Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Mgr. Martin Harcek

Autoreferát dizertačnej práce

Dynamické riadenie portfólia s použitím rizikových mier

na získanie akademického titulu *philosophiae doctor*

v odbore doktorandského štúdia:
9.1.9 Aplikovaná matematika

Bratislava 2014

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na katedre aplikovanej matematiky a štatistiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave

Predkladateľ: Mgr. Martin Harcek
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Školiteľ: Doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Oponenti: ....
....
....
....
....
....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná .... o .... h
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie dňa ....

v študijnom odbore 9.1.9 Aplikovaná matematika

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Predseda odborovej komisie:
Prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

1 Úvod

V práci [2] autori Basak a Shapiro definujú problém maximalizácie užitočnosti portfólia, s rizikovým ohraničením v podobe limitu na veľkosť miery VaR v konečnom investičnom horizonte. Autori poukazujú na nevhodné vlastnosti VaR-RM stratégie pre riadenie rizikovosti portfólia, ktoré sú priamym dôsledkom definície miery VaR. Ich hlavným argumentom je skutočnosť, že miera VaR kontroluje iba pravdepodobnosť výskytu najväčších strát a nie ich veľkosť, v dôsledku čoho môže VaR-RM stratégia v zlých stavoch implikovať ďaleko vyššie straty, ako by dosiahlo portfólio bez rizikového ohraničenia.

V práci definujú alternatívnu rizikovú mieru LEL (a angl. Limited Expected Losses), ktorá okrem pravdepodobnosti výskytu významných strát kontroluje aj ich veľkosť. Definujú tiež investičnú stratégiu založenú na miere LEL, ktorá vedie ku kvalitatívne lepším portfóliám, ako stratégia založená na miere VaR. Rizikovú mieru definujú ako cenu predajnej opcie európskeho typu, t.j. veľkosť rizika je vyjadrená cenou poistenia hodnoty portfólia.

Samotní autori upozorňujú, že riziková miera LEL, rovnako ako aj miera VaR, nepatrí do triedy tzv. koherentných mier, čo naznačuje, že miera LEL nemusí byť efektívna v meraní rizikového profilu portfólia. Uvedená skutočnosť je motivujúca pre hľadanie alternatívnej rizikovej miery, ktorá by svojimi vlastnosťami bola vhodnejšia k riadeniu rizikovej expozície portfólia. Takouto mierou sa javí byť koherentná riziková miera nazývaná AVaR, z angl. Average Value-at-Risk, ktorú v práci [9] z roku 2000 definovali Rockafellar a Uryasev. Táto práca priamo nadväzuje na vyššie uvedené výsledky definovaním dynamickej investičnej stratégie, umožňujúcej kontrolu rizikovej expozície s použitím miery AVaR.

2 Axiomatika rizikových mier

Uvažujme pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathbb{P})$. *Rizikom* budeme nazývať náhodnú premennú X vyjadrujúcu výnos portfólia v čase konečného investičného horizontu T, ktorý v stave $\omega \in \Omega$ nadobudne hodnotu $X(\omega)$. Nech $\mathcal{G}$ je množina všetkých rizík, t.j. všetkých funkcií $X : \Omega \to \mathbb{R}$ a nech $\mathcal{A}$ je tzv. množina *akceptovateľnosti*, t.j. množina takých rizík, ktoré sú pre investora akceptovateľné z pohľadu možných strát na hodnote portfólia a dôsledkov plynúcich z týchto strát (napr. bankrot, insolventnosť investora, a.i.). Nižšie uvádzame axiómy pre množiny akceptovateľnosti, ako boli definované v práci [1].

Axióma 1. *Množina akceptovateľnosti $\mathcal{A}$ obsahuje množinu L_+, kde L_+ je množina všetkých nezáporných prvkov množiny $\mathcal{G}$.*

Axióma 2. *Množina akceptovateľnosti $\mathcal{A}$ sa neprekrýva s množinou L_{--}, kde*

$$L_{--} \equiv \{X \,|\, \forall\, \omega \in \Omega,\ X(\omega) < 0\}.$$

Axióma 3. *Pre množinu akceptovateľnosti $\mathcal{A}$ platí: $\mathcal{A} \cap L_- = \{0\}$, kde L_- je množina všetkých záporných prvkov množiny $\mathcal{G}$ a $\{0\}$.*

Axióma 4. *Množina $\mathcal{A}$ je konvexná.*

Axióma 5. *Množina $\mathcal{A}$ je pozitívne homogénny kužeľ.*

V ďalšom texte označme rizikovú mieru ako funkciu $\rho(\cdot)$. Kladnú hodnotu $\rho(X)$ môžeme interpretovať ako požiadavku na navýšenie kapitálu, po ktorom sú straty na hodnote portfólia pre investora akceptovateľné. Záporná hodnota $\rho(X)$ naznačuje, že po znížení kapitálu vo výške $\rho(X)$ sú možné straty na hodnote portfólia pre investora stále akceptovateľné (pod pojmom kapitál môžeme rozumieť napríklad vlastné imanie investičnej spoločnosti, t.j. navýšením imania si spoločnosť vytvára rezervy, z ktorých vie vykryť prípadné straty na hodnote portfólia).

Definícia 1. Riziková miera *je zobrazenie z množiny $\mathcal{G}$ do $\mathbb{R}$.*

Definícia 2. *Riziková miera spojená s množinou akceptovateľnosti $\mathcal{A}$ je zobrazenie z $\mathcal{G}$ do $\mathbb{R}$ ozn. $\rho_{\mathcal{A},r}$ definované:*

$$\rho_{\mathcal{A},r}(X) \equiv \inf\{m \in \mathbb{R} \,|\, m \cdot r + X \in \mathcal{A}\},$$

kde r je výnos referenčného investičného nástroja (napr. bezrizikového dlhopisu).

Definícia 3. *Množina akceptovateľnosti spojená s rizikovou mierou ρ je množina A_ρ definovaná:*

$$A_\rho \equiv \{X \in \mathcal{G} \,|\, \rho(X) \leq 0\}.$$

Axióma T. *Translačná invariancia:* $\forall X \in \mathcal{G}$ a $\forall c \in \mathbb{R}: \quad \rho(X + c \cdot r) = \rho(X) - c.$

Axióma S. *Subaditivita:* $\forall X$ a $Y \in \mathcal{G}: \quad \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$

Axióma PH. *Pozitívna homogenita:* $\forall \lambda \geq 0$ a $\forall X \in \mathcal{G}: \quad \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X).$

Axióma M. *Monotónnosť:* $\forall X$ a $Y \in \mathcal{G} : X \leq Y \implies \rho(X) \geq \rho(Y).$

Axióma R. *Relevantnosť:* $\forall X : X \leq 0$ a $X \not\equiv 0 \implies \rho(X) > 0.$

Vyššie uvedené axiómy majú pomerne zrejmú ekonomickú interpretáciu. Vlastnosť T zaručuje, že miera pracuje v rovnakých jednotkách ako je vyjadrená hodnota portfólia. Pokiaľ má miera vlastnosť T, potom pre každé X platí: $\rho(X + \rho(X) \cdot r) = 0$, kde uvedená rovnosť priamo súvisí s definíciou množiny akceptovateľnosti spojenej s mierou $\rho(\cdot)$. Vlastnosť S súvisí so vzťahom diverzifikácie portfólia a rizika, t.j. miera s vlastnosťou S priradí diverzifikovanému portfóliu pozostávajúceho z dvojice pozícií $X + Y$ nanajvýš takú rizikovú váhu ako oddeleným portfóliám X a Y v súčte. Miera, ktorá má vlastnosť PH je lineárna vzhľadom k veľkosti portfólia. Miera s vlastnosťou M priradí rizikovejšiemu portfóliu vyššiu rizikovú váhu a nakoniec vlastnosť R zaručuje, že pokiaľ riziko existuje, riziková miera ho zachytí.

