

OTÁZKY ŠTÁTNEJ ZÁVEREČNEJ SKÚŠKY

študijného odboru Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie

Predmet ŠZS: Matematické a finančné modelovanie

Optimálne riadenie

1. Definujte hodnotovú funkciu pre diskretnú úlohu optimálneho riadenia s pevným časom a napíšte príslušnú rovnicu dynamického programovania. Popíšte možné metódy riešenia rovnice.
2. Pre lineárno-kvadratickú úlohu diskretného optimálneho riadenia napíšte rovnicu dynamického programovania a uveďte myšlienku odvodenia Riccatiho maticovej rovnice. V akom tvare dostaneme hodnotovú funkciu a optimálnu spätnú väzbu? Ako metóda odvodenia Riccatiho rovnice súvisí s metódou neurčitých koeficientov používanou pri riešení rovnice dynamického programovania?
3. Sformulujte stochastickú úlohu diskretného optimálneho riadenia, definujte pojem stratégie, vysvetlite rozdiel oproti programovému riadeniu. Napíšte príslušnú rovnicu dynamického programovania.
4. Sformulujte všeobecnú schému diskretných a spojitých úloh optimálneho riadenia. Definujte pojem riadenia, prípustného riadenia a optimálneho riadenia. Prečo pri spojitých úlohách nevystačíme so spojitými riadeniami?
5. Pre štandardnú úlohu optimálneho riadenia (autonómnu s voľným časom) sformulujte Pontrjaginov princíp maxima (PPM) ako nutnú podmienku optimality. Ako sa zmení znenie PPM ak zmeníme voľný čas za pevný, resp. autonómna úloha sa zmení na neautonómnu?
6. Ekonomicky interpretujte formuláciu úlohy optimálneho riadenia. Definujte hodnotovú funkciu a pomocou nej uveďte vzťah, ktorý umožňuje ekonomicky interpretovať adjungovanú premennú ako tieňovú cenu. Pomocou tejto interpretácie vysvetlite podmienku maxima.
7. Sformulujte základnú úlohu variačného počtu a napíšte pre ňu Eulerovu rovnicu. Charakterizujte ju. Ako súvisia úlohy variačného počtu s úlohami optimálneho riadenia? Stretli ste sa v ekonomickej teórii s úlohami, ktoré sa dali formulovať ako úlohy variačného počtu?
8. Pre spojitú úlohu optimálneho riadenia s pevným časom uveďte dodatočnú podmienku, pre ktorú je Pontrjaginov princíp maxima nielen nutnou, ale aj postačujúcou podmienkou optimality a sformulujte vo forme (Arrowovej) vety. Uveďte dôsledky tejto vety.

Dostupná literatúra v knižnici FMFI UK:

[1] M. Halická, P. Brunovský, P. Jurča: Optimálne riadenie: Viacetapové rozhodovacie procesy v ekonómii a financiách /. Bratislava: EPOS, 2009

[2] M. Halická, P. Jurča: Optimálne riadenie II. Spojité úlohy s aplikáciami do ekonómie a financií, učebný text prístupný pre študentov na

http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/teach/optimalne_riadenie_2.pdf

Stochastický kalkulus a aplikácie

1. Merateľné množiny, miera, merateľné funkcie. Definícia Lebesgueovho integrálu pre jednoduché a všeobecné merateľné funkcie. Limitné vety: Lebesgueova veta o monotónnej konvergencii a Lebesgueova veta o majorante.
2. Radon-Nikodymova veta. Definícia a vlastnosti podmienenej strednej hodnoty.
3. Brownov pohyb. Itôva lema. Stochastická diferenciálna rovnica pre vývoj ceny akcie a jej riešenie.
4. Základné východiská Black-Scholesovej teórie oceňovania opcií na akcie. Nahradenie derivátu samofinancovanou stratégiou. Oceňovanie derivátov pomocou rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miery. Black-Scholesove vzorce.

