Optimalizácia portfólia s ohraničením na rizikovosť mierou Conditional Value-at-Risk

Conditional Value-at-Risk Constrained Portfolio Optimization

Martin Harcek[1]

Abstrakt

V našom výskume sa zaoberáme zaistenými investičnými stratégiami. Jedným z našich cieľov je zostrojenie stratégie, ktorá s ohľadom na charakter investičných možností prinesie investorovi optimálne zhodnotenie na konci investičného horizontu pri dodržaní požiadaviek kladených na rizikovosť portfólia vo forme rizikovej miery Conditional Value-at-Risk (CVaR). Úlohu budeme formulovať ako problém investora maximalizujúceho očakávanú užitočnosť z výnosu portfólia na konci investičného horizontu obchodujúcom na tzv. úplnom trhu, s rizikovým ohraničením vo forme horného limitu na veľkosť rizikovej miery CVaR zvoleného exogénne. V príspevku prezentujeme riešenie statickej optimalizačnej úlohy a tiež dynamickú investičnú stratégiu vedúcu k optimálnej terminálnej hodnote portfólia s využitím teórie stochastických procesov.

Kľúčové slová:

riadenie rizík, podmienená hodnota v riziku, zaistené stratégie, optimalizácia portfólia, úplný trh

JEL klasifikácia: G11

Abstract

We are investigating portfolio hedging policies. Our aim is to develop a strategy that will lead to an optimal gain in the finite investment horizon while obeying CVaR based risk management constraint. The problem is stated as a maximum terminal time expected utility problem on a complete market while constrained by exogenously defined upper bound on a portfolio terminal payoff CVaR measure. We present a solution of static optimization problem as well as a dynamic strategy that

[1] Príspevok vznikol s podporou grantu VEGA 1/2429/12. Autor je študentom doktorandského štúdia na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, pracovisko Aplikovaná matematika a štatistika. Webstránka pracoviska: *http://www.iam.fmph.uniba.sk*, kontakt na autora: *martin.harcek@gmail.com*.

leads to an optimal terminal payoff using stochastic calculus and martingale framework.

Keywords:
risk management, Conditional Value-at-Risk, hedging strategies, portfolio optimization, complete market

JEL classification: G11

Úvod

Do povedomia finančníkov sa pojmy ako *riziková miera* a *riadenie rizík* dostali koncom minulého storočia schválením a implementáciou dohôd *Basel Capital Accord I* a *II* na nadnárodnej úrovni, ktoré v záujme stabilizácie globálneho finančného systému definovali minimálne požiadavky kladené na procesy riadenia rizík vo finančných inštitúciách. Pod tlakom nových pravidiel vznikla legitímna požiadavka vytvoriť matematický aparát, ktorý by investorom a portfólio manažérom umožnil kontrolovať rizikovú expozíciu portfólií, čo bolo jednou z hlavných motivácií pre znovuobjavenie a rozvoj tzv. *zaistených investičných stratégií*[2].

O zaistenej stratégii hovoríme vtedy, ak sa investor vzdá časti očakávaného výnosu portfólia v prospech „poistenia" proti neočakávaným stratám. Do štandardnej úlohy investora maximalizujúceho očakávaný úžitok z výnosu portfólia vieme takéto poistenie zapojiť s použitím rôznych rizikových mier. Jednou z takýchto mier je aj miera tzv. *podmienenej hodnoty v riziku* (CVaR z angl. Conditional Value-at-Risk), ktorou sa zaoberáme v našom výskume.

Naším cieľom je zostrojenie investičnej stratégie, ktorá prinesie investorovi optimálne zhodnotenie na konci investičného horizontu pri dodržaní požiadaviek kladených na rizikovosť zvolenej stratégie vo forme rizikovej miery CVaR. Máme ambíciu ukázať, že investičné stratégie založené na riadení rizika pomocou miery

[2] Viď napr. Perold (1986), Leland a Rubinstein (1988).

CVaR vedú k lepším výsledkom ako portfóliá optimalizované pri dodržaní v praxi pomerne bežne používanej miery *hodnoty v riziku* (VaR z angl. Value-at-Risk), s použitím metodiky navrhnutej v práci Basak a Shapiro (2001).

Príspevok je organizovaný nasledovne. V prvej časti sformulujeme základnú úlohu portfólio manažéra, t.j. bez rizikového ohraničenia a zhrnieme základné predpoklady modelu. V druhej časti definujeme rizikovú mieru CVaR, sformulujeme úlohu portfólio manažéra z rizikovým ohraničením vo forme rizikovej miery CVaR a tiež alternatívnu úlohu. V tretej časti načrtneme postup a definujeme presný tvar optimálnej cieľovej hodnoty portfólia. Definujeme tiež základné vlastnosti stratégie v čase pred investičným horizontom. V poslednej, štvrtej časti, zhrnieme naše výsledky a načrtneme ďalšie smerovanie nášho výskumu.

V záujme lepšej čitateľnosti sú v texte opomenuté technické predpoklady, ktoré priamo nesúvisia s výkladom a interpretáciou prezentovaného modelu. Dôkazy tvrdení, ktoré priamo nesúvisia s rozoberanou problematikou, sú prezentované formou referencie na odborné texty, dôkazy dôležitých tvrdení sú uvedené v prílohe.

1 Formulácia štandardnej úlohy portfólio manažéra

1.1 Základné predpoklady modelu

Prístup k optimalizácii portfólia s konečným investičným horizontom (ozn. *T*), ktorý vo svojej práci predstavili autori Basak a Shapiro (2001), predpokladá existenciu N rizikových aktív (napr. akcií verejne obchodovaných spoločností s možným dividendovým výnosom) a 1 bezrizikového aktíva (dlhopisu), dostupného v ľubovoľnom množstve. Cena dlhopisov je deterministická funkcia času a bezrizikovej úrokovej miery. Náhodnosť cien akcií je vyjadrená existenciou N-rozmerného Brownovho pohybu definovaného na filtrovanom pravdepodobnostnom priestore. O dynamike cien dlhopisov (ozn. *B*) a akcií (ozn. *S*) predpokladáme, že vyhovujú stochastickým diferenciálnym rovniciam:

$$
\begin{aligned}
dB(t) &= B(t)r(t)dt \\
dS_j(t) + \delta_j(t)dt &= S_j(t)\left[\mu_j(t)dt + \sigma_j(t)dw(t)\right], \quad j \in 1, \dots, N,
\end{aligned}
$$

kde vektor $\mu(t)$ je proces driftu, matica $\sigma(t)$ je proces volatility N-rozmerného procesu vývoja cien obchodovaných akcií $S(t)$ a $\delta(t)$ je spojitý tok dividendových platieb, $r(t)$ je bezriziková úroková miera a $w(t)$ je štandardizovaný Brownov pohyb.