Definícia 4. *Riziková miera s vlastnosťami translačnej invariancie, subaditivity, pozitívnej homogenity a monotónnosti sa nazýva* koherentná.

Na prácu [1] nadväzujú autori prác [4] a [5] definovaním vlastnosti konvexnosti a triedy tzv. *konvexných rizikových mier.*

Axióma K. *Konvexnosť:* $\forall X$ a $Y \in \mathcal{G}$ a $\forall \lambda \in [0, 1] : \rho(\lambda X + (1 - \lambda) Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda) \rho(Y).$

3 Stratégie s využitím rizikových mier

Uvažujme filtrovaný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Investor má možnosť investície do N rizikových aktív s náhodným výnosom (napr. akcie bez dividendového výnosu) a jedného bezrizikového aktíva s deterministickým výnosom $r(t)$ (napr. štátny dlhopis s vysokým ratingovým hodnotením). Všetky aktíva dostupné na trhu je možné zobchodovať za trhové ceny v ľubovoľných (resp. dostatočných) množstvách. Vo financiách sa takýto trh nazýva *likvidný*. Označme $S(t)$ vektor reprezentujúci cenu rizikových aktív a $B(t)$ cenu dlhopisu v čase t. Náhodné ceny rizikových aktív modelujeme s pomocou N-rozmerného geometrického Brownovho pohybu, t.j. dynamika trhu je daná nasledujúcimi rovnicami

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)\mu(t)dt + S(t)\sigma(t)dw(t) \\ dB(t) &= B(t)r(t)dt, \end{aligned}$$

kde $\mu(t) \equiv (\mu_1(t), \ldots, \mu_N(t))^\top$ je vektor driftov, matica $\sigma(t) \equiv \{\sigma_{jk}(t); j, k = 1, \ldots, N\}$ je matica volatilít rizikových aktív a $w(t) \equiv (w_1(t), \ldots, w_N(t))^\top$ je N-rozmerný Wienerov proces. Všetky stochastické procesy v modeli sú adaptované k filtrácii generovanej procesom $w(t)$.

Označme $W(0)$ počiatočnú hodnotu portfólia. Investor si zvolí konečný investičný horizont T, výplatnú funkciu portfólia $W(T)$ a investičnú stratégiu $\theta(t)$, ktorá vyjadruje podiel investície v jednotlivých rizikových aktívach. Potom pre hodnotu portfólia v ľubovoľnom čase $t \in (0, T)$ platí

$$dW(t) = W(t)\,\theta(t)^\top \big(\mu(t)dt + \sigma dw(t)\big) + W(t)\,\big(1 - \theta(t)^\top \underline{1}\big)\, r(t)\, dt, \qquad (1)$$

kde $\underline{1} \equiv (1, 1, \ldots, 1)^\top$. Takto definovaný trh je *úplný*, t.j. každá výplatná funkcia v budúcnosti môže byť zaistená obchodovaním dostupných aktív [3]. Tento predpoklad implikuje existenciu jedinej rizikovo-neutrálnej pravdepodobnostnej miery a s ňou spojeného procesu zmeny miery $\xi(t)$, ktorý je daný vzťahom

$$\begin{aligned} d\xi(t) &= -\xi(t)r(t)dt - \xi(t)\kappa(t)^\top dw(t) \\ \xi(0) &= 1, \end{aligned} \qquad (2)$$

kde $\kappa(t) = \sigma(t)^{-1}\,(\mu(t) - r(t)\underline{1})$ je *Sharpeov* koeficient trhovej ceny rizika.

Náhodnú premennú $\xi(T, \omega)$ môžeme interpretovať ako cenu *Arrow-Debreu* aktíva (viď napr. prácu [6]), resp. ako cenu zaistenia jednotkovej výplaty portfólia v stave $\omega \in \Omega$ na jednotku pravdepodobnosti $\mathbb{P}$ v čase T. V ďalších analýzach budeme premennú $\xi(t)$ uvažovať ako *stavovú premennú*[1].

Nakoniec predpokladáme, že preferencie investora vo vzťahu k riziku sú dobre charakterizované spojitou, dvakrát diferencovateľnou, rastúcou a konkávnou funkciou užitočnosti $u(\cdot)$, s vlastnosťami $\lim_{x\to 0} u'(x) = \infty$ a $\lim_{x\to\infty} u'(x) = 0$. V niektorých aplikáciách budeme predpokladať konkrétnu, tzv. izoelastickú funkciu užitočnosti definovanú

$$u(x) = \frac{x^p}{p} \quad p < 1, p \neq 0. \qquad (3)$$

[1]Pre lepšiu čitateľnosť matematických zápisov budeme premenné $W(0), W(T), \xi(0), \xi(t), \xi(T)$ v prípade potreby v ďalšom texte značiť W_0, W_T, ξ_0, ξ_t a ξ_T.

3.1 Optimalizácia nezaisteného portfólia

Cieľom investora je, voľbou vhodnej výplatnej funkcie W_T, maximalizovať očakávanú užitočnosť z hodnoty portfólia v čase investičného horizontu,. Predpoklad o úplnosti trhu implikuje tzv. *rozpočtové ohraničenie*

$$\mathbb{E}\left[\xi_T W_T\right] \leq W_0, \tag{4}$$

kde ξ_T je stavová premenná určená vzťahom (2) a W_0 je počiatočná hodnota portfólia. Investovaním na úplnom trhu má každý investor možnosť zaistenia ľubovoľnej výplatnej funkcie v budúcnosti, napríklad zakúpením derivátovej štruktúry s vysporiadaním v čase T. Investor si môže dovoliť kúpiť iba portfóliá s obstarávacou cenou neprevyšujúcou výšku jeho počiatočných zdrojov W_0 [3].

Spojením vyššie definovanej účelovej funkcie a ohraničenia (4) definujeme tzv. *Úlohu nezaisteného investora*

$$\begin{aligned} &\max \mathbb{E}[u(W_T)] \\ &\mathbb{E}[\xi_T W_T] \leq W_0, \end{aligned} \tag{5}$$

kde $u(\cdot)$ je zvolená funkcia užitočnosti. Riešením úlohy (5) je portfólio reprezentované výplatnou funkciou W_T^B definované vo Vete 1.

Veta 1. *Riešením úlohy nezaisteného investora, definovanej vo vzťahu (5), je výplatná funkcia $W_T^B \equiv \hat{W}(T)$ definovaná*

$$W_T^B = I(y\xi_T), \tag{6}$$

kde $I(\cdot)$ je inverzná funkcia prvej derivácie funkcie $u(\cdot)$, a $y \geq 0$ je riešením rovnice

$$\mathbb{E}\left[\xi_T \hat{W}(T; y)\right] = W_0. \tag{7}$$

Za predpokladu konštantných parametrov $\kappa(t)$ a $r(t)$ je náhodná premenná $\ln \xi_t$ z normálneho rozdelenia a s uvažovaním funkcie užitočnosti definovanej vo vzťahu (3) je z definície optimálneho portfólia a vzťahov (1) a (2) možné odvodiť proces optimálnej hodnoty portfólia

$$W^B(t) = \frac{y^{\frac{1}{p-1}}}{\xi_t} \exp\left\{ \frac{p}{p-1} \left(\ln \xi_t + \left(\frac{\|\kappa\|^2}{2p-2} - r \right) (T-t) \right) \right\}$$

a tiež optimálnu investičnú stratégiu nezaisteného investora v čase $t \in (0,T)$ (viď napr. prácu [8]), ktorá je daná vzťahom

$$\theta^B(t) = \frac{1}{1-p} \left(\sigma^\top\right)^{-1} \kappa. \tag{8}$$

Optimálnu stratégiu $\theta^B(t)$ využijeme v ďalších častiach práce na analýzu dynamiky investičných stratégií.

