

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



**Dynamické riadenie portfólia  
s použitím rizikových mier**  
DIZERTAČNÁ PRÁCA

Bratislava 2014

Mgr. Martin Harcek

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského  
Mlynská dolina  
842 48 Bratislava

Dizertačná práca v odbore aplikovaná matematika

©2014 Martin Harcek

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**Dynamické riadenie portfólia  
s použitím rizikových mier**

Dizertačná práca

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika  
Pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Školiteľ: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2014

Mgr. Martin Harcek



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Mgr. Martin Harcek  
**Študijný program:** aplikovaná matematika (Jednoodborové štúdium,  
doktorandské III. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** dizertačná  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Dynamické riadenie portfólia s použitím rizikových mier  
*Dynamic portfolio management using risk measures*

**Školiteľ:** doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

**Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce:**  
bez obmedzenia

**Dátum zadania:** 15.10.2010

**Dátum schválenia:** 15.10.2010

prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
školiteľ

## Pod'akovanie

Chcel by som poďakovať Igorovi Melicherčíkovi za odborné vedenie počas celého štúdia a za cenné rady a nápady, ktoré mi poskytol pri tvorení tejto práce. Ďakujem aj mojej rodine za pomoc a podporu, bez ktorej by táto práca nikdy nevznikla.

## Abstrakt

HARCEK, Martin: Dynamické riadenie portfólia s použitím rizikových mier. [Dizertačná práca] - Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. - Školiteľ: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., - Bratislava: FMFI UK, 2014. /80 s./

V našom výskume sa zaoberáme zaistenými investičnými stratégiami s využitím rizikových mier. V práci definujeme novú dynamickú stratégiu, založenú na koherentnej rizikovej miere Average Value-at-Risk (AVaR). Úlohu formulujeme ako problém investora maximalizujúceho očakávanú užitočnosť z hodnoty portfólia na konci investičného horizontu, obchodujúceho na úplnom trhu. Investor kontroluje rizikovú expozíciu portfólia uplatnením limitu na veľkosť rizikovej miery AVaR. V práci odvodíme optimálnu výplatnú funkciu AVaR portfólia v čase investičného horizontu, ako riešenie statickej optimalizačnej úlohy a tiež dynamickú investičnú stratégiu vedúcu k optimálnej hodnote portfólia. Výsledky numerických simulácií naznačujú, že stratégia dokáže efektívne konkurovať iným dynamickým stratégiám, založeným na rizikových mierach, ako sú napríklad stratégie VaR-RM a LEL-RM definované v práci [6].

**Kľúčové slová:** dynamická optimalizácia portfólia, zaistené stratégie, rizikové miery, Average Value-at-Risk

## Abstract

HARCEK, Martin: Dynamic portfolio management using risk measures. [Dissertation Thesis] - Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics; Department of Applied Mathematics and Statistics. - Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., - Bratislava: FMFI UK, 2012. /80 p./

We investigate dynamic hedging strategies which are based on risk measures. We develop a new investment strategy, driven by the coherent risk measure Average Value-at-Risk (AVaR). The expected utility maximization problem in finite investment horizon on complete market is constrained by an upper limit defined on the AVaR functional. By solving a static optimization problem we propose the optimal portfolio payoff function in investment horizon as well as the dynamic investment strategy implied by the optimal portfolio. Numerical simulations show that strategy can reasonably outperform other investment strategies based on risk measures, such as well known VaR-RM and LEL-RM strategies proposed in [6].

**Keywords:** dynamic portfolio optimization, hedging strategies, risk measures, Average Value-at-Risk

# Obsah

Úvod	4
<b>1 Rizikové miery</b>	<b>8</b>
1.1 Axiomatika rizikových mier	8
1.2 Koherentné a konvexné miery	10
1.3 Klasifikácia vybraných rizikových mier	11
1.3.1 Value-at-Risk	11
1.3.2 Limited Expected Losses	12
1.3.3 Average Value-at-Risk	14
<b>2 Zaisťované investičné stratégie</b>	<b>16</b>
2.1 Modelovanie preferencií	16
2.1.1 Očakávaná užitočnosť	16
2.1.2 Určitostný ekvivalent	17
2.1.3 Averzia k riziku	17
2.2 Stratégia CPPI	18
2.2.1 Definícia stratégie	18
2.2.2 Voľba multiplikátora	19
2.2.3 Rozšírenia stratégie	19
2.3 Stratégia OBPI	20
2.3.1 Definícia stratégie	20
2.3.2 Voľba parametrov	21
2.3.3 Rozšírenia stratégie	21
2.3.4 Vzťah medzi CPPI a OBPI	21
<b>3 Stratégie s využitím rizikových mier</b>	<b>22</b>
3.1 Základné predpoklady	22
3.2 Optimalizácia nezaisteného portfólia	23
3.3 Stratégia VaR-RM	25
3.3.1 Definícia úlohy	26
3.3.2 Riešenie v čase $T$	26
3.3.3 Vlastnosti VaR-RM stratégie	28
3.4 Stratégia LEL-RM	30
3.4.1 Definícia úlohy	30
3.4.2 Riešenie v čase $T$	31
3.4.3 Vlastnosti LEL-RM stratégie	32



<b>4</b>	<b>Stratégia AVaR</b>	<b>36</b>
4.1	Definícia úlohy . . . . .	36
4.1.1	Základná úloha . . . . .	36
4.1.2	Prechod k alternatívnej úlohe . . . . .	37
4.1.3	Alternatívna úloha AVaR investora . . . . .	38
4.2	Optimálne portfólio v čase $T$ . . . . .	38
4.3	Optimálne portfólio v čase $t < T$ . . . . .	42
4.4	Optimálna investičná stratégia . . . . .	44
4.5	Relatívna expozícia v rizikových aktívach . . . . .	45
4.6	Ohraničenosť expozície v rizikových aktívach . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Vlastnosti AVaR stratégie</b>	<b>50</b>
5.1	Nastavenia trhu . . . . .	50
5.2	Hodnota portfólia v čase $T$ . . . . .	51
5.3	Hodnota portfólia a investičná stratégia v čase $t < T$ . . . . .	52
5.4	Vplyv trhových parametrov na tvar výplatnej funkcie . . . . .	54
5.5	Porovnanie so stratégiami VaR-RM a LEL-RM . . . . .	54
5.5.1	Parametrizácia modelov . . . . .	56
5.5.2	Výplatné funkcie stratégií . . . . .	56
5.5.3	Relatívna expozícia v rizikových aktívach . . . . .	57
5.5.4	Pravdepodobnostné rozdelenie hodnoty portfólií . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Prípadová štúdia</b>	<b>60</b>
6.1	Parametre portfólia . . . . .	60
6.1.1	Výber aktív . . . . .	60
6.1.2	Časové obdobie . . . . .	60
6.1.3	Preferencie vo vzťahu k riziku . . . . .	61
6.1.4	Kalibrácia modelu . . . . .	63
6.2	Výsledky a diskusia . . . . .	65
6.2.1	1. obdobie . . . . .	65
6.2.2	2. obdobie . . . . .	67
6.2.3	3. obdobie . . . . .	68
6.2.4	4. obdobie . . . . .	72
6.2.5	Vyhodnotenie . . . . .	74
	<b>Záver</b>	<b>75</b>
	<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>77</b>

# Úvod

Otázke optimálneho rozloženia investície v portfóliu s náhodným výnosom sa doposiaľ venovalo mnoho výskumov. Problém býva štandardne formulovaný ako optimalizačná úloha, s cieľom maximalizácie očakávanej užitočnosti z hodnoty portfólia v konečnom investičnom horizonte. Častokrát je súčasťou problému aj množina ohraničení, motivovaná ekonomickou interpretáciou.

Ako jeden z prvých, skúmal problém optimálneho výberu portfólia Samuelson vo svojej práci [47] z roku 1969. Autor v práci uvažuje jednoduchý trh zostavený z jedného bezrizikového a jedného rizikového aktíva. Diskrétny optimalizačný problém definuje ako úlohu stochastického dynamického programovania a odvádza optimálnu investičnú stratégiu, ktorá vedie na konštantné rozloženie investície v čase. Na prácu nadväzuje mnoho výskumov, okrem iného aj práca Mertona [33], v ktorej autor uvažuje spojitý model a potvrdzuje konštantnosť stratégie aj v tomto prípade.

Zaistené investičné stratégie sú založené na myšlienke ohraničenia možných strát na hodnote portfólia, v prípade negatívneho vývoja trhu. Jedna z prvých zaistených stratégií je stratégia CPPI, z angl. Constant Proportion Portfolio Insurance, ktorú v roku 1986 definoval Perold [37]. Ide o tzv. dynamickú stratégiu, t.j. investor dosiahne efekt zaistenia kontinuálnym prevažovaním portfólia v čase. Stratégia definuje pojem tzv. bezpečnostného vankúša, ktorý zodpovedá vzdialenosti hodnoty portfólia od dna garantujúceho cieľovú zaistenú hodnotu a do rizikových aktív investuje konštantný násobok vankúša. Takýmto spôsobom sa snaží udržať hodnotu portfólia nad zaistenou hodnotou.

S cieľom priblížiť vlastnosti stratégie reálnemu použitiu pre riadenie portfólia bolo definovaných mnoho rozšírení CPPI stratégie. V prácach [5] a [23] autori skúmajú efektívnosť zaistenia za predpokladu diskrétneho obchodovania a analyzujú pravdepodobnosť pádu hodnoty portfólia pod garantovanú hranicu, ktorý v takomto prípade môže nastať. V práci [9] autori skúmajú vplyv ohraničenia na výšku expozície v rizikových aktívach, ktorá sa s rastúcim trhom zvyšuje. Viaceré rozšírenia CPPI stratégie sú analyzované v práci [35], okrem iných aj implementácia tzv. stop-loss kritéria, zahrnutie poplatkov za správu portfólia a tiež rizikových mier. Autor v práci tiež definuje modifikáciu stratégie s pohybujúcim sa investičným horizontom, motivovanú legislatívnymi požiadavkami v systéme dôchodkového sporenia v Slovenskej Republike.

Ďalšou relatívne známou zaistenou stratégiou, definovanou v roku 1976 je stratégia OBPI, z angl. Option Based Portfolio Insurance, ktorej autormi sú Leland a Rubinstein [22]. Štandardné OBPI portfólio pozostáva z rizikového aktíva a predajnej opcie európskeho typu vypísanej na dané aktívum. Zaistená hodnota portfólia v čase expirácie opcie je rovná jej realizačnej cene. V prípade, že na trhu nie

je potrebná opcia obchodovaná, táto môže byť replikovaná vhodnou dynamickou stratégiou. Podobne ako v predošlom prípade, aj ku stratégii OBPI bolo definovaných viacero modifikácií. Zaujímavý je výsledok práce [7], v ktorej autori definujú prepojenie medzi oboma stratégiami. Za predpokladu variabilného multiplikátora pre expozíciu v rizikových aktívach je OBPI zovšeobecnená verzia CPPI stratégie.

V inovatívnej práci z roku 1952 definuje Markowitz [30] základy pre novú oblasť výskumu, tzv. mean-variance analýzu portfólia. Autor v práci uvažuje ako výnosnosť, tak aj rizikovosť portfólia, ktorú odhaduje pomocou variancie. Markowitzov prístup k meraniu rizika vedie k otázke, či existuje aj iný spôsob vyjadrenia rizikovosti portfólia. Odpoveďou sú špeciálne funkcionály nazývané rizikové miery. V prelomovej práci [3] z roku 1999 autori Artzner, Delbaen, Eber a Heath položili základy modernej analýzy vlastností rizikových mier. V práci definovali skupinu základných axiém motivovaných ekonomickou interpretáciou, ktoré by rizikové miery mali spĺňať. Definovali tiež triedu tzv. koherentných rizikových mier, ktoré majú vlastnosti zaručujúce efektívne meranie rizikovej expozície a riadenie finančných rizík.

Na prácu nadväzuje mnoho výskumov, okrem iných aj práca [17] autorov Föllmer a Schied, ktorí definujú o niečo širšiu triedu tzv. konvexných rizikových mier, vykazujúcich vhodné vlastnosti pre použitie v optimalizačných úlohách. V prácach [45], [24] a [49] autori analyzujú inú triedu tzv. safety-first rizikových mier, ktoré sú vo všeobecnosti založené na pravdepodobnosti poklesu hodnoty portfólia pod stanovenú kritickú hodnotu. Iným smerom sa zaoberá práca autorov Cvitanic a Karatzas [11], ktorí definujú tzv. dynamické rizikové miery, sledujúce rizikovosť portfólia v definovanom časovom období.

Modelovaním preferencií investora vo vzťahu k výnosom a k riziku sa zaoberá napr. práca [36], v ktorej autor zavádza pojem očakávanej užitočnosti. V prácach [2] a [40] autori Arrow a Pratt definujú pojmy absolútnej a relatívnej averzie k riziku, ktoré umožňujú vzájomné porovnanie rizikových preferencií, reprezentovaných vhodnou funkciou užitočnosti. V práci [14] je poukázané na fakt, že aj keď mean-variance analýza nie je priamo založená na koncepte očakávanej užitočnosti, za určitých podmienok vedie maximalizácia očakávanej užitočnosti k mean-variance optimálnym portfóliám.

S nárastom volatility na finančných trhoch koncom osemdesiatych rokov minulého storočia sa vo finančnom sektore s publikovaním metodiky tzv. RiskMetrics [21] začala presadzovať riziková miera Value-at-Risk (skr. VaR). Miera je definovaná ako hodnota kvantilu rozdelenia strát pre definovanú hladinu významnosti. Mnoho výskumov skúmalo vhodné metódy odhadu miery VaR (pozri napr. práce [13], [4], [28], alebo tiež [19]), prípadne vhodné metódy testovania presnosti mier na danej vzorke (napr. práce [29] a [20]). Akokoľvek, s príchodom axiomatiky rizikových mier sa ukázalo, že riziková miera VaR nevykazuje vhodné vlastnosti pre meranie trhových rizík, čo môže mať v určitých prípadoch za následok pomerne časté zlyhanie investičných stratégií založených na tejto rizikovej miere. V práci [6] autori Basak a Shapiro definujú problém maximalizácie užitočnosti portfólia, s rizikovým ohraničením v podobe limitu na veľkosť miery VaR v konečnom investičnom horizonte.

V práci poukazujú na nevhodné vlastnosti VaR-RM stratégie pre riadenie rizikovosti portfólia, ktoré sú priamym dôsledkom definície miery VaR. Ich hlavným

argumentom je skutočnosť, že miera VaR kontroluje iba pravdepodobnosť výskytu najväčších strát a nie ich veľkosť, v dôsledku čoho môže VaR-RM stratégia v zlých stavoch implikovať ďaleko vyššie straty, ako by dosiahlo portfólio bez rizikového ohraničenia. Autori v práci definujú alternatívnu rizikovú mieru LEL (a angl. Limited Expected Losses), ktorá okrem pravdepodobnosti výskytu významných strát kontroluje aj ich veľkosť. Definujú tiež investičnú stratégiu založenú na miere LEL, ktorá vedie ku kvalitatívne lepším portfóliám ako stratégia založená na miere VaR. Rizikovú mieru definujú ako cenu predajnej opcie európskeho typu, t.j. veľkosť rizika je vyjadrená cenou poistenia hodnoty portfólia. Na nevhodné vlastnosti miery VaR nezávisle upozorňuje aj práca [8], v ktorej autor na jednoduchom príklade poukazuje na fakt, že cena poistenia portfólia pre dlhší investičný horizont rastie, zatiaľ čo pravdepodobnosť straty s predlžujúcim sa horizontom klesá, čo si navzájom v istom zmysle odporuje. Na prácu [6] nadväzuje okrem iných aj práca [27], ktorá analyzuje vlastnosti a prípustnosť riešenia úlohy pre rôzne konvexné ohraničenia. V práci autorka poukazuje na fakt, že stratégie VaR-RM môžu za určitých okolností a pre časy blízke investičnému horizontu implikovať nekonečné hodnoty expozície v rizikových aktívach.

Samotní autori práce [6] upozorňujú, že riziková miera LEL, rovnako ako aj miera VaR, nepatrí do triedy koherentných mier, čo naznačuje, že miera LEL nemusí byť efektívna v meraní rizikového profilu portfólia. Uvedená skutočnosť je motivujúca pre hľadanie alternatívnej rizikovej miery, ktorá by svojimi vlastnosťami bola vhodnejšia k riadeniu rizikovej expozície portfólia. Takouto mierou sa javí byť relatívne mladá riziková miera nazývaná AVaR, z angl. Average Value-at-Risk, ktorú v práci [43] z roku 2000 definovali Rockafellar a Uryasev. Autori v práci definujú diskretný model založený na minimalizácii miery AVaR, ktorý vedie na úlohu lineárneho programovania. Koherentnosť miery bola dokázaná v práci [38] a vlastnosti miery sú podrobne analyzované napr. v práci [39]. Miera AVaR okrem pravdepodobnosti výskytu kontroluje aj prvý moment rozdelenia významných strát, čo ju predurčuje k použitiu v riadení rizikového profilu portfólia. Táto práca priamo nadväzuje na vyššie uvedené výsledky definovaním dynamickej investičnej stratégie, umožňujúcej kontrolu rizikovej expozície s použitím miery AVaR.

Práca je organizovaná nasledovne. Prvá kapitola je venovaná rizikovým mieram. Sú v nej definované pojmy riziko, riziková miera a formou axióm vymedzená množina vlastností, ktorými by za ideálnych okolností rizikové miery mali disponovať. Každá z vyššie uvedených vlastností má svoje ekonomické opodstatnenie, motivované použitím mier pre riadenie rizík vo finančnom sektore. Zaujímavé sú triedy tzv. koherentných a konvexných mier, ktoré sú vo všeobecnosti považované za vhodné pre riadenie finančných rizík. V druhej časti kapitoly sú preskúvané vlastnosti vybraných rizikových mier VaR, LEL a AVaR, ktoré budeme využívať v ďalších častiach práce.

Druhá kapitola sa zaoberá investičnými stratégiami s úplným zaistením. V úvode kapitoly sú definované základné pojmy z teórie preferencií vo vzťahu k výnosom a finančným rizikám. Na pojmy očakávanej užitočnosti, určitostného ekvivalentu a averzie k riziku sa budeme odvolávať v ďalších častiach práce. Ďalej sú v kapitole definované zaistené stratégie CPPI a OBPI a analyzované ich základné vlastnosti. Prepojením medzi oboma stratégiami je už spomínaná skutočnosť, že OBPI je možné

za určitých podmienok považovať za zovšeobecnenú verziu stratégie CPPI.

V tretej kapitole predstavíme stratégie čiastočného zaistenia, pre ktoré je zvolená hodnota portfólia garantovaná iba na určitej hladine významnosti. V úvode kapitoly definujeme základný model trhu, na ktorý sa budú odkazovať stratégie definované v ďalších častiach. Ďalej predstavíme zaistené stratégie nezaisteného investora a stratégie VaR-RM a LEL-RM, ktoré sú výsledkom riešenia úlohy maximalizácie užitočnosti z hodnoty portfólia na úplnom trhu v konečnom investičnom horizonte. Obe stratégie sú podrobne analyzované v zmysle metodiky definovanej v práci [6].

V posledných troch kapitolách sa zaoberáme novou zaistenou stratégiou založenou na koherentnej miere AVaR. Vo štvrtej kapitole definujeme základnú úlohu AVaR investora a popisujeme tiež prechod k úlohe, ktorá je za určitých podmienok ekvivalentná pôvodnej úlohe. Po transformácii definujeme alternatívnu úlohu AVaR investora a odvodíme optimálnu výplatnú funkciu portfólia v čase investičného horizontu. Definujeme tiež optimálnu výplatnú funkciu v čase pred investičným horizontom a optimálnu stratégiu AVaR portfólia, ktorá vedie k tejto výplatnej funkcii. V závere kapitoly uvádzame Vetu o ohraničenosti expozície v rizikových aktívach, ktorú považujeme za dôležitú vlastnosť stratégie.

V piatej kapitole analyzujeme vlastnosti novovytvorenej stratégie s použitím výstupov z numerických simulácií. Skúmame tvar výplatných funkcií portfólií, vývoj relatívnej expozície v rizikových aktívach a vykonáme tiež analýzu senzitivity na zmenu trhových parametrov a parametrov preferencií. V závere kapitoly je uvedená komparatívna analýza so stratégiami VaR-RM a LEL-RM vo vzťahu k tvaru výplatných funkcií, priebehu expozície v rizikových aktívach a tiež pravdepodobnostných rozdelení portfólií v čase investičného horizontu.

Šiesta kapitola obsahuje prípadovú štúdiu, v ktorej demonštrujeme použitie stratégie AVaR v reálnom prostredí riadenia akciového portfólia, kedy platnosť všetkých predpokladov modelu nemôže byť zaručená. Priebeh AVaR portfólia je podrobne analyzovaný a porovnávaný s vývojom nezaisteného portfólia s rovnakými parametrami. V závere práce uvádzame zhrnutie hlavných výsledkov a prínosov nášho výskumu a zoznam použitej literatúry.

# Kapitola 1

## Rizikové miery

V práci [3] z roku 1999 autori Artzner, Delbaen, Eber a Heath položili základy pre modernú analýzu rizikových mier. Definovali pojem riziko a vymedzili množinu portfólií, ktoré sú pre investora prijateľné, či už s ohľadom na postoj investora k riziku alebo kvôli regulačným požiadavkám dohľadu nad finančným trhom. Autori tiež definovali základné vlastnosti, ktoré by mali rizikové miery spĺňať v záujme efektívneho merania rizikovej expozície a zaviedli pojem tzv. koherentných mier, ktoré týmito vlastnosťami disponujú.

Na uvedenú prácu nadväzuje mnoho výskumov, okrem iných aj práca [17] autorov Föllmer a Schied, ktorí zaviedli vlastnosť konvexnosti a definovali triedu tzv. konvexných mier, ktoré disponujú vhodnými vlastnosťami pre použitie v optimalizačných úlohách.

### 1.1 Axiomatika rizikových mier

Uvažujme pravdepodobnostný priestor  $(\Omega, \mathbb{P})$ . *Rizikom* budeme nazývať náhodnú premennú  $X$  vyjadrujúcu výnos portfólia v čase konečného investičného horizontu  $T$ , ktorý v stave  $\omega \in \Omega$  nadobudne hodnotu  $X(\omega)$ . Nech  $\mathcal{G}$  je množina všetkých rizík, t.j. všetkých funkcií  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  a nech  $\mathcal{A}$  je tzv. množina *akceptovateľnosti*, t.j. množina takých rizík, ktoré sú pre investora akceptovateľné z pohľadu možných strát na hodnote portfólia a dôsledkov plynúcich z týchto strát (napr. bankrot, insolventnosť investora, a.i.). Nižšie uvádzame axiómy pre množiny akceptovateľnosti, ako boli definované v práci [3].

**Axióma 1.** *Množina akceptovateľnosti  $\mathcal{A}$  obsahuje množinu  $L_+$ , kde  $L_+$  je množina všetkých nezáporných prvkov množiny  $\mathcal{G}$ .*

**Axióma 2.** *Množina akceptovateľnosti  $\mathcal{A}$  sa neprekrýva s množinou  $L_{--}$ , kde*

$$L_{--} \equiv \{X \mid \forall \omega \in \Omega, X(\omega) < 0\}.$$

**Axióma 3.** *Pre množinu akceptovateľnosti  $\mathcal{A}$  platí:  $\mathcal{A} \cap L_- = \{0\}$ , kde  $L_-$  je množina všetkých záporných prvkov množiny  $\mathcal{G}$  a  $\{0\}$ .*

**Axióma 4.** *Množina  $\mathcal{A}$  je konvexná.*

**Axióma 5.** *Množina  $\mathcal{A}$  je pozitívne homogénny kužel.*

V ďalšom texte označme rizikovú mieru ako funkciu  $\rho(\cdot)$ . Kladnú hodnotu  $\rho(X)$  môžeme interpretovať ako požiadavku na navýšenie kapitálu, po ktorom sú straty na hodnote portfólia pre investora akceptovateľné. Záporná hodnota  $\rho(X)$  naznačuje, že po znížení kapitálu vo výške  $\rho(X)$  sú možné straty na hodnote portfólia pre investora stále akceptovateľné (pod pojmom kapitál môžeme rozumieť napríklad vlastné imanie investičnej spoločnosti, t.j. navýšením imania si spoločnosť vytvára rezervy, z ktorých vie vykryť prípadné straty na hodnote portfólia).

Nižšie uvádzame všeobecnú definíciu rizikovej miery, definujeme jej vzťah s množinou akceptovateľnosti a uvádzame tiež základné axiómy, ktoré zaručujú vhodné vlastnosti rizikových mier.

**Definícia 1.** *Riziková miera je zobrazenie z množiny  $\mathcal{G}$  do  $\mathbb{R}$ .*

**Definícia 2.** *Riziková miera spojená s množinou akceptovateľnosti  $\mathcal{A}$  je zobrazenie z  $\mathcal{G}$  do  $\mathbb{R}$  ozn.  $\rho_{\mathcal{A},r}$  definované:*

$$\rho_{\mathcal{A},r}(X) \equiv \inf\{m \in \mathbb{R} \mid m \cdot r + X \in \mathcal{A}\},$$

kde  $r$  je výnos referenčného investičného nástroja (napr. bezrizikového dlhopisu).

