



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky



RNDr. Tomáš Bokes

Autoreferát dizertačnej práce

Probabilistic and analytic methods
for pricing
American style of Asian options

na získanie vedecko-akademickej hodnosti *philosophiae doctor*
v odbore doktorandského štúdia: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Bratislava 2011

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre aplikovanej matematiky a štatistiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky, Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: RNDr. Tomáš Bokes
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Školiteľ: prof. RNDr. Daniel Ševčovič., CSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI UK Bratislava

Oponenti:

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa oh
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie dňa

v študijnom odbore 9.1.9 Aplikovaná matematika

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave,
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Predseda odborovej komisie:

prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

1 Úvod

V dizertačnej práci sa zaoberáme oceňovaním finančných derivátov z exotickými črtami. Hlavným ťažiskom práce je analýza ázijských opcií amerického typu.

Ázijské opcie patria do skupiny exotických finančných derivátov závislých od cesty. Konkrétne v prípade týchto derivátov ide o závislosť na priemere podkladového aktíva v priebehu celého alebo časti života opcie. Hodnota opcie závisí od zvoleného spôsobu priemerovania. V práci sa zaoberáme priemermi A_t z parametrickej triedy danej vzťahom

$$(A_t)^p = \frac{1}{\int_0^t a(s) ds} \int_0^t a(t-u)(S_u)^p du,$$

kde S_t je spotová cena podkladového aktíva v čase t , $a(\cdot)$ je jadro (vážiaca funkcia) a p je parameter. Ázijské opcie hrajú významnú rolu medzi opciami závislými od cesty. Ich cena je totiž spravidla nižšia ako cena vanilla opcií. Ázijské opcie sú rozšírené na trhu výmenných kurzov ale aj na komoditnom trhu, napr. ropný priemysel (Wilmott et al. 1995, Hull 1997, Wu et al. 1999, Hansen and Jørgensen 2000, Detemple 2006, Dai and Kwok 2006, Wystup 2006, Kwok 2008, Kim and Oh 2004, Wu and Fu 2003, Linetsky 2004).

Vzhľadom na to, že pre limitné hodnoty parametra $|p| \rightarrow \infty$ sa priemer transformuje na extrémnu hodnotu (t.j. maximum pre $p \rightarrow \infty$ a minimum pre $p \rightarrow -\infty$), aplikujeme celú analýzu aj na typ finančných derivátov závislých od cesty nazývaných lookback opcie. Definícia lookback opcií sa líši od definície ázijských opcií jedine v spôsobe závislosti od cesty. Teda priemer nahradíme extrémnou hodnotou podkladového aktíva.

Oceňovanie derivátov amerického typu je zložené z dvoch častí. Prvým krokom býva spravidla určenie ceny vzhľadom na hranicu skorého uplatnenia. Druhým krokom je práve určenie tejto hranice. Hranica skorého uplatnenia derivátu rozdeľuje priestor s rozmermi času a podkladového aktíva na dve oblasti. V prvej oblasti s prívlastkom *continuation*, je výhodné pre majiteľa derivátu si tento ponechať. Druhá oblasť, nazývaná *stopping* určuje oblasť kde je pre majiteľa výhodnejšie derivát uplatniť (Hull 1997, Geske and Johnson 1984, Geske and Roll 1984, Karatzas 1988, Chadam 2008, Kwok 2008, Kuske and Keller 1998, Mallier 2002, Pascucci 2008).

2 Ciele

V dizertačnej práci sa zaoberáme analýzou a riešením niekoľkých otázok a problémov, spojených s oceňovaním tzv. floating strike ázijských opcií amerického typu. Hlavné ciele práce môžeme zhrnúť nasledovne:

- c.1 Oceňovanie ázijských opcií s nenulovou dividendovou mierou.** Rozšíriť model uvedený v článku Hansen and Jørgensen (2000) o nenulovú dividendovú mieru q , jadro (vážiacu funkciu) a a všeobecný priemer. Výpočítať hodnotu tzv. floating strike ázijskej opcie amerického typu so všeobecným, spojitým geometrickým a spojitým aritmetickým priemerom použitím teórie podmienenej strednej hodnoty. Výpočítať hodnotu tzv. floating strike lookback opcií obdobným spôsobom.
- c.2 Limitná hodnota hranice skorého uplatnenia.** Vytvoriť metódu na výpočet limitnej hodnoty hranice skorého uplatnenia v čase expirácie. Metóda je všeobecná, nezávislá od zvoleného modelu pre ľubovoľný finančný derivát, ktorý je možné zapísať v tvare Doob-Meyerovho rozkladu Snellovej obálky (pre diskontovanú výplatnú funkciu analyzovaného derivátu).
- c.3 Aproximácia hranice skorého uplatnenia ázijských opcií amerického typu.** Vypočítať funkciu, ktorá aproximuje hranicu skorého uplatnenia tzv. floating strike ázijskej opcie v blízkosti expirácie T pre všeobecné, spojitě geometrické a spojitě aritmetické priemerovanie. Obdobným spôsobom spočítať aproximačnú funkciu pre hranicu skorého uplatnenia pre lookback opcií.
- c.4 Rovnica pre výpočet hranice skorého uplatnenia ázijských opcií.** Odvodiť rovnicu a numerický algoritmickú schému na výpočet hranice predčasného uplatnenia pre tzv. floating strike ázijských opcií s rôznym priemerovaním a pre tzv. floating strike lookback opcie.