3.2 Stratégia VaR-RM

Investor môže okrem optimálneho očakávaného výnosu svojej investície požadovať aj kontrolu nad rizikovým profilom portfólia. Jedným z možných spôsobov merania rizikovosti portfólia je miera VaR, na ktorej je založená investičná stratégia VaR-RM (z angl. *Value-at-Risk Risk Management*).

3.2.1 Definícia úlohy

Pripomeňme, že miera VaR je definovaná ako veľkosť straty na hodnote portfólia za obdobie $[0, T]$, ktorá je prekročená s pravdepodobnosťou α, t.j. platí

$$\mathbb{P}(W_T \geq \underline{W}) \geq 1 - \alpha.$$

Pridaním uvedeného ohraničenia do úlohy (5) dostávame úlohu VaR-RM investora, ako bola definovaná v práci [2]

$$\begin{aligned} &\max \mathbb{E}[u(W_T)] \\ &\mathbb{E}[\xi_T W_T] \leq W_0 \\ &\mathbb{P}(W_T \geq \underline{W}) \geq 1 - \alpha, \end{aligned} \tag{9}$$

kde α je parameter hladiny významnosti, $u(\cdot)$ je zvolená funkcia užitočnosti, W_0 počiatočná hodnota investície a ξ_T stavová premenná definovaná ako v úlohe (5).

3.2.2 Riešenie v čase T

Riešením úlohy (9) je výplatná funkcia $W_T^{VaR} \equiv \hat{W}(T)$ definovaná vo Vete 2.

Veta 2. *Optimálna výplatná funkcia VaR-RM portfólia v čase T je rovná*

$$W_T^{VaR} = \begin{cases} I(z\xi_T) & ak \quad \xi_T < \underline{\xi} \\ \underline{W} & ak \quad \underline{\xi} \leq \xi_T < \overline{\xi} \\ I(z\xi_T) & ak \quad \overline{\xi} \leq \xi_T, \end{cases} \tag{10}$$

kde funkcia $I(\cdot)$ je inverzná funkcia prvej derivácie funkcie užitočnosti $u(\cdot)$, $\underline{\xi} = u'(\underline{W})/z$, $\overline{\xi}$ je riešením rovnice $\mathbb{P}(\xi_T > \overline{\xi}) = \alpha$ a $z \geq 0$ rieši $\mathbb{E}[\xi_T \hat{W}(T; z)] = W_0$. Rizikové ohraničenie VaR je uplatnené práve vtedy, keď $\underline{\xi} < \overline{\xi}$.

3.2.3 Vlastnosti VaR-RM stratégie

Uvažujme opäť funkciu užitočnosti definovanú ako vo vzťahu (3) a konštantné parametre r a κ. Potom pre hodnotu optimálneho VaR-RM portfólia v časoch $t < T$ platí [2]

$$\begin{aligned} W^{VaR}(t) &= \frac{e^{\Gamma(t)}}{(z\xi_t)^{\frac{1}{1-p}}} - \left[\frac{e^{\Gamma(t)}}{(z\xi_t)^{\frac{1}{1-p}}} \Phi(-d_1(\underline{\xi})) - \underline{W} e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(\underline{\xi})) \right] \\ &+ \left[\frac{e^{\Gamma(t)}}{(z\xi_t)^{\frac{1}{1-p}}} \Phi(-d_1(\overline{\xi})) - \underline{W} e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(\overline{\xi})) \right], \end{aligned} \tag{11}$$

kde $\Phi(\cdot)$ je kumulatívna distribučná funkcia rozdelenia $\mathcal{N}(0,1)$, $\underline{\xi} = 1/(z\underline{W}^{1-p})$, $\overline{\xi}$ a z sú definované ako vo Vete 2 a

$$\Gamma(t) = \frac{p}{1-p}\left(r + \frac{\|\kappa\|^2}{2}\right)(T-t) + \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 \frac{\|\kappa\|^2}{2}(T-t) \tag{12}$$

$$d_2(x) = \frac{\ln x - \ln \xi_t + \left(r - \frac{\|\kappa\|^2}{2}\right)(T-t)}{\|\kappa\|\sqrt{T-t}} \tag{13}$$

$$d_1(x) = d_2(x) + \frac{\|\kappa\|\sqrt{T-t}}{1-p}. \tag{14}$$

Pre optimálnu investičnú stratégiu VaR-RM investora platí [2]

$$\theta^{VaR}(t) = q^{VaR}(t)\,\theta^B(t), \tag{15}$$

kde $\theta^B(t)$ je stratégia nezaisteného investora definovaná vo vzťahu (8) a

$$\begin{aligned} q^{VaR}(t) &= 1 - \frac{\underline{W}e^{-r(T-t)}(\Phi(-d_2(\underline{\xi})) - \Phi(-d_2(\overline{\xi})))}{W^{VaR}(t)} \\ &+ \frac{(1-p)(\underline{W} - \underline{\underline{W}})e^{-r(T-t)}\Phi(d_2(\overline{\xi}))}{W^{VaR}(t)\|\kappa\|\sqrt{T-t}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Ako sa dá zo vzťahu (15) nahliadnuť, funkcia $q^{VaR}(t)$ vyjadruje relatívnu expozíciu v rizikových aktívach voči nezaistenému portfóliu. To znamená, že VaR-RM investor si zvolí rovnaké váhy v rizikových aktívach ako nezaistený investor, nebude ich však udržiavať konštantné, ale v závislosti od vývoja trhu bude upravovať tzv. pákový efekt portfólia.

3.3 Stratégia LEL-RM

Defiujme mieru LEL ako európskej predajnej opcie s realizačnou cenou $\underline{W}$. Nastavením horného limitu na veľkosť rizikovej miery LEL definujeme ohraničenie

$$\mathbb{E}\left[\xi_T(\underline{W} - W_T)1_{W_T \leq \underline{W}})\right] \leq \epsilon, \tag{17}$$

kde $\epsilon \geq 0$. Zapojením ohraničenia (17) do úlohy (5) dostávame úlohu LEL-RM investora ako bola definovaná v práci [2]

$$\begin{aligned} &\max \mathbb{E}[u(W_T)] \\ &\mathbb{E}[\xi_T W_T] \leq W_0 \\ &\mathbb{E}[\xi_T(\underline{W} - W_T)1_{W_T \leq \underline{W}})] \leq \epsilon, \end{aligned} \tag{18}$$

kde $u(\cdot)$, W_0 a ξ_T sú definované ako v úlohe (5), parametre $\underline{W}$ a ϵ vyjadrujúce postoj investora k riziku sú zvolené exogénne.

3.3.1 Riešenie v čase T

Riešením úlohy (18) je náhodná premenná $W^{LEL} \equiv \hat{W}(T)$ definovaná vo Vete 3.