Investor drží v počiatočnom čase ($t = 0$) otvorenú pozíciu e_j kusov v j-tej akcii, čím je daný jeho počiatočný majetok vo výške $W(0) = e^T S(0)$. Investor si zvolí (kladnú) hodnotu portfólia v terminálnom čase $W(T)$ a investičnú stratégiu $\theta(t)$ (j-rozmerný vektor), kde j-ta zložka vyjadruje hodnotu investície vloženú v j-tej akcii v čase t. Proces hodnoty portfólia v časoch 0 až T je definovaný:

$$dW(t) = W(t)\left[r(t)dt + \theta(t)^\top \left(\mu(t) - r(t)\overline{1}\right)dt + \theta(t)^\top \sigma dw(t)\right].$$

Model predpokladá, že úžitok investora z hodnoty portfólia je rastúca, konkávna a dvakrát diferencovateľná funkcia, závislá od hodnoty portfólia, ozn. $u(W_t)$ s vlastnosťami:

$$\lim_{x\to 0} u'(x) = \infty \text{ a } \lim_{x\to\infty} u'(x) = 0.$$

1.2 Predpoklad úplného trhu

Pre model je dôležitý predpoklad existencie tzv. *úplného trhu*, ktorý zaručuje, že investor si vhodnou stratégiou (t.j. nákupom a predajom vhodných aktív) dokáže zaistiť (replikovať[3]) ľubovoľnú výplatu v terminálnom čase T. I keď je uvedený predpoklad pomerne silný, v praxi trhy s vysoko likvidnými finančnými aktívami nie sú príliš vzdialené od uvedeného predpokladu. Úplný trh zaručuje existenciu jedinej rizikovo-neutrálnej pravdepodobnostnej miery a s ňou spojeného procesu zmeny miery $\xi(t)$ v tvare:

$$d\xi(t) = -\xi(t)\left[r(t)dt + \kappa(t)^\top dw(t)\right],$$

kde vektor $\kappa(t) = \sigma(t)^{-1}(\mu(t) - r(t)\underline{1})$ je *Sharpeov* koeficient trhovej ceny rizika a $\underline{1}$ je N-rozmerný jednotkový vektor. Náhodná premenná $\xi(T)$ je *Radon-Nikodymová* derivácia spojená s prechodom do rizikovo-neutrálnej pravdepodobnostnej miery. Nakoľko tento proces vystupuje vo vyjadrení optimálnej investičnej stratégie, jeho

[3] Viď napr. Melicherčík et al. (2005).

interpretáciou sa podrobnejšie zaoberáme v 3. časti, v ktorej sa venujeme vlastnostiam a interpretácii riešenia.

1.3 Štandardná úloha portfólio manažéra

Formulácia úlohy, v ktorej riadenie rizík nehrá žiadnu rolu, je pomerne priamočiara: portfólio manažér sa snaží maximalizovať očakávaný úžitok z hodnoty portfólia v terminálnom čase pri dodržaní rozpočtového ohraničenia, matematicky zapísané:

$$\begin{aligned} &\max \mathbb{E}[u(W_T)] \\ &\mathbb{E}[\xi_T W_T] \le \xi_0 W_0 \end{aligned} \tag{1}$$

kde $u(.)$ je zvolená funkcia užitočnosti, W_0 je počiatočný kapitál, $W(T)$ je náhodná premenná vyjadrujúca hodnotu portfólia v terminálnom čase a $\xi(T)$ je Radon-Nikodymová derivácia. Tzv. *rozpočtové ohraničenie* vo formulácii úlohy vyjadruje skutočnosť, že investor si môže zaistiť iba takú konečnú hodnotu portfólia, ktorá je dosiahnuteľná vzhľadom k výške jeho počiatočného kapitálu W_0. Riešenie tejto úlohy je uvedené napríklad v práci Gollier (1999), v tejto práci sa ním budeme okrajovo zaoberať v 3. časti.

2 Úloha riziko kontrolujúceho portfólio manažéra

2.1 Riziková miera CVaR

Koherentná[4] riziková miera CVaR je definovaná ako stredná hodnota tzv. *významných strát* hodnoty investície za obdobie do času T, kde za významnú stratu je považovaná každá strata väčšia alebo rovná ako hodnota v riziku VaR, ktorá je definovaná ako α-kvantil rozdelenia strát:

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(W_T) &= \mathbb{E}[W_0 - W_T \,|\, W_0 - W_T \ge VaR_\alpha(W_T)] \\ VaR_\alpha(W_T) &= -\inf\{c \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(W_T - W_0 \le c) \ge \alpha\}, \end{aligned} \tag{2a, 2b}$$

[4] Trieda tzv. koherentných rizikových mier sa vyznačuje vhodnými „matematickými“ vlastnosťami, viď napr. Artzner et al. (1999) a Föllmer a Schied (2010).

kde W_0 a $W(T)$ sú definované ako v časti 1.3 a α je parameter hladiny významnosti. Voľbou parametra α v rozsahu (0,1) definujeme rozsah strát, ktoré sú považované za významné.

2.2 Definícia úlohy

V záujme kontroly rizikového profilu portfólia môžeme na veľkosť rizikovej miery CVaR nastaviť limit vo veľkosti δW_0:

$$\mathbb{E}\big[W_0 - W_T \,|\, W_0 - W_T \geq VaR_\alpha(W_T)\big] \leq \delta W_0, \tag{3}$$

kde $\delta \in [0, \infty]$ je exogénny parameter, vyjadrujúci maximálnu akceptovateľnú hodnotu miery CVaR, ako podiel z počiatočnej hodnoty portfólia W_0.

Zapojením vzťahov (2b) a (3) do úlohy maximalizácie očakávaného úžitku z hodnoty portfólia na konci investičného horizontu definujeme úlohu CVaR-RM (z angl. *CVaR Risk Manažment*) nasledovne:

$$\begin{aligned}
&\max \mathbb{E}\left[u\left(W_T\right)\right] \\
&\mathbb{E}\left[\xi_T W_T\right] \leq \xi_0 W_0 \\
&\mathbb{E}\big[W_0 - W_T | W_0 - W_T \geq VaR_\alpha(W_T)\big] \leq \delta W_0 \\
&VaR_\alpha(W_T) = -\inf\left\{c \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\left(W_0 - W_T \leq c\right) \geq \alpha\right\}
\end{aligned} \tag{4}$$

kde $u(.)$, W_0, $W(T)$, α, ξ_T a prvé z ohraničení sú definované ako v časti 1.3, druhé a tretie z ohraničení vyjadrujú ohraničenie na riziko formou limitu kladeného na rizikovú mieru $CVaR\alpha$ (W_T).