3 Dosiiahnuté výsledky

V úvodných kapitolách prezentovanej dizertačnej práce sú zhrnuté základné vlastnosti finančných derivátov a podstatné časti matematickej teórie najčastejšie využívanej pri oceňovaní a analýze finančných inštrumentov. Následne uvádzame prehľad najznámejších exotických opčných kontraktov s ich najdôležitejšími črtami a ich klasifikáciu na základe Wilmott (2006). V ostatných kapitolách sa zaoberáme analýzou oceňovania (nie len) ázijských opcií amerického typu a aproximáciou ich hranice skorého uplatnenia.

3.1 Oceňovanie ázijských opcií amerického typu

Oceňovníe prezentovanej skupiny derivátov závislých od cesty vychádza z Hansen and Jørgensen (2000). Uvedený model sme upravili pridaním nenulovej dividendovej miery, resp. miery benefitu. Taktiež sme rozšírili využitie metódy o všeobecný spôsob priemerovania s vážiacou funkciou. Vďaka tomuto zovšeobecneniu vieme obdobným spôsobom oceniť aj lookback opcie amerického typu.

Metóda je založená na zmene numerairu tak, že namiesto diskontovania časovou hodnotou jednotky peňazí je numerairom úplná spotová hodnota podkladového aktíva (t.j. vrátane dividend). Tým je možné transformovať priestorové premenné do novej (redukovanej) premennej $x_t = \frac{A_t}{S_t}$ a tak znížiť rozmer problému. Výsledná hodnota je potom daná nasledujúcou vetou.

VETA 3.1. *Cena $\tilde{V}(t, x_t) = e^{-qt}V(t, x_t)$ tzv. floating strike ázijskej call ($\rho = 1$) alebo put ($\rho = -1$) opcie amerického typu viazaná na podkladové aktívum x_t je daná vzťahom*

$$\tilde{V}(t, x_t) = \tilde{v}(t, x_t) + \tilde{e}(t, x_t), \quad (3.1)$$

kde

$$\tilde{v}(t, x_t) \equiv \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[e^{-qT} (\rho(1 - x_T))^+ \right], \quad (3.2)$$

$$\tilde{e}(t, x_t) \equiv \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[\int_t^T \rho e^{-qu} x_u \mathbf{1}_{\mathcal{S}}(u, x_u) \left(\frac{dA_u}{A_u} - (r - qx_u^{-1}) du \right) \right], \quad (3.3)$$

s priemerom daným funkciou A_t , dividendovou mierou danou konštantou $q \geq 0$ a stopping oblasťou \mathcal{S} .

Redukcia dimenzie problému však naplno funguje len pre ázijské opcie so spojitým geometrickým priemerovaním a lookback opcie. Pre tieto prípady vieme totiž určiť rozdelenie novej (redukovanej) premennej. V prípade geometrického priemeru je rozdelenie redukovanej premennej log-normálne (t.j. je to rozdelenie rovnakého typu ako rozdelenie podkladového aktíva podľa predpokladov modelu). V prípade lookback opcií vieme

určiť kumulatívnu distribučnú funkciu rozdelenia novej premennej a na základe toho vieme spočítať aj stredné hodnoty potrebné na oceňenie derivátu. Obdobný prístup, avšak k oceňovaniu lookback opcií európskeho typu, je možné nájsť v Kwok (2008).

V ostatných prípadoch priemerovania ide o aproximáciu hodnoty derivátu. Predpokladáme, že redukovaná premenná má log-normálne rozdelenie, ktorého parametre sú nastavené na základe rovnosti prvých dvoch momentov premennej. V odvodení druhého momentu novej premennej v Hansen and Jørgensen (2000) sme opravili tento výraz na správnu hodnotu. Kvôli opakujúcemu sa nesprávnemu výrazu nebolo zrejmé, či bola chyba spôsobená nesprávnym výpočtom alebo ide o chybu z nepozornosti spôsobenú „copy-paste“ metódou.

Uvedené výsledky boli prezentované v článku [s1] a v prvej časti článku [s2].

3.2 Limitná hodnota hranice skorého uplatnenia v čase expirácie

Aproximácia hranice skorého uplatnenia začína tzv. starting pointom, t.j. limitnou hodnotou hranice skorého uplatnenia v čase expirácie. Nasledujúca veta sumarizuje výsledok dosiahnutý v analýze tohto problému.