**Definícia 3.** *Množina akceptovateľnosti spojená s rizikovou mierou  $\rho$  je množina  $A_\rho$  definovaná:*

$$A_\rho \equiv \{X \in \mathcal{G} \mid \rho(X) \leq 0\}.$$

**Axióma T.** *Translačná invariancia:  $\forall X \in \mathcal{G}$  a  $\forall c \in \mathbb{R} : \rho(X + c \cdot r) = \rho(X) - c$ .*

**Axióma S.** *Subaditivita:  $\forall X$  a  $Y \in \mathcal{G} : \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ .*

**Axióma PH.** *Pozitívna homogenita:  $\forall \lambda \geq 0$  a  $\forall X \in \mathcal{G} : \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ .*

**Axióma M.** *Monotónnosť:  $\forall X$  a  $Y \in \mathcal{G} : X \leq Y \implies \rho(X) \geq \rho(Y)$ .*

**Axióma R.** *Relevantnosť:  $\forall X : X \leq 0$  a  $X \not\equiv 0 \implies \rho(X) > 0$ .*

Vyššie uvedené axiómy majú pomerne zrejmu ekonomickú interpretáciu. Vlastnosť T zaručuje, že miera pracuje v rovnakých jednotkách ako je vyjadrená hodnota portfólia. Pokiaľ má miera vlastnosť T, potom pre každé  $X$  platí:  $\rho(X + \rho(X) \cdot r) = 0$ , kde uvedená rovnosť priamo súvisí s definíciou množiny akceptovateľnosti spojenej s mierou  $\rho(\cdot)$ . Vlastnosť S súvisí so vzťahom diverzifikácie portfólia a rizika, t.j. miera s vlastnosťou S priradí diverzifikovanému portfóliu pozostávajúceho z dvojice pozícií  $X + Y$  nanajvýš takú rizikovú váhu ako oddeleným portfóliám  $X$  a  $Y$  v súčte. Miera, ktorá má vlastnosť PH je lineárna vzhľadom k veľkosti portfólia. Miera s vlastnosťou M priradí rizikovejšiemu portfóliu vyššiu rizikovú váhu a nakoniec vlastnosť R zaručuje, že pokiaľ riziko existuje, riziková miera ho zachytí.

## 1.2 Koherentné a konvexné miery

Autori práce [3] definovali koherentnú mieru nasledovne:

**Definícia 4.** *Riziková miera s vlastnosťami translačnej invariance, subaditivity, pozitívnej homogenity a monotónnosti sa nazýva koherentná.*

*Poznámka:* Autori do formulácie rizikovej miery a jej vlastností zakomponovali výnos referenčného aktíva vo výške  $r$ , ktorým prepočítavajú budúcu hodnotu strát na súčasnú. Je dôležité poznamenať, že uvedený prepočet nemá zásadný vplyv na vlastnosti skúmaných rizikových mier a preto budeme v ďalšom texte predpokladať výnos referenčného aktíva rovný 1.

Na prácu [3] nadväzujú autori prác [16] a [17] definovaním vlastnosti konvexnosti a triedy tzv. *konvexných rizikových mier* a sformulovaním jej základných vlastností.

**Axióma K.** *Konvexnosť:*  $\forall X$  a  $Y \in \mathcal{G}$  a  $\forall \lambda \in [0, 1] : \rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$ .

**Definícia 5.** *Riziková miera s vlastnosťami translačnej invariance, monotónnosti a konvexnosti sa nazýva konvexná.*

**Veta 1.** *Konvexná riziková miera s vlastnosťami pozitívnej homogenity je koherentná.*

*Dôkaz.* Nech  $\rho(\cdot)$  je konvexná riziková miera (má vlastnosti translačnej invariance, monotónnosti a konvexnosti).

Potom  $\forall X$  a  $Y \in \mathcal{G}$  a  $\forall \lambda \in [0, 1]$  z definície vlastnosti konvexnosti platí:  $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$ . Zvoľme  $\lambda = 0,5$ . Potom platí:

$$0,5\rho(X + Y) \stackrel{(PH)}{=} \rho(0,5(X + Y)) \leq 0,5(\rho(X) + \rho(Y)),$$

$\implies \rho(\cdot)$  spĺňa vlastnosť subaditivity  $\implies \rho(\cdot)$  je koherentná. □

**Veta 2.** *Pozitívna homogenita a subaditivita implikujú konvexnosť miery.*

*Dôkaz.* Nech je riziková miera  $\rho(\cdot)$  pozitívne homogénna a má vlastnosť subaditivity, potom  $\forall X$  a  $Y \in \mathcal{G}$  a  $\forall \lambda \geq 0$  platí:

$$\lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y) \stackrel{(PH)}{=} \rho(\lambda X) + \rho((1 - \lambda)Y) \stackrel{(S)}{\geq} \rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \implies \rho(\cdot)$$

je konvexná. □

O vzťahu medzi konvexnými mierami a množinami akceptovateľnosti hovorí nasledovná Veta (formulácia podľa práce [42], dôkaz je uvedený napr. v práci [16]).

**Veta 3.** *Nech  $\rho$  je konvexná miera s množinou akceptovateľnosti  $\mathcal{A}_\rho$ , potom platí  $\rho_{\mathcal{A}_\rho} = \rho$  a množina  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\rho$  má nasledovné vlastnosti:*

(i) množina  $\mathcal{A}$  je konvexná a neprázdna,



(ii) ak  $X \in \mathcal{A}$  a  $Y \in \mathcal{G}$  potom  $Y \geq X$  implikuje  $Y \in \mathcal{A}$ ,

(iii) ak je miera  $\rho(X)$  koherentná, potom  $\mathcal{A}$  je konvexný kužel.

Naopak, ak  $\mathcal{A}$  je neprázdna konvexná podmnožina  $\mathcal{G}$  s vlastnosťou (ii) a k nej prislúchajúca funkcia  $\rho_{\mathcal{A}}$  spĺňa  $\rho_{\mathcal{A}}(0) > -\infty$  potom platí:

(iv)  $\rho_{\mathcal{A}}$  je konvexná riziková miera,

(v) ak  $\mathcal{A}$  je kužel, potom  $\rho_{\mathcal{A}}$  je koherentná riziková miera.

## 1.3 Klasifikácia vybraných rizikových mier

V tejto časti preskúmame vlastnosti vybraných rizikových mier s ohľadom na axiomatiku predstavenú v predošlej časti. Zaoberáme sa mierami, ktoré využijeme ako rizikové ohraničenia v úlohách skúmaných v ďalších kapitolách.

### 1.3.1 Value-at-Risk

Riziková miera *Value-at-Risk* (skr. VaR), ako jedna z najznámejších rizikových mier, nachádza uplatnenie v mnohých aplikovaných odboroch. V aplikácii na riadenie finančných rizík môžeme mieru definovať ako zápornú hodnotu  $\alpha$ -kvantilu rozdelenia náhodnej premennej  $X$ , vyjadrujúcej výnos portfólia v čase investičného horizontu. Nižšie uvádzame definíciu podľa [3]

$$VaR_{\alpha}(X) = -\inf\{m \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq m) > \alpha\}, \quad (1.1)$$

kde  $\alpha \in [0, 1]$  je exogénny parameter (tzv. hladina významnosti). Miera VaR je obľúbená najmä kvôli jednoduchej interpretácii. Hodnota  $VaR_{\alpha}(X)$  predstavuje najvyššiu stratu, ktorá za normálnych okolností (s pravdepodobnosťou  $1 - \alpha$ ) nebude prekročená. Miera VaR je v dokumente BASEL II odporúčaná na meranie rizikovej expozície finančných inštitúcií a výpočet kapitálovej požiadavky. Základné vlastnosti miery VaR sme sformulovali do nižšie uvedenej Vety.

**Veta 4.** *Riziková miera VaR má vlastnosť translačnej invariencie, pozitívnej homogenity, monotónnosti, relevantnosti a nespĺňa vlastnosť subaditivity a konvexnosti.*

*Dôkaz.*

1. *Translačná invariencia:*  $\forall X \in \mathcal{G}$  a  $\forall c \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} VaR_{\alpha}(X + c) &= -\inf\{m \mid \mathbb{P}(X + c \leq m) > \alpha\} \\ &= -\inf\{m \mid \mathbb{P}(X \leq m - c) > \alpha\} \\ &= -\inf\{z \mid \mathbb{P}(X \leq z) > \alpha\} + c = VaR_{\alpha}(X) + c. \end{aligned}$$

2. *Pozitívna homogenita:*  $\forall \lambda \geq 0$  a  $\forall X \in \mathcal{G}$  :

$$\begin{aligned} VaR_{\alpha}(\lambda X) &= -\inf\{m \mid \mathbb{P}(\lambda X \leq m) > \alpha\} \\ &= -\inf\{m \mid \mathbb{P}(X \leq m/\lambda) > \alpha\} \\ &= -\lambda \inf\{z \mid \mathbb{P}(X \leq z) > \alpha\} = \lambda VaR_{\alpha}(X). \end{aligned}$$

3. *Monotónnosť*: Vlastnosť je zrejmá z definície miery.

4. *Relevantnosť*: Vlastnosť je zrejmá z definície miery.

5. *Subaditivita*: Miera VaR pre špeciálne portfóliá nespĺňa vlastnosť subaditivity. Ako príklad uvažujme portfólio z práce [3]. Na trhu je dostupná akcia s cenou  $S_t$  a na ňu vypísané digitálne opcie s cenami  $U_t$  a  $L_t$  s realizačnými cenami  $K_U$  a  $K_L$ . V čase maturity oboch opcií, ozn.  $T$ , je hodnota  $U_T$  rovná 1000, ak  $S_T > K_U$ , inak 0 a hodnota  $L_T$  je rovná 1000, ak  $S_T < K_L$ , inak 0. Predpokladajme, že platí  $K_L < K_U$ . Nech  $K_L$  a  $K_U$  sú zvolené tak, že platí:  $\mathbb{P}(S_T < K_L) = \mathbb{P}(S_T > K_U) = 0,008$ . Potom hodnota VaR na hladine významnosti 1% pre investora držiaceho krátku pozíciu v jednej opcii  $U$  (resp.  $L$ ) je  $-U_t$  (resp.  $-L_t$ ), avšak hodnota  $VaR_{1\%}((-U_T) + (-L_T))$  pre investora držiaceho portfólio dvoch opcií  $U$  a  $L$  v krátkej pozícii je kladná a rovná  $1000 - U_t - L_t$ , čo je v spore s vlastnosťou subaditivity.

*Poznámka: Je dôležité poznamenať, že miera VaR má vlastnosť subaditivity za predpokladu normálneho rozdelenia náhodnej premennej  $X$  (viď napr. [3]). Kritici miery VaR argumentujú, že hypotéza o normalite finančných výnosov bola empirickou analýzou zamietnutá (viď napr. [15]).*

6. *Konvexnosť*: Dôsledkom nespĺňania vlastnosti subaditivity je nespĺňanie vlastnosti konvexnosti. □

**Dôsledok 1.** *Riziková miera VaR nie je koherentná ani konvexná miera.*

### 1.3.2 Limited Expected Losses

Miera *Limited Expected Losses* (skr. LEL) bola definovaná v práci [6] autormi Basak a Shapiro v roku 2001. Autori mieru definujú ako cenu poistenia hodnoty portfólia v čase investičného horizontu, čo je ekvivalentné cene predajnej opcie európskeho typu, vypísanej na hodnotu portfólia

$$LEL_K(X) = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(K - X)^+] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\xi_T(K - X)^+], \quad (1.2)$$

kde  $(\cdot)^+ \equiv \max(\cdot, 0)$ ,  $r$  je bezriziková úroková miera,  $T$  je investičný horizont,  $K$  je realizačná cena opcie vyjadrujúca poistenú hodnotu portfólia,  $\mathbb{P}$  je objektívna pravdepodobnostná miera,  $\mathbb{Q}$  je rizikovo-neutrálna miera a  $e^{rT} \xi_T = d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$  je Radon-Nikodymová derivácia. Pripomeňme, že pre ocenenie európskych opcií existujú za určitých predpokladov explicitné formuly, viď napr. vzťahy (2.9) a (2.10) v ďalších častiach práce.

Autori boli pri definovaní miery LEL motivovaní nevhodnými vlastnosťami miery VaR pri aplikovaní na riadenie rizikovej expozície portfólia v optimalizačných úlohách. Autori poukazujú najmä na skutočnosť, že miera VaR skúma iba pravdepodobnosť výskytu extrémnych strát ale neskúma ich veľkosť, čo môže viesť k nesprávne odhadu rizikivosti portfólia. Základné vlastnosti miery LEL sme sformulovali do nižšie uvedenej Vety.

**Veta 5.** *Miera LEL má vlastnosť subaditivity, pozitívnej homogenity, monotónnosti, relevantnosti a konvexnosti a nemá vlastnosť translačnej invariance.*

*Dôkaz.*

1. *Subaditivita:*  $\forall X$  a  $Y \in \mathcal{G}$  :

$$\begin{aligned} LEL_K(X + Y) &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(K - (X + Y))^+] \leq e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(K + K - X - Y)^+] \\ &\leq e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(K - X)^+ + (K - Y)^+] \\ &\leq e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(K - X)^+] + e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(K - Y)^+] \\ &= LEL_K(X) + LEL_K(Y). \end{aligned}$$

2. *Pozitívna homogenita:*  $\forall \lambda \geq 0$  a  $\forall X \in \mathcal{G}$  :

$$\begin{aligned} LEL_{K_{\lambda X}}(\lambda X) &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(K_{\lambda X} - \lambda X)^+] = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(\lambda K_X - \lambda X)^+] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\lambda (K_X - X)^+] = \lambda LEL_{K_X}(X). \end{aligned}$$

*Poznámka:* V dôkaze je naznačené, že realizačná cena opcie  $K$  závisí od počiatkovej hodnoty portfólia. Inak by vlastnosť pozitívnej homogenity by nebola splnená.

3. *Monotónnosť:*  $\forall X$  a  $Y \in \mathcal{G} : X \leq Y \implies$

$$e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(K - X)^+] \geq e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(K - Y)^+] \implies LEL_K(X) \geq LEL_K(Y).$$

4. *Relevantnosť:* Vlastnosť je zrejmá z definície miery.

5. *Konvexnosť:*  $\forall X$  a  $Y \in \mathcal{G}$  a  $\forall \lambda \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned} LEL_K(\lambda X + (1 - \lambda)Y) &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(K - (\lambda X + (1 - \lambda)Y))^+] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(\lambda K + (1 - \lambda)K - (\lambda X + (1 - \lambda)Y))^+] \\ &\leq \lambda e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(K - X)^+] + (1 - \lambda) e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(K - Y)^+] \\ &= \lambda LEL_K(X) + (1 - \lambda) LEL_K(Y). \end{aligned}$$

6. *Translačná invariancia:*  $\forall X \in \mathcal{G}$  a  $\forall c \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} LEL_K(X + ce^{rT}) &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(K - (X + ce^{rT}))^+] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [((K - ce^{rT}) - X)^+] \\ &\stackrel{(!)}{\geq} e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(K - X)^+] - c = LEL_K(X) - c \\ &\implies \text{spor s vlastnosťou translačnej invariance.} \end{aligned}$$

Uvažujme nasledovný protipríklad. Označme  $S$  akciu, ktorá v každom čase nadobúda iba hodnoty 1 alebo 3, obe s rizikovo-neutrálnou pravdepodobnosťou  $q = 0,5$ . Označme  $P$  predajnú opciu vypísanú na toto aktívum, s realizačnou cenou 2 a maturitou v čase  $T$  a  $B$  bezriziková investícia, ktorá vyplatí hodnotu 2 v čase  $T$  (nech  $r = 0$ ). Spočítaním hodnoty LEL pre portfólio zostavené z opcie a bezrizikovej investície dostávame  $LEL_2(P + B) = 0$ , zatiaľ čo  $LEL_2(P) - B = 1/2 - 2 = -3/2$ .  $\square$

**Dôsledok 2.** *Riziková miera LEL nie je koherentná ani konvexná miera.*

### 1.3.3 Average Value-at-Risk

Riziková miera *Average Value-at-Risk* (skr. AVaR), známa tiež pod názvami *Conditional Value-at-Risk* (CVaR), *Tail Value-at-Risk* (TVaR) a *Expected Shortfall* (ES), bola definovaná v práci [43] ako odpoveď na nevhodné vlastnosti miery VaR pre použitie na meranie rizikovej expozície. V práci [39] je riziková miera AVaR definovaná

$$AVaR_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_p(X) dp, \quad (1.3)$$

kde  $\alpha \in (0, 1]$  je hladina významnosti a riziková miera  $VaR_p(X)$  je definovaná ako v (1.1). Základné kvalitatívne vlastnosti miery AVaR sme sformulovali do nižšie uvedenej Vety.

**Veta 6.** *Riziková miera AVaR má vlastnosť translačnej invariance, pozitívnej homogenity, subaditivity, monotónnosti, relevantnosti a konvexnosti.*

Pre názornosť uvádzame nižšie dôkaz vlastností miery AVaR za predpokladu náhodnej premennej  $X$  so spojitou, diferencovateľnou a rastúcou distribučnou funkciou. Pre zovšeobecnené odvodenie vlastností miery AVaR viď napríklad prácu [39].

*Dôkaz.* Nech  $X$  je náhodná premenná so spojitou, diferencovateľnou a rastúcou distribučnou funkciou. Rizikovú mieru  $AVaR_\alpha(X)$  je možné v takomto prípade alternatívne vyjadriť [1]

$$AVaR_\alpha(X) = -\mathbb{E}[X | X \leq -VaR_\alpha(X)],$$

a odvodenie vlastností AVaR je zhrnuté v bodoch 1. až 6.

1. *Translačná invariancia:*  $\forall X \in \mathcal{G}$  a  $\forall c \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} AVaR_\alpha(X + c) &= \mathbb{E}[-X - c | X + c \leq -VaR_\alpha(X + c)] \\ &= \mathbb{E}[-X - c | X + c \leq -VaR_\alpha(X) + c] \\ &= \mathbb{E}[-X | X \leq -VaR_\alpha(X)] - c = AVaR_\alpha(X) - c, \end{aligned}$$

kde druhá rovnosť vyplýva z vlastností miery VaR (Veta 4 - časť Translačná invariancia).

2. *Subaditivita:* Dôkaz vlastnosti subaditivity je uvedený napr. v práci [1].

$\forall X$  a  $Y \in \mathcal{G}$  a  $Z = X + Y$  :

$$\begin{aligned} &AVaR_\alpha(Z) - AVaR_\alpha(X) - AVaR_\alpha(Y) = \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left( \mathbb{E} [Z 1_{Z \leq -VaR_\alpha(Z)} - X 1_{X \leq -VaR_\alpha(X)} - Y 1_{Y \leq -VaR_\alpha(Y)}] \right) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left( \mathbb{E} [X (1_{Z \leq -VaR_\alpha(Z)} - 1_{X \leq -VaR_\alpha(X)}) \right. \\ &\quad \left. - Y (1_{Z \leq -VaR_\alpha(Z)} - 1_{Y \leq -VaR_\alpha(Y)}) \right] \Big) \\ &\leq -\frac{1}{\alpha} \left( -VaR_\alpha(X) \mathbb{E} [1_{Z \leq -VaR_\alpha(Z)} - 1_{X \leq -VaR_\alpha(X)}] \right. \\ &\quad \left. + VaR_\alpha(Y) \mathbb{E} [1_{Z \leq -VaR_\alpha(Z)} - 1_{Y \leq -VaR_\alpha(Y)}] \right) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left( -VaR_\alpha(X) (\alpha - \alpha) + VaR_\alpha(Y) (\alpha - \alpha) \right) = 0, \end{aligned}$$

kde  $1_{(\cdot)}$  je funkcia indikátor.

3. *Pozitívna homogenita*:  $\forall \lambda \geq 0$  a  $\forall X \in \mathcal{G}$  :

$$\begin{aligned} AVaR_\alpha(\lambda X) &= \mathbb{E}[-\lambda X \mid \lambda X \leq -VaR_\alpha(\lambda X)] \\ &= \mathbb{E}[-\lambda X \mid X \leq -VaR_\alpha(X)] \\ &= \lambda \mathbb{E}[-X \mid X \leq -VaR_\alpha(X)] \\ &= \lambda AVaR_\alpha(X), \end{aligned}$$

kde druhá rovnosť vyplýva z vlastností miery VaR (Veta 4 - časť Pozitívna homogenita).

4. *Monotónnosť*: Vlastnosť je zrejmá z definície miery.

5. *Relevantnosť*: Vlastnosť je zrejmá z definície miery.

6. *Konvexnosť*: Dôkaz je ekvivalentný s dôkazom platnosti *subaditivity* pre nastavenie  $X = \lambda A$  a  $Y = (1 - \lambda)B$ .

□

**Dôsledok 3.** *Riziková miera AVaR patrí do triedy koherentných aj konvexných mier.*

Na rozdiel od rizikových mier VaR a LEL, riziková miera AVaR spĺňa všetky požiadavky kladené na rizikové miery v záujme efektívneho merania rizikovej expozície. Táto skutočnosť je pomerne silnou motiváciou k využitiu miery AVaR pri hľadaní optimálnej investičnej stratégie s ohraničením na rizikový profil investície.

# Kapitola 2

## Zaistené investičné stratégie

V tejto časti sú predstavené investičné stratégie, ktoré majú za cieľ okrem očakávaného výnosu kontrolovať aj veľkosť potenciálnych strát na hodnote portfólia. Na začiatku kapitoly sú predstavené základné pojmy z teórie preferencií, na ktoré budeme odkazovať v ďalšom texte. Ďalej sú analyzované pomerne známe stratégie CPPI a OBPI, ktoré sa odlišným prístupom snažia o zaistenie minimálnej hodnoty investície, v prípade nepriaznivého vývoja na trhu. V závere kapitoly je definovaný vzťah medzi oboma stratégiami, kde za určitých podmienok je stratégiu OBPI možné považovať za zovšeobecnenú verziu CPPI stratégie.

### 2.1 Modelovanie preferencií

#### 2.1.1 Očakávaná užitočnosť

Jedným zo základných výsledkov modernej teórie portfólia je modelovanie preferencií investora vo vzťahu k výberu vhodného portfólia. Medzi základné charakteristiky portfólia, ktoré majú priamy dopad na preferencie, patrí *očakávaný výnos* a *riziko* plynúce z investície. Úvaha o preferenciách investora vo vzťahu k obom spomínaným charakteristikám je pomerne jednoznačná. Uvažujme pre jednoduchosť dve portfóliá generujúce náhodný výnos:

- ak sú obe portfóliá rovnako rizikové, investor preferuje portfólio s vyšším očakávaným výnosom,
- ak majú obe portfóliá rovnakú očakávanú výnosnosť, investor preferuje menej rizikové portfólio.

Vo všeobecnosti sa portfóliá líšia súčasne výnosnosťou aj rizikovosťou a pre ich odlíšenie z pohľadu preferencií je potrebné definovať zložitejšie kritériá. Jedným z možných spôsobov, ako modelovať preferencie vo vzťahu k výberu portfólia je koncept *očakávanej užitočnosti*.

Uvažujme podobne ako v predošlej časti pravdepodobnostný priestor  $(\Omega, \mathbb{P})$ , zobrazenie  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  reprezentujúce portfólio s náhodným výnosom a označme  $\mathcal{G}$  množinu všetkých portfólií. Funkciou užitočnosti nazývame zobrazenie  $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  so špeciálnymi vlastnosťami vymedzenými súborom axióm definovaných v teórii

preferencií [46]. Funkcia  $u(\cdot)$  priradí každej realizácii náhodnej premennej skóre, tzv. užitočnosť. V nadväznosti na axiómy budeme v našej práci predpokladať funkciu užitočnosti, ktorá je

$$1. \text{ spojité, dvakrát diferencovateľná} \quad (2.1)$$

$$2. \text{ rastúca} \quad (2.2)$$

$$3. \text{ konkávna} \quad (2.3)$$

$$4. \text{ a platí } \lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0, \quad (2.4)$$

kde rastúcosť je základná požiadavka kladená na funkcie užitočnosti, konkávnosť funkcie je ekvivalentná predpokladu tzv. rizikovo averzného investora [2] a ostatné technické vlastnosti sú nevyhnutné pre ďalšie využite funkcie v tejto práci.

Očakávanou užitočnosťou nazývame operátor  $\mathbb{E}[u(X)]$ , ktorý slúži na porovnanie preferencií medzi dvoma alebo viacerými portfóliami. V teórii portfólia sa pomerne často rieši úloha maximalizácie očakávanej užitočnosti, t.j. úlohou je spomedzi všetkých portfólií vybrať to, ktoré pre investora generuje maximálny úžitok po zohľadnení náhodného rozdelenia výnosov jednotlivých portfólií a preferencií investora vyjadrených vhodnou funkciou užitočnosti.

### 2.1.2 Určitostný ekvivalent

Určitostným ekvivalentom pre portfólio s náhodným výnosom  $X$  nazývame hodnotu  $C \in \mathbb{R}$ , pre ktorú platí

$$u(C) = \mathbb{E}[u(X)], \quad (2.5)$$

kde preferencie investora sú modelované pomocou funkcie užitočnosti  $u(\cdot)$ . Určitostný ekvivalent predstavuje bezrizikové portfólio s hodnotou  $C$ , ktoré investor nevie z pohľadu svojich preferencií odlíšiť od rizikového portfólia  $X$ , nakoľko obe portfóliá generujú rovnakú očakávanú užitočnosť. Pre detailnejšie informácie o koncepte určitostného ekvivalentu pozri napr. prácu [42].