2.3 Prechod k alternatívnej formulácii problému

Riešenie úlohy (4) je v uvedenom tvare problematické, najmä kvôli členu VaR v samotnej definícii rizikovej miery. V našom výskume máme ambíciu ukázať, že úlohu (4) je možné transformovať na úlohu, v ktorej bude rizikový profil portfólia ohraničený s použitím funkcionálu príbuzného miere CVaR. Motiváciou pre náš zámer sú výskumy Rockafellar, Uryasev (2000), Krokhmal et al. (2002) a tiež Pflug (2007), ktoré sa zaoberajú formuláciami a vlastnosťami optimalizačných úloh ekvivalentnými s úlohami s ohraničením v podobe miery CVaR. V prílohe A uvádzame prehľad relevantných výsledkov vyššie uvedených výskumov podporujúcich našu hypotézu o existencii ekvivalentnej úlohy.

Tvrdenie 1: *Nižšie uvedené optimalizačné úlohy:*

$$\max_{x \in R} \mathbb{E}\left[u(x)\right], \mathbb{E}\left[\xi x\right] \leq \psi, CVaR_\alpha(x) \leq \omega, \quad \psi, \omega \geq 0$$
$$\max_{(x,c) \in R^2} \mathbb{E}\left[u(x)\right], \mathbb{E}\left[\xi x\right] \leq \psi, G_\alpha(x,c) \leq \omega, \quad \psi, \omega \geq 0$$

(U1 a U2)

sú ekvivalentné v tom zmysle, že ich účelové funkcie dosahujú rovnaké optimálne hodnoty. Navyše, ak je CVaR ohraničenie v úlohe U1 aktívne, dvojica $(\hat{x}, \hat{c})$ *dosahuje v úlohe U2 minimum práve vtedy, keď* $\hat{x}$ *je riešením úlohy U1 a* $\hat{c} \in A_\alpha(\hat{x})$ *(tzv. množina akceptovateľnosti, viď prílohu A). Presnejšie, ak množina* $A_\alpha(\hat{x})$*obsahuje iba jeden izolovaný bod, riešenie úlohy U2 je* $(\hat{x}, \hat{c})$ *také, že* $\hat{x}$ *je riešením U1 a* $\hat{c}$ *je rovné* $VaR_\alpha(x)$.

Uvedené tvrdenie je v čase písania tohto textu v štádiu dokazovania. Jeho dokázanie je jedným z cieľov nášho výskumu. Bez ohľadu na platnosť tvrdenia, v ďalšom texte definujeme a vyriešime úlohu príbuznú úlohe (4) v tom zmysle, že rizikové ohraničenie je substituované za funkcionál funkcie *G(x,c)* definovaný v prílohe A (definícia A.1).

2.4 Alternatívna formulácia problému

Definujme úlohu investora maximalizujúceho očakávanú užitočnosť z hodnoty svojho portfólia, ohraničeného funkcionálom $G_\alpha(x,c)$ nasledovne:

$$\begin{aligned} &\max_{W_T, c} \mathbb{E}\left[u\left(W_T\right)\right] \\ &\mathbb{E}\left[\xi_T W_T\right] \leq W_0 \\ &c + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(W_0 - W_T - c)^+\right] \leq \delta W_0 \end{aligned} \tag{5}$$

kde *u(.)*, W_0, W_T, α, δ, ξ_T a prvé z ohraničení sú definované ako v častiach 1.3 a 2.2. Druhé z ohraničení vyjadruje ohraničenie na riziko formou funkcionálu príbuznému $CVaR_\alpha(W_T)$ v zmysle tvrdenia 1 z predošlej časti.

3 Optimálne portfólio a jeho vlastnosti

3.1 Riešenie v terminálnom čase T

Riešením úlohy (5) je optimálna hodnota portfólia v terminálnom čase, ktorú sa investor bude snažiť zaistiť vhodným nákupom a predajom aktív vzhľadom k uplatneným ohraničeniam. Úlohu riešime ako dvojkrokovú optimalizáciu, v prvom kroku odvodíme optimálnu hodnotu portfólia ako funkciu parametra c a v druhom kroku úlohu riešime vzhľadom k hodnote parametra c, o čom hovorí nižšie uvedená veta.

Veta 1. *Pre každú hodnotu parametra c nadobúda úloha (5) maximum v bode:*

$$\hat{W}_T \equiv \hat{W}_T(c) = \begin{cases} I(y_1\xi_T) & ak\ \xi_T < \underline{\xi} \\ W_0 - c & ak\ \underline{\xi} \leq \xi_T < \overline{\xi} \\ I\left(y_1\xi_T - \frac{y_2}{\alpha}\right) & ak\ \overline{\xi} \leq \xi_T, \end{cases} \tag{6}$$

kde $\underline{\xi} = u'(W_0 - c)/y_1$, $\overline{\xi} = (u'(W_0 - c) + y_2/\alpha)/y_1$ *a* $y_1, y_2 \geq 0$ *sú riešením sústavy rovníc:*

$$\mathbb{E}\left[\xi_T \hat{W}_T(y_1, y_2)\right] = W(0)$$
$$c + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(W_0 - \hat{W}_T(y_1, y_2) - c)^+\right] = \delta W_0 \ \ alebo\ \ y_2 = 0.$$

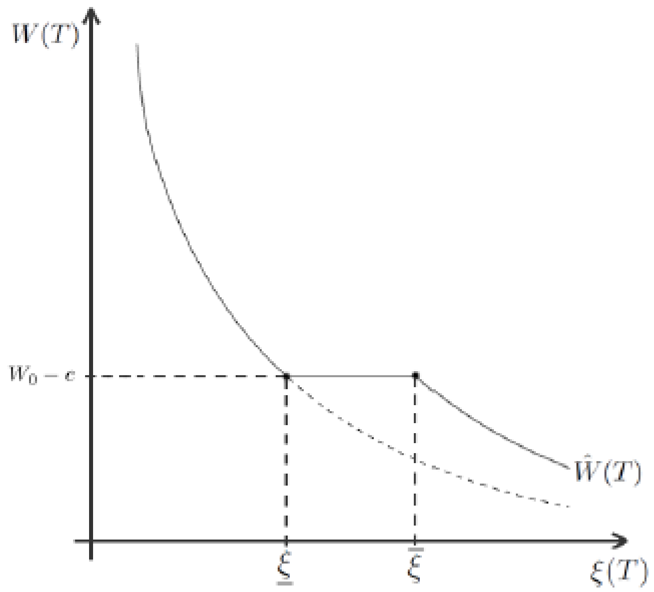
Dôkaz vety je uvedený v prílohe B.