VETA 3.2. *Majme finančný derivát amerického typu V_{am} s podkladovým aktívom $x \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ a so stopping oblasťou $\mathcal{S} \subset \mathbb{D}$ a continuation oblasťou $\mathcal{C} \subset \mathbb{D}$ definovanými ako otvorené množiny. Nech $\mathcal{X}_t^* = \partial\mathcal{S}(t, \cdot) \equiv \partial\mathcal{C}(t, \cdot)$ pre $t \in [0, T]$ je varieta (množina variet) hranice skorého uplatnenia v čase t . Nech je hodnota V_{am} daná rovnicou*

$$V_{am}(t, x_t) = V_{eu}(t, x_t) + \mathbb{E}_t \left[\int_t^T \mathbf{1}_{\mathcal{S}}(u, x_u) f_b(u, x_u) du \right], \quad (3.4)$$

kde V_{eu} je cena príslušného derivátu európskeho typu a $f_b(t, x)$ je funkcia určujúca bonus skorého uplatnenia. Navyiac, nech

$$V_{am}(t, x) \geq \Omega(t, x) \text{ a } V_{am}(t, x) \geq V_{eu}(t, x) \quad \text{pre každé } t \in [0, T], x \in \mathbb{D},$$

kde $\Omega(t, x)$ je výplatná funkcia v čase t pre americký aj pre európsky typ derivátu, t.j.

$$V_{am}(T, x) = \Omega(T, x) = V_{eu}(T, x) \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{D}.$$

Potom limitná hodnota hranice skorého uplatnenia v čase expirácie je daná

$$\mathcal{X}_T^* = \partial Z_T^+, \quad (3.5)$$

kde $Z_T^+ = \{x_T \in \mathbb{D}; f_b(T, x_T) > 0\}$.

Na základe metódy prezentovanej v práci je možné nájsť limitnú hodnotu hranice skorého uplatnenia v čase expirácie pre ľubovoľný derivát, ktorý vieme zapísať v tvare Doob-Meyerovho rozkladu Snellovej obálky diskontovanej výplatnej funkcie (t.j. v tvare (3.4)). Použitie tohto postupu nie je obmedzené na najbežnejšie používaný model podkladového aktíva s lognormálnym rozdelením, ale je možné ho aplikovať napríklad aj na model s Lévyho procesmi.

VETU 3.2, sme aplikovali na všetky analyzované opcie, t.j. na ázijské opcie so všeobecným, spojitým geometrickým, spojitým aritmetickým priemerom a váženým spojitým aritmetickým priemerom a na lookback opcie. Výsledné hodnoty uvádzame v TABUĽKE 3.1.

TABUĽKA 3.1: Limitná hodnota hranice skorého uplatnenia x_T^* v čase expirácie $t = T$ (\hat{x}_T rieši rovnicu (3.7), \hat{x}_T^w rieši rovnicu (3.6) a \tilde{x}_T rieši rovnicu (3.8)).

| x_T^* | put | call |
|--------------------------------|---|---|
| všeob. priemer s konšt. jadrom | $\max(\hat{x}_T, 1)$ | $\min(\hat{x}_T, 1)$ |
| všeob. priemer s exp. jadrom | $\max(\hat{x}_T^w, 1)$ | $\min(\hat{x}_T^w, 1)$ |
| geometrický priemer | $\max(\tilde{x}_T, 1)$ | $\min(\tilde{x}_T, 1)$ |
| aritmetický priemer | $\max\left(\frac{q+\frac{1}{T}}{r+\frac{1}{T}}, 1\right)$ | $\min\left(\frac{q+\frac{1}{T}}{r+\frac{1}{T}}, 1\right)$ |
| vážený aritm. priemer | $\max\left(\frac{q(1-e^{-\lambda T})+\lambda}{r(1-e^{-\lambda T})+\lambda}, 1\right)$ | $\min\left(\frac{q(1-e^{-\lambda T})+\lambda}{r(1-e^{-\lambda T})+\lambda}, 1\right)$ |
| maximová lookback opcia | $\max\left(\frac{q}{r}, 1\right)$ | – |
| minimová lookback opcia | – | $\min\left(\frac{q}{r}, 1\right)$ |

Pre zložitejšie prípady nie je vždy možné hodnotu limity vyjadriť explicitne a hodnotu treba vypočítať numericky pre konkrétne nastavenie parametrov.

V prípade všeobecného priemeru s exponenciálnym jadrom, máme na základe (3.3) bonusovú funkciu danú vzťahom

$$\hat{f}_b(T, x_T) = e^{-qT} \left(\frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda T}} \frac{x_T}{p} \left(\frac{1}{(x_T)^p} - 1 \right) - rx_T + q \right).$$

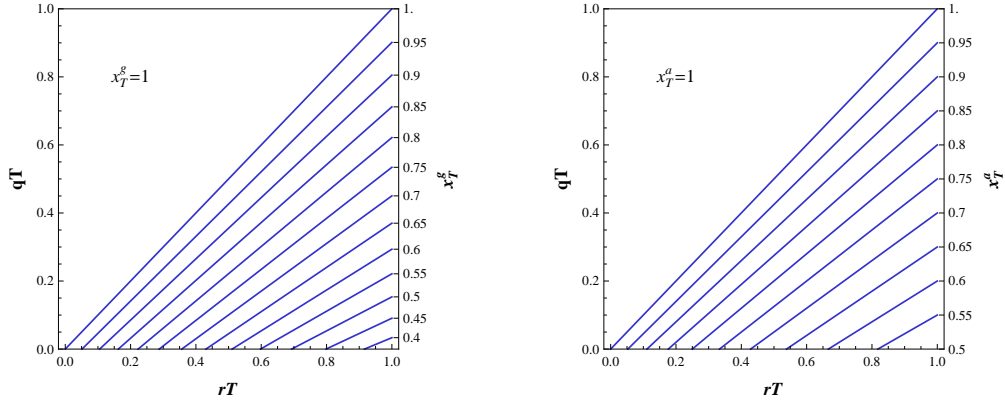
Potom limita hranice skorého uplatnenia $x_T^* = \hat{x}_T$ je riešením rovnice