### 2.1.3 Averzia k riziku

V prácach [2] a [40] autori definovali spôsob, akým sa dá pre daného investora vhodne vyjadriť miera averzie k riziku. Za predpokladu vlastností (2.1)-(2.4) pre funkciu užitočnosti  $u(\cdot)$  definujeme *Arrow-Prattov* koeficient absolútnej averzie k riziku ako

$$\alpha_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

a koeficient relatívnej averzie k riziku ako

$$\alpha_r(x) = -x \frac{u''(x)}{u'(x)}, \quad (2.6)$$

kde vyššia hodnota koeficientu vyjadruje vyššiu úroveň averzie k riziku. Z definícií je zrejmé, že averzia, vyjadrená absolútnym alebo relatívnym koeficientom, môže byť pre rôzne úrovne realizácie náhodnej premennej  $X$  odlišná. Existujú však aj

funkcie užitočnosti, ktoré vykazujú konštantný priebeh rizikovej averzie na celom definičnom obore.

*Príklad: Uvažujme funkciu užitočnosti definovanú*

$$u(x) = \frac{x^p}{p} \quad p < 1, p \neq 0. \quad (2.7)$$

*Pre koeficient relatívnej averzie k riziku platí*

$$\alpha_r(x) = -x \frac{u''(x)}{u'(x)} = -x \frac{x^{p-2}}{x^{p-1}}(p-1) = 1-p.$$

Koeficient relatívnej averzie k riziku pre funkciu (2.7) je konštantný na celom rozsahu  $x$ . Takéto funkcie sa zvyknú nazývať tzv. izoelastické funkcie, alebo tiež CRRA (z angl. Constant Relative Risk Aversion). Čím je hodnota  $p$  vyššia, tým je investor menej rizikovo averzný. V práci [31] autori definovali rozsah vhodných nastavení averzie k riziku vo vzťahu k reálnym aplikáciám na úrovni [2, 10], čo zodpovedá nastaveniam parametra  $p \in [-1, -9]$ . V ďalších častiach budeme pracovať s funkciou (2.7) a rizikovú averziu investora budeme popisovať vzťahom  $1-p$ .

## 2.2 Stratégia CPPI

Investičná stratégia CPPI (z angl. Constant Proportion Portfolio Insurance), predstavená v práci [37], je založená na relatívne jednoduchom pravidle prerozdelenia investície medzi bezrizikové aktívum a portfólio rizikových aktív.

### 2.2.1 Definícia stratégie

Označme  $W(t)$  hodnotu portfólia v čase  $t \in [0, \infty)$ . Cieľom stratégie je v každom čase udržať hodnotu portfólia nad garantovanou úrovňou  $F(t)$ . Štandardná CPPI stratégia predpokladá, že garantovaná hodnota  $F(t)$  sa v čase vyvíja v zmysle jednoduchej diferenciálnej rovnice [41]

$$dF(t) = F(t) r dt,$$

kde  $r$  je konštantná úroková miera a pre garantovanú hodnotu v čase  $t = 0$  platí  $F(0) < W(0)$ . Definujme proces  $C(t)$  ako rozdiel hodnoty portfólia a garantovanej úrovne

$$C(t) = W(t) - F(t),$$

t.j. náhodná premenná  $C(t)$  vyjadruje tzv. bezpečnostný vankúš pre hodnotu portfólia v čase  $t$ . Zaisťovaná stratégia  $\theta(t)$  pre stratégiu CPPI, vyjadrujúca expozíciu v portfóliu rizikových aktív, je definovaná

$$\theta(t) = \begin{cases} mC(t) & \text{ak } W(t) > F(t) \\ 0 & \text{ak } W(t) \leq F(t), \end{cases}$$



kde  $m \geq 0$  je zvolený multiplikátor [34]. Z definície stratégie vyplýva, že po dosiahnutí garantovanej hodnoty  $F(t)$  v ľubovoľnom čase  $t$ , stratégia zatvorí pozíciu v rizikových aktívach a hodnota portfólia sa ďalej vyvíja ako bezriziková investícia. Predpokladajme, že dynamika ceny rizikového portfólia  $S$  je modelovaná geometrickým Brownovým pohybom, t.j. pre prírastky ceny platí

$$dS(t) = S(t) [\mu dt + \sigma dw(t)], \quad (2.8)$$

kde  $\mu$  je konštantný drift,  $\sigma$  konštantná volatilita prírastkov a  $w(t)$  je Wienerov proces [32]. Hodnota CPPI portfólia v čase  $t$  je potom rovná [10]

$$W(t) = F(0)e^{rt} + C(0) \left( \frac{S(t)}{S(0)} \right)^m \exp \left\{ \left( r - m \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{m^2 \sigma^2}{2} \right) t \right\}.$$

### 2.2.2 Voľba multiplikátora

Vhodným nastavením parametra  $m$  môže investor do stratégie zahrnúť preferencie averzie k riziku. Pre nízke hodnoty multiplikátora bude hodnota portfólia vystavená menším fluktuáciám v dôsledku precenenia portfólia rizikových aktív, no zároveň portfólio nedokáže využiť potenciál rastu, v prípade pozitívneho vývoja trhu. Napopak, pre vyššie hodnoty multiplikátora stratégia dokáže vo väčšej miere využiť rast ceny podkladových rizikových aktív, avšak v prípade nepriaznivého vývoja ceny aktív, sa cena portfólia skôr dostane na garantovanú hranicu a expozícia v rizikových aktívach sa prepne na hodnotu  $\theta(t) = 0$ .

Pre očakávanú hodnotu a varianciu hodnoty CPPI portfólia platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W(t)] &= F(0)e^{rt} + C(0)e^{(r+m(\mu-r))t} \\ \text{Var}[W(t)] &= C(0)^2 \left( e^{m^2 \sigma^2 t} - 1 \right) e^{2(r+m(\mu-r))t}. \end{aligned}$$

Obe charakteristiky sú rastúce funkcie podľa parametra  $m$  a volatilita rizikového portfólia nemá vplyv na očakávanú hodnotu. Zvyšovaním hodnoty multiplikátora však rastie tiež pravdepodobnosť dosiahnutia garantovanej hodnoty  $F(t)$ , ktoré znamená definitívne zatvorenie pozície v rizikových aktívach. Rastúca očakávaná hodnota portfólia je vychýlená vysokými hodnotami portfólia na malom počte trajektorií, ktoré sú však málo pravdepodobné [50].

### 2.2.3 Rozšírenia stratégie

V základnej CPPI stratégii dochádza so zvyšovaním hodnoty portfólia aj k úmernému zvyšovaniu podielu investície v rizikových aktívach, čo nemusí byť vždy optimálne. Existujú preto upravené stratégie s dodatočnými ohraničeniami na veľkosť tejto expozície. V prípade pozitívneho vývoja trhu a pre relatívne malé hodnoty multiplikátora sa portfólio môže natoľko vzdialiť od garantovanej hranice, že táto prestáva plniť svoju úlohu. Preto boli definované upravené CPPI stratégie s pohyblivou garantovanou hranicou, ktoré by mali predchádzať vyššie uvedeným problémom. Viacero originálnych rozšírení stratégie je analyzovaných v práci [35].

## 2.3 Stratégia OBPI

Stratégia OBPI (z angl. Option Based Portfolio Insurance) bola predstavená v roku 1976 v práci [22]. Stratégia využíva kombináciu štandardných rizikových aktív a opčných derivátov. Zakúpením dlhej pozície v rizikovom aktíve a predajnej opcie európskeho typu s realizačnou cenou  $K$ , bude mať portfólio v čase maturity  $T$  hodnotu vždy väčšiu alebo rovnú  $K$ . Označme  $S$  cenu podkladového rizikového aktíva (napr. akcie) a  $B$  cenu bezrizikového aktíva (napr. dlhopisu). Vývoj bezrizikového aktíva je modelovaný diferenciálnou rovnicou

$$dB(t) = B(t)r dt,$$

kde  $r$  je konštantný úrokový výnos a hodnota rizikového aktíva sa vyvíja v zmysle vzťahu (2.8).

### 2.3.1 Definícia stratégie

OBPI portfólio je definované zakúpením  $q$  kusov aktíva  $S$  a  $q$  kusov európskej predajnej opcie s maturitou v čase  $T$  a realizačnou cenou  $K$ .

Hodnota OBPI portfólia v čase maturity je rovná

$$W(T) = q (S(T) + (K - S(T))^+),$$

kde  $(\cdot) \equiv \max(\cdot, 0)$ . S použitím parity kúpnej a predajnej opcie [32] sa dá ľahko ukázať, že hodnota portfólia v čase  $T$  je rovná

$$W(T) = q (K + (S(T) - K)^+),$$

t.j. hodnota portfólia v čase expirácie je zdola ohraničená hodnotou  $K$ . Pre hodnotu v čase  $t < T$  ďalej platí

$$\begin{aligned} W(t) &= q (S(t) + (K - S(t))^+) = q (S(t) + P(t, S, K)) \\ &= q (K e^{-r(T-t)} + (S(t) - K)^+) = q (K e^{-r(T-t)} + C(t, S, K)), \end{aligned}$$

kde  $P(t, S, K)$  a  $C(t, S, K)$  sú hodnoty európskej predajnej a kúpnej opcie v čase  $t$ , kde  $S$  je podkladové aktívum a  $K$  je realizačná cena opcie. Hodnoty európskych opcií sa za určitých predpokladov dajú odvodiť pomocou Black-Scholesovej oceňovacej formuly

$$C(t, S, K) = S(t)\Phi(d_1(K)) - K e^{-r(T-t)}\Phi(d_2(K)) \quad (2.9)$$

$$P(t, S, K) = K e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2(K)) - S(t)\Phi(-d_1(K)), \quad (2.10)$$

kde

$$d_1(x) = \frac{\ln S(t) - \ln x + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (2.11)$$

$$d_2(x) = d_1(x) - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (2.12)$$

Analogicky sa zo vzťahu (2.9) dá nahliadnuť, že garantovaná minimálna hodnota OBPI stratégie je v každom čase  $qK e^{-r(T-t)}$ .

### 2.3.2 Voľba parametrov

Garantovaná hodnota portfólia v čase  $T$  sa zvyčajne definuje ako podiel z počiatočnej hodnoty investície  $W(0)$ . Označme tento podiel  $p$  a predpokladajme, že platí  $p \leq e^{rT}$ . Z predošlých vzťahov vyplývajú rovnosti

$$pW(0) = p(qKe^{-rT} + qC(0, S, K)) = qK,$$

kde  $C(0, S, K)$  je cena európskej kúpnej opcie, definovaná napr. v (2.9). Zo vzťahu vyplýva, že pre zvyšujúcu sa hodnotu parametra  $p$ , musí rásť aj realizačná cena opcie  $K$ . S využitím parity kúpnej a predajnej opcie po úprave dostávame

$$q = \frac{W(0)}{S(0) + P(0, S, K)},$$

kde  $P(0, S, K)$  je cena európskej predajnej opcie, definovaná napr. v (2.10). Z uvedených vzťahov vyplýva, že pre danú počiatočnú hodnotu investície  $W(0)$  a daný podiel  $p$  sú parametre realizačnej ceny opcie  $K$  a počtu zakúpených rizikových aktív  $q$  jednoznačne určené [42].

### 2.3.3 Rozšírenia stratégie

Zovšeobecnením európskej predajnej opcie na ľubovoľný vhodný derivát s výplatnou funkciou v čase maturity  $H(T)$  je možné definovať rôzne rozšírenia stratégie [42]. Hodnota portfólia v čase expirácie je rovná

$$W(T) = q(K + H_T),$$

kde  $H(T)$  je náhodná premenná nadobúdajúca nezáporné hodnoty. Voľba derivátu s výplatnou funkciou  $H(T)$  môže závisieť na viacerých faktoroch, napr.

- očakávania trhu: nárast alebo pokles trhu, zmena úrovne volatility, a.i.,
- typ rizikového aktíva: finančný index, hedžový fond, a.i.,
- náklady na obstaranie rôznych typov derivátových štruktúr: lookback opcie, opčné stratégie typu corridor, a.i.

### 2.3.4 Vzťah medzi CPPI a OBPI

V práci [7] autori poukázali na vzťah medzi oboma predstavenými stratégiami. Stratégia OBPI je zovšeobecnená verzia CPPI, kde multiplikátor  $m$  je variabilný a pre jeho hodnotu platí

$$m(t)^{OBPI} = \frac{S(t) \Phi(d_1(F(0)e^{rT}))}{C(t, S, K)},$$

kde  $\Phi(\cdot)$  je kumulatívna distribučná funkcia rozdelenia  $\mathcal{N}(0, 1)$ , funkcia  $C(t, S, K)$  je definovaná ako vo vzťahu (2.9) a  $d_1(\cdot)$  v (2.11).

# Kapitola 3

## Stratégie s využitím rizikových mier

Rizikovú expozíciu portfólia je možné účinne merať a kontrolovať s použitím vhodnej rizikovej miery. Jedným zo spôsobov je definovanie maximálneho limitu na veľkosť zvolenej rizikovej miery v čase investičného horizontu. V tejto časti popisujeme investičné stratégie VaR-RM a LEL-RM definované v práci [6], ktoré sú založené na rizikových mierach predstavených v Kapitole 1. V úvode časti definujeme model trhu a optimálne portfólio bez zaistenia, definované v prácach [47] a [33], na ktoré budeme odkazovať v ďalšom texte.

### 3.1 Základné predpoklady

Uvažujme filtrovaný pravdepodobnostný priestor  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ . Investor má možnosť investície do  $N$  rizikových aktív s náhodným výnosom (napr. akcie bez dividendového výnosu) a jedného bezrizikového aktíva s deterministickým výnosom  $r(t)$  (napr. štátny dlhopis s vysokým ratingovým hodnotením). Všetky aktíva dostupné na trhu je možné zobchodovať za trhové ceny v ľubovoľných (resp. dostatočných) množstvách. Vo financiách sa takýto trh nazýva *likvidný*.

Podobne ako v predošlých častiach, označme  $S(t)$  vektor reprezentujúci cenu rizikových aktív a  $B(t)$  cenu dlhopisu v čase  $t$ . Náhodné ceny rizikových aktív modelujeme s pomocou  $N$ -rozmerného geometrického Brownovho pohybu, t.j. dynamika trhu je daná nasledujúcimi rovnicami

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)\mu(t)dt + S(t)\sigma(t)dw(t) \\ dB(t) &= B(t)r(t)dt, \end{aligned}$$

kde  $\mu(t) \equiv (\mu_1(t), \dots, \mu_N(t))^\top$  je vektor driftov, matica  $\sigma(t) \equiv \{\sigma_{jk}(t); j, k = 1, \dots, N\}$  je matica volatilit rizikových aktív a  $w(t) \equiv (w_1(t), \dots, w_N(t))^\top$  je  $N$ -rozmerný Wienerov proces. Všetky stochastické procesy v modeli sú adaptované k filtrácii generovanej procesom  $w(t)$ .

Označme  $W(0)$  počiatočnú hodnotu portfólia. Investor si zvolí konečný investičný horizont  $T$ , výplatnú funkciu portfólia  $W(T)$  a investičnú stratégiu  $\theta(t)$ , ktorá vyjadruje podiel investície v jednotlivých rizikových aktívach. Potom pre hodnotu portfólia v ľubovoľnom čase  $t \in (0, T)$  platí

$$dW(t) = W(t)\theta(t)^\top(\mu(t)dt + \sigma dw(t)) + W(t)(1 - \theta(t)^\top \mathbf{1})r(t)dt, \quad (3.1)$$

kde  $\underline{1} \equiv (1, 1, \dots, 1)^\top$ . Takto definovaný trh je *úplný*, t.j. každá výplatná funkcia v budúcnosti môže byť zaistená obchodovaním dostupných aktív [12]. Tento predpoklad implikuje existenciu jedinej rizikovo-neutrálnej pravdepodobnostnej miery a s ňou spojeného procesu zmeny miery  $\xi(t)$ , ktorý je daný vzťahom

$$\begin{aligned} d\xi(t) &= -\xi(t)r(t)dt - \xi(t)\kappa(t)^\top dw(t) \\ \xi(0) &= 1, \end{aligned} \tag{3.2}$$

kde  $\kappa(t) = \sigma(t)^{-1}(\mu(t) - r(t)\underline{1})$  je *Sharpeov* koeficient trhovej ceny rizika. Väčšina aplikácií predpokladá konštantné  $\kappa(t) \equiv \kappa$  a  $r(t) \equiv r$ , niektoré tvrdenia sú však všeobecnejšie a pripúšťajú nekonštantné parametre. V ďalšom texte budeme konštantnosť parametrov v prípade potreby explicitne deklarovať.

Náhodnú premennú  $\xi(T, \omega)$  môžeme interpretovať ako cenu *Arrow-Debreu* aktíva (viď napr. prácu [18]), resp. ako cenu zaistenia jednotkovej výplaty portfólia v stave  $\omega \in \Omega$  na jednotku pravdepodobnosti  $\mathbb{P}$  v čase  $T$ . Nízke hodnoty  $\xi(t)$  reprezentujú pozitívny trend (ceny aktív rastú), budeme ich nazývať „dobré stavy“, zatiaľ čo vysoké hodnoty  $\xi(t)$  reprezentujú trend poklesu cien, budeme ich nazývať „zlé stavy“. V ďalších analýzách budeme premennú  $\xi(t)$  uvažovať ako *stavovú premennú*<sup>1</sup>.

Nakoniec predpokladáme, že preferencie investora vo vzťahu k riziku sú dobre charakterizované funkciou užitočnosti  $u(\cdot)$  s vlastnosťami (2.1) až (2.4).

## 3.2 Optimalizácia nezaisteného portfólia

Cieľom investora je, voľbou vhodnej výplatnej funkcie  $W_T$ , maximalizovať očakávanú užitočnosť z hodnoty portfólia v čase investičného horizontu. Predpoklad o úplnosti trhu implikuje tzv. *rozpočtové ohraničenie*

$$\mathbb{E}[\xi_T W_T] \leq W_0, \tag{3.3}$$

kde  $\xi_T$  je stavová premenná určená vzťahom (3.2) a  $W_0$  je počiatočná hodnota portfólia. Investovaním na úplnom trhu má každý investor možnosť zaistenia ľubovoľnej výplatnej funkcie v budúcnosti, napríklad zakúpením derivátovej štruktúry s vysporiadaním v čase  $T$ . Investor si môže dovoliť kúpiť iba portfóliá s obstarávacou cenou neprevyšujúcou výšku jeho počiatočných zdrojov  $W_0$  [12].

Spojením vyššie definovanej účelovej funkcie a ohraničenia (3.3) definujeme tzv. *Úlohu nezaisteného investora*

$$\begin{aligned} \max \mathbb{E}[u(W_T)] \\ \mathbb{E}[\xi_T W_T] \leq W_0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

kde  $u(\cdot)$  je zvolená funkcia užitočnosti. Riešením úlohy (3.4) je portfólio reprezentované výplatnou funkciou  $W_T^B$  definované vo Vete 7.

**Veta 7.** *Riešením úlohy nezaisteného investora, definovanej vo vzťahu (3.4), je výplatná funkcia  $W_T^B \equiv \hat{W}(T)$  definovaná*

$$W_T^B = I(y\xi_T), \tag{3.5}$$

<sup>1</sup>Pre lepšiu čitateľnosť matematických zápisov budeme premenné  $W(0), W(T), \xi(0), \xi(t), \xi(T)$  v prípade potreby v ďalšom texte značiť  $W_0, W_T, \xi_0, \xi_t$  a  $\xi_T$ .

kde  $I(\cdot)$  je inverzná funkcia prvej derivácie funkcie  $u(\cdot)$ , a  $y \geq 0$  je riešením rovnice

$$\mathbb{E} \left[ \xi_T \hat{W}(T; y) \right] = W_0. \quad (3.6)$$

*Dôkaz.* Optimálne riešenie bude vždy ležať na hranici rozpočtového ohraničenia, inak by existovalo portfólio ležiace na hranici, ktoré by generovalo vyššiu očakávanú užitočnosť (napr. investícia do bezrizikového dlhopisu), čo je v rozpore s optimalitou. Pri riešení úlohy môžeme preto uvažovať rovnosť v ohraničení (3.3). Úlohu riešime ako optimalizačnú úlohu s viazaným extrémom, definovaním Lagrangeovej účelovej funkcie, ako je uvedené v nasledovnej Leme.

**Lema 1.** Funkcia  $W_T^B$  definovaná vo vzťahu (3.5) je riešením úlohy

$$\max_{W \in \mathbb{R}} u(W) - y \xi_T W,$$

kde  $\xi_T \geq 0$  a  $y \geq 0$  je Lagrangeov multiplikátor.

*Dôkaz.* Zderivovaním účelovej funkcie dostávame

$$\frac{\partial}{\partial W} (u(W) - y \xi_T W) = u'(W) - y \xi_T,$$

t.j. pre bod lokálneho optima platí

$$u'(\hat{W}) - y \xi_T = 0 \quad (3.7)$$

$$\hat{W} = I(y \xi_T), \quad (3.8)$$

čo je ekvivalentné funkcii vo výraze (3.5).  $\square$

Uvažujme opäť úlohu (3.4). Nech  $W_T$  je ľubovoľný kandidát na optimálne riešenie. Potom platí

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[u(\hat{W}_T)] - \mathbb{E}[u(W_T)] \\ &= \mathbb{E}[u(\hat{W}_T)] - \mathbb{E}[u(W_T)] - \hat{y}W_0 + \hat{y}W_0 \\ &\geq \mathbb{E}[u(\hat{W}_T)] - \mathbb{E}[u(W_T)] - \hat{y}\mathbb{E}[\xi_T \hat{W}_T] + \hat{y}\mathbb{E}[\xi_T W_T] \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

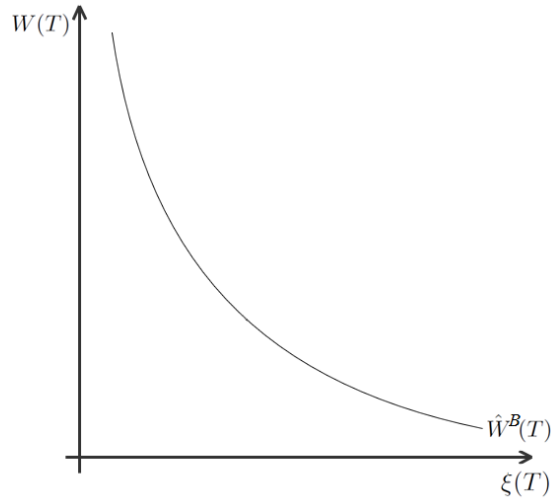
kde  $\hat{y}$  je riešením rovnosti (3.6) a druhá nerovnosť vyplýva z Lemy 1.  $\square$

Pre detailnejšiu analýzu viď napr. pôvodný článok [33]. Ako špeciálny prípad uvažujme nastavenie trhu, kde stavová premenná  $\xi_T = \text{konšt.}$  Takýto prípad môže nastať, ak pre koeficient súvisiaci s trhovou cenou rizika platí  $\|\kappa\| = 0$  a  $r(t) = \text{konšt.}$  V takomto prípade pre riešenie úlohy (3.4) platí

$$\mathbb{E}[\hat{W}_T] = W_0 / \xi_T.$$

Z Jensenovej nerovnosti pre funkciu  $u(\cdot)$  platí

$$\forall W_T : \quad \mathbb{E}[u(W_T)] \leq u(\mathbb{E}[W_T]),$$



Obr. 3.1: Výplatná funkcia optimálneho nezaisteného portfólia v čase  $T$ , zobrazená v závislosti od hodnoty stavovej premennej  $\xi_T$ .

t.j. optimálne riešenie je konštantná (vzhľadom na stavovú premennú) výplatná funkcia

$$\hat{W}_T = W_0/\xi_T.$$

Priebeh výplatnej funkcie optimálneho portfólia  $W_T^B$  v závislosti od stavovej premennej  $\xi_T$  je znázornený na Obr. 3.1.

Opäť, za predpokladu konštantných parametrov  $\kappa$  a  $r$  je náhodná premenná  $\ln \xi_t$  z normálneho rozdelenia a s uvažovaním funkcie užitočnosti definovanej vo vzťahu (2.7) je z definície optimálneho portfólia a vzťahov (3.1) a (3.2) možné odvodiť proces optimálnej hodnoty portfólia

$$W^B(t) = \frac{y^{\frac{1}{p-1}}}{\xi_t} \exp \left\{ \frac{p}{p-1} \left( \ln \xi_t + \left( \frac{\|\kappa\|^2}{2p-2} - r \right) (T-t) \right) \right\}$$

a tiež optimálnu investičnú stratégiu nezaisteného investora v čase  $t \in (0, T)$  (viď napr. prácu [27]), ktorá je daná vzťahom

$$\theta^B(t) = \frac{1}{1-p} (\sigma^\top)^{-1} \kappa. \quad (3.9)$$

Optimálnu stratégiu  $\theta^B(t)$  využijeme v ďalších častiach práce na analýzu dynamiky investičných stratégií.

### 3.3 Stratégia VaR-RM

Investor môže okrem optimálneho očakávaného výnosu svojej investície požadovať aj kontrolu nad rizikovým profilom portfólia. Jedným z možných spôsobov merania rizikivosti portfólia je miera VaR, definovaná vo vzťahu (1.1), na ktorej je založená investičná stratégia VaR-RM (z angl. *Value-at-Risk Risk Management*).