Optimálna voľba konečnej hodnoty portfólia, ku ktorej bude investor svojou investičnou stratégiou smerovať, závisí od hodnoty stavovej premennej *ξ(T)*. Premenná *ξ(T)* vyjadruje stav, v akom sa trh nachádza. Vysoké hodnoty *ξ(T)* vyjadrujú negatívny vývoj na trhu, t.j. ceny aktív klesajú, naopak nízke hodnoty *ξ(T)* vyjadrujú pozitívnu situáciu na trhoch, t.j. rastúci trend v cenách aktív. V prípade, ak by sme uvažovali trh iba s jedným aktívom, táto informácia by bola úplne popísaná hodnotou *S(T)*, v takomto prípade by sa riešenie dalo vyjadriť ako funkcia premennej *S(T)*. V prípade existencie viacerých aktív je však nutné riešenie charakterizovať ako funkciu premennej *ξ(T)*, v ktorej sú agregované informácie o cenách všetkých aktív.

Na obrázku 1 je znázornený priebeh optimálneho bohatstva. Z obrázku, ako aj z formulácie optimálneho riešenia a vlastností funkcie $u(.)$, je zrejmý klesajúci (resp. nerastúci) charakter riešenia v premennej $\xi(T)$. Uvedená skutočnosť má pomerne jednoduchú interpretáciu. V prípade klesajúcich trhov je zaisťovanie hodnoty portfólia pomerne drahé, preto investor volí konzervatívnejšie úrovne zaistenia. Naopak, v prípade pozitívnej situácie na trhu je zaistenie výnosu lacné, preto investor volí vyššie cieľové úrovne zaistenia. Zaisťovanie hodnoty portfólia v jednotlivých stavoch je kompromisom medzi cenou zaistenia a poklesu očakávaného úžitku, v prípade nízkej hodnoty portfólia v zlých stavoch. Do rozhodovania vstupuje samozrejme aj samotné rizikové ohraničenie, ktoré nastavuje určité požiadavky na pravdepodobnostné rozdelenie konečnej hodnoty portfólia a rozpočtové ohraničenie, ktoré výsledok naškáluje vzhľadom k veľkosti počiatočného kapitálu.

Okrem klesajúceho charakteru je zrejmé aj rozdelenie stavov na tri oblasti, na ktorých má riešenie odlišný priebeh:

1. oblasť vyjadrujúca pozitívnu situáciu na trhoch, kedy investor volí úroveň zaistenia v rovnakej štruktúre ako investor v štandardnej úlohe (riešenie štandardnej úlohy, t.j. bez ohraničenia na riziko je na obrázku 1 znázornené prerušovanou čiarou),
2. oblasť, kedy investor volí úplné poistenie proti očakávaným stratám, vzhľadom k relatívne prijateľnej cene zaistenia,
3. oblasť, kedy investor volí iba čiastočné zaistenie (s klesajúcim trendom) vzhľadom k rastúcim cenám zaistenia hodnoty portfólia v týchto stavoch.



Obr. 1: Optimálne riešenie úlohy (5) v prípade, že ohraničenie na riziko bude uplatnené.

3.2 Riešenie v časoch pred investičným horizontom

V tejto časti odvodíme proces optimálnej hodnoty portfólia $\widehat{W}(t)$, ktorý bude v terminálnom čase nadobúdať rovnaké pravdepodobnostné rozdelenie ako náhodná premenná $\widehat{W}(T)$ definovaná vo vzťahu (6).

Proces $\widehat{W}(t)$ odvodíme za predpokladu tzv. *izoelastickej* funkcie užitočnosti, definovanej: $u(x) = x^p / p$, kde $p < 1$ a konštantných parametrov r a κ. Z definície procesu $\xi(t)$ vyplýva, že ide o tzv. *gausovský proces*, t.j. pre podmienené rozdelenie náhodnej premennej $\ln \xi_T$ v čase t platí:

$$\ln \xi_T | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}\left(ln\xi_t - (r + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2)(T-t), \|\kappa\|^2(T-t) \right).$$

Definujme funkciu

$$f(t, \xi_t) = \mathbb{E}\left[\frac{\xi_T}{\xi_t} \hat{W}_T(\hat{c}) \,|\, \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}\left[\frac{\xi_T}{\xi_t} \hat{W}_T(\hat{c}) \,|\, \xi_t \right],$$

kde druhá rovnosť vyplýva z toho, že informácia v čase t je úplne vyjadrená hodnotou $\xi(t)$. Z uvedeného vyplýva, že funkcionál na pravej strane rovnosti vyjadrujúci rizikovo-neutrálnu súčasnú hodnotu terminálnej hodnoty portfólia, je *markovský* a funkcia $f(t, \xi(t))$ existuje a pre hodnotu portfólia v čase t platí:

$$\begin{aligned}
\hat{W}_t &= f(t,\xi_t) = \mathbb{E}_t\left[\frac{\xi_T}{\xi_t}\hat{W}_T(\hat{c})\right] \\
&= \frac{1}{\xi_t}\,\mathbb{E}_t\left[\xi_T\left(I(y_1\xi_T)1_{\xi_T\le\underline{\xi}} + (W_0-\hat{c})1_{\underline{\xi}\le\xi_T<\overline{\xi}} + I\left(y_1\xi_T - \frac{y_2}{\alpha}\right)1_{\overline{\xi}\le\xi_T}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\xi_t}\,\mathbb{E}_t\left[\xi_T\left((y_1\xi_T)^{1-p}1_{\xi_T\le\underline{\xi}} + (W_0-\hat{c})1_{\underline{\xi}\le\xi_T<\overline{\xi}} + \left(y_1\xi_T - \frac{y_2}{\alpha}\right)^{1-p}1_{\overline{\xi}\le\xi_T}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\xi_t}\,\mathbb{E}_t\left[\xi_T\left(y_1^{1-p}e^{(1-p)\ln\xi_T}1_{\ln\xi_T\le\ln\underline{\xi}}\right.\right. \\
&\qquad\qquad\left.\left. +(W_0-\hat{c})1_{\ln\underline{\xi}\le\ln\xi_T<\ln\overline{\xi}} + \left(y_1\xi_T - \frac{y_2}{\alpha}\right)^{1-p}1_{\overline{\xi}\le\xi_T}\right)\right] \\
&= \frac{y_1^{1-p}}{\xi_t}\underbrace{\mathbb{E}_t\left[e^{(1-p)\ln\xi_T}1_{\ln\xi_T\le\ln\underline{\xi}}\right]}_{G_1(t)} + \frac{W_0-\hat{c}}{\xi_t}\underbrace{\mathbb{E}_t\left[1_{\ln\underline{\xi}\le\ln\xi_T<\ln\overline{\xi}}\right]}_{G_2(t)} \\
&\qquad + \frac{1}{\xi_t}\underbrace{\mathbb{E}_t\left[\left(y_1\xi_T - \frac{y_2}{\alpha}\right)^{1-p}1_{\overline{\xi}\le\xi_T}\right]}_{G_3(t)},
\end{aligned}$$

kde pre explicitné odvodenie funkcií $G_1(t)$ a $G_2(t)$ aplikujeme lemu C.1 z prílohy C po dosadení vstupných parametrov uvedených nižšie:

$$G_1: \quad Y = \ln\xi_T,\quad \alpha = \frac{1-p}{p},\quad y_1 = -\infty,\quad y_2 = \ln\underline{\xi}$$

$$G_2: \quad Y = \ln\xi_T,\quad \alpha = 1,\quad y_1 = \ln\underline{\xi},\quad y_2 = \ln\overline{\xi}$$

$$\begin{aligned}
G_1, G_2: \quad m &= ln\xi_t - (r + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2)(T-t) \\
s^2 &= \|\kappa\|^2(T-t)
\end{aligned}$$

Z uvedenej lemy dostávame explicitné vyjadrenie funkcií $G_1(t)$ a $G_2(t)$:

$$G_1(t) \equiv \frac{y_1^{1-p}}{\xi_t} \exp\left\{\frac{p-1}{2p}\|\kappa\|^2(T-t)\left(1+\frac{p-1}{p}\right) + \frac{p-1}{p}(\ln\xi_t - r(T-t))\right\}$$
$$\Phi\left(\frac{\ln\underline{\xi} - \ln\xi_t + r - \frac{p+1}{2(p-1)}\|\kappa\|^2(T-t)}{\|\kappa\|\sqrt{T-t}}\right)$$
$$G_2(t) \equiv \frac{W_0-\hat{c}}{\xi_t} e^{\ln\xi_t - r}\left(\Phi\left(\frac{\ln\overline{\xi} - \xi_t + r - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2(T-t)}{\|\kappa\|\sqrt{T-t}}\right)\right.$$
$$\left. -\Phi\left(\frac{\ln\underline{\xi} - \ln\xi_t + r - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2(T-t)}{\|\kappa\|\sqrt{T-t}}\right)\right).$$

Pre funkciu G_3 nepoznáme explicitné vyjadrenie, budeme ju preto reprezentovať:

$$G_3(t) = \frac{1}{\xi_t}\int_{\underline{\xi}}^{\infty}\left(y_1\xi_T - \frac{y_2}{2}\right)^{1-p} d\mathbb{P}(\xi_T).$$

Nakoniec, pre optimálnu hodnotu portfólia v čase $t \in [0, T]$ platí:

$$\hat{W}(t) = G_1(t) + G_2(t) + G_3(t).$$

3.3 Optimálna (dynamická) investičná stratégia

Označme $\theta(t)$ investičnú stratégiu, ktorá vedie k optimálnej hodnote portfólia definovanej vo vete 1 v časti 3.1. $\theta(t)$ je N-rozmerný vektor, ktorého zložky vyjadrujú hodnotu investície vloženej v jednotlivých rizikových aktívach v každom čase t. Hodnota vektora $\theta(t)$ je daná predpisom :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(t) &= -\frac{\left(\sigma^T\right)^{-1}\kappa(t)^T}{\hat{W}(t)}\frac{\partial\hat{W}}{\partial\xi(t)}\xi(t)\\ &= -\frac{\gamma}{\hat{W}(t)}\hat{\theta}^B(t)\frac{\partial W}{\partial\xi(t)}\xi(t)\end{aligned}$$

kde σ, κ, $\xi(t)$, $\widehat{W}(t)$ sú definované ako v predošlom texte. Za povšimnutie stojí, že uvedená investičná stratégia je odvodená od stratégie investora riešiaceho štandardnú úlohu (ozn. $\hat{\vartheta}^B$) definovanú vo vzťahu (1) v časti 1.3.

4 Záver

V našom výskume sa venujeme štúdiu zaistených investičných stratégií založených na rizikovej miere CVaR. V prvej časti sme definovali základné predpoklady modelu, popísali sme význam predpokladu o úplnom trhu a stavovej premennej, definovali sme štandardnú úlohu optimalizácie na úplnom trhu. V druhej kapitole sme definovali rizikovú mieru CVaR a príbuzný funkcionál, s použitím ktorých sme zostavili úlohu CVaR-RM investora a tiež alternatívnu úlohu, ktoré podľa našej hypotézy vedú k podobným výsledkom. Odvodili sme riešenie alternatívnej úlohy s použitím metodiky Kuhna a Tuckera a definovali sme dynamiku vývoja optimálnej hodnoty portfólia a optimálnu investičnú stratégiu s použitím teórie stochastických procesov. V ďalšom výskume máme ambíciu ukázať, že investičné stratégie založené na rizikovej miere CVaR a jej príbuznom funkcionále dosiahnu lepšie kvalitatívne vlastnosti ako investičné stratégie predstavené v práci Basak a Shapiro (2001).

Príloha A

Prehľad relevantných výsledkov o ekvivalencii vybraných úloh

Definícia A.1: *Funkcia $G_\alpha(x,c)$ je definovaná:*

$$G_\alpha(x,c) = c + \frac{1}{\alpha}\int_{y\in R^n} (l(x,y)-c)^+ \; f(y)\,dy,$$

kde $\alpha \in (0,1)$ je exogénny parameter, $c \in R$, $l(x,y) \in R$ funkcia deterministického vektora $x \in X$ a náhodného vektora $y \in R^m$ s rozdelením $f(y)$.