Veta 3. *Optimálna výplatná funkcia LEL-RM portfólia v čase T je rovná*

$$W_T^{LEL} = \begin{cases} I(z_1\xi_T) & ak \quad \xi_T < \underline{\xi}_\epsilon \\ \underline{W} & ak \quad \underline{\xi}_\epsilon \leq \xi_T < \overline{\xi}_\epsilon \\ I\left((z_1 - z_2)\,\xi_T\right) & ak \quad \overline{\xi}_\epsilon \leq \xi_T, \end{cases} \tag{19}$$

kde

$$\underline{\xi}_\epsilon = u'(\underline{W})/z_1 \tag{20}$$

$$\overline{\xi}_\epsilon = u'(\underline{W})/(z_1 - z_2) \tag{21}$$

a $z_1, z_2 \geq 0$ sú riešením systému

$$\mathbb{E}\left[\xi_T \hat{W}_T(T; z_1, z_2)\right] = W_0 \tag{22}$$

a

$$\mathbb{E}\left[\xi_T(\underline{W} - \hat{W}_T(T; z_1, z_2))1_{\hat{W}_T(T;z_1,z_2)\leq \underline{W}}\right] = \epsilon, \tag{23}$$

$$\textit{alebo}\ \mathbb{E}\left[\xi_T(\underline{W} - \hat{W}_T(T; z_1, z_2))1_{\hat{W}_T(T;z_1,z_2)\leq \underline{W}}\right] < \epsilon \ \textit{a}\ z_2 = 0. \tag{24}$$

Rizikové ohraničenie LEL-RM stratégie je uplatnené práve vtedy, keď $\underline{\xi}_\epsilon < \overline{\xi}_\epsilon$.

3.3.2 Vlastnosti LEL-RM stratégie

Uvažujme opäť funkciu užitočnosti definovanú ako vo vzťahu (3) a konštantné parametre r a κ. Potom pre hodnotu optimálneho LEL-RM portfólia v časoch $t < T$ platí [2]

$$\begin{aligned} W^{LEL}(t) &= \frac{e^{\Gamma(t)}}{(z_1\xi_t)^{\frac{1}{1-p}}} - \left[\frac{e^{\Gamma(t)}}{(z_1\xi_t)^{\frac{1}{1-p}}}\Phi(-d_1(\underline{\xi}_\epsilon)) - \underline{W}e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2(\underline{\xi}_\epsilon))\right] \\ &+ \left[\frac{e^{\Gamma(t)}}{((z_1 - z_2)\xi_t)^{\frac{1}{1-p}}}\Phi(-d_1(\overline{\xi}_\epsilon)) - \underline{W}e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2(\overline{\xi}_\epsilon))\right], \end{aligned}$$

kde $\Gamma(t)$ je definované ako vo vzťahu (12), $d_1(x), d_2(x)$ ako vo vzťahoch (14) a (13) a a multiplikátory z_1 a z_2 sú definované ako vo Vete 3 a pre konštanty $\underline{\xi}_\epsilon$ a $\overline{\xi}_\epsilon$ platí $\underline{\xi}_\epsilon = 1/(z_1\underline{W}^{1-p})$ a $\overline{\xi}_\epsilon = 1/((z_1 - z_2)\underline{W}^{1-p})$. Optimálnu investičnú stratégiu je podobne ako pri VaR-RM modeli možné vyjadriť ako

$$\theta^{LEL}(t) = q^{LEL}(t)\theta^B(t), \tag{25}$$

kde $\theta^B(t)$ je stratégia nezaisteného portfólia definovaného v (8) a expozícia v rizikových aktívach relatívne k nezaistenému portfóliu q^{LEL} je definovaná

$$q^{LEL}(t) = 1 - \frac{\underline{W}e^{-r(T-t)}(\Phi(-d_2(\underline{\xi}_\epsilon)) - \Phi(-d_2(\overline{\xi}_\epsilon)))}{W^{LEL}(t)}. \tag{26}$$

4 Stratégia AVaR

Riziková miera AVaR, ktorej autormi sú Palmquist a Uryasev [7], sa stala pomerne obľúbenou mierou medzi akademikmi, najmä vďaka vlastnosti *koherentnosti*, ktorou nedisponuje napr. ani jedna z mier, na ktorých boli založené stratégie uvedené v predošlom texte. Za povšimnutie stojí tiež skutočnosť, že miera AVaR okrem pravdepodobnosti dosiahnutia významných strát kontroluje aj ich veľkosť, pričom práve absencia kontroly veľkosti strát je jedným z hlavných argumentov kritikov rizikových mier, založených na kvantilovej analýze rozdelenia výnosov, medzi ktoré do určitej miery patrí aj miera AVaR. Uvedené skutočnosti naznačujú, že investičné stratégie vytvorené s použitím miery AVaR by mohli dosiahnuť kvalitatívne vyššiu úroveň, ako stratégie VaR-RM a LEL-RM. V tejto časti popisujeme konštrukciu investičnej stratégie založenej na miere AVaR.

4.1 Definícia úlohy

Označme X_T náhodnú premennú, ktorá vyjadruje zmenu hodnoty portfólia od času 0 do času T. Rizikovosť portfólia môžeme pomocou miery AVaR vyjadriť

$$
\begin{aligned}
AVaR_\alpha(X_T) &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_p(X_T)\,dp, &(27)\\
VaR_p(X_T) &= -\inf\left\{m \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\left(X_T \le m\right) > p\right\}, &(28)
\end{aligned}
$$

4.1.1 Základná úloha

Opäť uvažujeme model trhu definovaný v časti 3. Pridaním ohraničenia do úlohy nezaisteného investora definovaného vo vzťahu (5) definujeme tzv. *Základný problém AVaR investora*

$$
\begin{aligned}
&\max_{W_T} \mathbb{E}\left[u\left(W_T\right)\right]\\
&\mathbb{E}\left[\xi_T W_T\right] \le W_0\\
&AVaR_\alpha(W_T - W_0) \le \delta W_0
\end{aligned}
\qquad (29)
$$

kde $u(\cdot)$, W_0 a ξ_T sú definované ako v úlohe (5) a α a δ sú exogénne parametre. Druhé ohraničenie kontroluje rizikovú expozíciu formou limitu na hodnotu miery AVaR v čase T.

4.1.2 Alternatívna úloha AVaR investora

Nakoľko úloha (29) obsahuje relatívne komplexné rizikové ohraničenie, definujeme alternatívnu formuláciu úlohy, ktorá je za určitých okolností ekvivalentná pôvodnej úlohe AVaR investora [10]. Definujme funkcionál

$$
G_\alpha(X, c) = c + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(-X - c)^+\right] \qquad (30)
$$

kde $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná premenná, $c \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1]$ je exogénny parameter a $(\cdot)^+ \equiv \max(\cdot\,, 0)$. *Alternatívna formulácia úlohy* je definovaná

$$
\begin{aligned}
&\max_{W_T, c} \mathbb{E}\left[u\left(W_T\right)\right] \\
&\mathbb{E}\left[\xi_T W_T\right] \leq W_0 \\
&G_\alpha(W_T - W_0, c) \leq \delta W_0,
\end{aligned} \tag{31}
$$

kde funkcionál $G_\alpha(W_T - W_0, c)$ je daný v (30), $u(\cdot)$, W_0, W_T, α, δ a ξ_T sú definované ako v úlohe (29) a $c \in \mathbb{R}$ je nová premenná v procese optimalizácie.

4.2 Optimálne portfólio v čase T

Úlohu riešime v dvoch krokoch. Riešením optimalizácie cez prvú premennú definujeme optimálne portfólio na priestore $W_T \times \xi_T$, t.j. pre každé fixované c. Ako výsledok druhostupňovej optimalizácie, nájdeme optimum cez všetky hodnoty parametra c.