$$\frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda T}} \left(\frac{1}{(\hat{x}_T^w)^p} - 1 \right) = rp - \frac{qp}{\hat{x}_T^w}, \quad (3.6)$$

ak $\hat{x}_T \in ITM$, ináč $x_T^* = 1$.

Pre všeobecný priemer s konštantným jadrom, jednoducho spočítame limitu $\lambda \rightarrow 0$

$$\frac{1}{(\hat{x}_T)^p} - 1 = rpT - \frac{qpT}{\hat{x}_T}. \quad (3.7)$$



OBR. 3.1: Izočiarly limitnej hodnoty hranice skorého uplatnenia v čase expirácie pre call opciu so spojitým geometrickým (vľavo) a spojitým aritmetickým priemerom (vpravo).

Obe rovnice (3.6) a (3.7) majú jediné kladné riešenie.

V prípade geometrického priemerovania vyplýva z (3.3) (alebo z limity všeobecného priemeru pre $p \rightarrow 0$), že $\tilde{f}_b(T, x_T) = e^{-qT} \left(-\frac{1}{T} x_T \ln x_T - r x_T + q \right)$. Potom $x_T^* = \tilde{x}_T$ je riešením rovnice

$$\ln \tilde{x}_T = \frac{qT}{\tilde{x}_T} - rT, \quad (3.8)$$

ak $\hat{x}_T \in ITM$, ináč $x_T^* = 1$. Táto rovnica má opäť jediné kladné riešenie.

Vzťah pre výpočet limitnej hodnoty hranice skorého uplatnenia v čase expirácie (3.8) pre geometrické priemerovanie je totožný s výsledkom prezentovaným v Wu et al. (1999) a Detemple (2006, str. 69). Rovnaké výsledky pre limitnú hodnotu hranice skorého uplatnenia v čase expirácie pre ázijské opcie so spojitým aritmetickým priemerom môžeme nájsť v Dai and Kwok (2006) a Ševčovič (2009). Pre prípad lookback opcií je totožný výsledok uvedený v Dai and Kwok (2006).

Úspešnosť analytickej metódy sme testovali na americkom type opčných stratégií vanilla opcií. Použili sme PSOR metódu na numerický výpočet hranice skorého uplatnenia v čase expirácie pre stratégie bullish, bearish, strangle, straddle a condor spread. Vo všetkých prípadoch bola odchýlka numerickej hodnoty od teoretickej (spočítanej na základe našej metódy) nanajvyšš rádu 10^{-4} . S rastúcou presnosťou PSOR metódy sa táto odchýlka znižuje.

Napriek tomu, že niektoré z výsledkov boli už publikované inými autormi, metóda prezentovaná v dizertačnej práci je výrazným krokom vpred. Ide totiž o zjednotenie postupu, ktorý je možné aplikovať na ľubovoľný finančný derivát, kde je potrebné určiť hranicu zmeny (t.j. hranicu skorého uplatnenia pre americký typ derivátov, shout hranicu zmeny derivátu pre shout opcie atď.). Navyše, ako sme už spomínali vyššie, uvedená metóda nie je limitovaná log-normálnym rozdelením podkladového aktíva, čím

sa jej záber zväčšuje napríklad aj na modely s Lévyho procesmi.

Uvedené výsledky boli prezentované v článku [s3].

3.3 Aproximácia hranice skorého uplatnenia ázijských opcií v čase expirácie

Druhým krokom aproximácie hranice skorého uplatnenia blízko expirácie T je polynomický rozvoj do prvého rádu v premennej $\sqrt{\tau}$, kde $\tau = T - t$ je čas do expirácie. V dizertačnej práci uvádzame rozvoj pre nastavenie parametrov

$$\rho r > \rho q, \quad (3.9)$$

kde $\rho = 1$ pre call opciu a $\rho = -1$ pre put opciu.

Aby sme mohli aproximovať funkciu hranice skorého uplatnenia Taylorovým rozvojom (vzhľadom na premennú $\sqrt{\tau}$), potrebujeme spočítať prvú deriváciu x_t^* v čase expirácie T podľa premennej $\sqrt{T-t}$. Na základe Kuske and Keller (1998), Dewynne et al. (1993), Ševčovič (2001) predpokladáme aproximáciu x_t^* v tvare

$$\frac{1}{\varrho_{T-t}} = x_t^* = x_T^*(1 + h\sigma\sqrt{T-t}) + O(T-t) \quad \text{pre } t \rightarrow T,$$