Veta A.2: *Funkcia $G_\alpha(x,c)$, definovaná podľa A.1 je konvexná a spojite diferencovateľná podľa premennej c. Pre každé $x \in X$ hodnota miery $CVaR_\alpha(x)$ môže byt dopočítaná zo vzťahu:*

$$CVaR_\alpha(x) = \min_{c\in R} G_\alpha(x,c),$$

kde množina optimálnych riešení uvedenej optimalizačnej úlohy je definovaná

$$A_\alpha(x) = \arg\min_{c \in R} G_\alpha(x, c)$$

je neprázdny, ohraničený a uzavretý interval (prípadne aj izolovaný bod). Hodnota $VaR_\alpha(x)$ je daná:

$$VaR_\alpha(x) = \text{ľavý hraničný bod množiny } A_\alpha(x)$$

a platí:

$$VaR_\alpha(x) \in \arg\min_{c \in \mathbb{R}} G_\alpha(x, c) \text{ a } CVaR_\alpha(x) = G_\alpha(x, VaR_\alpha(x)).$$

Dôkaz vety je uvedený v práci Rockafellar a Uryasev (2002).

Pre priblíženie vzťahov definovaných v definícii A.1 a vete A.2 môžeme vektor x interpretovať ako portfólio z množiny všetkých prípustných portfólií X, vektor y ako náhodné ceny aktív a funkciu $l(x,y)$ ako stratu portfólia x na trajektórii y. Vlastnosť konvexnosti funkcie $G_\alpha(x,c)$, ktorá je dôležitá pri hľadaní globálneho optima, je dokázaná napr. v práci Rockafellar (1970).

Veta A.3: *Minimalizácia miery $CVaR_\alpha(x)$ podľa premennej $x \in X$ je ekvivalentná s minimalizáciou funkcie $G_\alpha(x,c)$ podľa $(x, c) \in X \times R$ v tom zmysle, že:*

$$\min_{x \in X} CVaR(\alpha) = \min_{(x,c) \in X \times \mathbb{R}} G_\alpha(x, c),$$

kde bod $(\hat{x}, \hat{c})$ je bodom minima pravej strany rovnosti práve vtedy keď $\hat{x}$ je bodom minima ľavej strany rovnosti a $\hat{c} \in A_\alpha(\hat{x})$. Navyše, ak množina $A_\alpha(\hat{x})$ obsahuje práve jeden izolovaný bod, minimalizácie funkcie $G_\alpha(x,c)$ cez premenné (x,c) vráti pár $(\hat{x}, \hat{c})$ (nie nutne jednoznačný), kde $\hat{x}$ minimalizuje $CVaR_\alpha(x)$ a $\hat{c}$ je rovné $VaR_\alpha(x)$.

Dôkaz vety je uvedený v práci Krokhmal et al. (2002).

Veta A.4: *Nižšie uvedené optimalizačné úlohy:*

$$\min_{x \in X} -R(x), CVaR(\alpha) \leq \omega, x \in X$$
$$\min_{(c,x) \in X \times \mathbb{R}} -R(x), G_\alpha(x, c) \leq \omega, x \in X \qquad \text{(O1 a O2)}$$

sú ekvivalentné v tom zmysle, že ich účelové funkcie nadobúdajú rovnaké optimálne hodnoty. Navyše, ak je CVaR ohraničenie v úlohe O1 aktívne, pár $(\hat{x}, \hat{c})$ dosahuje minimum úlohy O2 práve vtedy, keď iba $\hat{x}$ dosahuje minimum úlohy O1 a $\hat{c} \in A_\alpha(\hat{x})$. V špeciálnom prípade, ak množina $A_\alpha(\hat{x})$ obsahuje iba jeden izolovaný bod, riešením úlohy O2 je pár $(\hat{x}, \hat{c})$ taký, že $\hat{x}$ maximalizuje výnos a $\hat{c}$ je rovné zodpovedajúcej hodnote $VaR_\alpha(x)$.

Dôkaz vety je uvedený v práci Krokhmal et al. (2002).

Príloha B

Dôkaz vety 1 z časti 3.1

Úlohu riešime v dvoch krokoch: v prvom kroku nájdeme optimálne rozloženie bohatstva v závislosti od ξ pre každú hodnotu parametra c, v druhom kroku nájdeme maximum cez všetky hodnoty parametra c.

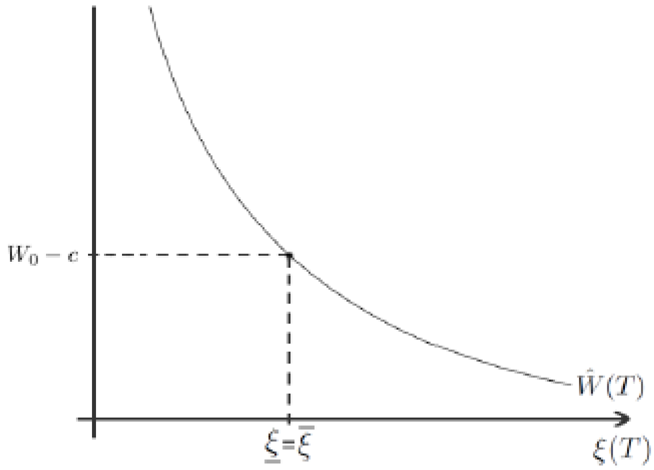
Predpokladajme, že riešenie $\widehat{W}(T)$ definované vo vzťahu (6) je optimálne. Ak pre rozdelenie hodnoty portfólia v terminálnom čase platí:

$$c+\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(W_0-\hat{W}_T(y_1,y_2)-c)^+\right]<\delta W_0,$$

ohraničenie na riziko sa neuplatní a $y_2 = 0$.

Z definície premenných vyplýva $\overline{\xi} = \underline{\xi}$ a $\widehat{W}(T) = I(y_1\xi_T)$ pre každé ξ_T, t.j. riešenie zodpovedá riešeniu triviálnej maximalizačnej úlohy s konkávnou účelovou funkciou a lineárnym ohraničením na rozpočet.

Zodpovedá situácii na obrázku 2.



Obr. 2: Optimálne riešenie úlohy (5) v prípade, že ohraničenie na riziko nebude uplatnené.

