

Sylaby štátnej záverečnej skúšky pre bakalársky študijný program:

Ekonomická a finančná matematika

Predmet: Matematický základ

1. Lineárna algebra a maticový počet

Vektorové priestory: Lineárna závislosť a nezávislosť vektorov, báza a dimenzia, lineárny obal, podpriestory, prienik, súčet a priamy súčet podpriestorov, projekcie, transformácie súradníc.

Lineárne zobrazenia: Matica, jadro a obraz lineárneho zobrazenia, transformácie súradníc a podobnosť matíc lineárneho zobrazenia, vlastné čísla a vlastné vektory, invariantné podpriestory, charakteristický polynóm, kritériá diagonalizovateľnosti matíc, Cayleyova-Hamiltonova veta, Jordanov normálny tvar.

Bilineárne a kvadratické formy: Matica bilineárnej formy v rôznych bázach, symetrické a kososymetrické formy, kanonický tvar kvadratickej formy, Lagrangeova metóda, Sylvestrov zákon zotrvačnosti, kladne definitné kvadratické formy a ich matice, vlastnosti kladne definitných matíc.

Vektorové priestory so skalárnym súčinom: Euklidovský vektorový priestor, Gramova matica, základné metrické pojmy, vzťah normy a skalárneho súčinu, Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces, ortonormálna báza.

Gaussova eliminačná metóda a LU rozklad matice, Fredholmova alternatíva, ortogonálne matice a QR-rozklad, ortogonálne projekcie a metóda najmenších štvorcov, normálny systém lineárnych rovníc.

Komplexifikácia reálneho vektorového priestoru, zreálnenie komplexného vektorového priestoru, komplexné predĺženie reálneho lineárneho zobrazenia, reálna matica komplexného lineárneho zobrazenia. Hermitovský vektorový priestor, špeciálne komplexné matice, Schurov rozklad, unitárna ekvivalencia matíc a normálne matice, spektrálny rozklad matice.

2. Matematická analýza

Funkcie jednej a viac premenných: Limita, spojitosť, diferencovateľnosť, derivácia, derivácia v smere, totálny diferenciál. Funkcie zadané implicitne, veta o implicitnej funkcii. Veta o inverznej funkcii. Derivácie vyšších rádov. Postačujúce podmienky na existenciu lokálneho extrému funkcií jednej a viac premenných.

Číselné rady a rady funkcií, kritériá konvergence číselných radov (D'Alembert, Cauchy, Raabe, integrálne), rovnomerná konvergencia radov funkcií, Weierstrassovo majorantné kritérium. Mocninové rady, Taylorov rozvoj funkcie jednej a viac premenných. Analytické funkcie. Fourierove rady a kritérium ich bodovej konvergence. Besselova nerovnosť a Parsevalova rovnosť.

Optimalizácia funkcií viac premenných: Voľné a viazané extrémy funkcií viac premenných. Nutné a postačujúce podmienky. Lagrangeova veta a lagrangeove multiplikátory

Konvexné funkcie. Kritériá konvexnosti funkcií jednej a viac premenných.

Teória integrovania: Riemannov integrál funkcií jednej a viac premenných. Integrál ako funkcia hornej hranice. Parametrické integrály. Spojitosť a diferencovateľnosť parametrických integrálov. Gama funkcia a jej základne vlastnosti. Viacrozmerné integrály a veta o substitúcii. Krivkové integrály. Nezávislosť krivkového integrálu od integračnej cesty, potenciál vektorového poľa. Greenova formula integrácie per partes pre viacrozmerné integrály.

Normované priestory, úplné priestory, otvorené, uzavreté a kompaktné množiny. Banachova veta o pevnom bode a jej aplikácie. Vlastnosti spojitých funkcií na kompaktných množinách (Weierstrassova veta).

3. Diferenciálne a diferenčné rovnice

Diskrétny dynamický systém: Rovnovážne stavy a ich stabilita. Výpočet trajektórií.