kde $h \in \mathbb{R}$ je konštanta a σ je volatilita. Na výpočet hodnoty h použijeme podmienku hladkosti napojenia hodnoty opcie pozdĺž hranice skorého uplatnenia, tzv. *smooth pasting principle* (Kwok 2008, Dai and Kwok 2006). Keďže vzhľadom na VETU 3.1 platí $\tilde{V}(T, x) = e^{-qT}(\rho(1-x))^+$ máme

$$\begin{aligned} -\rho &= e^{qt} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x}(t, x_t^*) = e^{qt} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(t, x_t^*) + e^{qt} \frac{\partial \tilde{e}}{\partial x}(t, x_t^*) \\ &= \hat{v}_x(t, x_t^*) + \int_t^T \hat{e}_x^I(t, x_t^*, u, x_u^*) du, \end{aligned} \quad (3.10)$$

kde e^I je integrovaná funkcia. V prvom kroku spravíme substitúciu $t = T - \tau$ a $u = T - \tau(1 - \theta)$. Tým transformujeme predchádzajúcu rovnicu na

$$-\rho = \hat{v}_x(T - \tau, x_{T-\tau}^*) + \tau \int_0^1 \hat{e}_x^I(T - \tau, x_{T-\tau}^*, T - \tau(1 - \theta), x_{T-\tau(1-\theta)}^*) d\theta \quad (3.11)$$

Táto rovnica platí v priebehu času, preto položíme jej deriváciu vzhľadom na τ rovnú nule

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho + \hat{v}_x(T - \tau, x_{T-\tau}^*)) + \int_0^1 \hat{e}_x^I(T - \tau, x_{T-\tau}^*, T - \tau(1 - \theta), x_{T-\tau(1-\theta)}^*) d\theta \\ &\quad + \tau \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{e}_x^I(T - \tau, x_{T-\tau}^*, T - \tau(1 - \theta), x_{T-\tau(1-\theta)}^*) d\theta. \end{aligned}$$

Následne spočítame limitu pre $\tau \rightarrow 0$, kde posledný člen predchádzajúcej rovnice na pravej strane ide k nule.

Pre všetky analyzované prípady sa (po vypočítaní potrebných limit) problém zjednoduší na riešenie rovnice

$$0 = 1 - \int_0^1 \Phi \left(-h \frac{1 - \sqrt{1 - \theta}}{\sqrt{\theta}} \right) d\theta + h \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \theta}}{\sqrt{\theta}} \Phi' \left(-h \frac{1 - \sqrt{1 - \theta}}{\sqrt{\theta}} \right) d\theta. \quad (3.12)$$

Táto má jediné riešenie h^* , ktorého približná hodnota je $h^* \doteq -0.638833$.

Za zmienku stojí, že rovnaká aproximácia hranice skorého uplatnenia pre vanilla call opciu amerického typu pre $t \rightarrow T$ odvodená v Dewynne et al. (1993), Ševčovič (2001):

$$S_f(t) \approx S_f(T)(1 + 0.638833 \sigma \sqrt{T - t})$$

tiež obsahuje konštantu $-h^* \doteq 0.638833$, kde h^* je riešením rovnice (3.12). Táto podobnosť oboch výrazov pre aproximáciu hranice skorého uplatnenia zrejme vyplýva z faktu, že pre $T \rightarrow \infty$ a t blízko expirácie, sa problém pre ázijskú a lookback opciu redukuje na problém vanilla opcie.

Uvedené výsledky boli prezentované v v prostrednej časti článku [s2].

3.4 Rovnica pre hranicu skorého uplatnenia ázijských opcií

Odvodili sme numerický algoritmus pre výpočet hranice skorého uplatnenia x_t^* ázijskej a lookback opcie amerického typu. Konštrukcia algoritmu je založená na riešení modifikovanej Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnici. Numerické výsledky prezentovaného algoritmu pre ázijskú opciu s aritmetickým priemerovaním sme porovnali s hodnotami uvedenými v Dai and Kwok (2006).

Na odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice využijeme Itôovu lemmu, ktorú aplikujeme na hodnotovú funkciu opcie $V = V(t, S, A)$ tak, že máme

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial A} dA. \quad (3.13)$$

Pre jednotlivé typy priemerovania (vrátane extrémov) máme výraz $\frac{dA}{A} = f\left(\frac{A}{S}, t\right) dt$ kde funkcia $f = f(x, t)$ je definovaná nasledovne:

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) & \text{aritmetický priemer,} \\ -\frac{1}{t} \ln x & \text{geometrický priemer,} \\ \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda t}} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) & \text{exp. vážený aritmetický priemer,} \\ 0 & \text{hodnota maxima alebo minima.} \end{cases} \quad (3.14)$$

Štandardným postupom pre odvodenie Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice a využitím (3.13) získame rovnicu pre ázijskú opciu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + S(r - q) \frac{\partial V}{\partial S} + A f\left(\frac{A}{S}, t\right) \frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0, \quad (3.15)$$

kde $0 < t < T$ a $S, A > 0$ (pozri napr. Dai and Kwok 2006, Kwok 2008). Terminálna podmienka tejto rovnice je daná výplacnou funkciou opcie

$$V(T, S, A) = \Omega(S, A) = (\rho(S - A))^+, \quad S, A > 0.$$

Pre zjednodušenie problému použijeme sériu transformácií premenných. Najskôr znížime rozmer problému:

$$x = \frac{A}{S}, \quad W(x, \tau) = \frac{V(t, S, A)}{A}, \quad \text{kde } \tau = T - t.$$