Inak platí rovnosť v ohraničení na riziko:

$$c+\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(W_0-\hat{W}_T(y_1,y_2)-c)^+\right]=\delta W_0$$

a úlohu riešime ako optimalizačnú úlohu s viazaným extrémom. Úlohu prevedieme na úlohu maximalizácie účelovej funkcie s dodatočnými členmi vyjadrujúcim ohraničenia (Kuhn-Tucker), o čom hovorí nasledovná lema:

Lema B.1: *Riešenie* $\widehat{W}(T)$ *je riešením úlohy:*

$$\max_{W\in[0,\infty)} L\left(W,y_1,y_2\right)$$
$$L\left(W,y_1,y_2\right)\equiv u\left(W\right)-y_1\xi W-y_2\frac{1}{\alpha}(W_0-W_T-c)^{+},$$

kde ξ, α, $c\geq 0$ *sú exogénne parametre a* y_1, $y_2\geq 0$.

Dôkaz. Najskôr nájdeme všetkých kandidátov na bod maxima (body lokálnych extrémov a krajné body intervalu). Posledný sčítanec vnáša do úlohy okrem nekonkávnosti bod nediferencovateľnosti. Kandidátov preto hľadáme zvlášť na intervale $[0,W_0\text{-}c]$ *a zvlášť na* $(W_0\text{-}c,\infty)$.

Nutná podmienka optima je v tvare:

1. *ak hľadáme optimálne W na intervale* $[0,W_0\text{-}c]$:

$$\begin{aligned}0&=u'\left(\hat{W}\right)-y_1\xi+\frac{y_2}{\alpha}\\ \hat{W}&=I\left(y_1\xi-\frac{y_2}{\alpha}\right),\end{aligned}$$

2. *ak hľadáme optimálne W na intervale* $(W_0\text{-}c,\infty)$:

$$\begin{aligned}0&=u'\left(\hat{W}\right)-y_1\xi\\ \hat{W}&=I\left(y_1\xi\right).\end{aligned}$$

Identifikovali sme 3 kandidátov pre bod globálneho maxima: $I(y_1\xi)$, $W_0\text{-}c$

a $I(y_1\xi-y_2/\alpha)$ *(z vlastností účelovej funkcie je zrejmé, že v bodoch 0 a* ∞ *sa globálne maximum nachádzať nebude). Pre rôzne konfigurácie exogénnych parametrov* ξ, c *a* α *môže funkcia nadobúdať globálne maximum v rôznych bodoch, pre určenie bodu maxima je preto nutné porovnať funkčné hodnoty účelovej funkcie pre rôzne hodnoty parametra* ξ *vo vzťahu k ostatným parametrom.*

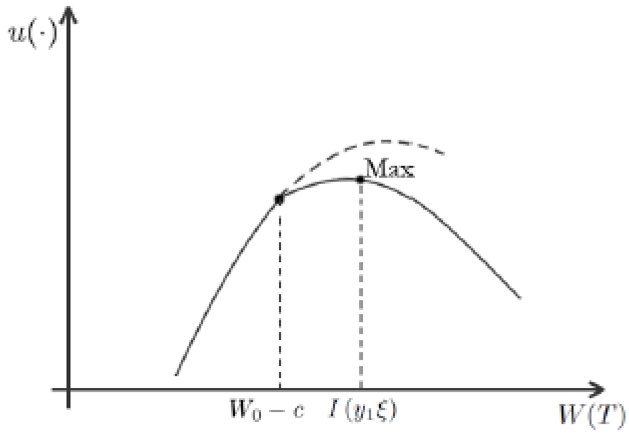
Definujme body c *a* $\underline{\xi}$ *v ktorých platia rovnosti účelovej funkcie v bodoch* $I\ (y_1\xi)$,), $W_0\text{-}c$ *a* $I(y_1\xi-y_2/\alpha)$:

$$\begin{aligned}\underline{\xi}:\quad I\left(y_1\underline{\xi}\right)&=W_0-c\\ \overline{\xi}:\quad I\left(y_1\overline{\xi}-\frac{y_2}{\alpha}\right)&=W_0-c.\end{aligned}$$

Ak bude parameter ξ *nadobúdať hodnoty v intervale* $[0,\underline{\xi})$, *z vlastností funkcie I(.) platia nerovnosti:* $I(y_1\ \xi)>W_0\text{-}c$ *a* $I(y_1\xi-y_2/\alpha)>W_0\text{-}c$, *t.j. oba body obratu funkcie sa nachádzajú v oblasti vpravo od bodu* $W_0\text{-}c$. *Pre hodnotu účelovej funkcie platí:*

$$u\left(I(y_1\xi)\right)-y_1\xi I(y_1\xi)+y_2\frac{1}{\alpha}I(y_1\xi)>u\left(W_0-c\right)-y_1\xi(W_0-c)+y_2\frac{1}{\alpha}(W_0-c),$$

čiže pre takéto nastavenie parametrov funkcia nadobúda maximum v bode $I(y_1\xi)$. Zodpovedá situácii na obrázku 3.

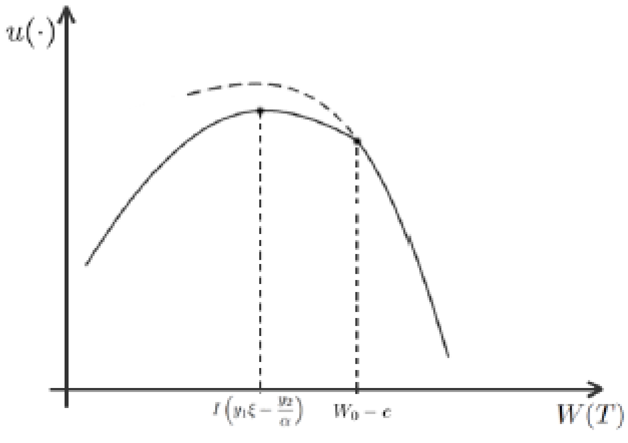


Obr. 3: Porovnanie možných tvarov účelovej funkcie pre hodnoty parametra $\xi \in [0, \underline{\xi})$.