Veta 4 (Optimálne portfólio v čase T)**.** *Nech $c \in \mathbb{R}$ a platí $c \leq \delta W_0$. Definujme funkciu*

$$
W_T(c, y_1, y_2) = \begin{cases} I(y_1 \xi_T) & ak\ \xi_T < \underline{\xi} \\ W_0 - c & ak\ \underline{\xi} \leq \xi_T < \overline{\xi} \\ I\left(y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha}\right) & ak\ \overline{\xi} \leq \xi_T, \end{cases} \tag{32}
$$

kde $y_1 > 0$, $y_2 \geq 0$, $I(\cdot)$ je inverzná funkcia $u'(\cdot)$ a

$$
\underline{\xi} = u'(W_0 - c) \,/\, y_1 \tag{33}
$$

$$
\overline{\xi} = \left(u'(W_0 - c) + \frac{y_2}{\alpha}\right) / y_1. \tag{34}
$$

Nech $y_1 = \hat{y}_1$, $y_2 = \hat{y}_2$ je riešením systému rovníc (35) a (36)

$$
\mathbb{E}\left[\xi_T W_T(c, y_1, y_2)\right] = \xi_0 W_0 \tag{35}
$$

$$
\begin{aligned}
&c + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(W_0 - W_T(c, y_1, y_2) - c)^+\right] = \delta W_0;\ alebo \\
&c + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(W_0 - W_T(c, y_1, y_2) - c)^+\right] < \delta W_0\ \ a\ y_2 = 0.
\end{aligned} \tag{36}
$$

Potom pre fixné c úloha (31) dosahuje maximum v bode

$$
\hat{W}_T(c) \equiv W_T(c, \hat{y}_1, \hat{y}_2). \tag{37}
$$

Veta 4 definuje optimálne portfólio $\hat{W}_T(c)$ ako funkciu parametra c (prvostupňové riešenie). Riešenie úlohy dosiahneme maximalizáciou[2] úlohy (38) cez všetky možné hodnoty c

$$
\max_{c \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left[u\left(\hat{W}_T(c)\right)\right]. \tag{38}
$$

[2] Úlohu (38) riešime numericky, nakoľko analýza riešenia nie je naším primárnym cieľom, túto ponechávame pre ďalší výskum.

4.3 Optimálne portfólio v čase $t < T$

Pre odvodenie hodnoty optimálneho portfólia opäť predpokladáme konštantné parametre κ, r a izoelastickú funkciu užitočnosti, definovanú v (3).

Veta 5 (Proces optimálnej hodnoty portfólia). *Pre $t \in [0, T]$ je proces optimálnej výplatnej funkcie (37) rovný*

$$\hat{W}(t) = G_1(t) + G_2(t) + G_3(t), \tag{39}$$

kde funkcie $G_{1,2,3}(t)$ sú dané

$$\begin{aligned}
G_1(t) &= \frac{y_1^{\frac{1}{p-1}}}{\xi_t} \exp\left\{ \frac{p}{p-1} \left(\ln \xi_t + \left(\frac{\|\kappa\|^2}{2p-2} - r \right) (T-t) \right) \right\} \Phi(d_1) && (40)\\
G_2(t) &= \frac{W_0 - c}{\xi_t} \exp\left\{ \ln \xi_t - r(T-t) \right\} \Big(\Phi(d_2) - \Phi(d_3) \Big) && (41)\\
G_3(t) &= \frac{1}{\xi_t} \int_{\overline{\xi}}^{\infty} \xi_T \left(y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}} \, d\mathbb{P}(\xi_T) && (42)\\
d_1 &= \frac{\ln \underline{\xi} - \ln \xi_t + \left(r - \frac{1}{2} \frac{p+1}{p-1} \|\kappa\|^2 \right) (T-t)}{\|\kappa\| \sqrt{T-t}} && (43)\\
d_2 &= \frac{\ln \overline{\xi} - \ln \xi_t + \left(r - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 \right) (T-t)}{\|\kappa\| \sqrt{T-t}} && (44)\\
d_3 &= d_1 + \frac{\|\kappa\| \sqrt{T-t}}{p-1} && (45)
\end{aligned}$$

a $\Phi(\cdot)$ je kumulatívna distribučná funkcia $\mathcal{N}(0,1)$.

4.4 Optimálna investičná stratégia

Pripomeňme, že $\theta(t)$ vyjadruje podiel investície v rizikových aktívach, t.j. reprezentuje riadiacu premennú, prostredníctvom ktorej investor zadáva pokyny na prevažovanie svojich pozícií.

Veta 6 (Optimálna stratégia AVaR investora). *Nech proces ξ_t vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici (2) a proces $W(t)$ je definovaný v (39). Optimálna investičná stratégia AVaR investora je*

$$\hat{\theta}(t) = -\frac{(\sigma^\top)^{-1}\kappa}{\hat{W}(t)} \left[\frac{G_1(t)}{p-1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\|\kappa\|\sqrt{T-t}} \left(\exp\left\{ \left(\frac{p}{p-1} \frac{\|\kappa\|^2}{2p-2} - r \right)(T-t) - \frac{d_1^2}{2} \right\} \right. \right.$$
$$\left. \left. \times (y_1 \xi_t)^{\frac{1}{p-1}} + (W_0 - \hat{c}) e^{-r(T-t)} \left(e^{-d_2^2/2} - e^{-d_3^2/2} \right) \right) + \xi_t \frac{\partial G_3(t)}{\partial \xi_t} \right].$$

Tabuľka 1: Nastavenie parametrov

Popis parametra	Označenie	Hodnota
investičný horizont	T	1
bezriziková úroková miera	r	0,03
koef. súvisiaci so Sharpeovým pomerom	$\|\kappa\|$	0,4
hladina významnosti	α	0,05
ohraničenie na cenu poistenia	δ	0,15
koeficient vyjadrujúci rizikové preferencie	p	$-1{,}5$
počiatočná hodnota investície	W_0	1

4.5 Relatívna expozícia v rizikových aktívach

Pripomeňme, že $\theta^B(t)$ je investičná stratégia nezaisteného investora definovaná v (8). Optimálnu stratégiu AVaR investora vieme alternatívne vyjadriť pomocou $\theta^B(t)$ ako

$$\hat{\theta}(t) = -\frac{1-p}{W(t)}\theta^B(t)\frac{\partial W(t)}{\partial \xi_t}\xi_t. \tag{46}$$

Podobne ako pri VaR-RM a LEL-RM stratégii, definujme proces $\hat{q}(t)$ ako expozíciu optimálneho AVaR portfólia v rizikových aktívach, vyjadrenú v *relatívnych* jednotkách voči nezaistenému portfóliu $\hat{\theta}(t) = \theta^B(t)\,\hat{q}(t)$, t.j.

$$\hat{q}(t) = -\frac{1-p}{\hat{W}(t)}\frac{\partial \hat{W}(t)}{\partial \xi_t}\xi_t. \tag{47}$$

Veta 7. *Pre náhodnú premennú $\hat{q}(t)$ definovanú v (47) platí*

$$\hat{q}(t) = \frac{1}{\hat{W}(t)}\left(G_1(t) + \frac{1}{\xi_t}\int_{\underline{\xi}}^{\infty} \frac{y_1\xi_T}{y_1\xi_T - \frac{y_2}{\alpha}}\,\xi_T\left(y_1\xi_T - \frac{y_2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}}\mathbb{P}(\xi_T)\right). \tag{48}$$

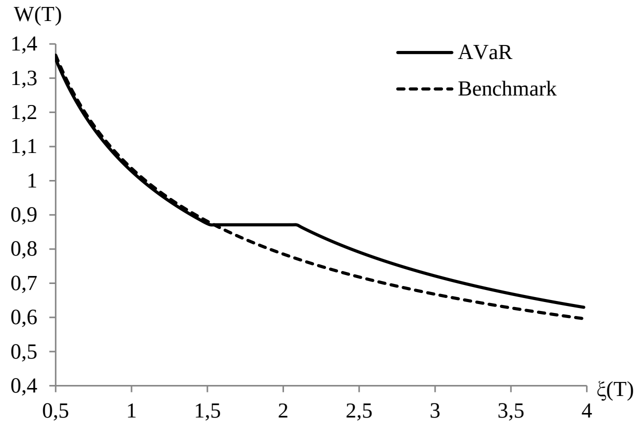
Navyše platí, že $\hat{q}(t)$ je ohraničená, t.j. pre každé optimálne AVaR portfólio definované v (39) existuje konštanta $h \in \mathbb{R}$ taká, že platí $\hat{q}(t) < h$ pre každé $\xi_t \in [0,\infty)$ a $t \in [0,T]$.