Následne transformujeme problém na pevnú oblasť:

$$\xi = \ln(\varrho(\tau)x), \quad \Pi(\xi, \tau) = W(x, \tau) + x \frac{\partial W}{\partial x}(x, \tau).$$

Problém pre ázijskú opciu tým transformujeme na

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} + a(\xi, \tau) \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2} + b(\xi, \tau) \Pi = 0,$$

pre ázijské opcie: $0 < \tau < T$, $\rho\xi > 0$,

pre lookback opcie: $0 < \tau < T$, $0 < \rho\xi \leq \rho \ln \varrho(\tau)$,

s algebraickým ohraňením

$$q\varrho(\tau) - r + f\left(\frac{1}{\varrho(\tau)}, T - \tau\right) = \rho \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}(0, \tau), \quad 0 < \tau < T,$$

vzhľadom na počiatocnú a okrajové podmienky

(3.16)

pre ázijské opcie: $\Pi(0, \tau) = -\rho$, $\Pi(\rho\infty, \tau) = 0$,

pre lookback opcie: $\Pi(0, \tau) = -\rho$, $\Pi(\rho \ln \varrho(\tau), \tau) = 0$,

$$\Pi(\xi, 0) = \begin{cases} -\rho & \text{for } \rho\xi < \rho \ln \varrho(0), \\ 0 & \text{for } \rho\xi > \rho \ln \varrho(0), \end{cases}$$

a s tzv. starting pointom $\varrho(0) = \frac{1}{x_T^*}$ daným VETOU 3.2.

Výrazy a, b sú dané vzťahmi

$$a(\xi, \tau) = \frac{\dot{\varrho}(\tau)}{\varrho(\tau)} + r - q - \frac{\sigma^2}{2} - f\left(\frac{e^\xi}{\varrho(\tau)}, T - \tau\right), \quad (3.17)$$

$$b(\xi, \tau) = r - \frac{\partial}{\partial x}(xf(x, T - \tau)) \Big|_{x=\frac{e^\xi}{\varrho(\tau)}}, \quad (3.18)$$

kde $\dot{\varrho}(\tau) = \frac{\partial \varrho}{\partial \tau}(\tau)$.

Vzhľadom na to, že vďaka prítomnosti hodnoty $\partial_\xi \Pi(0, \tau)$ je rovnica pre hranicu skorého uplatnenia

$$q\varrho(\tau) - r + f\left(\frac{1}{\varrho(\tau)}, T - \tau\right) = \rho \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}(0, \tau) \quad (3.19)$$

vysoko citlivá aj na drobné nepresnosti a nie je vhodná na konštrukciu robustnej numerickej schémy.

Zintegrujeme preto hlavnú rovnicu systému (3.16) vzhľadom na ξ od 0 po $\rho\infty$ a máme

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\rho\infty} \Pi d\xi + \int_0^{\rho\infty} a(\xi, \tau) \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} d\xi - \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{\rho\infty} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2} d\xi + \int_0^{\rho\infty} b(\xi, \tau) \Pi d\xi = 0$$

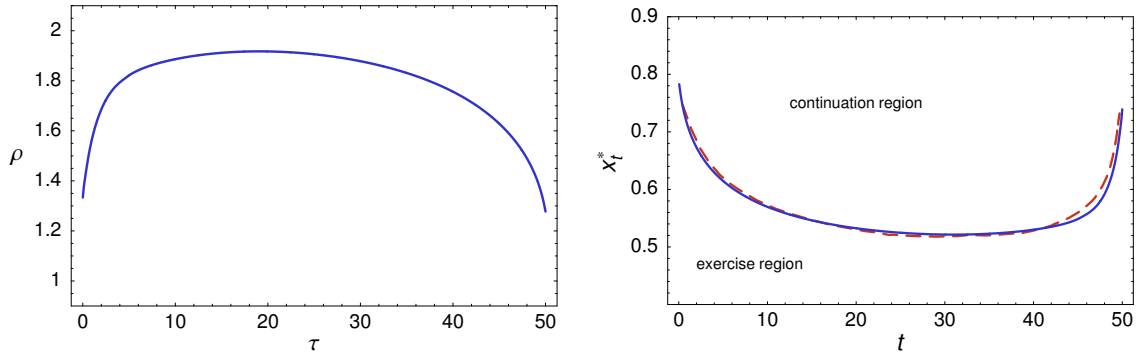
(pre lookback opcie integrujeme na intervale od 0 po $\rho \ln \varrho(\tau)$, teda jediná zmena je v hornej integračnej medzi).