### 3.3.1 Definícia úlohy

Pripomeňme, že miera VaR je definovaná ako veľkosť straty na hodnote portfólia za obdobie  $[0, T]$ , ktorá je prekročená s pravdepodobnosťou  $\alpha$ , t.j. platí

$$\mathbb{P}(W_0 - W_T \leq VaR_\alpha(W_T - W_0)) = 1 - \alpha. \quad (3.10)$$

Investor, v snahe udržať rizikovú expozíciu portfólia na prijateľnej úrovni, môže na hodnotu miery VaR nastaviť limit, ozn.  $\underline{W}$ , pre ktorý platí

$$VaR_\alpha(W_T - W_0) \leq W_0 - \underline{W}. \quad (3.11)$$

Spojením vzťahov (3.10) a (3.11) získavame ohraničenie rizikovej expozície investičnej stratégie VaR-RM

$$\mathbb{P}(W_T \geq \underline{W}) \geq 1 - \alpha.$$

Pridaním uvedeného ohraničenia do úlohy (3.4) dostávame úlohu VaR-RM investora, ako bola definovaná v práci [6]

$$\begin{aligned} & \max \mathbb{E}[u(W_T)] \\ & \mathbb{E}[\xi_T W_T] \leq W_0 \\ & \mathbb{P}(W_T \geq \underline{W}) \geq 1 - \alpha, \end{aligned} \quad (3.12)$$

kde  $\alpha$  je parameter hladiny významnosti,  $u(\cdot)$  je zvolená funkcia užitočnosti,  $W_0$  počiatočná hodnota investície a  $\xi_T$  stavová premenná definovaná ako v úlohe (3.4).

Definované rizikové ohraničenie je zaujímavé svojou univerzálnosťou. Ak investor zvolí hodnotu parametra  $\alpha = 1$ , úloha je ekvivalentná optimalizácii nezaisteného portfólia, definovaného vo vzťahu (3.4), a naopak, voľbou parametra  $\alpha = 0$  bude investor voliť plne zaistené portfólio (viď napr. stratégiu OBPI v predošlej kapitole).

### 3.3.2 Riešenie v čase $T$

Riešením úlohy (3.12) je výplatná funkcia  $W_T^{VaR} \equiv \hat{W}(T)$  definovaná vo Vete 8.

**Veta 8.** *Optimálna výplatná funkcia VaR-RM portfólia v čase  $T$  je rovná*

$$W_T^{VaR} = \begin{cases} I(z\xi_T) & ak \quad \xi_T < \underline{\xi} \\ \underline{W} & ak \quad \underline{\xi} \leq \xi_T < \bar{\xi} \\ I(z\xi_T) & ak \quad \bar{\xi} \leq \xi_T, \end{cases} \quad (3.13)$$

kde funkcia  $I(\cdot)$  je inverzná funkcia prvej derivácie funkcie užitočnosti  $u(\cdot)$ ,  $\underline{\xi} = u'(\underline{W})/z$ ,  $\bar{\xi}$  je riešením rovnice

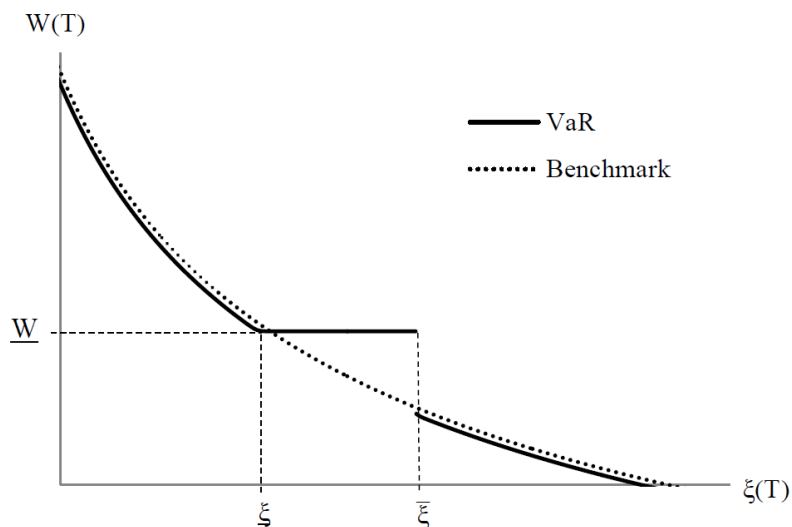
$$\mathbb{P}(\xi_T > \bar{\xi}) = \alpha$$

a  $z \geq 0$  rieši

$$\mathbb{E}[\xi_T \hat{W}(T; z)] = W_0.$$

Rizikové ohraničenie VaR je uplatnené práve vtedy, keď  $\underline{\xi} < \bar{\xi}$ .





Obr. 3.2: Optimálna výplatná funkcia VaR-RM portfólia v čase  $T$  pri uplatnení rizikového ohraničenia a nezaisteného portfólia, znázornené ako funkcie stavovej premennej  $\xi_T$ .

Dôkaz je uvedený v [6]. Na Obr. 3.2 je znázornený priebeh výplatnej funkcie optimálneho VaR-RM a nezaisteného portfólia, v závislosti od hodnoty stavovej premennej  $\xi_T$ . Funkcia vykazuje pre nízke hodnoty stavovej premennej  $\xi_T$  podobný priebeh ako výplatná funkcia nezaisteného portfólia. V prípadoch, kedy  $\xi_T \in [\underline{\xi}, \bar{\xi}]$ , je priebeh hodnoty portfólia konštantný, t.j. investor pre tieto stavy zaistil hodnotu portfólia na úrovni  $\underline{W}$ . Pre hodnoty stavovej premennej na intervale  $\xi_T \in [\bar{\xi}, \infty)$  investor opúšťa zaistenie a skokovo volí návrat k hodnotám blízkym nezaistenému portfóliu. Na rozdiel od nezaisteného portfólia výplatná funkcia VaR-RM portfólia vykazuje v dôsledku uplatnenia rizikového ohraničenia bod nespojitosti v hodnote  $\bar{\xi}$ , čo môže za určitých okolností viesť k nerealizovateľnej investičnej stratégii [27].

V práci [6] autori poukazujú na nevhodnú vlastnosť VaR-RM portfólia, ktorá je priamym dôsledkom princípu fungovania rizikovej miery VaR. Veta 9 poukazuje na skutočnosť, že VaR-RM portfólia dosahujú najzávažnejšie straty na hodnote (napr. pre  $\xi_T \in [\bar{\xi}, \infty)$ ) s menšou pravdepodobnosťou ako nezaistené portfólia, avšak tieto straty sú vo všeobecnosti väčšie. Táto skutočnosť môže zaisteného investora za určitých podmienok vystaviť neprimerane veľkému riziku a efektivita takéhoto zaistenia je otázna.

**Veta 9.** *Nech funkcia  $u(\cdot)$  je definovaná ako v (2.7) a parametre  $r$  a  $\kappa$  sú konštantné. Definujme bod*

$$\underline{W} \equiv \begin{cases} I(z\bar{\xi}) & \text{ak } \underline{\xi} < \bar{\xi} \\ \underline{W} & \text{ak } \underline{\xi} \geq \bar{\xi} \end{cases}$$

*a definujme tiež dvojicu funkcionálov merajúcich očakávanú veľkosť strát v najhorších*

stavoch

$$\begin{aligned} L_1(W_T - \underline{W}) &= \mathbb{E} \left[ (\underline{W} - W_T) 1_{W_T - \underline{W} \leq 0} \right] \\ L_2(W_T - \underline{W}) &= \mathbb{E} \left[ \xi_T (\underline{W} - W_T) 1_{W_T - \underline{W} \leq 0} \right], \end{aligned}$$

kde  $1_{(\cdot)}$  je funkcia indikátor. Potom platí:

$$(i) \quad L_1(W_T^{VaR} - \underline{W}) \geq L_1(W_T^B)$$

$$(ii) \quad L_2(W_T^{VaR} - \underline{W}) \geq L_2(W_T^B),$$

kde  $W_T^{VaR}$  je riešenie úlohy (3.12) a  $W^B$  je riešenie úlohy (3.4).

Dôkaz je uvedený v [6].

### 3.3.3 Vlastnosti VaR-RM stratégie

Uvažujme opäť funkciu užitočnosti definovanú ako vo vzťahu (2.7) a konštantné parametre  $r$  a  $\kappa$ . Potom pre hodnotu optimálneho VaR-RM portfólia v časoch  $t < T$  platí [6]

$$\begin{aligned} W^{VaR}(t) &= \frac{e^{\Gamma(t)}}{(z\xi_t)^{\frac{1}{1-p}}} - \left[ \frac{e^{\Gamma(t)}}{(z\xi_t)^{\frac{1}{1-p}}} \Phi(-d_1(\underline{\xi})) - \underline{W} e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(\underline{\xi})) \right] \\ &+ \left[ \frac{e^{\Gamma(t)}}{(z\bar{\xi}_t)^{\frac{1}{1-p}}} \Phi(-d_1(\bar{\xi})) - \underline{W} e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(\bar{\xi})) \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

kde  $\Phi(\cdot)$  je kumulatívna distribučná funkcia rozdelenia  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\underline{\xi} = 1/(z\underline{W}^{1-p})$ ,  $\bar{\xi}$  a  $z$  sú definované ako vo Vete 8 a

$$\Gamma(t) = \frac{p}{1-p} \left( r + \frac{\|\kappa\|^2}{2} \right) (T-t) + \left( \frac{p}{1-p} \right)^2 \frac{\|\kappa\|^2}{2} (T-t) \quad (3.15)$$

$$d_2(x) = \frac{\ln x - \ln \xi_t + \left( r - \frac{\|\kappa\|^2}{2} \right) (T-t)}{\|\kappa\| \sqrt{T-t}} \quad (3.16)$$

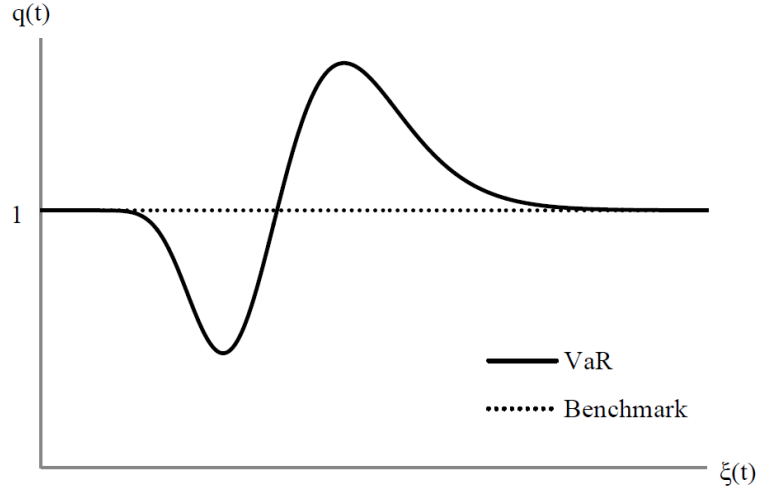
$$d_1(x) = d_2(x) + \frac{\|\kappa\| \sqrt{T-t}}{1-p}. \quad (3.17)$$

Pre optimálnu investičnú stratégiu VaR-RM investora platí [6]

$$\theta^{VaR}(t) = q^{VaR}(t) \theta^B(t), \quad (3.18)$$

kde  $\theta^B(t)$  je stratégia nezaisteného investora definovaná vo vzťahu (3.9) a

$$\begin{aligned} q^{VaR}(t) &= 1 - \frac{W e^{-r(T-t)} (\Phi(-d_2(\underline{\xi})) - \Phi(-d_2(\bar{\xi})))}{W^{VaR}(t)} \\ &+ \frac{(1-p)(W - \underline{W}) e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(\bar{\xi}))}{W^{VaR}(t) \|\kappa\| \sqrt{T-t}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$



Obr. 3.3: Relatívna expozícia v rizikových aktívach VaR-RM portfólia, znázornená v závislosti od hodnoty stavovej premennej  $\xi_t$ .

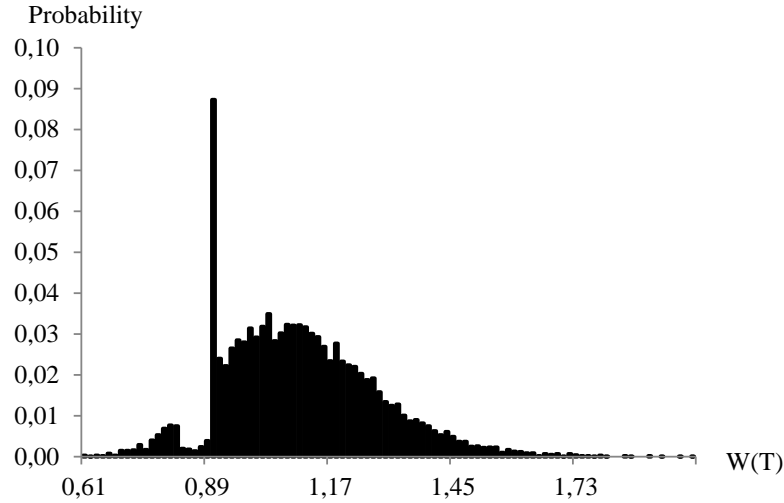
Ako sa dá zo vzťahu (3.18) nahliadnuť, funkcia  $q^{VaR}(t)$  vyjadruje relatívnu expozíciu v rizikových aktívach voči nezaistenému portfóliu. To znamená, že VaR-RM investor si zvolí rovnaké váhy v rizikových aktívach ako nezaistený investor, nebude ich však udržiavať konštantné, ale v závislosti od vývoja trhu bude upravovať tzv. pákový efekt portfólia. Pribeh relatívnej expozície v závislosti od stavovej premennej  $\xi_t$  je znázornený na Obr. 3.3. Pre malé hodnoty  $\xi_t$  volí VaR-RM investor podobné pozície v rizikových aktívach ako nezaistený investor. Pre vyššie hodnoty  $\xi_t$  (oblasť prechodných stavov) VaR-RM investor postupne zatvára pozície v rizikových aktívach s cieľom znížiť citlivosť portfólia na klesajúce ceny aktív a udržať tak hodnotu portfólia nad zaistenou úrovňou  $\underline{W}$ . Pre najvyššie hodnoty stavovej premennej investor zvyšuje pákový efekt portfólia, s cieľom zvýšiť hodnotu portfólia nad požadovanú úroveň. Takéto správanie je považované za rizikové a môže viesť k relatívne veľkým stratám na hodnote portfólia. Relatívna expozícia pre VaR-RM portfólio je vždy nezáporná a platí

$$\lim_{\xi_t \rightarrow 0} q^{VaR}(t) = \lim_{\xi_t \rightarrow \infty} q^{VaR}(t) = 1.$$

Ak je rizikové ohraničenie uplatnené, t.j.  $\underline{\xi} < \bar{\xi}$ , potom  $q^{VaR}(t) > 1$  práve vtedy, keď  $\xi_t > \xi_t^*$ , kde  $\xi_t^*$  je deterministické, ohraničené a platí

$$\sqrt{\underline{\xi}\bar{\xi}}e^{(r-\|\kappa\|^2/2)(T-t)} \leq \xi_t^* \leq \bar{\xi}e^{(r-\|\kappa\|^2/2)(T-t)}e^{(\|\kappa\|^2/(1-p))(T-t)}.$$

Simulované rozdelenie hodnoty VaR-RM portfólia v čase  $T$  je znázornené na Obr. 3.4. Vlastnosti rozdelenia sú bližšie analyzované v ďalších častiach práce.



Obr. 3.4: Simulované pravdepodobné rozdelenie náhodnej premennej  $W_T^{VaR}$  pre hodnoty parametrov  $W_0 = 1, r = 0,03, \kappa = 0,4, p = -1,5, \underline{W} = 0,9$  a  $\alpha = 0,05$ . Zostrojené na základe 10000 simulácií.

### 3.4 Stratégia LEL-RM

Na nedostatky VaR-RM stratégie naznačené vo Vete 9 reagujú autori návrhom alternatívnej stratégie. K riadeniu rizika portfólia použijú mieru definovanú vo vzťahu (1.2) a stratégiu založenú na tejto miere nazývajú LEL-RM. Pripomeňme, že miera LEL vyjadruje cenu európskej predajnej opcie s realizačnou cenou  $\underline{W}$  (exogénny parameter), ktorá na rozdiel od miery VaR, kontroluje okrem pravdepodobnosti prekročenia zvolenej garantovanej hodnoty taktiež veľkosť dosiahnutej straty. V dôsledku toho, vlastnosti LEL-RM stratégie poukazujú na možnosť dosiahnutia menších strát, ako s použitím VaR-RM stratégie.

#### 3.4.1 Definícia úlohy

Nastavením horného limitu na veľkosť rizikovej miery LEL definujeme ohraničenie

$$\mathbb{E} [\xi_T(\underline{W} - W_T)1_{W_T \leq \underline{W}}] \leq \epsilon, \quad (3.20)$$

kde  $\epsilon \geq 0$ . Podobne ako pri VaR-RM stratégii, prípustné sú aj špeciálne prípady nastavenia limitu  $\epsilon$ . Pre hodnotu  $\epsilon = \infty$  je cena zaistenia neohraničená. V takomto prípade LEL-RM investor zvolí rovnaké portfólio ako nezaistený investor. Naopak, pre hodnotu  $\epsilon = 0$  investor neakceptuje žiadne straty pod garantovanou úrovňou  $\underline{W}$  a volí plne zaistené portfólio (opäť, viď napr. stratégiu OBPI v predošlej kapitole).

Zapojením ohraničenia (3.20) do úlohy (3.4) dostávame úlohu LEL-RM investora

ako bola definovaná v práci [6]

$$\begin{aligned} \max \mathbb{E}[u(W_T)] \\ \mathbb{E}[\xi_T W_T] \leq W_0 \\ \mathbb{E}[\xi_T(\underline{W} - W_T)1_{W_T \leq \underline{W}}] \leq \epsilon, \end{aligned} \quad (3.21)$$

kde  $u(\cdot)$ ,  $W_0$  a  $\xi_T$  sú definované ako v úlohe (3.4), parametre  $\underline{W}$  a  $\epsilon$  vyjadrujúce postoj investora k riziku sú zvolené exogénne.

### 3.4.2 Riešenie v čase $T$

Riešením úlohy (3.21) je náhodná premenná  $W^{LEL} \equiv \hat{W}(T)$  definovaná vo Vete 10.

**Veta 10.** *Optimálna výplatná funkcia LEL-RM portfólia v čase  $T$  je rovná*

$$W_T^{LEL} = \begin{cases} I(z_1 \xi_T) & ak \quad \xi_T < \underline{\xi}_\epsilon \\ \underline{W} & ak \quad \underline{\xi}_\epsilon \leq \xi_T < \bar{\xi}_\epsilon \\ I((z_1 - z_2) \xi_T) & ak \quad \bar{\xi}_\epsilon \leq \xi_T, \end{cases} \quad (3.22)$$

kde

$$\underline{\xi}_\epsilon = u'(\underline{W})/z_1 \quad (3.23)$$

$$\bar{\xi}_\epsilon = u'(\underline{W})/(z_1 - z_2) \quad (3.24)$$

a  $z_1, z_2 \geq 0$  sú riešením systému

$$\mathbb{E} \left[ \xi_T \hat{W}_T(T; z_1, z_2) \right] = W_0 \quad (3.25)$$

a

$$\mathbb{E} \left[ \xi_T (\underline{W} - \hat{W}_T(T; z_1, z_2)) 1_{\hat{W}_T(T; z_1, z_2) \leq \underline{W}} \right] = \epsilon, \quad (3.26)$$

$$\text{alebo } \mathbb{E} \left[ \xi_T (\underline{W} - \hat{W}_T(T; z_1, z_2)) 1_{\hat{W}_T(T; z_1, z_2) \leq \underline{W}} \right] < \epsilon \text{ a } z_2 = 0. \quad (3.27)$$

*Rizikové ohraničenie LEL-RM stratégie je uplatnené práve vtedy, keď  $\underline{\xi}_\epsilon < \bar{\xi}_\epsilon$ .*

Dôkaz je uvedený v práci [6]. Pre vyčíslenie konštánt  $\underline{\xi}_\epsilon$  a  $\bar{\xi}_\epsilon$  je potrebné vyriešiť pomerne komplexný systém rovníc, definovaný vzťahmi 3.23 až 3.27. Uvažujme izoelastickú funkciu užitočnosti zo vzťahu (2.7) a konštantné parametre  $r$  a  $\kappa$ . Potom

konštanty  $\underline{\xi}_\epsilon$  a  $\bar{\xi}_\epsilon$  sú dané implicitne, ako riešenie sústavy rovníc [25]

$$\begin{aligned}
W_0 &= \underline{W} \underline{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{1-p}} \exp \left\{ \frac{p}{1-p} \left( rT + \frac{\|\kappa\|^2}{2} T \right) + \frac{p^2 T \|\kappa\|^2}{2(1-p)^2} \right\} \\
&\quad \times \left( 1 - \Phi \left( \frac{H_1}{\sqrt{T} \|\kappa\|} - \frac{p\sqrt{T} \|\kappa\|}{1-p} \right) \right) \\
&+ \underline{W} e^{-rT} \left( \Phi \left( \frac{H_1}{\sqrt{T} \|\kappa\|} + \|\kappa\| \sqrt{T} \right) - \Phi \left( \frac{H_2}{\sqrt{T} \|\kappa\|} + \|\kappa\| \sqrt{T} \right) \right) \\
&+ \underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{1-p}} \exp \left\{ \frac{p}{1-p} \left( rT + \frac{\|\kappa\|^2}{2} T \right) + \frac{p^2 T \|\kappa\|^2}{2(1-p)^2} \right\} \\
&\quad \times \Phi \left( \frac{H_2}{\sqrt{T} \|\kappa\|} - \frac{p\sqrt{T} \|\kappa\|}{1-p} \right) \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \underline{W} e^{-rT} \Phi \left( \frac{H_2}{\sqrt{T} \|\kappa\|} + \sqrt{T} \|\kappa\| \right) \\
&- \underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{1-p}} \exp \left\{ \frac{p}{1-p} \left( rT + \frac{\|\kappa\|^2}{2} T \right) + \frac{p^2 T \|\kappa\|^2}{2(1-p)^2} \right\} \\
&\quad \times \Phi \left( \frac{H_2}{\sqrt{T} \|\kappa\|} - \frac{p\sqrt{T} \|\kappa\|}{1-p} \right), \quad (3.29)
\end{aligned}$$

kde

$$H_1 = -rT - \|\kappa\|^2 T - \ln \underline{\xi}_\epsilon \quad (3.30)$$

$$H_2 = -rT - \|\kappa\|^2 T - \ln \bar{\xi}_\epsilon. \quad (3.31)$$

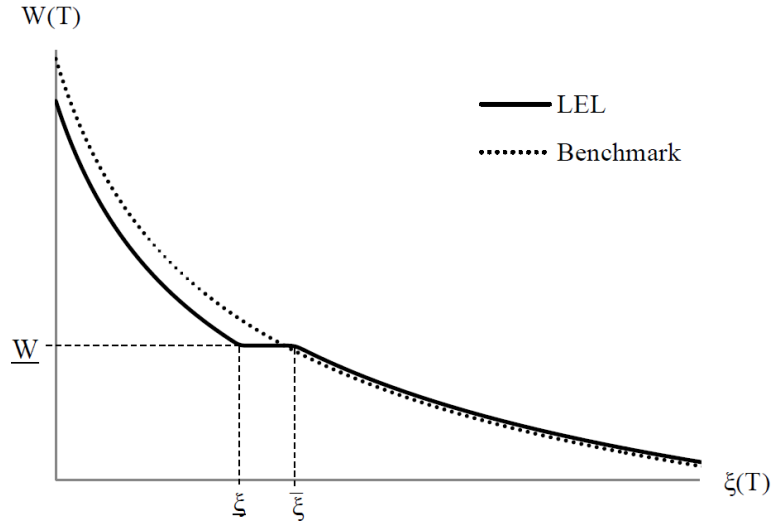
Tento systém je vďaka monotónnemu priebehu možné riešiť jednoduchými numerickými metódami, ako je napr. metóda polenia intervalov. Pre detailnú analýzu vlastností sústavy (3.28)-(3.31) viď prácu [25].

Na Obr. 3.5 je znázornená štandardná výplatná funkcia LEL-RM portfólia. Priebeh výplatnej funkcie na intervale  $\xi_T < \underline{\xi}_\epsilon$  (dobré stavy) je podobný, ako priebeh nezaisteného portfólia. Pre hodnoty  $\xi_T \in [\underline{\xi}_\epsilon, \bar{\xi}_\epsilon]$  (prechodné stavy) je portfólio plne zaistené na hodnote  $\underline{W}$ . Ďalším zvyšovaním stavovej premennej nad hodnotu  $\bar{\xi}_\epsilon$  investor postupne znižuje mieru zaistenia, v dôsledku čoho sa cieľová hodnota portfólia postupne znižuje a približuje hodnote nezaisteného portfólia. Investor volí čiastočné zaistenie, nakoľko v najhorších stavoch je jeho cena relatívne vysoká a investor nepovažuje zakúpenie zaistenia vo veľkých množstvách za optimálne.

Na Obr. 3.6 je znázornené simulované pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej premennej  $W_T^{LEL}$ . Ako dôsledok procesu zaistenia pozorujeme podobne ako pri stratégii VaR-RM, upravené pravdepodobnostné rozdelenie hodnoty portfólia v čase  $T$ .