Lineárne diferenciálne rovnice: Riešenie autonómnych homogénnych rovníc. Riešenie nehomogénnych rovníc metódou neurčitých koeficientov. Stabilita. Klasifikácia dvojrozmerných autonómnych rovníc. Pevný bod a jeho stabilita.

Nelineárne diferenciálne rovnice: Rovnovážne stavy a ich stabilita. Trajektórie autonómnych rovníc. Fázové portréty dvojrozmerných autonómnych rovníc.

4. Pravdepodobnosť a matematická štatistika.

Klasická a axiomatická definícia pravdepodobnosti. Podmienená pravdepodobnosť, Bayesov vzorec.

Náhodná premenná: rozdelenie pravdepodobnosti, distribučná funkcia náhodnej premennej a jej vlastnosti.

Diskrétna rozdelenia pravdepodobnosti: binomické, hypergeometrické, Poissonovo, geometrické. Spojité náhodné premenné: hustota a základné typy rozdelení: rovnomerné, exponenciálne, normálne, stredné hodnoty a disperzie náhodných premenných. Nezávislosť náhodných premenných a nekorelovanosť. Korelačný koeficient a jeho základné vlastnosti.

Centrálne limitná veta a zákon veľkých čísel.

Náhodné vektory, stredná hodnota a kovariančná matica náhodného vektora. Marginálne a podmienené rozdelenia, konvolúcia hustôt. Rozdelenia odvodené od normálneho: chí kvadrát, Studentovo rozdelenie.

Lineárny model, odhad parametrov, metóda najmenších štvorcov, metóda maxima vierohodnosti.

Literatúra

1. P. Zlatoš: Algebra a geometria, skriptá http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/LAG_A4.pdf
G. Strang: Linear algebra and its applications, 1976 (ruský preklad 1980);
R. A. Horn, Ch. Johnson: Matrix Analysis, 1990.
2. T. Neubrunn, J. Vencko: Matematická analýza I, II. Skriptá UK Bratislava;
M. Barnovská, K. Smítalová: Matematická analýza III, IV. Skriptá UK Bratislava
Z. Kubáček, J. Valášek: Cvičenia z matematickej analýzy I, II. Skriptá UK Bratislava (www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/kubacek);
M. Barnovská, K. Smítalová: Matematická analýza III, IV. Skriptá UK Bratislava
M. Kollár, L. Kossaczka, D. Ševčovič: Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch, Knižničné a edičné centrum FMFI UK, 2012, tretie doplnené vydanie, (www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/skripta/difint)
M. Barnovská a kol.: Cvičenia z matematickej analýzy III. Skriptá UK Bratislava (www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/maiii);
3. P. Brunovský: Diferenčné a diferenciálne rovnice, Skriptá UK Bratislava, (www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky);
S. H. Strogatz: Nonlinear Dynamics and Chaos, Addison-Wesley/CRC Press, 2000;
J. Eliaš, J. Horváth, J. Kajan: Zbierka úloh z vyššej matematiky, 3.časť, Alfa, Bratislava, 1980;
4. K. Janková, A. Pázman: Pravdepodobnosť a štatistika, Univerzita Komenského Bratislava 2011;
R. Harman, E. Honschová, J. Somorčík: Zbierka úloh zo základov teórie pravdepodobnosti, PACI, Bratislava 2009;
T. Amemiya: Introduction to Statistics and Econometrics. Harvard Univ. Press, 1994;

Predmet: Matematické metódy v ekonómii a financiách

1. Lineárne programovanie

Konvexná analýza množín: konvexné množiny a ich vlastnosti, krajné body konvexných množín, veta o opornej nadrovine, vety o separovaní konvexných množín, Farkašova lema.

Simplexová metóda: Geometrická idea. Simplexová tabuľka a algoritmus. Dvojfázová simplexová metóda. Konečnosť simplexovej metódy, anticyklická metóda. Duálna simplexová metóda.