Keď vezmeme do úvahy okrajové podmienky $\Pi(0, \tau) = -\rho$, $\Pi(\rho\infty, \tau) = 0$ a následne $\partial_\xi \Pi(\rho\infty, \tau) = 0$ (podobne pre lookback opcie máme $\Pi(\rho \ln \varrho(\tau), \tau) = 0$ a $\partial_\xi \Pi(\rho \ln \varrho(\tau), \tau) = 0$) získame nasledujúcu diferenciálnu rovnicu pre ázijskú opciu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\ln \varrho(\tau) + \rho \int_0^{\rho\infty} \Pi(\xi, \tau) d\xi \right) + q\varrho(\tau) - q - \frac{\sigma^2}{2} \\ + \rho \int_0^{\rho\infty} \left[r - f \left(\frac{e^\xi}{\varrho(\tau)}, T - \tau \right) \right] \Pi(\xi, \tau) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

(pre lookback opcie sa zmení horná integračná hranica tak, že nahradíme ∞ hodnotou $\ln \varrho(\tau)$).

Na Obr. 3.2 je znázornená hranica skorého uplatnenia pre ázijskú opciu s aritmetickým priemerovaním a jej porovnanie s výsledkami uvedenými v Dai and Kwok (2006).



OBR. 3.2: Funkcia $\varrho(\tau)$ (vľavo). Porovnanie hodnoty hranice skorého uplatnenia $x_t^* = 1/\varrho(T-t)$ (vpravo) získanej našou metódou (plná čiara) a projected successive over relaxation (PSOR) algoritmom, ktorý uviedli Dai a Kwok (predelovaná čiara).

Uvedené výsledky boli prezentované v záverečnej časti článku [s2].

4 Záver

V prezentovanej dizertačnej práci analyzujeme tzv. floating strike ázijské opcie a lookback opcie amerického typu (členy triedy opcií závislých od cesty).

V úvode práce sumarizujeme široké spektrum exotických opcií najčastejšie sa vyskytujúcich na trhu. Používame klasifikáciu založenú na publikácii Wilmott (2006). Najväčšiu pozornosť však venujeme opciám závislým od cesty.

Na základe teórie podmienenej strednej hodnoty a martingalov sme aproximovali hodnotu tzv. floating strike ázijskej opcie amerického typu so všeobecným typom priemerovania (podľa myšlienky z Hansen and Jørgensen (2000)). Hodnotu sme tiež vypočítali pre ázijskú opciu so spojitým geometrickým priemerovaním a aproximovali sme hodnotu pre ázijskú opciu so spojitým aritmetickým priemerovaním. Navyše sme určili hodnotu tzv. floating strike lookback opcie amerického typu. Hodnotu extrémnu môžeme dosiahnuť ako limitnú hodnotu všeobecného priemeru.

V dizertačnej práci uvádzame novú metódu pre výpočet limitnej hodnoty hranice skorého uplatnenia v čase expirácie. Týmto problémom sa zaoberalo už veľa autorov, vždy sa však jednalo len o problém konkrétneho finančného derivátu. Naša metóda združuje výpočet limitnej hodnoty pre všeobecný finančný derivát, ktorý môžeme zapísať v tvare Doob-Meyerovho rozkladu Snellovej obálky jeho diskontovanej výplatnej funkcie. Metódu sme overili porovnaním výsledkov s numerickými hodnotami spočítanými metódou PSOR. Hodnoty sme porovnávali pre americký typ opčných stratégií.

V práci analyzujeme správanie sa hranice skorého uplatnenia blízko expirácie pre ázijské a lookback opcie. Funkciu hranice aproximujeme polynomickým rozvojom prvého rádu v premennej $\sqrt{\tau}$. Výpočet je založený na podmienke hladkosti napojenia hodnoty derivátu amerického typu pozdĺž hranice skorého uplatnenia.

Odvodili sme integralno-diferenciálnu rovnicu pre výpočet hranice skorého uplatnenia pre ázijské a lookback opcie. Odvodenie rovnice vychádza z niekoľkých transformácií modifikovanej Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice pre deriváty závislé od cesty. Diskretizácia uvedenej rovnice vedie na numerickú aproximačnú schému, ktorú je možné použiť na výpočet hodnoty hranice.

V dizertačnej práci sme pokryli vybrané problémy týkajúce sa prezentovanej témy. Každopádne, veľa problémov je otvorených pre ďalšiu analýzu.