### 3.4.3 Vlastnosti LEL-RM stratégie

Uvažujme opäť funkciu užitočnosti definovanú ako vo vzťahu (2.7) a konštantné parametre  $r$  a  $\kappa$ . Potom pre hodnotu optimálneho LEL-RM portfólia v časoch  $t < T$



Obr. 3.5: Optimálna výplatná funkcia LEL-RM portfólia v čase  $T$  v prípade uplatnenia rizikového ohraňovania a nezaisteného portfólia, znázornené v závislosti od hodnoty stavovej premennej  $\xi_T$ .

platí [6]

$$\begin{aligned}
W^{LEL}(t) &= \frac{e^{\Gamma(t)}}{(z_1 \xi_t)^{\frac{1}{1-p}}} \\
&- \left[ \frac{e^{\Gamma(t)}}{(z_1 \xi_t)^{\frac{1}{1-p}}} \Phi(-d_1(\underline{\xi}_\epsilon)) - \underline{W} e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(\underline{\xi}_\epsilon)) \right] \\
&+ \left[ \frac{e^{\Gamma(t)}}{((z_1 - z_2) \xi_t)^{\frac{1}{1-p}}} \Phi(-d_1(\bar{\xi}_\epsilon)) - \underline{W} e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(\bar{\xi}_\epsilon)) \right],
\end{aligned}$$

kde  $\Gamma(t)$  je definované ako vo vzťahu (3.15),  $d_1(x)$ ,  $d_2(x)$  ako vo vzťahoch (3.17) a (3.16), multiplikátory  $z_1$  a  $z_2$  sú definované ako vo Vete 10 a pre konštanty  $\underline{\xi}_\epsilon$  a  $\bar{\xi}_\epsilon$  platí

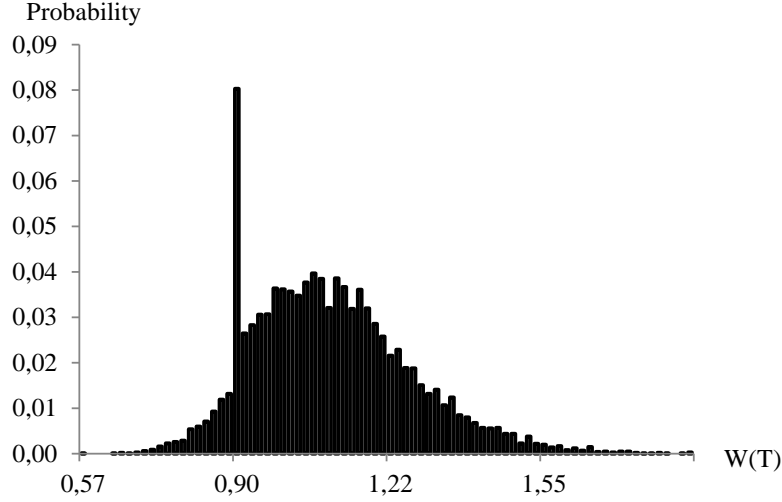
$$\begin{aligned}
\underline{\xi}_\epsilon &= \frac{1}{z_1 \underline{W}^{1-p}} \\
\bar{\xi}_\epsilon &= \frac{1}{(z_1 - z_2) \underline{W}^{1-p}}.
\end{aligned}$$

Optimálnu investičnú stratégiu je podobne ako pri VaR-RM modeli možné vyjadriť ako

$$\theta^{LEL}(t) = q^{LEL}(t) \theta^B(t), \quad (3.32)$$

kde  $\theta^B(t)$  je stratégia nezaisteného portfólia definovaného v (3.9) a expozícia v rizikových aktívach relatívne k nezaistenému portfóliu  $q^{LEL}$  je definovaná

$$q^{LEL}(t) = 1 - \frac{\underline{W} e^{-r(T-t)} (\Phi(-d_2(\underline{\xi}_\epsilon)) - \Phi(-d_2(\bar{\xi}_\epsilon)))}{W^{LEL}(t)}. \quad (3.33)$$



Obr. 3.6: Simulované pravdepodobné rozdelenie náhodnej premennej  $W_T^{LEL}$  pre hodnoty parametrov  $W_0 = 1, r = 0,03, \kappa = 0,04, p = -1,5, \underline{W} = 0,9$  a  $\epsilon = 0,01$ . Zostrojené na základe 10000 simulácií.

Zaujímavou vlastnosťou stratégie je ohraničenosť relatívnej expozície. Zatiaľ čo stratégia VaR-RM môže za určitých okolností implikovať relatívne vysoké hodnoty pákovania pozície, t.j.  $q^{VaR}(t) \gg 1$ , relatívna expozícia v rizikových aktívach LEL-RM stratégie je ohraničená a platí

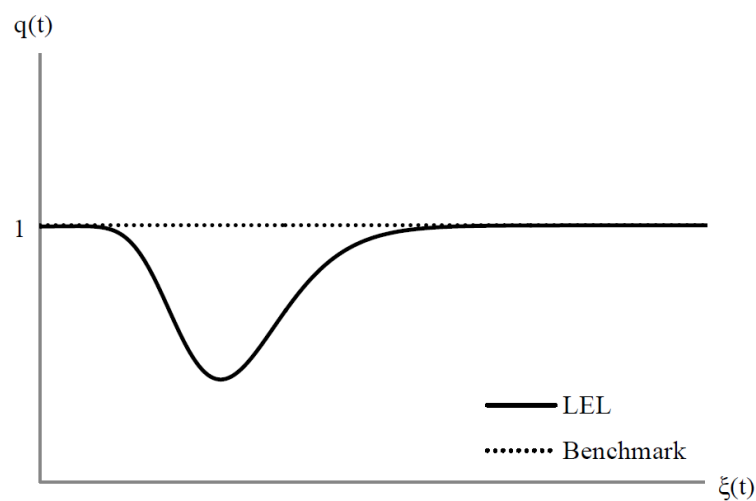
$$0 \leq q^{LEL}(t) \leq 1 \quad (3.34)$$

$$\lim_{\xi_t \rightarrow 0} q^{LEL}(t) = \lim_{\xi_t \rightarrow \infty} q^{LEL}(t) = 1. \quad (3.35)$$

Priebeh funkcie  $q^{LEL}(t)$  v závislosti od hodnoty stavovej premennej  $\xi_t$  je znázornený na Obr. 3.7. Pre malé hodnoty  $\xi_t$  volí LEL-RM investor podobné pozície v rizikových aktívach ako nezaistený investor. Pre vyššie hodnoty  $\xi_t$  (oblasť prechodných stavov) investor postupne zatvára pozície v rizikových aktívach, s cieľom znížiť citlivosť portfólia na klesajúce ceny aktív a udržať tak hodnotu portfólia nad zaistenou úrovňou  $\underline{W}$ . Pre najvyššie hodnoty stavovej premennej investor opúšťa proces zaistenia a pozícia v rizikových aktívach sa pre zvyšujúce hodnoty  $\xi_t$  postupne zdola blíži k pozícii nezaisteného portfólia. Na rozdiel od VaR-RM stratégie, portfólio za žiadnych okolností *neimplikuje* hodnoty  $q^{LEL}(t) > 1$ , čo autori stratégie považujú za menej rizikové správanie ako stratégia VaR-RM investora. Ich tvrdenie podporuje Veta 11, ktorej dôsledkom je skutočnosť, že hodnota LEL-RM portfólia je v najhorších stavoch vždy väčšia alebo rovná, ako hodnota nezaisteného portfólia.

**Veta 11.** *Uvažujme  $z_1$  a  $z_2$  definované systémom (3.25)-(3.27). Lagrangeov multiplikátor  $z_1$  je klesajúci v hodnote  $\epsilon$  a platí  $z_1 \geq y$ , kde  $y$  je Lagrangeov multiplikátor nezaisteného portfólia definovaný vo vzťahu (3.6). Navyše platí  $z_1 - z_2 \leq y$ , v dôsledku čoho nadobúda funkcionál  $W_T^{LEL}$ , definovaný vo vzťahu (3.22), na intervale  $\xi_T \in [\bar{\xi}_\epsilon, \infty)$  vyššie hodnoty ako  $W_T^B$  zo vzťahu (3.5).*





Obr. 3.7: Relatívna expozícia v rizikových aktívach LEL-RM portfólia, znázornená v závislosti od hodnoty stavovej premennej  $\xi_t$ .

Dôkaz je uvedený v [6]. Aj napriek pozitívnym vlastnostiam uvedeným vyššie je dôležité pripomenúť, že miera LEL nepatrí do skupiny koherentných rizikových mier definovaných v Defínícii 4, nakoľko nespĺňa axiómu translačnej invariantnosti. V dôsledku toho môže stratégia LEL-RM vykazovať v niektorých prípadoch nevhodné vlastnosti pre riadenie rizikovosti portfólia.

# Kapitola 4

## Stratégia AVaR

Riziková miera AVaR, ktorej autormi sú Palmquist a Uryasev [26], sa stala pomerne obľúbenou mierou medzi akademikmi, najmä vďaka vlastnosti *koherentnosti*, ktorou nedisponuje napr. ani jedna z mier, na ktorých boli založené stratégie uvedené v predošlej kapitole. Za povšimnutie stojí tiež skutočnosť, že miera AVaR okrem pravdepodobnosti dosiahnutia významných strát kontroluje aj ich veľkosť, pričom práve absencia kontroly veľkosti strát je jedným z hlavných argumentov kritikov rizikových mier, založených na kvantilovej analýze rozdelenia výnosov, medzi ktoré do určitej miery patrí aj miera AVaR. Uvedené skutočnosti naznačujú, že investičné stratégie vytvorené s použitím miery AVaR by mohli dosiahnuť kvalitatívne vyššiu úroveň, ako stratégie VaR-RM a LEL-RM. V tejto kapitole popisujeme konštrukciu investičnej stratégie založenej na miere AVaR.

### 4.1 Definícia úlohy

Označme  $X_T$  náhodnú premennú, ktorá vyjadruje zmenu hodnoty portfólia od času 0 do času  $T$ . Rizikovosť portfólia môžeme pomocou miery AVaR vyjadriť

$$AVaR_\alpha(X_T) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_p(X_T) dp, \quad (4.1)$$

$$VaR_p(X_T) = -\inf \{m \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X_T \leq m) > p\}, \quad (4.2)$$

kde  $p \in (0, 1]$  je exogénny parameter, ktorý určuje významnosť strát (tzv. chvost rozdelenia). V záujme kontroly rizikového profilu portfólia môže investor nastaviť limit na hodnoty AVaR, ktorý vyjadruje maximálnu akceptovateľnú mieru rizika. Limit môže byť vyjadrený ako podiel z počiatočnej hodnoty portfólia  $\delta W_0$ , rizikové ohraničenie je potom dané  $AVaR_\alpha(W_T - W_0) \leq \delta W_0$ , t.j.

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_p(W_T - W_0) dp \leq \delta W_0, \quad (4.3)$$

kde  $\delta \in [0, \infty)$  je exogénny parameter.

#### 4.1.1 Základná úloha

Opäť uvažujeme model trhu definovaný v časti 3.1. Pridaním ohraničenia (4.3) do úlohy nezaisteného investora definovaného vo vzťahu (3.4) definujeme tzv. Zá-

kladný problém AVaR investora

$$\begin{aligned} & \max_{W_T} \mathbb{E} [u(W_T)] \\ & \mathbb{E} [\xi_T W_T] \leq W_0 \\ & AVaR_\alpha(W_T - W_0) \leq \delta W_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

kde  $u(\cdot)$ ,  $W_0$  a  $\xi_T$  sú definované ako v úlohe (3.4) a  $\alpha$  a  $\delta$  sú exogénne parametre. Druhé ohraňenie kontroluje rizikóvu expozíciu formou limitu na hodnotu miery AVaR v čase  $T$ .

### 4.1.2 Prechod k alternatívnej úlohe

Nakoľko úloha (4.4) obsahuje relatívne komplexné rizikové ohraňenie, definujeme alternatívnu formuláciu úlohy, ktorá je za určitých okolností ekvivalentná pôvodnej úlohe AVaR investora. Definujme funkcionál [44]

$$G_\alpha(X, c) = c + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E} [(-X - c)^+] \quad (4.5)$$

kde  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je náhodná premenná,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (0, 1]$  je exogénny parameter a  $(\cdot)^+ \equiv \max(\cdot, 0)$ . V ďalšom texte uvádzame relevantné výsledky, ktoré využijeme pri transformácii pôvodnej úlohy.

**Veta 12.** *Funkcia  $G_\alpha(X, c)$  definovaná v (4.5) je konvexná a spojitě diferencovateľná podľa parametra  $c$  a rizikóvu mieru  $AVaR_\alpha(X)$  možno ekvivalentne vyjadriť*

$$AVaR_\alpha(X) = \min_{c \in \mathbb{R}} G_\alpha(X, c).$$

*Množina všetkých hodnôt  $c$ , pre ktoré je dosiahnuté minimum*

$$\mathcal{A}_\alpha(X) = \arg \min_{c \in \mathbb{R}} G_\alpha(X, c),$$

*je neprázdny, uzavretý, ohraňený interval a pre hodnotu Value-at-Risk platí*

$$VaR_\alpha(X) = \text{dolná hranica intervalu } \mathcal{A}_\alpha(X).$$

*Zároveň platí*

$$AVaR_\alpha(X) = G_\alpha(X, VaR_\alpha(X)).$$

Dôkaz je uvedený v [26].

**Veta 13.** *Je daný funkcionálny priestor*

$$\mathcal{L}^1 = \{W_T : \mathbb{E}[|W_T|] < \infty\}$$

*a podpriestor*

$$\mathcal{S} = \{W_T : W_T > 0, \mathbb{E}[u(W_T)] > -\infty, \mathbb{E}[\xi_T W_T] \leq W_0\} \cap \mathcal{L}^1.$$

$$\begin{aligned} & \max_{W_T \in \mathcal{S}} \mathbb{E}[u(W_T)] \\ AVaR_\alpha(W_T - W_0) & \leq \delta W_0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

a

$$\begin{aligned} & \max_{(W_T, c) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R}} \mathbb{E}[u(W_T)] \\ G_\alpha(W_T - W_0, c) & \leq \delta W_0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

kde funkcionál  $AVaR_\alpha(X)$  je definovaný v (4.1) a  $G_\alpha(X, c)$  v (4.5), sú ekvivalentné v tom zmysle, že ich účelové funkcie dosahujú rovnaké maximum. Navyše, ak je  $AVaR$  ohraničenie v úlohe (4.6) aktívne, úloha (4.7) dosahuje maximum v bode  $(\hat{W}_T, \hat{c})$  práve vtedy, keď (4.6) dosahuje maximum v bode  $\hat{W}_T$  a  $\hat{c} \in \mathcal{A}_\alpha(\hat{W}_T)$ . V špeciálnom prípade, ak  $\mathcal{A}_\alpha(\hat{W}_T)$  obsahuje jediný bod, úloha (4.7) dosahuje maximum v bode  $(\hat{W}_T, \hat{c})$ , kde  $\hat{W}_T$  maximalizuje účelovú funkciu a  $\hat{c} \equiv VaR_\alpha(X)$ .

*Dôkaz.* ( $\Rightarrow$ ) Nech bod  $(\hat{W}_T, \hat{c}) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R}$  je ľubovoľné prípustné riešenie úlohy (4.7). Potom platí  $\delta W_0 \geq G_\alpha(\hat{W}_T - W_0, \hat{c}) \geq \min_{c \in \mathbb{R}} G_\alpha(\hat{W}_T - W_0, c) \equiv AVaR_\alpha(\hat{W}_T - W_0)$ , kde ekvivalencia je daná Vetou 12. T.j. bod  $\hat{W}_T$  je prípustné riešenie úlohy (4.6) a účelové funkcie v oboch úlohách dosahujú v týchto bodoch rovnakú hodnotu.

( $\Leftarrow$ ) Analogicky, nech  $\hat{W}_T \in \mathcal{S}$  je ľubovoľné prípustné riešenie úlohy (4.6). Potom platí  $AVaR_\alpha(\hat{W}_T - W_0) \equiv \min_{c \in \mathbb{R}} G_\alpha(\hat{W}_T - W_0, c) \leq \delta W_0$ , kde ekvivalencia je daná Vetou 12. Označme  $\hat{c}$  riešenie úlohy  $\arg \min_{c \in \mathbb{R}} G_\alpha(\hat{W}_T - W_0, c)$ . Potom bod  $(\hat{W}_T, \hat{c})$  je prípustné riešenie úlohy (4.7) a účelové funkcie v oboch úlohách dosahujú v týchto bodoch rovnakú hodnotu.  $\square$

### 4.1.3 Alternatívna úloha AVaR investora

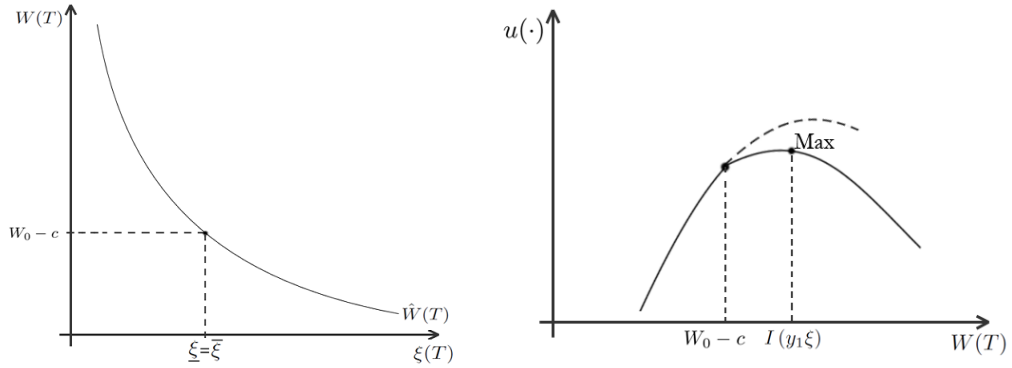
Na základe vyššie uvedených tvrdení definujeme *Alternatívnu formuláciu úlohy*

$$\begin{aligned} & \max_{W_T, c} \mathbb{E}[u(W_T)] \\ \mathbb{E}[\xi_T W_T] & \leq W_0 \\ G_\alpha(W_T - W_0, c) & \leq \delta W_0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

kde funkcionál  $G_\alpha(W_T - W_0, c)$  je daný v (4.5),  $u(\cdot)$ ,  $W_0$ ,  $W_T$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  a  $\xi_T$  sú definované ako v úlohe (4.4) a  $c \in \mathbb{R}$  je nová premenná v procese optimalizácie.

## 4.2 Optimálne portfólio v čase $T$

V tejto časti definujeme optimálne cieľové portfólio ako riešenie úlohy (4.8). Úlohu riešime v dvoch krokoch. Riešením optimalizácie cez prvú premennú definujeme optimálne portfólio na priestore  $W_T \times \xi_T$ , t.j. pre každé fixované  $c$ . Ako výsledok druhostupňovej optimalizácie, nájdeme optimum cez všetky hodnoty parametra  $c$ .



Obr. 4.1: Vľavo: Optimálne portfólio v čase  $T$  pri neuplatnení rizikového ohraničenia. Vpravo: Možné tvary účelovej funkcie pre  $\xi_T \in [0, \xi]$ .

**Veta 14** (Optimálne portfólio v čase  $T$ ). *Nech  $c \in \mathbb{R}$  a platí  $c \leq \delta W_0$ . Definujme funkciu*

$$W_T(c, y_1, y_2) = \begin{cases} I(y_1 \xi_T) & \text{ak } \xi_T < \underline{\xi} \\ W_0 - c & \text{ak } \underline{\xi} \leq \xi_T < \bar{\xi} \\ I(y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha}) & \text{ak } \bar{\xi} \leq \xi_T, \end{cases} \quad (4.9)$$

kde  $y_1 > 0$ ,  $y_2 \geq 0$ ,  $I(\cdot)$  je inverzná funkcia  $u'(\cdot)$  a

$$\underline{\xi} = u'(W_0 - c) / y_1 \quad (4.10)$$

$$\bar{\xi} = \left( u'(W_0 - c) + \frac{y_2}{\alpha} \right) / y_1. \quad (4.11)$$

Nech  $y_1 = \hat{y}_1$ ,  $y_2 = \hat{y}_2$  je riešením systému rovníc (4.12) a (4.13)

$$\mathbb{E}[\xi_T W_T(c, y_1, y_2)] = \xi_0 W_0 \quad (4.12)$$

$$c + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[(W_0 - W_T(c, y_1, y_2) - c)^+] = \delta W_0; \text{ alebo} \quad (4.13)$$

$$c + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[(W_0 - W_T(c, y_1, y_2) - c)^+] < \delta W_0 \text{ a } y_2 = 0.$$

Potom pre fixné  $c$  úloha (4.8) dosahuje maximum v bode

$$\hat{W}_T(c) \equiv W_T(c, \hat{y}_1, \hat{y}_2). \quad (4.14)$$

*Dôkaz.* V prípadoch, keď je splnená nerovnosť  $c + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[(W_0 - W_T(c, \hat{y}_1, \hat{y}_2) - c)^+] < \delta W_0$ , rizikové ohraničenie sa neuplatní,  $\underline{\xi} = \bar{\xi}$  a riešenie (4.14) sa zjednoduší na tvar  $\hat{W}_T = I(\hat{y}_1 \xi_T)$ , t.j. riešenie je ekvivalentné riešeniu úlohy nezaisteného portfólia definovaného v (3.4). Výplatná funkcia optimálneho portfólia v takomto prípade je znázornená na Obr. 4.1. V ostatných prípadoch sa rizikové ohraničenie uplatní, t.j. platí rovnosť  $c + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[(W_0 - W_T(c, \hat{y}_1, \hat{y}_2) - c)^+] = \delta W_0$  a úlohu ďalej riešime zostavením Lagrangeovej účelovej funkcie, ako je uvedené v nasledovnej Leme.

**Lema 2.** Funkcia  $W_T(c, y_1, y_2)$  definovaná v (4.9) je riešením úlohy

$$\max_{W \in \mathbb{R}} u(W) - y_1 \xi_T W - y_2 \alpha^{-1} (W_0 - W - c)^+,$$

kde  $\xi_T \geq 0, \alpha \in (0, 1]$  a  $c \in \mathbb{R}$  sú exogénne parametre a  $y_1 \geq 0$  a  $y_2 \geq 0$  sú Lagrangeové multiplikátory.

*Dôkaz.* V prvom kroku definujme množinu kandidátov na bod globálneho optima. Keďže účelová funkcia je nediferencovateľná v bode  $W_0 - c$ , kandidátov hľadáme nezávisle na intervaloch  $[0, W_0 - c)$  a  $[W_0 - c, \infty)$ . Nutné podmienky optimality pre účelovú funkciu sú

$$W = \begin{cases} I(y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha}) & \text{ak } W \in [0, W_0 - c) \\ I(y_1 \xi_T) & \text{ak } W \in [W_0 - c, \infty). \end{cases}$$

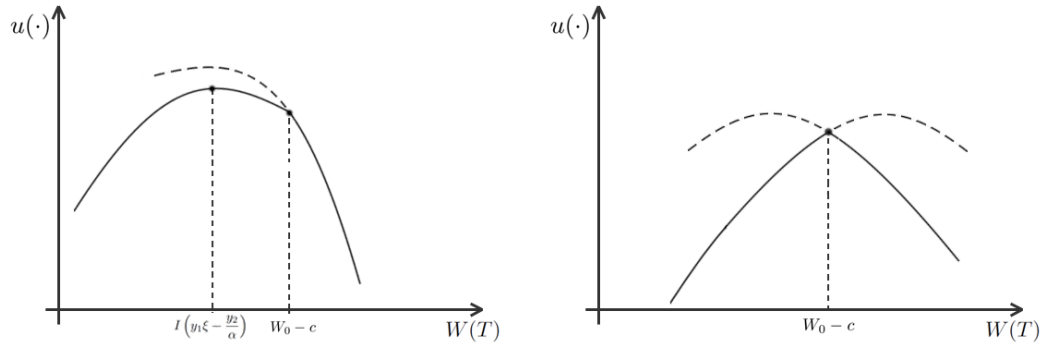
T.j. máme troch kandidátov pre bod globálneho optima:  $I(y_1 \xi_T)$ ,  $W_0 - c$  a  $I(y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha})$  (z vlastností účelovej funkcie je zrejmé, že globálne optimum nebude ležať v bodoch 0 a  $\infty$ ). Keďže účelová funkcia môže nadobudnúť rôzne tvary pre rôzne nastavenia exogénnych parametrov definujúcich vlastnosti trhu, preskúmať optimalitu je nutné pre všetky možné konfigurácie úlohy a hodnoty stavovej premennej  $\xi_T$ . Označme  $\underline{\xi}$  a  $\bar{\xi}$  body, v ktorých platia rovnosti

$$\begin{aligned} \underline{\xi} & : & I(y_1 \underline{\xi}) &= W_0 - c \\ \bar{\xi} & : & I(y_1 \bar{\xi} - \frac{y_2}{\alpha}) &= W_0 - c. \end{aligned}$$

Ak premenná  $\xi_T$  nadobúda hodnoty v intervale  $[0, \underline{\xi})$ , z vlastností funkcie  $I(\cdot)$  platí  $I(y_1 \xi_T) > W_0 - c$  a  $I(y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha}) > W_0 - c$ , t.j. v oboch prípadoch ležia body lokálneho optima vpravo od  $W_0 - c$  a pre hodnoty účelovej funkcie platí  $u(I(y_1 \xi_T)) - y_1 \xi_T I(y_1 \xi_T) + y_2 \frac{1}{\alpha} I(y_1 \xi_T) > u(W_0 - c) - y_1 \xi_T I(W_0 - c) + y_2 \frac{1}{\alpha} I(W_0 - c)$ , čiže úloha dosahuje maximum v bode  $I(y_1 \xi_T)$  (Obr. 4.1). Ak parameter  $\xi_T$  nadobúda hodnoty v intervale  $[\bar{\xi}, \infty)$ , z vlastností funkcie  $I(\cdot)$  platí  $I(y_1 \xi_T) < W_0 - c$  a  $I(y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha}) \leq W_0 - c$  a pre hodnoty účelovej funkcie platí  $u(I(y_1 \bar{\xi} - \frac{y_2}{\alpha})) - y_1 \bar{\xi} I(y_1 \bar{\xi} - \frac{y_2}{\alpha}) + \frac{y_2}{\alpha} I(y_1 \bar{\xi} - \frac{y_2}{\alpha}) \geq u(W_0 - c) - y_1 \bar{\xi} (W_0 - c) + \frac{y_2}{\alpha} (W_0 - c)$ , čiže úloha dosahuje maximum v bode  $I(y_1 \bar{\xi} - \frac{y_2}{\alpha})$  (Obr. 4.2). Nakoniec, ak parameter  $\xi_T$  nadobúda hodnoty v intervale  $[\underline{\xi}, \bar{\xi})$ , z vlastností funkcie  $I(\cdot)$  platí  $I(y_1 \xi_T) \leq W_0 - c$  a  $I(y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha}) > W_0 - c$ , t.j. bod  $W_0 - c$  je jediným kandidátom pre optimum a úloha nadobúda maximum v tomto bode (Obr. 4.2).