5 Vlastnosti AVaR stratégie

Podobne ako v predošlých častiach sme predpokladali, že preferencie investora sú dobre charakterizované izoelastickou funkciou užitočnosti definovanou v (3). Trhové podmienky a preferencie investorov sme simulovali nastavením voľných parametrov, ako je uvedené v Tabuľke 1.

5.1 Hodnota portfólia v čase T

Štandardné nastavenia exogénnych parametrov pre úlohu (29) vedú k uplatneniu rizikového ohraničenia, v dôsledku čoho pozorujeme odlišný priebeh výplatnej funkcie portfólia na troch rôznych intervaloch hodnôt stavovej premennej ξ_T. Intervaly



Obr. 1: Výplatné funkcie optimálneho AVaR a nezaisteného portfólia v čase T, znázornené ako funkcie stavovej premennej ξ_T.

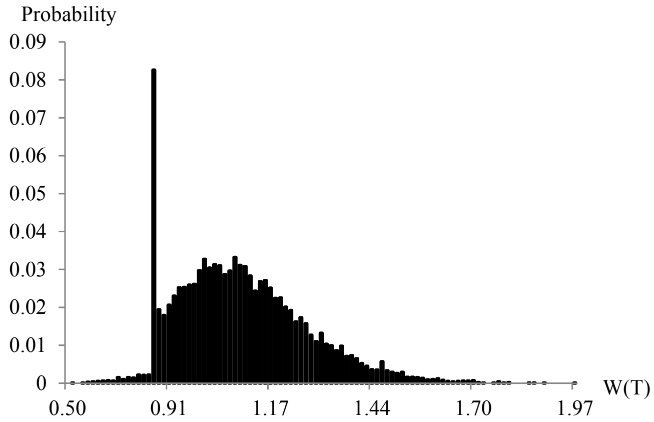
sú oddelené hraničnými bodmi $\underline{\xi}$ a $\overline{\xi}$, definovanými v (33) a (34). Ak sa trh vyvíja pozitívne, stavová premenná ξ_T nadobúda hodnoty na intervale $[0, \underline{\xi})$ a výplatná funkcia AVaR portfólia má podobný priebeh ako nezaistené portfólio. V dôsledku „obstarania“ zaistenia, ktoré v dobrých stavoch nebude uplatnené, nadobúda AVaR portfólio na celom intervale nižšie hodnoty ako nezaistené portfólio.

V prípadoch, keď stavová premenná nadobúda hodnoty na intervale $[\underline{\xi}, \overline{\xi})$, hovoríme, že portfólio sa nachádza v tzv. „prechodných“ stavoch. Hodnota AVaR portfólia je na tomto intervale plne zaistená na hodnote $W_0 - \hat{c}$, v dôsledku čoho AVaR portfólio nadobúda na väčšej časti intervalu vyššie hodnoty ako nezaistené portfólio. V najhorších stavoch nadobúda stavová premenná hodnoty na intervale $[\overline{\xi}, \infty)$. S rastúcou hodnotou ξ_T klesá efekt zaistenia hodnoty portfólia, v dôsledku čoho cieľová hodnota klesá smerom k hodnote nezaisteného portfólia. Tento jav je dôsledkom vysokej ceny zaistenia v najhorších stavoch, kedy by zakúpenie úplného zaistenia nebolo optimálne (Obr. 1).

S využitím predpokladu o rozdelení stavovej premennej $\ln \xi_T$ môžeme simulovať pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej premennej $\hat{W}_T(\hat{c})$. Ako dôsledok procesu zaisťovania pozorujeme *modifikované* rozdelenie hodnoty portfólia v čase T. Tvar histogramu naznačuje oblasť zníženej pravdepodobnosti v tzv. ľavom chvoste rozdelenia, t.j. pravdepodobnosť dosiahnutia najvýznamnejších strát AVaR portfólia je *nižšia* ako v prípade nezaisteného portfólia (Obr. 2).

5.2 Dynamická investičná stratégia v čase $t < T$

Dynamika náhodnej premennej $\hat{q}(t)$ pre rôzne hodnoty stavovej premennej ξ_t je v rôznych časoch znázornená na Obr. 3. V dobrých stavoch je expozícia v rizikových aktívach AVaR portfólia podobná expozícii nezaisteného portfólia ($\hat{q}(t) \approx 1$). Pri zvyšovaní stavovej premennej AVaR investor postupne zatvára pozície v rizikových aktívach s cieľom udržať hodnotu portfólia nad zaistenou hodnotou. V najhor-



Obr. 2: Simulované pravdepodobnostné rozdelenie hodnoty optimálneho AVaR portfólia v čase T, pre hodnoty parametrov uvedené v Tab. 1. Zostrojené na základe 10000 simulácií.

ších stavoch pozorujeme efekt tzv. *pákovania* pozície v rizikových aktívach ($\hat{q}(t) > 1$), t.j. investor si na trhu požičiava dodatočné zdroje otvorením krátkej pozície v bezrizikových aktívach a relatívne veľkej dlhej pozície v rizikových aktívach. Cieľom je snaha o zvýšenie hodnoty portfólia nad požadovanú hranicu, s využitím aj menšieho rastu cien.

Pre časy dostatočne vzdialené od investičného horizontu, sú zásahy AVaR stratégie relatívne malé. Ako sa však čas blíži k T, stratégia reaguje na nové trhové podmienky pomerne razantným prevažovaním portfólia. Takáto vlastnosť by mohla pri niektorých stratégiách spôsobovať problémy pre časy $t \to T$, kedy by sa relatívna expozícia v rizikových aktívach mohla za určitých podmienok limitne blížiť k $+\infty$. Pre AVaR stratégiu sa uvedeným problémom zaoberá Veta 7, v ktorej je preukázané, že relatívna expozícia v rizikových aktívach $\hat{q}(t)$ je pre optimálne AVaR portfóliá za každých okolností ohraničená.

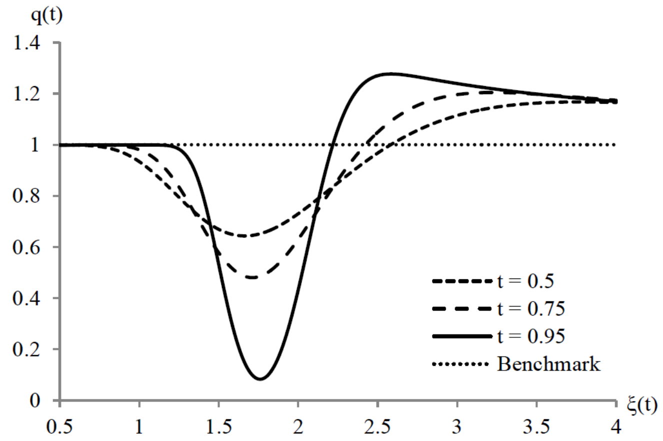
5.3 Porovnanie so stratégiami VaR-RM a LEL-RM

V tejto časti analyzujeme výsledky porovnania základných vlastností predstavenej stratégie so stratégiami VaR-RM a LEL-RM, definovanými v práci [2].