Literatúra

- Chadam, J.: 2008, Free boundary problems in mathematical finance, *Progress in industrial mathematics at ECMI 2006*, Vol. 12 of *Math. Ind.*, Springer, Berlin, pp. 655–665.
- Dai, M. and Kwok, Y. K.: 2006, Characterization of optimal stopping regions of American Asian and lookback options, *Math. Finance* **16**(1), 63–82.
- Detemple, J.: 2006, *American-Style Derivatives: Valuation and Computation*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- Dewynne, J. N., Howison, S. D., Ruf, I. and Wilmott, P.: 1993, Some mathematical results in the pricing of American options, *European J. Appl. Math.* **4**(4), 381–398.
- Geske, R. and Johnson, H. E.: 1984, The American put option valued analytically, *J. Finance* **39**, 1511–1524.
- Geske, R. and Roll, R.: 1984, On valuing American call options with the Black–Scholes European formula, *J. Finance* **89**, 443–455.
- Hansen, A. T. and Jørgensen, P. L.: 2000, Analytical valuation of American-style Asian options, *Management Science* **46**(8), 1116–1136.
- Hull, J. C.: 1997, *Options, Futures and Other Derivative Securities*, third edn, Prentice Hall, New Jersey.
- Karatzas, I.: 1988, On the pricing American options, *Appl. Math. Optim.* **17**, 37–60.
- Kim, B. C. and Oh, S. Y.: 2004, Pricing of American-style fixed strike Asian options with continuous arithmetic average, *SSRN id489103*.
- Kuske, R. A. and Keller, J. B.: 1998, Optimal exercise boundary for an American put option, *Applied Mathematical Finance* **5**, 107–116.
- Kwok, Y. K.: 2008, *Mathematical models of financial derivatives*, Springer Finance, second edn, Springer-Verlag, Berlin.
- Linetsky, V.: 2004, Spectral expansions for Asian (average price) options, *Operations Research* **52**(6), 856–867.
- Mallier, R.: 2002, Evaluating approximations for the American put option, *Journal of Applied Mathematics* **2**, 71–92.
- Pascucci, A.: 2008, Free boundary and optimal stopping problems for American Asian options, *Finance Stoch* **12**, 21–41.

- Ševčovič, D.: 2001, Analysis of the free boundary for the pricing of an American call option, *European J. Appl. Math.* **12**(1), 25–37.
- Ševčovič, D.: 2009, Transformation methods for evaluating approximations to the optimal exercise boundary for a linear and nonlinear Black-Scholes equation, in M. Ehrhardt (ed.), *Nonlinear Models in Mathematical Finance: New Research Trends in Option Pricing*, Nova Science Publishers, New York, pp. 153–198.
- Wilmott, P.: 2006, *Paul Wilmott on quantitative finance*, second edn, John Wiley & Sons, Chichester.
- Wilmott, P., Howison, S. and Dewynne, J.: 1995, *The mathematics of financial derivatives*, Cambridge University Press, Cambridge. A student introduction.
- Wu, L., Kwok, Y. K. and Yu, H.: 1999, Asian options with the American early exercise feature, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **2**(1), 101–111.
- Wu, R. and Fu, M. C.: 2003, Optimal exercise policies and simulation-based valuation for American-Asian options, *Operations Research* **51**(1), 52–66.
- Wystup, U.: 2006, *FX Options and Structured Products*, John Wiley & Sons, Chichester.

Abstrakt

V práci analyzujeme tzv. floating strike ázijské opcie amerického typu s rôznym typom priemerovania a tzv. lookback opcie.

Jedným z hlavných výsledkov je jednotná metóda na výpočet hodnoty hranice skorého uplatnenia blízko expirácie. Metóda je použiteľná pre ľubovoľný finančný derivát, ktorý sa dá transformovať na tvar Doob-Meyerovho rozkladu Snellovej obálky jeho diskontovanej pay-off funkcie. Výsledky získané pre hranicu skorého uplatnenia pre americký typ opčných stratégií vypočítané prezentovanou metódou sú konfrontované s výsledkami spočítanými metódou PSOR.

Hranica skorého uplatnenia pre analyzované opcie je aproximovaná polynomickým rozvojom prvého stupňa. Rozvoj v blízkosti expirácie je odvodený na základe podmienky hladkého napojenia. Získané hodnoty sú konzistentné s už známymi hodnotami pre tzv. vanilla opcie.

V práci tiež uvádzame diferenciálnu rovnicu na výpočet voľnej hranice pre analyzované opcie. Táto rovnica je odvodená na základe modifikovanej Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice.

Abstract

In the thesis, we analyze floating strike American style Asian options with various averaging and lookback options.

As one of the main results, we present a new unifying method for calculation of the limit of early exercise boundary at expiry. The method can be used for any financial derivative that can be transformed into a so called Doob-Meyer decomposition of Snell envelope of its discounted pay-off function. Results for the limit of early exercise boundary of American style of option strategies calculated by this approach are compared to results calculated by the PSOR method.

The early exercise boundary of analyzed options is estimated by the first order of polynomial expansion. We use the condition of smoothness of solution to derive the expansion close to expiry. The result is consistent with already known values derived for plain vanilla options.

In the thesis, we also present a differential equation for the early exercise boundary of analyzed options. This equation is derived from the modification of Black-Scholes partial differential equation.

5 Vlastné publikácie autora

- [s1] Bokes, T.: 2010, Valuation of the American-style of Asian option by a solution to an integral equation, *Acta Universitatis Matthiae Belii* **16**, 17-23.
- [s2] Bokes, T. and Ševčovič, D.: 2011, Early exercise boundary for American type of floating strike Asian option and its numerical approximation, *Applied Mathematical Finance*.
- [s3] Bokes, T.: 2011, A unified approach to determining the early exercise boundary position at expiry for American style of general class of derivatives, *arXiv:1012.0348v2*.

Prezentácia výsledkov na konferenciách:

- ISCAMI 2009 Conference, Malenovice, Česká republika, máj 2009

Citácie:

- [s2] v práci: Kandilarov, J. D. and Valkov, R. L.: 2011, A numerical approach for the American call option pricing model, *Lecture Notes in Computer Science* **6046**, 453–460.