Teória duality: Všeobecný tvar duálnej úlohy. Slabá veta o dualite a jej dôsledky. Silná veta o dualite. Veta o komplementarite. Overovanie optimality.

2. Nelineárne programovanie a metódy voľnej optimalizácie

Optimalizačné metódy (Prehľad a základné princípy): Minimalizácia funkcie jednej premennej (metódy intervalovej aproximácie a interpolačné metódy). Minimalizácia funkcie n -premenných (gradientová metóda, metóda cyklickej súradnicovej redukcie, Newtonova metóda, metóda združených gradientov a kvázinewtonovské metódy).

Pojem Lagrangeovej funkcie, vektora Lagrangeových multiplikátorov, súvis optimálneho riešenia a k nemu prináležiaceho vektora multiplikátorov so sedlovým bodom Lagrangeovej funkcie, metódy nelineárneho programovania využívajúce Lagrangeovu funkciu, zovšeobecnenia Lagrangeovej funkcie, Lagrangeova duálna úloha.

Nutné podmienky optimality: Lagrangeova veta a veta o senzitivnosti pre klasickú úlohu na viazaný extrém. Kuhn-Tuckerova veta pre úlohu matematického programovania (so zmiešaným typom ohraničení), konštrukcia Kuhn-Tuckerových podmienok pre všeobecné úlohy.

Prehľad základných typov extrémov a sedlových bodov. Existenčné vety pre extrém a sedlový bod typu "minmax". Všeobecný princíp duality v extrémnych úlohách: Všeobecný pojem duálnej úlohy. (Aplikácia vety Roodeho a vety o "minmaxe".)

Konvexná analýza funkcií: definícia konvexnosti, podmienky 1. a 2. rádu konvexnosti, kritéria konvexnosti, operácie zachovávajúce konvexnosť, kvázikonvexné funkcie, silnokonvexné funkcie.

Konvexné programovanie: Veta Kuhna-Tuckera pre úlohu konvexného programovania. Slabá a silná veta o dualite. Wolfeova duálna úloha, Slaterova podmienka a Slaterova veta.

3. Teória hier

Hry s úplnou informáciou v strategickom (normálnom) tvare. Pojem Nashovho ekvilibria. Nashovo ekvilibrium v čistých a zmiešaných stratégiách. Hry s úplnou informáciou v extenzívnom tvare. Spätná indukcia. Vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium.

4. Vybrané kapitoly ekonomickej teórie

Základné makroekonomické premenné: hrubý domáci produkt, miera nezamestnanosti, miera inflácie. Trh tovarov. Agregátny dopyt a jeho zloženie. Rovnovážny výstup ekonomiky. Dynamika trhu tovarov. Finančné trhy. Peniaze a dlhopisy. Dopyt po peniazoch, ponuka peňazí a rovnovážna úroková miera. Úloha centrálnej banky a komerčných bánk. IS-LM model, rovnováha na trhu tovarov a finančných trhoch. Fiškálna a monetárna politika. Očakávania a makroekonomická politika. Trh tovarov v otvorenej ekonomike. Rovnovážny výstup a obchodná bilancia. IS-LM model v prípade otvorenej ekonomiky. Výmenné kurzy. Účinnosť makroeconomickej politiky.

Trh práce. Určovanie miezd a cien. Prirodzená miera nezamestnanosti. Agregátny dopyt a agregátna ponuka. Neefektívnosť monetárnej politiky v dlhodobej perspektíve. Účinnosť fiškálnej politiky. Zmeny prirodzenej miery nezamestnanosti. Philipsova krivka. Inflácia, očakávaná inflácia a nezamestnanosť. Hospodársky rast. Šetrenie, akumulácia kapitálu a výstup ekonomiky. Technologický pokrok a rast.

Spotrebiteľ: Preferencie a funkcia užitočnosti. Rovnováha spotrebiteľa. Marshallovská a Hicksovská dopytová funkcia: Slutského rovnica.