Analýza všetkých možných konfigurácií účelovej funkcie ukázala, že funkcia (4.14) je bodom globálneho optima pre všetky možné hodnoty  $\xi_T$ . □

Uvažujme opäť úlohu (4.8). Nech  $W_T$  je ľubovoľný kandidát pre optimálne rie-



Obr. 4.2: Vľavo: Možné tvary účelovej funkcie pre  $\xi_T \in [\bar{\xi}, \infty)$ . Vpravo: Možné tvary účelovej funkcie pre  $\xi_T \in [\underline{\xi}, \bar{\xi})$ .

šenie, potom platí

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[u(\hat{W}_T)] - \mathbb{E}[u(W_T)] \\
&= \mathbb{E}[u(\hat{W}_T)] - \mathbb{E}[u(W_T)] - \hat{y}_1 W_0 + \hat{y}_1 W_0 - \frac{\hat{y}_2}{\alpha} \delta W_0 + \frac{\hat{y}_2}{\alpha} \delta W_0 \\
&\geq \mathbb{E}[u(\hat{W}_T)] - \mathbb{E}[u(W_T)] - \hat{y}_1 \mathbb{E}[\xi_T \hat{W}_T] + \hat{y}_1 \mathbb{E}[\xi_T W_T] \\
&\quad - \hat{y}_2 \left( c + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[(W_0 - \hat{W}_T - c)^+] \right) + \hat{y}_2 \left( c + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[(W_0 - W_T - c)^+] \right) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Prvá z nerovností vyplýva z platnosti

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\xi_T \hat{W}_T] &= W_0 \\
\alpha^{-1} \mathbb{E}[(W_0 - \hat{W}_T - c)^+] &= \delta W_0
\end{aligned}$$

a

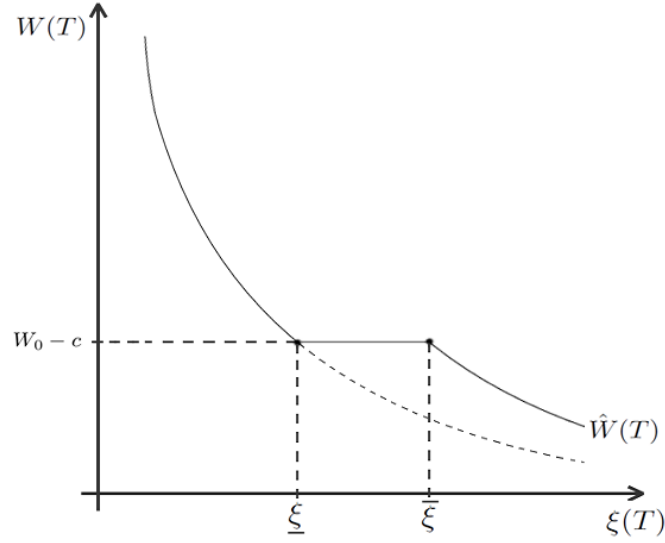
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\xi_T W_T] &\leq W_0 \\
\alpha^{-1} \mathbb{E}[(W_0 - W_T - c)^+] &\leq \delta W_0
\end{aligned}$$

(viď prvý odstavec dôkazu) a druhá nerovnosť vyplýva z Lemy 2. Zložené riešenie úlohy (4.8) pre všetky možné hodnoty  $\xi_T$  je znázornené na Obr. 4.3.  $\square$

Veta 14 definuje optimálne portfólio  $\hat{W}_T(c)$  ako funkciu parametra  $c$  (prvostupňové riešenie). Riešenie úlohy dosiahneme maximalizáciou<sup>1</sup> úlohy (4.15) cez všetky možné hodnoty  $c$

$$\max_{c \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[ u \left( \hat{W}_T(c) \right) \right]. \quad (4.15)$$

<sup>1</sup>Úlohu (4.15) riešime numericky, nakoľko analýza riešenia nie je naším primárnym cieľom, túto ponechávame pre ďalší výskum.



Obr. 4.3: Všeobecné riešenie pre úlohu AVaR investora, znázornené v závislosti od hodnoty stavovej premennej  $\xi_T$ .

### 4.3 Optimálne portfólio v čase $t < T$

Výplatná funkcia optimálneho portfólia v čase  $T$  je definovaná v (4.9). Pre investora je tiež dôležité poznať hodnotu portfólia v každom čase  $t$  a v každom stave  $\xi_t$  pred investičným horizontom. Pre odvodenie hodnoty optimálneho portfólia opäť predpokladáme, že preferencie investora sú dobre charakterizované izoelastickou funkciou užitočnosti, definovanou napr. v (2.7) ako

$$u(x) = \frac{x^p}{p} \quad p < 0, p \neq 1. \quad (4.16)$$

Z toho pre inverznú funkciu derivácie funkcie  $u(x)$  platí

$$I(\cdot) = (\cdot)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (4.17)$$

Taktiež predpokladáme, že exogénne parametre  $r(t)$  a  $\kappa(t)$  sú konštantné v čase. Z definície (3.2) je proces  $\ln \xi_t$  *gaussovský*, t.j. podmienené rozdelenie  $\ln \xi_T$  v čase  $t$ , kde  $T \geq t$  je

$$\ln \xi_T | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N} \left( \ln \xi_t - \left( r + \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 \right) (T - t), \|\kappa\|^2 (T - t) \right). \quad (4.18)$$

Definujme funkciu

$$f(t, \xi_t) = \mathbb{E} \left[ \frac{\xi_T}{\xi_t} \hat{W}_T(\hat{c}) | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{\xi_T}{\xi_t} \hat{W}_T(\hat{c}) | \xi_t \right], \quad (4.19)$$

kde druhá rovnosť vyplýva zo skutočnosti, že  $\xi_t$  v sebe nesie všetku informáciu od času 0 do času  $t$ . Funkcia  $f(t, \xi_t)$ , ekvivalentná rizikovo-neutrálnej súčasnej hodnote výplatnej funkcie  $\hat{W}_T(\hat{c})$ , je markovská, navyše výplatná funkcia portfólia v ľubovoľnom čase  $t \in [0, T]$  existuje a je jednoznačne definovaná v nasledovnej Vete.



**Veta 15** (Proces optimálnej hodnoty portfólia). Pre  $t \in [0, T]$  je proces optimálnej výplatnej funkcie (4.14) rovný

$$\hat{W}(t) = G_1(t) + G_2(t) + G_3(t), \quad (4.20)$$

kde funkcie  $G_{1,2,3}(t)$  sú dané

$$G_1(t) = \frac{y_1^{\frac{1}{p-1}}}{\xi_t} \exp \left\{ \frac{p}{p-1} \left( \ln \xi_t + \left( \frac{\|\kappa\|^2}{2p-2} - r \right) (T-t) \right) \right\} \Phi(d_1) \quad (4.21)$$

$$G_2(t) = \frac{W_0 - c}{\xi_t} \exp \left\{ \ln \xi_t - r(T-t) \right\} \left( \Phi(d_2) - \Phi(d_3) \right) \quad (4.22)$$

$$G_3(t) = \frac{1}{\xi_t} \int_{\bar{\xi}}^{\infty} \xi_T \left( y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}} d\mathbb{P}(\xi_T) \quad (4.23)$$

$$d_1 = \frac{\ln \underline{\xi} - \ln \xi_t + \left( r - \frac{1}{2} \frac{p+1}{p-1} \|\kappa\|^2 \right) (T-t)}{\|\kappa\| \sqrt{T-t}} \quad (4.24)$$

$$d_2 = \frac{\ln \bar{\xi} - \ln \xi_t + \left( r - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 \right) (T-t)}{\|\kappa\| \sqrt{T-t}} \quad (4.25)$$

$$d_3 = d_1 + \frac{\|\kappa\| \sqrt{T-t}}{p-1} \quad (4.26)$$

a  $\Phi(\cdot)$  je kumulatívna distribučná funkcia  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

*Dôkaz.* Dosadením riešenia (4.14) do rovnice (4.19) dostávame

$$\begin{aligned} \hat{W}(t) &= f(t, \xi_t) = \mathbb{E}_t \left[ \frac{\xi_T}{\xi_t} \hat{W}_T(\hat{c}) \right] \\ &= \frac{1}{\xi_t} \mathbb{E}_t \left[ \xi_T \left( I(y_1 \xi_T) 1_{\xi_T \leq \underline{\xi}} + (W_0 - \hat{c}) 1_{\underline{\xi} \leq \xi_T < \bar{\xi}} + I \left( y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha} \right) 1_{\bar{\xi} \leq \xi_T} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\xi_t} \mathbb{E}_t \left[ \xi_T \left( (y_1 \xi_T)^{\frac{1}{p-1}} 1_{\xi_T \leq \underline{\xi}} + (W_0 - \hat{c}) 1_{\underline{\xi} \leq \xi_T < \bar{\xi}} + \left( y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}} 1_{\bar{\xi} \leq \xi_T} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\xi_t} \mathbb{E}_t \left[ \xi_T \left( (y_1 e^{\ln \xi_T})^{\frac{1}{p-1}} 1_{\ln \xi_T \leq \ln \underline{\xi}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (W_0 - \hat{c}) 1_{\ln \underline{\xi} \leq \ln \xi_T < \ln \bar{\xi}} + \left( y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}} 1_{\bar{\xi} \leq \xi_T} \right) \right] \\ &= \underbrace{\frac{y_1^{\frac{1}{p-1}}}{\xi_t} \mathbb{E}_t \left[ e^{\frac{p}{p-1} \ln \xi_T} 1_{\ln \xi_T \leq \ln \underline{\xi}} \right]}_{G_1(t)} + \underbrace{\frac{W_0 - \hat{c}}{\xi_t} \mathbb{E}_t \left[ e^{\ln \xi_T} 1_{\ln \underline{\xi} \leq \ln \xi_T < \ln \bar{\xi}} \right]}_{G_2(t)} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{\xi_t} \mathbb{E}_t \left[ \xi_T \left( y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}} 1_{\bar{\xi} \leq \xi_T} \right]}_{G_3(t)}, \end{aligned}$$

kde  $1_{(\cdot)}$  je funkcia indikátor. Odvodenie analytického vyjadrenia pre funkcie  $G_1(t)$  a  $G_2(t)$  vyplýva z Lemy 3.

**Lema 3** (Stredná hodnota lognormálnej náhodnej premennej). *Nech  $Y \sim \mathcal{N}(m, s^2)$  a  $y_1 \leq y_2$ . Potom platí*

$$\mathbb{E} \left[ e^{\alpha Y} 1_{y_1 \leq Y < y_2} \right] = e^{\alpha m + \frac{1}{2} \alpha^2 s^2} \left( \Phi \left( \frac{y_2 - m - \alpha s^2}{s} \right) - \Phi \left( \frac{y_1 - m - \alpha s^2}{s} \right) \right),$$

kde  $\Phi(\cdot)$  je kumulatívna distribučná funkcia rozdelenia  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Dôkaz je uvedený v [51]. Aplikovaním Lemy 3 na funkcie  $G_1(t)$  a  $G_2(t)$  s parametrami

$$\begin{array}{ll} G_1(t) : & Y = \ln \xi_T \\ & \alpha = \frac{p}{p-1} \\ & y_1 = -\infty \\ & y_2 = \ln \underline{\xi} \\ G_2(t) : & Y = \ln \xi_T \\ & \alpha = 1 \\ & y_1 = \ln \underline{\xi} \\ & y_2 = \ln \bar{\xi} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} G_{1,2}(t) : & m = \ln \xi_t - \left( r + \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 \right) (T-t) \\ & s^2 = \|\kappa\|^2 (T-t) \end{array}$$

odvodíme analytické vyjadrenie

$$\begin{aligned} G_1(t) &= \frac{y_1^{\frac{1}{p-1}}}{\xi_t} \exp \left\{ \frac{p}{p-1} \left( \ln \xi_t + \left( \frac{\|\kappa\|^2}{2p-2} - r \right) (T-t) \right) \right\} \\ &\quad \times \Phi \left( \frac{\ln \underline{\xi} - \ln \xi_t + \left( r - \frac{p+1}{2(p-1)} \|\kappa\|^2 \right) (T-t)}{\|\kappa\| \sqrt{T-t}} \right) \\ G_2(t) &= \frac{W_0 - \hat{c}}{\xi_t} \exp \left\{ \ln \xi_t - r(T-t) \right\} \left[ \Phi \left( \frac{\ln \bar{\xi} - \ln \xi_t + \left( r - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 \right) (T-t)}{\|\kappa\| \sqrt{T-t}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \Phi \left( \frac{\ln \underline{\xi} - \ln \xi_t + \left( r - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 \right) (T-t)}{\|\kappa\| \sqrt{T-t}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Pre funkciu  $G_3(t)$  nepoznáme analytické vyjadrenie, budeme ju reprezentovať

$$G_3(t) = \frac{1}{\xi_t} \int_{\bar{\xi}}^{\infty} \xi_T \left( y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}} d\mathbb{P}(\xi_T).$$

□

## 4.4 Optimálna investičná stratégia

Pripomeňme, že  $\theta(t)$  vyjadruje podiel investície v rizikových aktívach, t.j. reprezentuje riadiacu premennú, prostredníctvom ktorej investor zadáva pokyny na prevažovanie svojich pozícií. V nasledujúcich Vetách definujeme všeobecnú optimálnu stratégiu, ktorá je implikovaná bližšie nešpecifikovaným procesom  $W(t)$  a tiež optimálnu stratégiu AVaR investora.

**Veta 16** (Optimálna (všeobecná) investičná stratégia). *Nech proces  $\xi_t$  vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici (3.2),  $W(t)$  je dané (3.1),  $W_0 > 0$  a platí  $W(t) \equiv W(t, \xi_t)$ . Potom platí*

$$\theta(t) = -\frac{(\sigma^\top)^{-1} \kappa \partial W(t)}{W(t)} \frac{\partial W(t)}{\partial \xi_t} \xi_t. \quad (4.27)$$

*Dôkaz.* Pre diferenciál  $W(t)$  z Itôvej lemy platí

$$dW(t) = \frac{\partial W(t)}{\partial \xi_t} d\xi_t + \left( \frac{\partial W(t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(t)}{\partial \xi_t^2} \xi_t^2 \|\kappa\|^2 \right) dt.$$

Dosadením vzťahov (3.1) a (3.2) za  $dW(t)$  a  $d\xi_t$  pre stochastické členy platí

$$W(t)\theta(t)^\top \sigma = -\frac{\partial W(t)}{\partial \xi_t} \xi_t \kappa^\top,$$

po úpravách dostávame vzťah (4.27).  $\square$

**Veta 17** (Optimálna stratégia AVaR investora). *Nech proces  $\xi_t$  vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici (3.2) a proces  $W(t)$  je definovaný v (4.20). Optimálna investičná stratégia AVaR investora je*

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) = & -\frac{(\sigma^\top)^{-1} \kappa}{\hat{W}(t)} \left[ \frac{G_1(t)}{p-1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \|\kappa\| \sqrt{T-t}} \left( \exp \left\{ \left( \frac{p}{p-1} \frac{\|\kappa\|^2}{2p-2} - r \right) (T-t) - \frac{d_1^2}{2} \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. \times (y_1 \xi_t)^{\frac{1}{p-1}} + (W_0 - \hat{c}) e^{-r(T-t)} \left( e^{-d_2^2/2} - e^{-d_3^2/2} \right) \right) + \xi_t \frac{\partial G_3(t)}{\partial \xi_t} \right]. \end{aligned}$$

*Dôkaz.* Zderivovaním funkcií  $G_1(t)$  a  $G_2(t)$  dostávame

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1(t)}{\partial \xi_t} &= \exp \left\{ \frac{p}{p-1} \left( \frac{\|\kappa\|^2}{2p-2} - r \right) (T-t) \right\} \\ & \quad \times \left( \frac{y_1^{\frac{1}{p-1}}}{p-1} \xi_t^{\frac{2-p}{p-1}} \Phi(d_1) - \frac{(y_1 \xi_t)^{\frac{1}{p-1}} e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi} \xi_t \|\kappa\| \sqrt{T-t}} \right) \\ &= \frac{G_1(t)}{(p-1)\xi_t} - \frac{(y_1 \xi_t)^{\frac{1}{p-1}}}{\sqrt{2\pi} \xi_t \|\kappa\| \sqrt{T-t}} \exp \left\{ \frac{p}{p-1} \left( \frac{\|\kappa\|^2}{2p-2} - r \right) (T-t) - \frac{d_1^2}{2} \right\} \\ \frac{\partial G_2(t)}{\partial \xi_t} &= -\frac{(W_0 - \hat{c}) e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi} \xi_t \|\kappa\| \sqrt{T-t}} \left( e^{-d_2^2/2} - e^{-d_3^2/2} \right). \end{aligned}$$

Dosadením do vzťahov (4.20), (4.27) a ďalšími úpravami dostávame finálny vzťah.  $\square$

## 4.5 Relatívna expozícia v rizikových aktívach

Pripomeňme, že  $\theta^B(t)$  je investičná stratégia nezaisteného investora definovaná v (3.9) ako

$$\theta^B(t) = \frac{1}{1-p} (\sigma^\top)^{-1} \kappa.$$

Optimálnu stratégiu AVaR investora vieme alternatívne vyjadriť pomocou  $\theta^B(t)$  ako

$$\hat{\theta}(t) = -\frac{1-p}{W(t)}\theta^B(t)\frac{\partial W(t)}{\partial \xi_t}\xi_t. \quad (4.28)$$

Podobne ako pri VaR-RM a LEL-RM stratégii, definujme proces  $\hat{q}(t)$  ako expozíciu optimálneho AVaR portfólia v rizikových aktívach, vyjadrenú v *relatívnych* jednotkách voči nezaistenému portfóliu

$$\hat{\theta}(t) = \theta^B(t)\hat{q}(t),$$

t.j.

$$\hat{q}(t) = -\frac{1-p}{\hat{W}(t)}\frac{\partial \hat{W}(t)}{\partial \xi_t}\xi_t. \quad (4.29)$$

## 4.6 Ohraničenosť expozície v rizikových aktívach

Vo vzťahu (3.34) je okrem iného poukázané na ohraničenosť relatívnej expozície stratégie LEL-RM, kde stratégia nadobúda hodnoty na intervale  $[0, 1]$ . V práci [27] autorka naopak poukazuje na nevhodnú vlastnosť stratégie VaR-RM, ktorá za určitých okolností môže viesť k nekonečnej hodnote  $q^{VaR}(t)$ , pre časy blízke  $T$ . Uvedená skutočnosť je priamym dôsledkom nespojitosti výplatnej funkcie VaR-RM portfólia v čase  $T$ . Zaujímavý výskumný problém je preskúmanie ohraničenosti relatívnej expozície v rizikových aktívach pre stratégiu AVaR, nakoľko túto vlastnosť považujeme za dôležitú v reálnych aplikáciách stratégie na riadenie portfólia.

Analýzou výplatnej funkcie AVaR portfólia v čase  $T$  môžeme ľahko nahliadnuť, že pre časy blížiac sa k  $T$ , vedie uvedená stratégia za každých okolností ku konečnej hodnote  $\hat{q}(t)$ . Pripomeňme, že optimálna výplatná funkcia v čase  $T$ , daná vzťahom (4.14), je

$$\hat{W}_T(\hat{c}) = \begin{cases} I(y_1\xi_T) & \text{ak } \xi_T < \underline{\xi} \\ W_0 - \hat{c} & \text{ak } \underline{\xi} \leq \xi_T < \bar{\xi} \\ I\left(y_1\xi_T - \frac{y_2}{\alpha}\right) & \text{ak } \bar{\xi} \leq \xi_T, \end{cases}$$

t.j. funkcia je definovaná v závislosti od stavu  $\xi_T$ , v ktorom sa trh v čase  $T$  nachádza. Derivovaním funkcie sa a dosadením do rovnice (4.29) dostávame

$$\hat{q}(T) = \begin{cases} 1 & \text{ak } \xi_T < \underline{\xi} \\ 0 & \text{ak } \underline{\xi} < \xi_T < \bar{\xi} \\ \frac{y_1\xi_T}{\left(y_1\xi_T - \frac{y_2}{\alpha}\right)} & \text{ak } \bar{\xi} < \xi_T. \end{cases}$$

Funkcia  $(y_1\xi_T - y_2/\alpha)$  dosahuje pre fixné hodnoty  $y_1$ ,  $y_2$  a  $\alpha$  minimum v bode  $\bar{\xi} = ((W_0 - \hat{c})^{p-1} + y_2/\alpha) / y_1$ , t.j.

$$\forall \xi_T \in [\bar{\xi}, \infty) : \left(y_1\xi_T - \frac{y_2}{\alpha}\right) \geq (W_0 - \hat{c})^{p-1} > 0.$$

Zároveň platí

$$\frac{y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha} + \frac{y_2}{\alpha}}{(y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha})} = 1 + \frac{y_2}{\alpha y_1 \xi_T - y_2} \leq 1 + \frac{y_2}{\alpha (y_1 \bar{\xi} - y_2/\alpha)} = 1 + \frac{y_2}{\alpha} (W_0 - \hat{c})^{1-p} < h,$$

kde  $h$  je konečná konštanta. Tento záver bol motiváciou pre detailnejšiu analýzu vlastností optimálnej AVaR stratégie, ktoré potvrdzujú predpoklad o ohraničenosti v každom čase a stave. Relevantné výsledky analýzy sú zhrnuté v nasledovnej Vete.

**Veta 18.** *Pre náhodnú premennú  $\hat{q}(t)$  definovanú v (4.29) platí*

$$\hat{q}(t) = \frac{1}{\hat{W}(t)} \left( G_1(t) + \frac{1}{\xi_t} \int_{\underline{\xi}}^{\infty} \frac{y_1 \xi_T}{y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha}} \xi_T \left( y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}} \mathbb{P}(\xi_T) \right). \quad (4.30)$$

Navyše platí, že  $\hat{q}(t)$  je ohraničená, t.j. pre každé optimálne AVaR portfólio definované v (4.20) existuje konštanta  $h \in \mathbb{R}$  taká, že platí  $\hat{q}(t) < h$  pre každé  $\xi_t \in [0, \infty)$  a  $t \in [0, T]$ .

