peniaze a dlhopisy. Dopyt po peniazoch, ponuka peňazí a rovnovážna úroková miera. Úloha centrálnej banky a komerčných bánk. IS-LM model, rovnováha na trhu tovarov a finančných trhoch. Fiškálna a monetárna politika. Očakávania a makroekonomická politika. Trh tovarov v otvorenej ekonomike. Rovnovážny výstup a obchodná bilancia. IS-LM model v prípade otvorenej ekonomiky. Výmenné kurzy. Účinnosť makroekonomickej politiky.

Trh práce. Určovanie miezd a cien. Prirodzená miera nezamestnanosti. Agregátny dopyt a agregátna ponuka. Neefektívnosť monetárnej politiky v dlhodobej perspektíve. Účinnosť fiškálnej politiky. Zmeny prirodzenej miery nezamestnanosti. Philipsova krivka. Inflácia, očakávaná inflácia a nezamestnanosť. Hospodársky rast. Šetrenie, akumulácia kapitálu a výstup ekonomiky. Technologický pokrok a rast.

Spotrebiteľ: Preferencie a funkcia užitočnosti. Rovnováha spotrebiteľa. Marshallovská a Hicksovská dopytová funkcia: Slutského rovnica.

Firma: Technologická množina a produkčná funkcia. Rovnováha firmy a nákladová funkcia.

Rovnováha na čiastkovom trhu v dokonalej súťaži: Krátkodobá rovnováha a rovnováha pri voľnom vstupe na trh. Vplyv daní a dotácií. Spotrebiteľov a výrobcov prebytok.

Nedokonalá súťaž: Rovnováha monopolu a jeho neefektivita. Cournotova rovnováha oligopolu a jeho stabilita. Nestabilita kartelu.

Rovnováha úplného trhu: Walrasov zákon, Walrasova rovnováha a jej Paretova optimalita. Externality a vlastnícke práva.

5. Finančná matematika. Kupónové a bezkupónové dlhopisy. Časová štruktúra úrokových mier. Konštrukcia časovej štruktúry úrokových mier pomocou trhových cien dlhopisov (bootstrapping). Súčasná hodnota peňažného toku (net present value). Výnos do splatnosti. Forwardové úrokové miery. Durácia a zmena hodnoty dlhopisového portfólia pri paralelnom posune úrokových mier.

Teória portfólia: Funkcia užitočnosti, averzia k riziku, optimálny výber portfólia maximalizáciou strednej hodnoty funkcie užitočnosti. Markowitzov model. Minimalizácia rizika pri fixnej návratnosti, optimalizácia portfólia obsahujúceho bezrizikový cenný papier, tržová cena rizika. Capital Asset Pricing Model ako rovnovážny model, Capital Market Line, Security Market Line.

Pravdepodobnostný pohľad na oceňovanie opcií: Binárny stromový model, výpočet rizikovo neutrálnych pravdepodobností a hodnoty derivátu na ich základe.

6. Ekonometria. Lineárny regresný model. Výpočet odhadov metódou najmenších štvorcov. Testovanie hypotéz o parametroch modelu a špeciálne prípady: t-test, ANOVA test, testovanie submodelu. Predikcia. Výpočet odhadov zovšeobecnenou metódou najmenších štvorcov. Gauss-Markovova veta. Metóda maximálnej vierohodnosti. Multikolinearita, heteroskedasticita, autokorelácia chýb – ich príčiny, metódy ako ich rozpoznať a ako im čeliť.

Literatúra

1. J. Plesník, J. Dupacova, M. Vlach: Lineárne programovanie. Alfa, Bratislava 1990
J. Plesník: Poznámky k prednáškam Lineárne programovanie
2. M. Hamala: Nelineárne programovanie. Alfa, Bratislava 1976;
M. Hamala: Študijné texty k prednáškam z Nelineárneho programovania (rukopis poskytnutý študentom na xeroxovanie).
3. P. Morris: Introduction to game theory. Springer 1994;
Chobot, Turnovec, Ulasin: Teória hier a rozhodovania. Alfa 1991;
Osborne, Rubinstein: A course in game theory. MIT Press 1996.
4. P.A. Samuelson, W.D. Nordhaus: Ekonómia I, II. Bradlo, Bratislava 1992;
B. Felderer, S. Homburg: Makroekonomika a nová makroekonomika. Elita, Bratislava 1995.
P. Brunovský: Mikroekonómia (učebný text na internete: www.defm.fmph.uniba.sk)
5. I. Melicherčík, L. Olšarová, V. Úradníček: Kapitoly z finančnej matematiky, EPOS, Bratislava 2005
6. Greene, W. H.: Econometric Analysis. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.
G.S. Maddala: Econometrics. Auckland, McGraw-Hill, 1977;