5.3.1 Parametrizácia modelov

Nakoľko uvedené stratégie pracujú s odlišnou množinou exogénnych parametrov, pre vzájomné porovnanie je potrebné definovať kritérium, ktoré by viedlo k porovnateľným nastaveniam všetkých troch modelov. Pre tento účel sme zvolili nasledovný prístup:

1. spoločné parametre T, r, $\|\kappa\|$, α, p, W_0, definujúce investičný horizont, vlastnosti trhu, parametre súvisiace s averziu k riziku a počiatočnú hodnotu port-



Obr. 3: Dynamika relatívnej expozície v rizikových aktívach optimálneho AVaR portfólia $\hat{q}(t)$ v časoch $t = \{0{,}5; 0{,}75; 0{,}95\}$, znázornené ako funkcie stavovej premennej ξ_t.

fólia sme pre oba modely nastavili podľa Tabuľky 1,

2. parameter δ, špecifický pre AVaR portfólio sme ponechali na hodnote podľa Tabuľky 1 a parameter LEL-RM stratégie, ϵ, sme nastavili na rovnakú hodnotu,

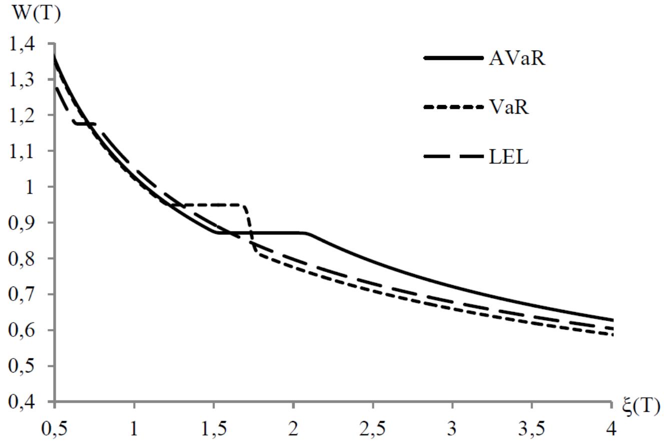
3. parameter $\underline{W}$, špecifický pre VaR-RM a LEL-RM portfóliá sme nastavili tak, aby všetky porovnávané portfóliá viedli k rovnakým *určitostným ekvivalentom*.

Vyššie popísaná procedúra viedla k nastaveniu parametra $\underline{W}$ pre VaR-RM model na hodnotu 0,949 a pre LEL-RM model na hodnotu 1,176. Takto definované nastavenia viedli u všetkých troch portfólií k určitostnému ekvivalentu na úrovni $C = 1{,}064$.

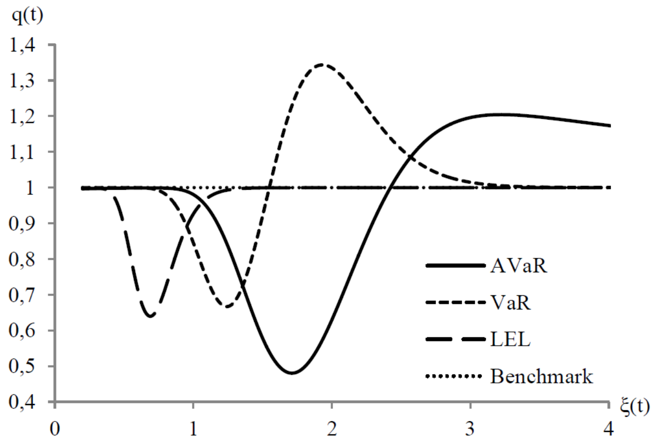
5.3.2 Výplatné funkcie stratégií

Na Obr. 4 je znázornený priebeh výplatných funkcií všetkých troch portfólií v čase T. Základným odlišovacím prvkom u všetkých troch výplatných funkcií je hodnota $\underline{W}$, ktorú zvolili VaR-RM aj LEL-RM investori na vyššej úrovni, ako je hodnota $W_0 - \hat{c}$ implicitne daná riešením úlohy AVaR investora. Taktiež pozorujeme, že oblasť prechodných stavov je výrazne užšia pre LEL-RM portfólio a taktiež pre VaR-RM portfólio, t.j. LEL-RM a VaR-RM investori volia úplné zaistenie skôr ako AVaR investor a zároveň, v prípade pokračujúceho prepadu trhov, aj skôr túto stratégiu opúšťajú.

AVaR investor sa snaží o úplné zaistenie na širšom intervale a plynule prechádza k čiastočnému zaisteniu, pričom v najhorších prípadoch volí *vyššiu* hodnotu portfólia ako VaR-RM a LEL-RM investori.



Obr. 4: Výplatné funkcie optimálneho AVaR, VaR-RM a LEL-RM portfólia v čase T, znázornené ako funkcie stavovej premennej ξ_T.

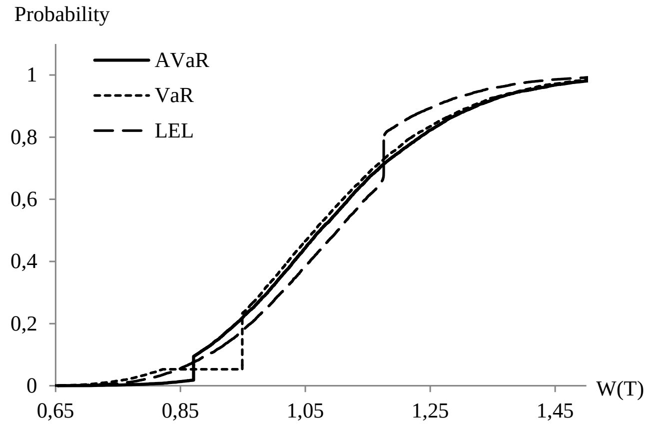


Obr. 5: Relatívna expozícia v rizikových aktívach AVaR, VaR-RM a LEL-RM portfólia v čase $t = 0{,}75$, znázornené ako funkcie stavovej premennej ξ_t.

5.3.3 Relatívna expozícia v rizikových aktívach

Relatívne expozície v rizikových aktívach $\hat{q}(t)$, $q^{VaR}(t)$ a $q^{LEL}(t)$ v čase $t = 0{,}75$ sú znázornené na Obr. 5. V dobrých stavoch volia všetci porovnávaní investori relatívne podobné expozície v rizikových aktívach ako nezaistený investor. Ak sa trh prestane vyvíjať dobre a portfóliá sa dostávajú do prechodných stavov, všetci investori v reakcii na vývoj trhu zatvárajú pozície v rizikových aktívach, s cieľom udržať hodnoty portfólií nad požadovanou úrovňou.

Zaujímavé je porovnanie tvaru funkcií pre najhoršie stavy, t.j. $\xi \in [\overline{\xi}, \infty)$ (kde hodnotu $\overline{\xi}$ si každý investor volí na inej úrovni). Zatiaľ čo LEL-RM investor sa v najhorších stavoch blíži výškou expozície v rizikových aktívach nezaistenému portfóliu



Obr. 6: Simulované kumulatívne distribučné funkcie hodnoty AVaR, VaR-RM a LEL-RM portfólií v čase T.

zdola, VaR-RM a AVaR portfóliá v určitom bode preskakujú túto expozíciu, t.j. snažia sa zvýšením pákového efektu zvýšiť hodnotu portfólií nad požadovanú úroveň, a pre ďalšie zvyšovanie stavovej premennej ξ_t konvergujú k nezaistenému portfóliu zhora (Obr. 5).