*Dôkaz.* Podľa vzťahu (4.10) platí  $y_1 = (W_0 - \hat{c})^{p-1}/\underline{\xi}$ . Dosadením do funkcie  $G_1(t)$  a derivovaním dostávame

$$\begin{aligned} G_1(t) &= (W_0 - \hat{c}) \left( \frac{\xi_t}{\underline{\xi}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \exp \left\{ \frac{p}{p-1} \left( \frac{\|\kappa\|^2}{2p-2} - r \right) (T-t) \right\} \Phi(d_1) \\ \frac{\partial G_1(t)}{\partial \xi_t} &= \frac{W_0 - \hat{c}}{\xi_t} \left( \frac{\xi_t}{\underline{\xi}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \exp \left\{ \frac{p}{p-1} \left( \frac{\|\kappa\|^2}{2p-2} - r \right) (T-t) \right\} \\ &\quad \times \left( \frac{\Phi(d_1)}{p-1} - \frac{e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|\sqrt{T-t}}} \right) \\ &= \frac{G_1(t)}{(p-1)\xi_t} - \frac{W_0 - \hat{c}}{\xi_t} \left( \frac{\xi_t}{\underline{\xi}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \exp \left\{ \frac{p}{p-1} \left( \frac{\|\kappa\|^2}{2p-2} - r \right) (T-t) \right\} \\ &\quad \times \frac{e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|\sqrt{T-t}}}. \end{aligned}$$

Z (4.26) platí

$$\begin{aligned} d_1 &= d_3 - \frac{\|\kappa\|\sqrt{T-t}}{p-1} \\ d_1^2 &= d_3^2 + \frac{\|\kappa\|^2(T-t)}{(p-1)^2} - 2 \frac{\|\kappa\|\sqrt{T-t}}{p-1} d_3 \\ e^{-d_1^2/2} &= \left( \frac{\xi}{\underline{\xi}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \exp \left\{ -d_3^2/2 - \frac{\|\kappa\|^2(T-t)}{2(p-1)^2} + \frac{\left( r - \frac{\|\kappa\|^2}{2} \right) (T-t)}{p-1} \right\}, \end{aligned}$$

t.j.

$$\frac{\partial G_1(t)}{\partial \xi_t} = \frac{G_1(t)}{(p-1)\xi_t} - \frac{W_0 - \hat{c}}{\sqrt{2\pi\xi_t\|\kappa\|\sqrt{T-t}}} e^{-r(T-t) - d_3^2/2}.$$

Zo vzťahu (4.18) pre náhodnú premennú  $\xi_T | \xi_t$  platí

$$\xi_T = \xi_t e^{g(z)}, \quad (4.31)$$

kde

$$g(z) = - \left( r + \frac{\|\kappa\|^2}{2} \right) (T - t) - \|\kappa\| \sqrt{T - t} z$$

a  $z$  je náhodná premenná z rozdelenia  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Zmenou integračnej premennej vo funkcii  $G_3(t)$ , s využitím vzťahu (4.31) a ekvivalencie  $\xi_T > \bar{\xi} \Leftrightarrow M > z$ , kde

$$M = \frac{\ln \xi_t - \ln \bar{\xi} - \left( r + \frac{\|\kappa\|^2}{2} \right) (T - t)}{\|\kappa\| \sqrt{T - t}}, \quad (4.32)$$

dostávame

$$G_3(t) = \int_{-\infty}^M e^{g(z)} \left( y_1 \xi_t e^{g(z)} - \frac{y_2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}} d\mathbb{P}(z).$$

Derivovaním funkcie  $G_3(t)$  a dosadením vzťahu (4.11) za  $y_1$  dostávame

$$\frac{\partial G_3(t)}{\partial \xi_t} = \frac{\bar{\xi}}{\xi_t^2} \frac{(W_0 - \hat{c}) e^{-M^2/2}}{\sqrt{2\pi} \|\kappa\| \sqrt{T - t}} + \int_{-\infty}^M e^{2g(z)} \frac{y_1}{p - 1} \left( y_1 \xi_t e^{g(z)} - \frac{y_2}{\alpha} \right)^{\frac{2-p}{p-1}} d\mathbb{P}(z).$$

Z (4.25) a (4.32) platí

$$\begin{aligned} M &= -d_2 - \|\kappa\| \sqrt{T - t} \\ M^2 &= d_2^2 + \|\kappa\|^2 (T - t) + 2 \left( \ln \bar{\xi} - \ln \xi_t + \left( r - \frac{\|\kappa\|^2}{2} \right) (T - t) \right) \\ e^{-M^2/2} &= \frac{\xi_t}{\bar{\xi}} e^{-r(T-t) - d_2^2/2}, \end{aligned}$$

t.j.

$$\frac{\partial G_3(t)}{\partial \xi_t} = \frac{(W_0 - \hat{c}) e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi} \xi_t \|\kappa\| \sqrt{T - t}} e^{-d_2^2/2} + \int_{-\infty}^M e^{2g(z)} \frac{y_1}{p - 1} \left( y_1 \xi_t e^{g(z)} - \frac{y_2}{\alpha} \right)^{\frac{2-p}{p-1}} d\mathbb{P}(z).$$

Pripomeňme, že derivácia funkcie  $G_2(t)$  je

$$\frac{\partial G_2(t)}{\partial \xi_t} = - \frac{(W_0 - \hat{c}) e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi} \xi_t \|\kappa\| \sqrt{T - t}} \left( e^{-d_2^2/2} - e^{-d_3^2/2} \right). \quad (4.33)$$

Sčítaním parciálnych derivácií funkcií  $G_1(t)$ ,  $G_2(t)$  a  $G_3(t)$  dostávame

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{W}(t)}{\partial \xi_t} &= \frac{\partial G_1(t)}{\partial \xi_t} + \frac{\partial G_2(t)}{\partial \xi_t} + \frac{\partial G_3(t)}{\partial \xi_t} \\ &= \frac{G_1(t)}{(p - 1) \xi_t} + \int_{-\infty}^M e^{2g(z)} \frac{y_1}{p - 1} \left( y_1 \xi_t e^{g(z)} - \frac{y_2}{\alpha} \right)^{\frac{2-p}{p-1}} d\mathbb{P}(z). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Z definície funkcie  $\hat{q}(t)$  po dosadení za  $\frac{\partial \hat{W}(t)}{\partial \xi_t}$  vyplýva

$$\begin{aligned}\hat{q}(t) &= -\frac{(1-p)}{\hat{W}(t)} \frac{\partial \hat{W}(t)}{\partial \xi_t} \xi_t \\ &= \frac{1}{\hat{W}(t)} \left( G_1(t) + \xi_t \int_{-\infty}^M e^{2g(z)} y_1 \left( y_1 \xi_t e^{g(z)} - \frac{y_2}{\alpha} \right)^{\frac{2-p}{p-1}} d\mathbb{P}(z) \right),\end{aligned}$$

kde funkcia  $\frac{\partial G_2(t)}{\partial \xi_t}$  sa po sčítaní vynulovala s časťou funkcie  $\frac{\partial G_1(t)}{\partial \xi_t} + \frac{\partial G_3(t)}{\partial \xi_t}$ . Zmenou integračnej premennej podľa vzťahu (4.31) dostávame

$$= \frac{1}{\hat{W}(t)} \left( G_1(t) + \frac{1}{\xi_t} \int_{\underline{\xi}}^{\infty} \frac{y_1 \xi_T}{y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha}} \xi_T \left( y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}} \mathbb{P}(\xi_T) \right).$$

Je zrejmé, že funkcia

$$\frac{y_1 \xi_T}{y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha}} = \frac{y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha} + \frac{y_2}{\alpha}}{y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha}} = 1 + \frac{y_2}{\alpha y_1 \xi_T - y_2}$$

je na intervale  $[\bar{\xi}, \infty)$  pre fixné hodnoty  $y_1$ ,  $y_2$  a  $\alpha$  dobre definovaná a nadobúda maximum na ľavej hranici tohto intervalu, t.j. platí

$$\begin{aligned}\hat{q}(t) &\leq \frac{1}{\hat{W}(t)} \left( G_1(t) + \frac{y_1 \bar{\xi}}{y_1 \bar{\xi} - \frac{y_2}{\alpha}} \frac{1}{\xi_t} \int_{\underline{\xi}}^{\infty} \xi_T \left( y_1 \xi_T - \frac{y_2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}} \mathbb{P}(\xi_T) \right) \\ &= \frac{1}{\hat{W}(t)} \left( G_1(t) + \frac{y_1 \bar{\xi}}{y_1 \bar{\xi} - \frac{y_2}{\alpha}} G_3(t) \right).\end{aligned}$$

Zmenšením menovateľa  $\hat{W}(t)$  voľbou funkcií  $G_1(t)$  a  $G_3(t)$  pre menovateľ prvého a druhého sčítanca, po niekoľkých úpravách dostávame

$$\leq 1 + \frac{y_1 \bar{\xi}}{y_1 \bar{\xi} - \frac{y_2}{\alpha}} < h,$$

kde  $h$  je konečná konštanta, čo dokazuje ohraničenosť funkcie  $\hat{q}(t)$ . □

# Kapitola 5

## Vlastnosti AVaR stratégie

V tejto časti popíšeme základné vlastnosti a dynamiku odvodenej investičnej stratégie, v závislosti od času a hodnoty stavovej premennej  $\xi_t$ . S použitím výsledkov numerických simulácií vykreslíme a popíšeme štandardné priebehy výplatných funkcií v čase investičného horizontu a v časoch pred ním. Popíšeme tiež dynamiku investičnej stratégie reprezentovanej procesom  $\hat{q}(t)$ , ktorý vyjadruje relatívnu expozíciu v rizikových aktívach voči nezaistenému portfóliu. V posledných častiach kapitoly vykonáme tiež porovnávaciu analýzu so stratégiami VaR-RM a LEL-RM, definovanými v práci [6]. Porovnávať budeme charakter simulovaných výplatných funkcií, dynamiku stratégií  $\hat{q}(t)$ ,  $q^{VaR}(t)$  a  $q^{LEL}(t)$  a tiež generované pravdepodobnostné rozdelenia hodnoty portfólií v čase investičného horizontu.

### 5.1 Nastavenia trhu

Trhové podmienky a preferencie investorov sme v tejto časti simulovali nastavením voľných parametrov, ako je uvedené v Tabuľke 5.1. Pre tieto nastavenia viedlo riešenie úlohy (4.15) k hodnote

$$\hat{c} = 0,129.$$

V zmysle Vety 13 je táto hodnota rovná hodnote Value-at-Risk portfólia v čase  $T$ , t.j. pravdepodobnosť, že hodnota portfólia klesne pod hranicu  $W_0 - \hat{c}$  je  $\alpha \cdot 100\%$ . Pre použité nastavenia je na hladine významnosti 5% hranica na úrovni 87,1% z hodnoty  $W_0$ .

Tabuľka 5.1: Nastavenie parametrov

Popis parametra	Označenie	Hodnota
investičný horizont	$T$	1
bezriziková úroková miera	$r$	0,03
koef. súvisiaci so Sharpeovým pomerom	$\ \kappa\ $	0,4
hladina významnosti	$\alpha$	0,05
ohraničenie na cenu poistenia	$\delta$	0,15
koeficient vyjadrujúci rizikové preferencie	$p$	-1,5
počiatočná hodnota investície	$W_0$	1

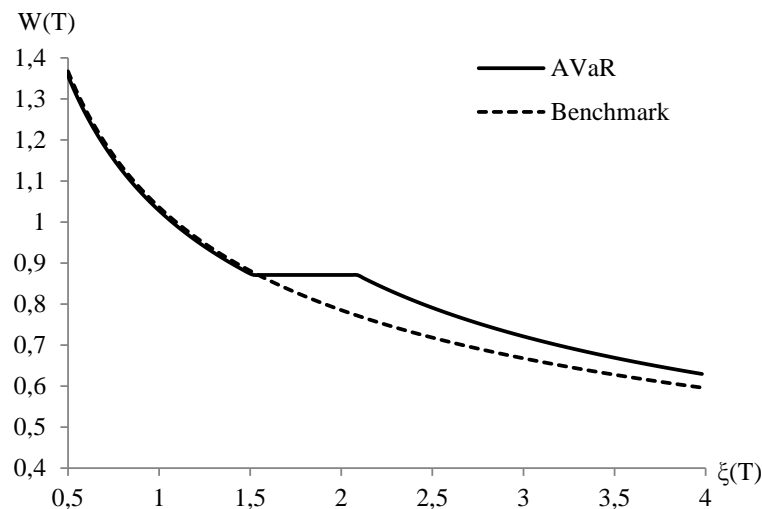


Podobne ako v predošlých častiach sme predpokladali, že preferencie investora sú dobre charakterizované izoelastickou funkciou užitočnosti definovanou v (2.7). Pripomeňme, že parameter  $p$  v zvolenej funkcii užitočnosti vyjadruje postoj investora k riziku a v zmysle vzťahu (2.6) platí, že koeficient relatívnej averzie k riziku je pre investora rovný  $\alpha_r = 1 - p = 2,5$ .

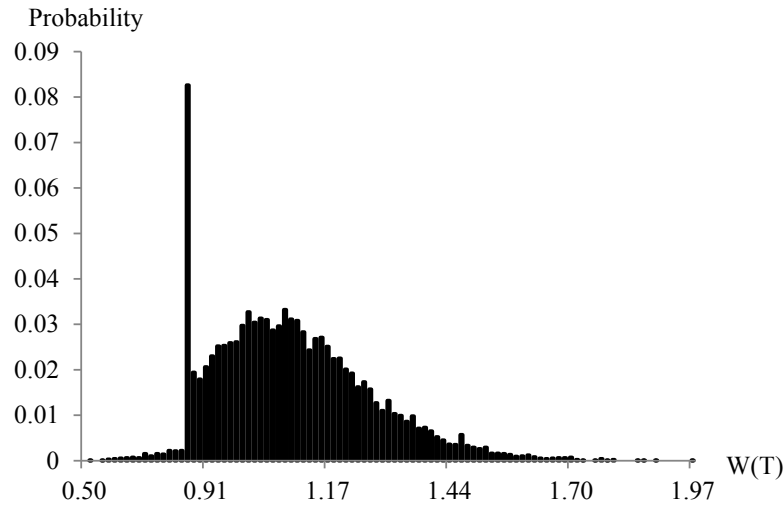
## 5.2 Hodnota portfólia v čase $T$

Štandardné nastavenia exogénnych parametrov pre úlohu (4.4) vedú k uplatneniu rizikového ohraničenia, v dôsledku čoho pozorujeme odlišný priebeh výplatnej funkcie portfólia na troch rôznych intervaloch hodnôt stavovej premennej  $\xi_T$ . Intervaly sú oddelené hraničnými bodmi  $\underline{\xi}$  a  $\bar{\xi}$ , definovanými v (4.10) a (4.11). Ak sa trh vyvíja pozitívne, stavová premenná  $\xi_T$  nadobúda hodnoty na intervale  $[0, \underline{\xi})$  a výplatná funkcia AVaR portfólia má podobný priebeh ako nezaistené portfólio. V dôsledku „obstarania“ zaistenia, ktoré v dobrých stavoch nebude uplatnené, nadobúda AVaR portfólio na celom intervale nižšie hodnoty ako nezaistené portfólio.

V prípadoch, keď stavová premenná nadobúda hodnoty na intervale  $[\underline{\xi}, \bar{\xi})$ , hovoríme, že portfólio sa nachádza v tzv. „prechodných“ stavoch. Hodnota AVaR portfólia je na tomto intervale plne zaistená na hodnote  $W_0 - \hat{c}$ , v dôsledku čoho AVaR portfólio nadobúda na väčšej časti intervalu vyššie hodnoty ako nezaistené portfólio. V najhorších stavoch nadobúda stavová premenná hodnoty na intervale  $[\bar{\xi}, \infty)$ . S rastúcou hodnotou  $\xi_T$  klesá efekt zaistenia hodnoty portfólia, v dôsledku čoho cieľová hodnota klesá smerom k hodnote nezaisteného portfólia. Tento jav je dôsledkom vysokej ceny zaistenia v najhorších stavoch, kedy by zakúpenie úplného zaistenia nebolo optimálne (Obr. 5.1).



Obr. 5.1: Výplatné funkcie optimálneho AVaR a nezaisteného portfólia v čase  $T$ , znázornené ako funkcie stavovej premennej  $\xi_T$ .



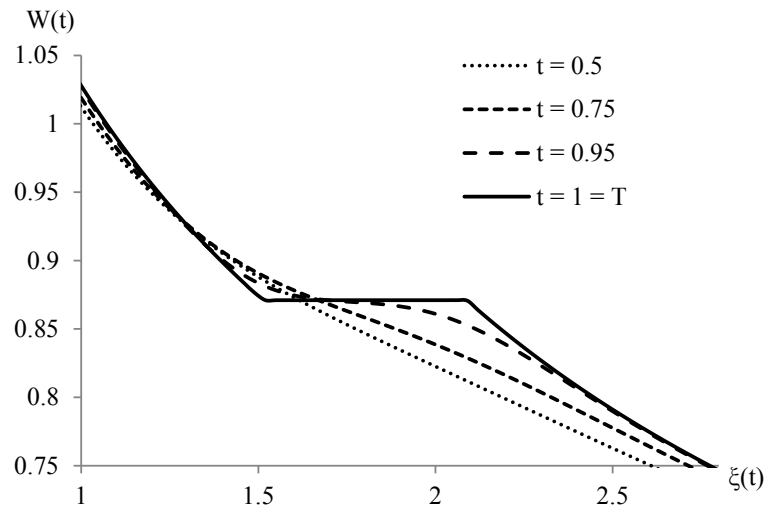
Obr. 5.2: Simulované pravdepodobnostné rozdelenie hodnoty optimálneho AVaR portfólia v čase  $T$ , pre hodnoty parametrov uvedené v Tab. 5.1. Zostrojené na základe 10000 simulácií.

S využitím predpokladu o rozdelení stavovej premennej  $\ln \xi_T$  definovanom v (4.18) môžeme simulovať pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej premennej  $\hat{W}_T(\hat{c})$ . Ako dôsledok procesu zaistovania pozorujeme *modifikované* rozdelenie hodnoty portfólia v čase  $T$ . Tvar histogramu naznačuje oblasť zníženej pravdepodobnosti v tzv. ľavom chvoste rozdelenia, t.j. pravdepodobnosť dosiahnutia najvýznamnejších strát AVaR portfólia je *nížšia* ako v prípade nezaisteného portfólia (Obr. 5.2).

### 5.3 Hodnota portfólia a investičná stratégia v čase $t < T$

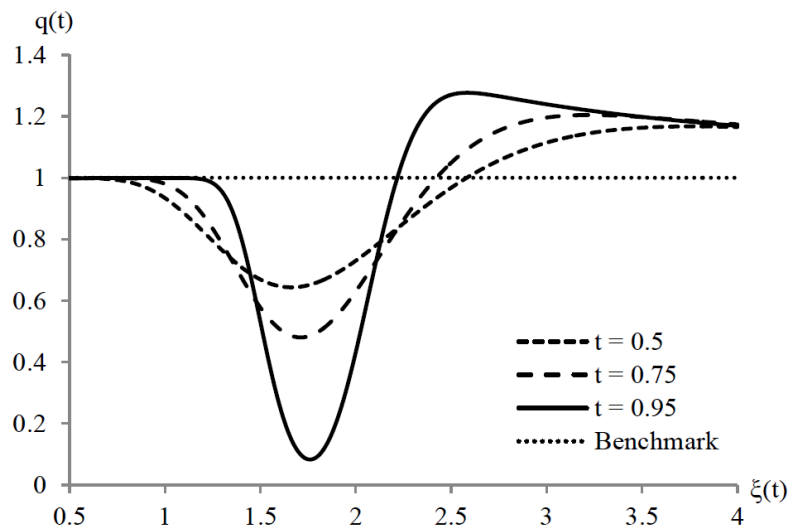
Hodnotu AVaR portfólia v časoch pred investičným horizontom, danú vzťahom (4.20), môžeme taktiež znázorniť ako výplatnú funkciu, v závislosti od hodnoty stavovej premennej  $\xi_t$  (Obr. 5.3). V časoch dostatočne vzdialených od  $T$  sa výplatná funkcia tvarom príliš nelíši od výplatnej funkcie nezaisteného portfólia. Stratégia predpokladá, že do investičného horizontu má portfólio stále dostatočne dlhý čas na to, aby sa jeho hodnota zvýšila nad zaistenú úroveň aj bez zmeny výplatného diagramu. Ako sa čas blíži k investičnému horizontu, výplatná funkcia sa tvarom začína približovať k optimálnej výplatnej funkcii v čase  $T$ . Konvergenciu výplatnej funkcie k  $\hat{W}_T(\hat{c})$  považujeme za dôkaz vnútornej konzistencie odvodeného riešenia s riešením úlohy (4.4).

Dynamika náhodnej premennej  $\hat{q}(t)$  pre rôzne hodnoty stavovej premennej  $\xi_t$  je v rôznych časoch znázornená na Obr. 5.4. V dobrých stavoch je expozícia v rizikových aktívach AVaR portfólia podobná expozícii nezaisteného portfólia ( $\hat{q}(t) \approx 1$ ).



Obr. 5.3: Výplatné funkcie optimálneho AVaR portfólia v časoch  $t = \{0,5; 0,75; 0,95\}$ , znázornené ako funkcie stavovej premennej  $\xi_t$ .

Pri zvyšovaní stavovej premennej AVaR investor postupne zatvára pozície v rizikových aktívach s cieľom udržať hodnotu portfólia nad zaistenou hodnotou. V najhorších stavoch pozorujeme efekt tzv. *pákovania* pozície v rizikových aktívach ( $\hat{q}(t) > 1$ ),



Obr. 5.4: Dynamika relatívnej expozície v rizikových aktívach optimálneho AVaR portfólia  $\hat{q}(t)$  v časoch  $t = \{0,5; 0,75; 0,95\}$ , znázornené ako funkcie stavovej premennej  $\xi_t$ .

t.j. investor si na trhu požičiava dodatočné zdroje otvorením krátkej pozície v bezrizikových aktívach a relatívne veľkej dlhej pozície v rizikových aktívach. Cieľom je snaha o zvýšenie hodnoty portfólia nad požadovanú hranicu, s využitím aj menšieho rastu cien.

Pre časy dostatočne vzdialené od investičného horizontu, sú zásahy AVaR stratégie relatívne malé. Ako sa však čas blíži k  $T$ , stratégia reaguje na nové trhové podmienky pomerne razantným prevažovaním portfólia. Takáto vlastnosť by mohla pri niektorých stratégiách spôsobovať problémy pre časy  $t \rightarrow T$ , kedy by sa relatívna expozícia v rizikových aktívach mohla za určitých podmienok limitne blížiť k  $+\infty$ . Pre AVaR stratégiu sa uvedeným problémom zaoberá Veta 18, v ktorej je preukázané, že relatívna expozícia v rizikových aktívach  $\hat{q}(t)$  je pre optimálne AVaR portfóliá za každých okolností ohraničená.

## 5.4 Vplyv trhových parametrov na tvar výplatnej funkcie

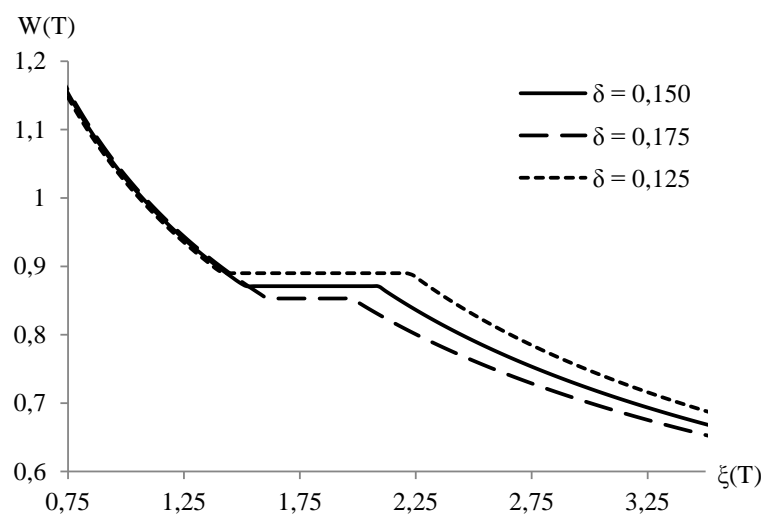
Ako bolo spomenuté v skorších častiach, výplatná funkcia  $\hat{W}_T(\hat{c})$  vykazuje rozdielny priebeh na troch disjunktných intervaloch hodnôt stavovej premennej  $\xi_T$ . Rôzne nastavenia exogénnych trhových parametrov a preferencií investora (viď Tabuľka 5.1) implikujú rozdielne tvary výplatnej funkcie. Z definícií jednotlivých parametrov modelu a z výsledkov simulácií sme odvodili základné závislosti priebehu výplatnej funkcie od hodnôt parametrov. Pozorované závislosti sa dajú schematicky definovať

$$\begin{array}{l} \delta \nearrow \implies |\bar{\xi} - \underline{\xi}| \searrow \quad \text{a} \quad W_0 - \hat{c} \searrow \\ \alpha \nearrow \implies \bar{\xi} \searrow \quad \implies |\bar{\xi} - \underline{\xi}| \searrow. \end{array} \quad (5.1)$$

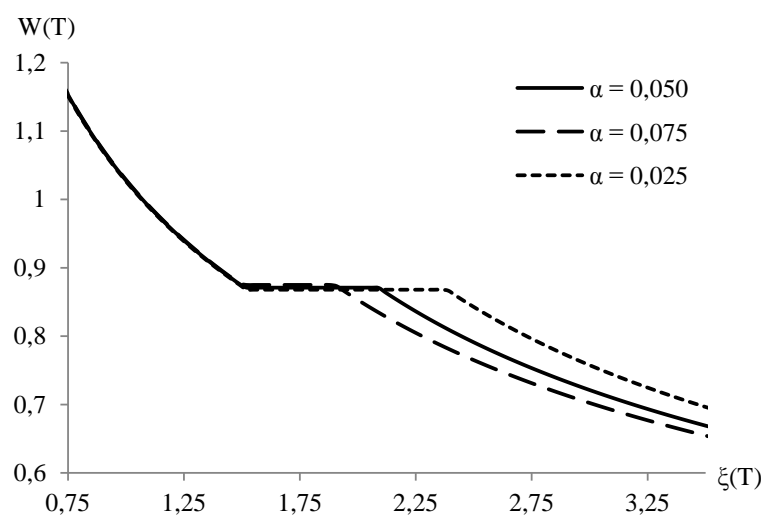
Základný rozdiel, ktorý môžeme porovnávaním viacerých výplatných diagramov AVaR portfólií  $\hat{W}_T(\hat{c})$  pozorovať, je v hodnote portfólia na intervale prechodných stavov, t.j.  $\xi_T \in [\underline{\xi}, \bar{\xi}]$  a tiež v šírke tohto intervalu, na ktorom funkcia vykazuje konštantný priebeh na úrovni  $W_0 - \hat{c}$ . Aj keď je hodnota  $W_0 - \hat{c}$  daná implicitne riešením úlohy (4.15), investor ju môže nepriamo zvyšovať, alebo znižovať zmenou parametra  $\delta$ , definujúceho limit pre rizikové ohraničenie. Taktiež existuje priama závislosť medzi hodnotou parametra  $\alpha$  a šírkou intervalu prechodných stavov. S využitím vyššie uvedených závislostí môže investor jednoducho upravovať priebeh výplatnej funkcie AVaR portfólia na požadovaný tvar, vrátane špeciálnych prípadov nezaisteného portfólia, prípadne tzv. plne zaisteného portfólia (viď napr. stratégiu OBPI v časti 2.3). Vplyv parametrov  $\alpha$  a  $\delta$  na tvar výplatnej funkcie je simulovaný na Obr. 5.5 a 5.6.