Dostupná literatúra v knižnici FMFI UK:

- [1] I. Melicherčík, L. Olšarová, V. Úradníček: Kapitoly z finančnej matematiky. EPOS, 2005
- [2] D. Ševčovič, B. Stehlíková, K. Mikula: Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. Bratislava : Slovenská technická univerzita, 2009
- [3] W. Rudin: Analýza v reálnom a komplexním oboru. Academia, 2003

Aplikácie parciálnych diferenciálnych rovníc

1. Lineárne a kvázilineárne rovnice prvého rádu. Metóda charakteristík pre lineárnu homogénnu rovnicu 1. rádu a jej geometrická interpretácia.
2. Rovnica vedenia tepla na neohraničenom intervale a jej odvodenie. Tvar explicitného riešenia začiatočnej úlohy pomocou Greenovej funkcie.
3. Metóda odvodenia explicitného riešenia parabolickej rovnice vedenia tepla na neohraničenom intervale pomocou Greenovej funkcie. Princíp porovnávania a zhladzovania riešení.
4. Fourierova metóda separácie premenných pre parabolickú rovnicu na ohraničenom intervale so zadanými okrajovými podmienkami.
5. Harmonické funkcie. Tvar fundamentálnej harmonickej funkcie. Využitie a aplikácie harmonických funkcií a vety o troch potenciáloch napr. v komplexnej analýze resp. dôkaze základnej vety algebry.

Dostupná literatúra v knižnici FMFI UK:

- [1] D. Ševčovič: Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie / Bratislava : Iris, 2008/2016

Numerické metódy

1. Numerické metódy na riešenie ODR s počiatočnou podmienkou: Eulerova explicitná schéma. Eulerova implicitná schéma. Crankova--Nicolsonova schéma. Metóda konečných diferencií pre okrajové úlohy druhého rádu. Chyba diskretizácie metódy konečných diferencií.
2. Numerické metódy na riešenie PDR: Metóda sietí, konečno-diferenčné aproximácie parciálnych derivácií. Explicitné a implicitné schémy na riešenie parabolickej PDR. Crankova--Nicolsonova schéma. Stabilita numerických schém metódy konečných diferencií.

Dostupná literatúra v knižnici FMFI UK:

- [1] J. Babušíková, M. Slodička, J. Weisz : Numerické metódy. Bratislava UK, 2000
[2] E. Vitásek: Numerické metody . Praha : Státní nakladatelství technické literatury, 1987

Blok Matematické modelovanie

Viacrozmerné štatistické analýzy

1. Odhadovanie parametrov vo viacrozmernom lineárnom modeli: funkcia vierohodnosti, metóda maximálnej vierohodnosti, Cramerova-Raova nerovnosť.
2. Testovanie hypotéz vo viacrozmernom lineárnom modeli: test pomerom vierohodností, testovanie hypotéz o strednej hodnote a kovariančnej matici viacrozmerného normálneho rozdelenia.
3. Analýza rozptylu: model analýzy rozptylu, jedno- a dvojfaktorová analýza rozptylu, profilová analýza, viacrozmerná analýza rozptylu.

Dostupná literatúra v knižnici FMFI UK:

- [1] W. K. Härdle, L. Simar: "Applied Multivariate Statistical Analysis", Springer 2012
[2] F. Lamoš, R. Potocký: "Pravdepodobnosť a matematická štatistika: Štatistické analýzy", Bratislava Univerzita Komenského 1998

Konvexná optimalizácia

1. Teória konvexného programovania pre úlohy v štandardnom tvare (minimalizácia konvexnej funkcie s ohraničeniami vyjadrenými pomocou konvexných a afinných funkcií) –prehľad: formulácia úlohy, kritériá konvexnosti funkcií, operácie zachovávajúce konvexnosť funkcií, Lagrangeova duálna úloha, Slaterova podmienka a Slaterova veta, geometrická interpretácia, Kuhn-Tuckerove podmienky optimality a Kuhn-Tuckerova veta.
2. Formulácia úlohy kónického lineárneho programovania, pojem konvexného a vlastného kužeľa, príklady vlastných kužeľov, formulácie typických tried uloh: LP, SOCP, SDP a zdôvodnenie vzťahu medzi nimi, vnorenie konvexnej množiny do konvexného kužeľa a reformulácia úlohy konvexného programovania v štandardnom tvare do tvaru úlohy kónického lineárneho programovania.
3. Dualita v kónickom lineárnom programovaní: pojem duálneho kužeľa a samoduálneho kužeľa, príklady dvojíc duálnych kužeľov, odvodenie duálnej úlohy kónického lineárneho programovania pomocou Lagrangeovej funkcie, duálna SDP, SOCP úloha, Znenie slabej a silnej vety o dualite a podmienky optimality pre úlohy kónického lineárneho programovania.