5.3.4 Pravdepodobnostné rozdelenie hodnoty portfólií

Simulovaním rozdelenia náhodnej premennej ξ_T môžeme pre dané parametre zostrojiť empirické pravdepodobnostné rozdelenia hodnoty jednotlivých portfólií v čase T. Na Obr. 6 sú znázornené kumulatívne distribučné funkcie AVaR, VaR-RM a LEL-RM portfólií na celom rozsahu simulovaných hodnôt ξ_T pre 10000 simulácií. Priebeh distribučných funkcií naznačuje, že stratégia AVaR v danej simulácii *dominuje* stratégie VaR-RM a LEL-RM v oblasti najhorších (ľavá časť grafu) a tiež najlepších stavov (pravá časť grafu). V centrálnej časti grafu naopak AVaR stratégií dominujú LEL-RM a na relatívne úzkom intervale VaR-RM.

6 Záver

V tejto práci sme analyzovali dynamické zaistené investičné stratégie, ktoré si okrem optimalizácie výnosnosti kladú za cieľ tiež kontrolu rizikovej expozície portfólia. Hlavným prínosom práce je vytvorenie dynamickej stratégie založenej na koherentnej rizikovej miere AVaR, ktorá môže za určitých podmienok viesť ku kvalitatívne lepším portfóliám, ako sú napr. zaistené portfóliá založené na rizikových mierach VaR a LEL, definované v práci [2].

Problém AVaR investora sme definovali ako úlohu maximalizácie očakávanej užitočnosti na úplnom trhu. Rizikovosť portfólia je kontrolovaná definovaním horného limitu na veľkosť rizikovej miery AVaR v konečnom investičnom horizonte. Na základe výsledkov práce [9] sme základnú úlohu AVaR investora previedli na alternatívnu úlohu, ktorá vedie za určitých okolností k rovnakému portfóliu. V alternatívnej úlohe je riziková miera AVaR reprezentovaná príbuzným funkcionálom, ktorý sa javí byť vhodnejším pre použitie v optimalizačných úlohách.

Riešením alternatívnej úlohy sme odvodili optimálnu výplatnú funkciu AVaR portfólia v čase investičného horizontu. S využitím stochastického kalkulu a teórie martingalov sme odvodili proces optimálnej hodnoty portfólia v časoch pred investičným horizontom a taktiež portfólio generujúcu dynamickú investičnú stratégiu. Priebehy výplatných funkcií a dynamiku stratégie sme analyzovali v závislosti od hodnoty stavovej premennej. Analýza vlastností optimálneho portfólia preukázala, že výplatná funkcia v každom čase vykazuje odlišný priebeh na troch oblastiach stavov, v akých sa trh nachádza. V dobrých stavoch trhu má optimálna výplatná funkcia AVaR portfólia podobný priebeh ako výplatná funkcia nezaisteného portfólia. V prechodných stavoch volí AVaR stratégia úplné zaistenie na hodnote, ktorá je implicitne daná nastavením exogénnych premenných. V najhorších stavoch trhu stratégia implikuje výplatnú funkciu, ktorá sa zvyšovaním stavovej premennej zhora blíži k výplatnej funkcii nezaisteného portfólia, vďaka čomu vykazuje AVaR portfólio menšie straty v čase investičného horizontu ako nezaistené portfólio.

Optimálna expozícia v rizikových aktívach AVaR portfólia je násobkom expozície nezaisteného portfólia, kde multiplikátor závisí od času a stavu, v akom sa trh nachádza. To umožňuje zmenou pákového efektu meniť citlivosť AVaR portfólia na zmeny cien rizikových aktív a reagovať tak na aktuálnu situáciu na trhu.

Dôležitým výsledkom práce je analýza ohraničenosti expozície v rizikových aktívach. Aj keď analýza preukázala, že AVaR stratégia môže v zlých stavoch trhu implikovať vyššie úrovne pákovania pozície ako nezaistená stratégia, veľkosť expozície v rizikových aktívach je v každom stave a čase pre každé AVaR portfólio ohraničená. Táto vlastnosť je podľa nás dôležitá pre použitie stratégie v reálnych aplikáciách riadenia portfólia.

Simulácie pre štandardné trhové nastavenia preukázali, že AVaR stratégia vedie za určitých okolností k nižším a menej pravdepodobným stratám v oblasti najhorších stavov, ako porovnávané stratégie VaR-RM a LEL-RM.

Literatúra

[1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D.: Coherent measures of risk. Mathematical Finance, 9, 203-228 (1999)

[2] Basak, S., Shapiro, A.: Value-at-risk based risk management: optimal policies and asset prices. Review of Financial Studies, 14, 371-405 (2001)

[3] Duffie, D.: Dynamic asset pricing theory. Princeton Series in Finance, Princeton University Press, 3rd edition (2001)

[4] Föllmer, H., Schied, A.: Stochastic finance - an introduction in discrete time. Walter de Gruyter, Berlin (2002)

[5] Föllmer, H., Schied, A.: Convex and coherent risk measures. Encyclopedia of Quantitative Finance, John Wiley & Sons, 355-363 (2010)

[6] Gollier, C.: The economics of risk and time. The MIT Press (1999)

[7] Krokhmal, P., Palmquist, J., Uryasev, S.P.: Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. The Journal of Risk, Vol. 4, 2, 11-27 (2002)

[8] Krommerová, Cs.: Dynamic portfolio optimization with risk management and strategy constraints. Dizertačná práca, Univerzita Komenského v Bratislave (2013)

[9] Rockafellar, R.T., Uryasev, S.P.: Optimization of conditional value-at-risk. Journal of Risk, 2, 21-42 (2000)

[10] Rockafellar, R.T., Uryasev, S.P.: Conditional value-at-risk for general loss distributions. Journal of Banking and Finance, 26, 1443-1471 (2002)

Zoznam publikácií

Optimalizácia portfólia s ohraničením na rizikovosť mierou Conditional Value-at-Risk, Zborník z prvého česko-slovenského workshopu mladých ekonómov, Katedra hospodárskej politiky, ISBN 978-80-225-3498-7 (elektronický dokument), 2012

Risk Adjusted dynamic hedging strategies, Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance: International Conference, 6th, Vietri sul Mare, Springer, ISBN 978-3-319-05013-3, s. 117-120 (2014)

Účasť na konferenciách

- EAPG 2012: Prvý česko-slovenský workshop v Belušských Slatinách, 31.5.-3.6.2012
- ISCAMI 2013: 14th International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics, Malenovice, 2.5.-5.5.2013
- MAF 2014: Sixth International Conference on Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance, Vietri Sul Mare, 22.4.-24.4.2014

Thesis Overview

We investigated dynamic hedging strategies which are based on risk measures. We developed a new investment strategy, driven by the coherent risk measure Average Value-at-Risk (AVaR). The expected utility maximization problem in finite investment horizon on complete market is constrained by an upper limit defined on the AVaR functional. By solving a static optimization problem we proposed the optimal portfolio payoff function in investment horizon as well as the dynamic investment strategy implied by the optimal portfolio. Numerical simulations show that strategy can reasonably outperform other investment strategies based on risk measures, such as well known VaR-RM and LEL-RM strategies proposed in [2].