Ak bude parameter ξ nadobúdať hodnoty v intervale $[\overline{\xi},\infty)$, z vlastností funkcie I(.) platia nerovnosti: $I(y_1\xi) < W_0\text{-}c$ a $I(y_1\xi - y_2/\alpha) \leq W_0\text{-}c$ a pre hodnotu účelovej funkcie platí:

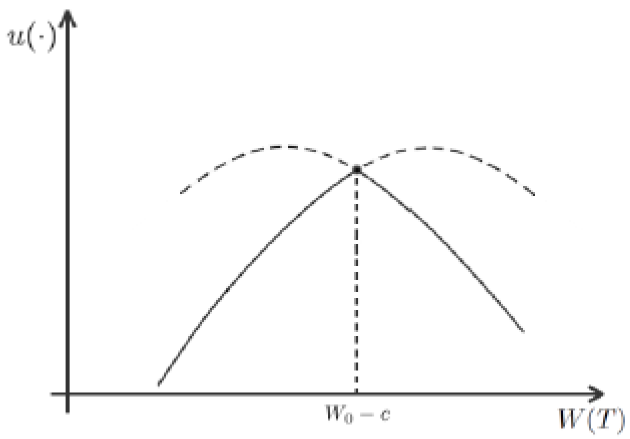
$$u\left(I\left(y_1\overline{\xi} - \frac{y_2}{\alpha}\right)\right) - y_1\overline{\xi}I\left(y_1\overline{\xi} - \frac{y_2}{\alpha}\right) + \frac{y_2}{\alpha}I\left(y_1\overline{\xi} - \frac{y_2}{\alpha}\right)$$
$$\geq u\left(W_0 - c\right) - y_1\overline{\xi}(W_0 - c) + \frac{y_2}{\alpha}(W_0 - c),$$

čiže globálne maximum sa nachádza v bode $I(y_1\xi - y_2/\alpha)$. Zodpovedá situácii na obrázku 4.



Obr. 4: Tvar účelovej funkcie pre hodnoty parametra $\xi \in [\overline{\xi},\infty)$.

Ak bude parameter ξ nadobúdať hodnoty v intervale $[\underline{\xi},\overline{\xi})$, z vlastností funkcie I(.) platia nerovnosti: $I(y_1\xi) \leq W_0\text{-}c$ a $I(y_1\xi - y_2/\alpha) > W_0\text{-}c$, čiže jediný kandidát na maximum je bod W_0-c a preto je aj bodom globálneho maxima. Zodpovedá situácii na obrázku 5.



Obr. 5: Porovnanie funkčných hodnôt účelovej funkcie v bodoch lokálnych extrémov pre hodnoty parametra $\xi \in [\underline{\xi}, \overline{\xi})$.

Z vyššie uvedeného vyplýva, že riešenie $\widehat{W}$ *je globálnym maximom funkcie* $L(W,y_1,y_2)$ *pre všetky možné stavy* ξ, *čo využijeme v nižšie uvedenej nerovnosti.*

Vráťme sa späť k úlohe (5). Nech W(T) je ľubovoľný kandidát pre optimálne riešenie úlohy, potom platí:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[u(\hat{W}_T)] - \mathbb{E}[u(W_T)] \\
&= \mathbb{E}[u(\hat{W}_T)] - \mathbb{E}[u(W_T)] - y_1 W_0 + y_1 W_0 - \frac{y_2}{\alpha}\delta W_0 + \frac{y_2}{\alpha}\delta W_0 \\
&\geq \mathbb{E}[u(\hat{W}_T)] - \mathbb{E}[u(W_T)] - y_1 \mathbb{E}[\xi_T \hat{W}_T] + y_1 \mathbb{E}[\xi_T W_T] \\
&-y_2(c + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(W_0 - \hat{W}_T - c)^+\right]) + y_2(c + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(W_0 - W_T - c)^+\right]) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Uvedené nerovnosti vyplývajú z ohraničení úlohy (5) a toho, že $\widehat{W}(T)$ *je globálne maximum funkcie* $L(W,y_1,y_2)$ *(dôkaz lemy B.1). Tvar riešenia v prípade uplatnenia ohraničenia na riziko zodpovedá situácii na obrázku (1) v časti 3.1.*

Ukázali sme, že bod $\widehat{W}(T)$ *rieši úlohu (5) pre každú hodnotu parametra c. Na to, aby sa úloha (5) transformovala na úlohu (4) s ohraničením na riziko vo forme miery* $CVaR_\alpha(W_T)$, *musíme v zmysle tvrdenia 1 nájsť také* $\hat{c}$, *ktoré rieši úlohu:*

$$\begin{aligned}
&\max_c \mathbb{E}\left[u\left(\hat{W}_T(c)\right)\right] \\
&\mathbb{E}\left[\xi_T \hat{W}_T(c)\right] \leq W_0 \\
&c + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(W_0 - \hat{W}_T(c) - c)^+\right] \leq \delta W_0
\end{aligned}$$

Príloha C

Lema o strednej hodnote lognormálnej náhodnej premennej

Lema C.1*: (). Nech $Y \sim N(m,s^2)$*

a $y_1 \leq y_2$, potom platí:

$$\mathbb{E}\left[e^{\alpha Y} 1_{y_1 \leq Y < y_2}\right] \;=\; e^{\alpha m + \frac{1}{2}\alpha^2 s^2}\left(\Phi\left(\frac{y_2 - m - \alpha s^2}{s}\right) - \Phi\left(\frac{y_1 - m - \alpha s^2}{s}\right)\right),$$

kde $\Phi(.)$ je kumulovaná distribučná funkcia štandardizovaného normálneho rozdelenia.

Použitá literatúra

[1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D., (1999): *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, 9, 203-228.

[2] Basak, S., Shapiro, A., (2001): *Value-at-Risk Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices*, Review of Financial Studies, 14, 371-405.

[3] Föllmer, H., Schied, A., (2010): *Convex and Coherent Risk Measures*, Encyclopedia of Quantitative Finance, John Wiley & Sons, 355-363.

[4] Gollier, C., (1999): *The Economics of Risk and Time*, The MIT Press.

[5] Krokhmal, P., Palmquist, J., Uryasev, S., (2002): *Portfolio Optimization with Conditional Value-At-Risk Objective and Constraints*, The Journal of Risk, Vol. 4, 2, 11-27.

[6] Leland, H., Rubinstein, M., (1988): *The evolution of portfolio insurance, in dynamic heding*, A guide to portfolio insurance.

[7] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V., (2005): *Kapitoly z finančnej matematiky*, Bratislava, EPOS.

[8] Rockafellar, R.T., (1970): *Convex Analysis*, Princeton Mathematics, 28, Princeton University Press.

[9] Rockafellar, R.T., Uryasev, S.P., (2002): *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions*, Journal of Banking and Finance, 26, 1443-1471.

[10] Rockafellar, R.T., Uryasev, S.P., (2000): *Optimization of Conditional Value-at-Risk*, Journal of Risk, 2, 21-42.

[11] Perold, A., (1986): *Constant portfolio insurance*. Harvard, Harvard Business School.

[12] Pflug, G., (2007): *Modeling, Measuring and Managing Risk*, World Scientific Publishing Company.