Dostupná literatúra v knižnici FMFI UK:

- [1] Boyd, Vandenberghe - Convex Optimization
[2] M. Trnovská: Kónické lineárne programovanie, text dostupný na internete

Spracovanie digitálnych signálov

1. Definícia digitálneho signálu, vzorkovacia perióda a frekvencia, Nyquistova veta, aliasing. Základné diskrétne signály a základné operácie s nimi.
2. Diskrétna Fourierova transformácia (DFT) - базové vektory, definícia DFT a inverznej DFT, vlastnosti DFT, interpretácia vybraných členov DFT. Príklad využitia DFT v praktickej aplikácii. Z-transformácia: definícia, región konvergenzie. Póly a nuly polynómu z-transformácie. Vlastnosti a využitie z-transformácie.
3. Spracovanie digitálnych signálov. LTI filtre: definícia a vlastnosti, príklad LTI filtra. Impulzná odozva, frekvenčná odozva, prenosová funkcia - ich definície a interpretácie resp. využitie. Impulzná odozva pre FIR, IIR filtre, frekvenčná odozva pre lowpass, highpass, band pass filtre.

Dostupná literatúra v knižnici FMFI UK:

[1] L. Tan, J. Jiang. Digital signal processing Fundamentals and applications. Waltham: Academic Press, 2013.

Blok Ekonomické a finančné modelovanie

Časové rady

1. Biely šum. Testovanie bieleho šumu. Stacionarita a ergodicita časového radu. Waldova reprezentácia. Korelácie medzi hodnotami procesu, autokorelačná funkcia a ukážka jej výpočtu pre zvolený AR proces (Yule-Wolkerove rovnice, diferenčná rovnica).
2. Autoregresné modely (AR), modely kĺzavých priemerov (MA - moving average). Definícia ACF a PACF, ich charakteristický priebeh pre AR a MA procesy. ARMA modely. Podmienky stacionarity a invertovateľnosti a ich odvodenie. Diferencovanie časového radu, ADF test jednotkového koreňa, ARIMA modely.

Dostupná literatúra v knižnici FMFI UK:

[1] G. Kirchgässner, J. Wolters: Introduction to modern time series analysis. Springer, 2008

Finančné deriváty

1. Black-Scholesov a Mertonov model - odvodenie PDR pre cenu európskeho derivátu. Postup riešenia PDR pre cenu derivátu transformáciou na RVT. Citlivosť ceny na parametre.
2. Americké deriváty a ich oceňovanie - úloha s voľnou hranicou, úloha lineárnej komplementarity, numerické riešenie PSOR metódou.
3. Short rate modely úrokových mier - stochastická diferenciálna rovnica pre okamžitú úrokovú mieru, odvodenie PDR pre cenu dlhopisu, základné modely.

Dostupná literatúra v knižnici FMFI UK:

D. Ševčovič, B. Stehlíková, K. Mikula: Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. Nakladateľstvo STU, Bratislava 2009.

Stochastické metódy operačnej analýzy

1. Definícia Markovovho reťazca (MR) s diskretným a spojitým časom. Matica prechodu a príslušné diferenčné resp. diferenciálne rovnice. Kolmogorovove a Chapman-Kolmogorovove rovnice. Výpočet rovnovážneho rozdelenia pre diskretný a spojitý MR. Intenzity MR, definícia a vlastnosti.
2. Teória hromadnej obsluhy: Systém M/M/1 - formulácia úlohy, predpoklady, myšlienka odvodenia rovníc pre pravdepodobnosti stavov, príklad výpočtu niektorých charakteristík systému. Rozdiely v teórii systémov M/M/n a M/D/1 oproti M/M/1.
3. Teória zásob. Základná deterministická úloha teórie zásob bez deficitu a s deficitom – formulácia úloh, predpoklady, rozličné možnosti strát z deficitu. Prípady viacerých tovarov od jedného dodávateľa pre úlohu bez deficitu.
4. Teória zásob. Stochastická úloha so signalizáciou, úloha s periodickou kontrolou. Myšlienka jednorazovej úlohy teórie zásob (predavača novín).

Dostupná literatúra v knižnici FMFI UK:

[1] K. Janková, S. Kilianová, P. Brunovský a P. Bokes: Markovove reťazce a ich aplikácie. Epos, Bratislava 2014