Firma: Technologická množina a produkčná funkcia. Rovnováha firmy a nákladová funkcia.

Rovnováha na čiastkovom trhu v dokonalej súťaži: Krátkodobá rovnováha a rovnováha pri voľnom vstupe na trh. Vplyv daní a dotácií. Spotrebiteľov a výrobcov prebytok.

Nedokonalá súťaž: Rovnováha monopolu a jeho neefektivita. Cournotova rovnováha oligopolu. Nestabilita kartelu.

Rovnováha úplného trhu: Walrasov zákon, Walrasova rovnováha a jej Paretova optimalita. Externalita a vlastnícke práva.

5. Finančná matematika

Úrokové miery: Kupónové a bezkupónové dlhopisy. Časová štruktúra úrokových mier. Konštrukcia časovej štruktúry úrokových mier pomocou trhových cien dlhopisov (bootstrapping). Súčasná hodnota peňažného toku (net present value). Výnos do splatnosti. Forwardové úrokové miery. Dĺžka a zmena hodnoty dlhopisového portfólia pri paralelnom posune úrokových mier.

Teória portfólia: Funkcia užitočnosti, averzia k riziku, optimálny výber portfólia maximalizáciou strednej hodnoty funkcie užitočnosti. Markowitzov model. Minimalizácia rizika pri fixnej návratnosti, optimalizácia portfólia obsahujúceho bezrizikový cenný papier, tržová cena rizika. Capital Asset Pricing Model ako rovnovážny model, Capital Market Line, Security Market Line.

Základy teórie oceňovania derivátov: Binomický stromový model, výpočet rizikovo neutrálnych pravdepodobností a hodnoty derivátu na ich základe. Samofinancované stratégie a replikácia derivátov.

6. Štatistické metódy a ekonometria

Vlastnosti priemeru a výberovej disperzie. Studentove t-testy a F-test rovnosti disperzií. Intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu a disperziu. UMP-testy a Neyman-Pearsonova lema. Odhady BUE a Cramérova-Raova nerovnosť. Vlastnosti odhadu MLE. Waldov test, Rao score test a LRT. Bootstrap.

Rozklad totálnej sumy štvorcov, koeficient determinácie a jeho úprava zohľadňujúca počet parametrov. Test sústavy lineárnych hypotéz o parametroch a jeho verzia pomocou submodelu. Zisťovanie nesprávnosti modelu: Chow forecast test, test založený na rekurzívnom odhadovaní, CUSUM test. Zisťovanie zlomu: Chow breakpoint test. Heteroskedasticita: problémy ňou spôsobené, Whiteov HCE, Goldfeldove–Quandtove testy. Autokorelácia: problémy ňou spôsobené, Cochranovo–Orcuttovo odhadovanie, Durbinov–Watsonov test.

Literatúra

1. J. Plesník, J. Dupacova, M. Vlach: Lineárne programovanie. Alfa, Bratislava 1990
2. M. Hamala, M. Trnovská: Nelineárne programovanie, EPOS, Bratislava 2013.
3. M. J. Osborne, A. Rubinstein: A course in game theory. MIT Press, Cambridge 1996.
L. Kockesen, Efe A. Ok: An Introduction to Game Theory
(<http://home.ku.edu.tr/~lkockesen/teaching/econ333/lectnotes/uggame.pdf>)
4. P. A. Samuelson, W. D. Nordhaus: Ekonomia I, II. Bradlo, Bratislava 1992;
B. Felderer, S. Homburg: Makroekonomika a nová makroekonomika. Elita, Bratislava, 1995.
P. Brunovský: Mikroekonómia, učebný text (<http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky2>)
5. I. Melicherčík, L. Olšarová, V. Úradníček: Kapitoly z finančnej matematiky, EPOS, Bratislava 2005
6. G. Casella a R. L. Berger: Statistical inference (2nd edition). Cengage Learning, 2001.
J. Johnston, J. DiNardo: Econometric Methods. McGraw-Hill, 1997.