## 5.5 Porovnanie so stratégiami VaR-RM a LEL-RM

V tejto časti analyzujeme výsledky porovnania základných vlastností predstavenej stratégie so stratégiami VaR-RM a LEL-RM, definovanými v práci [6].



Obr. 5.5: Priebek výplatnej funkcie AVaR portfólia pre rôzne nastavenia parametra  $\delta$ .



Obr. 5.6: Priebek výplatnej funkcie AVaR portfólia pre rôzne nastavenia parametra  $\alpha$ .

### 5.5.1 Parametrizácia modelov

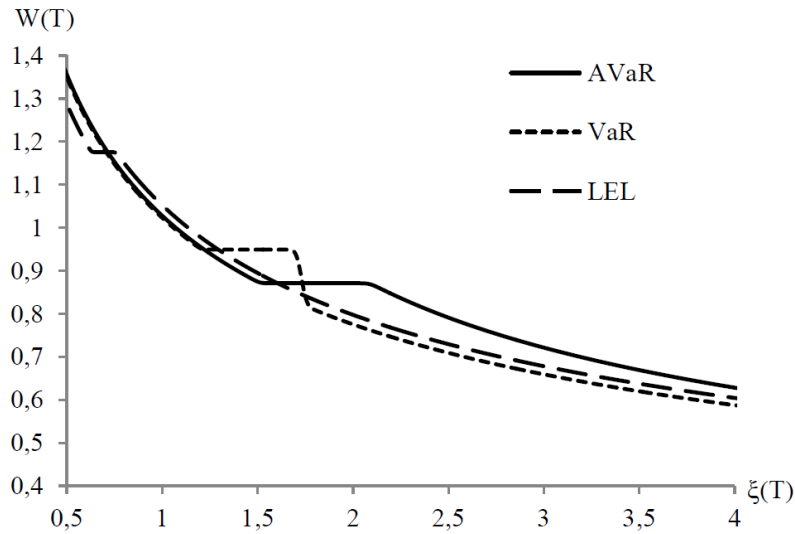
Nakoľko uvedené stratégie pracujú s odlišnou množinou exogénnych parametrov, pre vzájomné porovnanie je potrebné definovať kritérium, ktoré by viedlo k porovnateľným nastaveniam všetkých troch modelov. Pre tento účel sme zvolili nasledovný prístup:

1. spoločné parametre  $T$ ,  $r$ ,  $\|\kappa\|$ ,  $\alpha$ ,  $p$ ,  $W_0$ , definujúce investičný horizont, vlastnosti trhu, parametre súvisiace s averziou k riziku a počiatočnú hodnotu portfólia sme pre oba modely nastavili podľa Tabuľky 5.1,
2. parameter  $\delta$ , špecifický pre AVaR portfólio sme ponechali na hodnote podľa Tabuľky 5.1 a parameter LEL-RM stratégie,  $\epsilon$ , sme nastavili na rovnakú hodnotu,
3. parameter  $\underline{W}$ , špecifický pre VaR-RM a LEL-RM portfóliá sme nastavili tak, aby všetky porovnávané portfóliá viedli k rovnakým *určitostným ekvivalentom* (viď časť 2.1.2).

Vyššie popísaná procedúra viedla k nastaveniu parametra  $\underline{W}$  pre VaR-RM model na hodnotu 0,949 a pre LEL-RM model na hodnotu 1,176. Takto definované nastavenia viedli u všetkých troch portfólií k určitostnému ekvivalentu na úrovni  $C = 1,064$ . Za povšimnutie stojí fakt, že LEL-RM investor si pre dosiahnutie rovnakého určitostného ekvivalentu portfólia ako zvyšné dve stratégie, zvolil ako jediný hodnotu  $\underline{W}$  nad počiatočnou hodnotou svojho portfólia ( $W_0 = 1$ ). Uvedená skutočnosť je dôsledkom nastavenia maximálnej ceny zaistenia  $\epsilon$  na pomerne vysokú úroveň pre LEL-RM investora. Pripomeňme, že LEL-RM investor, meria cenu zaistenia portfólia ako cenu predajnej opcie európskeho typu, ktorá približne zodpovedá očakávanej hodnote výnosu pre hodnoty portfólia pod realizačnou cenou, zatiaľ čo AVaR a VaR-RM investori vyjadrujú cenu zaistenia ako relatívne extrémne kvantily rozdelenia výnosov portfólií. Je zrejmé, že zvolený limit  $\epsilon$  je pre LEL-RM portfólio relatívne vysoký, čo mu umožní voliť garantovanú hranicu  $\underline{W}$  na vysokej úrovni (cena európskej predajnej opcie je rastúcou funkciou podľa realizačnej ceny opcie, v tomto prípade ekvivalentnej hodnote  $\underline{W}$ , viď napr. [48]).

### 5.5.2 Výplatné funkcie stratégií

Na Obr. 5.7 je znázornený priebeh výplatných funkcií všetkých troch portfólií v čase  $T$ . Základným odlišovacím prvkom u všetkých troch výplatných funkcií je hodnota  $\underline{W}$ , ktorú zvolili VaR-RM aj LEL-RM investori na vyššej úrovni, ako je hodnota  $W_0 - \hat{c}$  implicitne daná riešením úlohy AVaR investora. Taktiež pozorujeme, že oblasť prechodných stavov je výrazne užšia pre LEL-RM portfólio a taktiež pre VaR-RM portfólio, t.j. LEL-RM a VaR-RM investori volia úplné zaistenie skôr ako AVaR investor a zároveň, v prípade pokračujúceho prepadu trhov, aj skôr túto stratégiu opúšťajú. AVaR investor sa snaží o úplné zaistenie na širšom intervale a plynule prechádza k čiastočnému zaisteniu, pričom v najhorších prípadoch volí *vyššiu* hodnotu portfólia ako VaR-RM a LEL-RM investori.



Obr. 5.7: Výplatné funkcie optimálneho AVaR, VaR-RM a LEL-RM portfólia v čase  $T$ , znázornené ako funkcie stavovej premennej  $\xi_T$ .

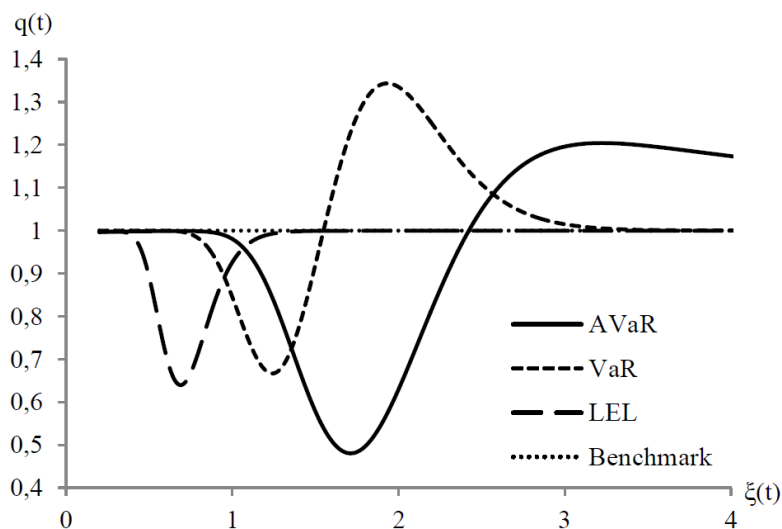
### 5.5.3 Relatívna expozícia v rizikových aktívach

Relatívne expozície v rizikových aktívach  $\hat{q}(t)$ ,  $q^{VaR}(t)$  a  $q^{LEL}(t)$  v čase  $t = 0,75$  sú znázornené na Obr. 5.8. V dobrých stavoch volia všetci porovnávaní investori relatívne podobné expozície v rizikových aktívach ako nezaistený investor. Ak sa trh prestane vyvíjať dobre a portfóliá sa dostávajú do prechodných stavov, všetci investori v reakcii na vývoj trhu zatvárajú pozície v rizikových aktívach, s cieľom udržať hodnoty portfólií nad požadovanou úrovňou. Za povšimnutie stojí fakt, že každé z portfólií má definovanú vlastnú oblasť prechodných stavov. Ako prvý reaguje na zhoršenie LEL-RM investor, ako druhý VaR-RM investor a AVaR investor má oblasť prechodných stavov definovanú pre relatívne najvyššie hodnoty stavovej premennej. Zároveň je oblasť prechodných stavov pre toto portfólio najširšia.

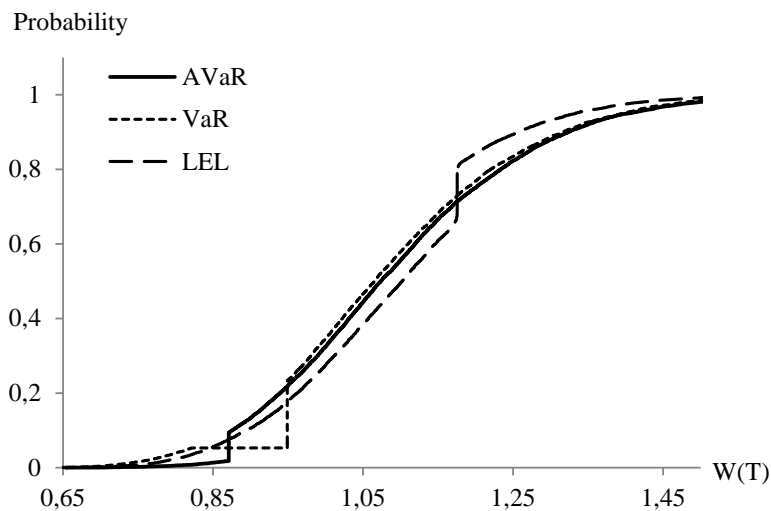
Zaujímavé je porovnanie tvaru funkcií pre najhoršie stavy, t.j.  $\xi \in [\bar{\xi}, \infty)$  (kde hodnotu  $\bar{\xi}$  si každý investor volí na inej úrovni). Zatiaľ čo LEL-RM investor sa v najhorších stavoch blíži výškou expozície v rizikových aktívach nezaistenému portfóliu zdola, VaR-RM a AVaR portfóliá v určitom bode preskakujú túto expozíciu, t.j. snažia sa zvýšením pákového efektu zvýšiť hodnotu portfólií nad požadovanú úroveň, a pre ďalšie zvyšovanie stavovej premennej  $\xi_t$  konvergujú k nezaistenému portfóliu zhora (Obr. 5.8).

### 5.5.4 Pravdepodobnostné rozdelenie hodnoty portfólií

Simulovaním rozdelenia náhodnej premennej  $\xi_T$  odvodeného zo vzťahu (4.18) môžeme pre dané parametre zostrojiť empirické pravdepodobnostné rozdelenia hodnoty jednotlivých portfólií v čase  $T$ . Na Obr. 5.9 sú znázornené kumulatívne distribučné funkcie AVaR, VaR-RM a LEL-RM portfólií na celom rozsahu simulovaných hodnôt



Obr. 5.8: Relatívna expozícia v rizikových aktívach AVaR, VaR-RM a LEL-RM portfólia v čase  $t = 0,75$ , znázornené ako funkcie stavovej premennej  $\xi_t$ .



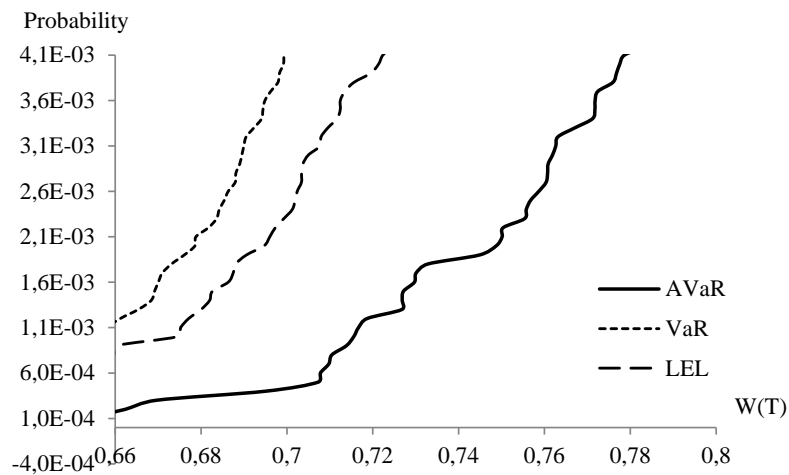
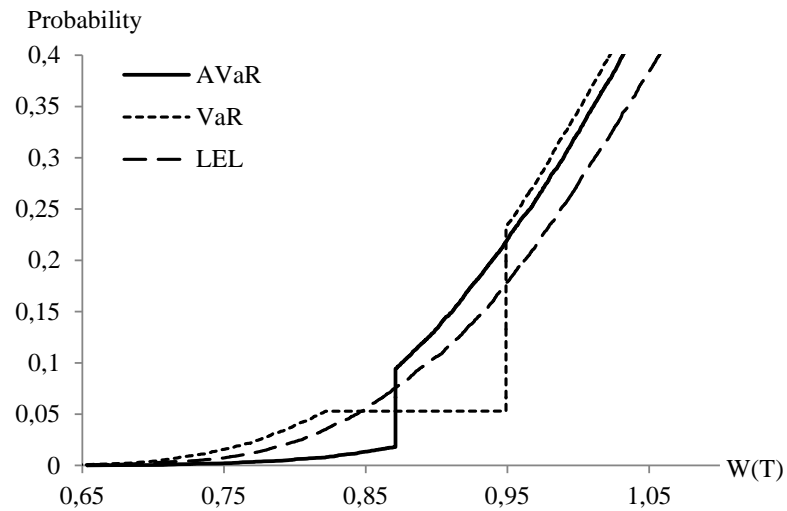
Obr. 5.9: Simulované kumulatívne distribučné funkcie hodnoty AVaR, VaR-RM a LEL-RM portfólií v čase  $T$ .

$\xi_T$  pre 10000 simulácií. Priebeh distribučných funkcií naznačuje, že stratégia AVaR v danej simulácii *dominuje* stratégie VaR-RM a LEL-RM v oblasti najhorších (ľavá časť grafu) a tiež najlepších stavov (pravá časť grafu). V centrálnej časti grafu naopak AVaR stratégií dominujú LEL-RM a na relatívne úzkom intervale VaR-RM.

Na Obr. 5.10 je znázornená zväčšená oblasť grafu 5.9, zodpovedajúca najväč-



ším stratám na hodnote portfólií. Z grafov vyplýva, že predstavená AVaR stratégia môže za určitých okolností viesť k portfóliám, ktoré budú dosahovať najvýznamnejšie straty na hodnote s *menšou* pravdepodobnosťou, ako portfóliá riadené stratégiou VaR-RM a LEL-RM.



Obr. 5.10: Simulované kumulatívne distribučné funkcie hodnoty portfólií v čase  $T$ : zväčšená oblasť zodpovedajúca najväčším stratám na hodnote portfólií.

# Kapitola 6

## Prípadová štúdia

Na rozdiel od predošlých kapitol, v ktorých sme cenový vývoj aktív simulovali geometrickým Brownovým pohybom, v tejto časti preskúmame vlastnosti AVaR stratégie na ilustratívnom portfóliu zostavenom z reálnych aktív. Naším cieľom je demonštrovať použitie stratégie v reálnom prostredí a skúmať jej vlastnosti v podmienkach, kedy platnosť predpokladov, s ktorými pracujú predstavené modely, nemôže byť zaručená. Analyzujeme najmä vývoj hodnoty portfólia v čase a dynamiku stratégie reprezentovanú procesmi  $\hat{\theta}(t)$  a  $\hat{q}(t)$ , ktoré vyjadrujú absolútnu a relatívnu (voči nezaistenému portfóliu) veľkosť otvorenej pozície v jednotlivých rizikových aktívach. Výsledky porovnávame s nezaisteným portfóliom, ktoré použijeme ako referenčný index pre stratégiu AVaR.

### 6.1 Parametre portfólia

#### 6.1.1 Výber aktív

Portfólio sme zostavili z piatich vysoko likvidných akciových titulov obchodovaných na americkom kapitálovom trhu. Vybrali sme akcie spoločností, ktoré mali ku dňu 30.11.2013 najväčšiu váhu<sup>1</sup> v akciovom indexe *Dow Jones Industrial Average* (skr. DJI). Vybrané spoločnosti patria k najviac kapitalizovaným na americkom akciovom trhu. V súčte sa na hodnote indexu DJI podieľajú približne 30% váhou a vo všeobecnosti sú považované za likvidné cenné papiere. Vybrané akciové tituly, ich podiel na hodnote indexu v čase výberu a prepočítané počiatočné váhy v portfóliách uvádzame v Tabuľke 6.1. Vývoj hodnoty aktív a základné charakteristiky denných zatváracích cien v období posledných rokov uvádzame na Obr. 6.1 a v Tabuľke 6.2.

#### 6.1.2 Časové obdobie

Na základe vývoja historickej volatility indexu DJI sme pre simuláciu zvolili obdobie rokov 2010 až 2013<sup>2</sup>. Na Obr. 6.2 pozorujeme do konca roku 2009 kontinuálny pokles historickej volatility indexu DJI, čo možno považovať za dôsledok tzv. „finančnej

---

<sup>1</sup>Po vylúčení akcií spoločnosti VISA, kvôli nedostatočnej dĺžke časového radu.

<sup>2</sup>Koniec štvrtého obdobia je ku dňu 31.10.2013.

Tabuľka 6.1: Zoznam akcií v simulovaných portfóliách, ich zastúpenie v indexe DJI ku dňu 30.11.2013 a prepočítané počiatkové váhy portfólií.

Skratka	Názov spoločnosti	Váha v indexe DJI	Počiatková váha
IBM	Intl Business Machines Corp.	7,86%	26,38%
GS	Goldman Sachs Group Inc.	6,72%	22,55%
CVX	Chevron Corp.	5,16%	17,32%
MMM	3M Co.	5,07%	17,01%
BA	Boeing Co.	4,99%	16,74%
	SPOLU	29,80%	100,00%

Tabuľka 6.2: Parametre rozdelenia denných zatváracích cien vybraných aktív v období rokov 2010 - 10/2013.

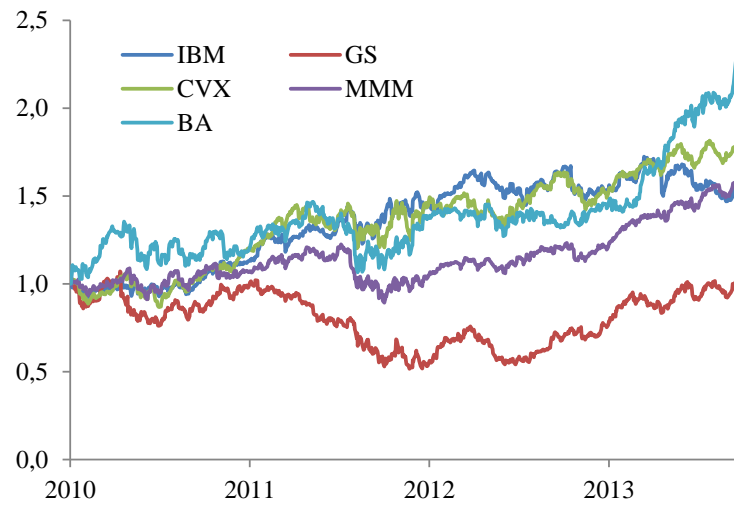
Skratka	Priemer	Volatilita	1. kvartil	Medián	3. kvartil
IBM	167,88	30,12	138,67	177,84	192,42
GS	133,05	24,01	113,04	137,96	153,51
CVX	95,06	17,86	79,25	97,56	107,76
MMM	87,12	12,35	77,99	84,32	90,74
BA	71,79	13,56	62,98	69,15	73,09

krízy“ z roku 2008. Pre simuláciu sme zvolili obdobie po stabilizovaní volatILITY až na dnešné úrovne.

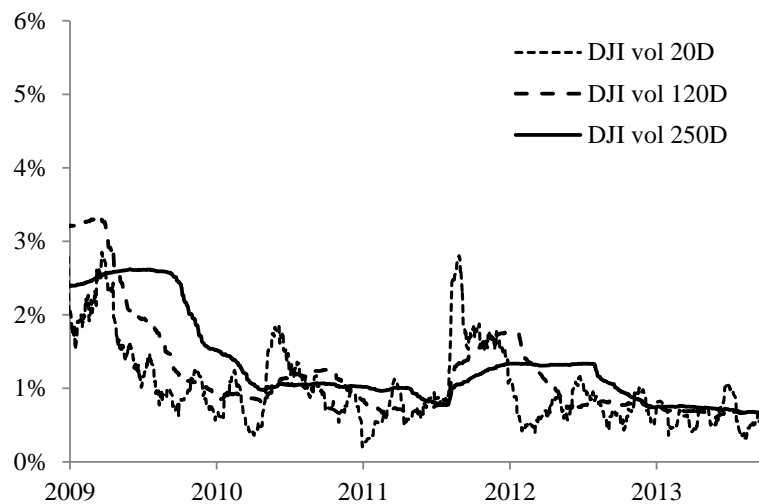
Nakoľko vývoj aktív vykazuje v každom zo sledovaných rokov mierne odlišné vlastnosti (trend, volatilita, očakávania, a.i.), vlastnosti a priebeh stratégií vyhodnotíme v každom roku nezávisle, t.j. na začiatku každého sledovaného obdobia nastavíme investičný horizont stratégie na čas  $T = 1,08$ , čo zodpovedá časovému obdobiu 1 rok a 1 mesiac. Takéto nastavenie okrem iného umožní investorovi do určitej miery kontrolovať rizikový profil portfólia na konci každého účtovného obdobia.

### 6.1.3 Preferencie vo vzťahu k riziku

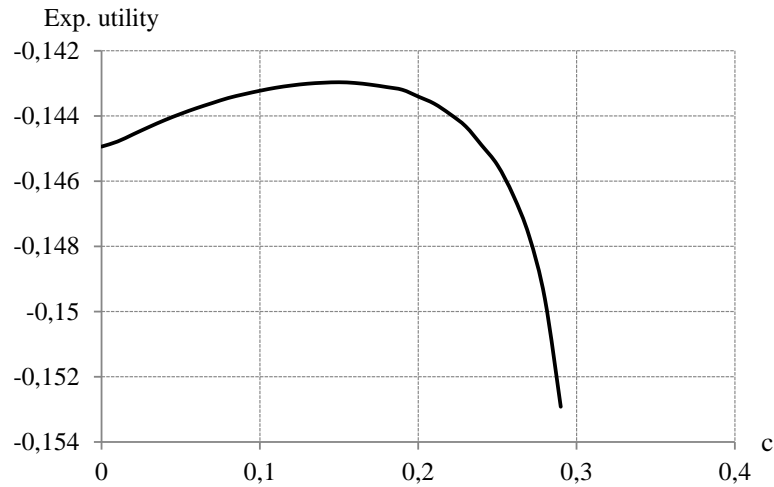
Za účelom demonštrácie efektu zaistenia AVaR portfólia, sme v tejto ilustratívnej štúdií ponechali hodnotu parametra  $p$  ako v predošlých častiach, na úrovni  $p = -1,5$ , čo zodpovedá relatívne nízkej averzii k riziku  $1-p = 2,5$ . V dôsledku toho bude investor voliť portfóliá s vyšším pákovým efektom, t.j. portfólio bude citlivejšie na zmeny cien podkladových aktív. Ostatné parametre, vyjadrujúce postoj investora k riziku sme nastavili na hodnoty  $\alpha = 0,01$  a  $\delta = 0,30$ . Pripomeňme, že  $\alpha$  vyjadruje hladinu významnosti, ktorá definuje vlastnosti rizikového ohraničenia a  $\delta W_0$  vyjadruje horný limit definovaný pre veľkosť rizikovej miery AVaR. To znamená, že investor požaduje, aby očakávaná hodnota 1% najvýznamnejších strát portfólia v čase  $T$ , bola menšia ako 30% z počiatkovej hodnoty investície.



Obr. 6.1: Index vývoja cien vybraných akcií v období 2010-10/2013 (báza 3.1.2010).



Obr. 6.2: Vývoj plávajúcej volatility denných logaritmických výnosov DJI v období 2009-2013, pre veľkosti okien 20, 120 a 250 obchodných dní.



Obr. 6.3: Kalibrácia modelu pre rok 2010: priebeh očakávanej užitočnosti hodnoty AVaR portfólia v čase  $T$  pre rôzne hodnoty parametra  $c$ .

#### 6.1.4 Kalibrácia modelu

V predošlých analýzach sme vývoj aktív simulovali geometrickým Brownovým pohybom, ktorého parametre boli známe. V tejto analýze nepoznáme skutočné parametre trhu ani jednotlivých aktív a musíme ich odhadnúť vhodnou metódou. Na základe predošlých skúseností a dostupných informácií v čase experimentu sme pre odhad trhových parametrov zvolili nasledovnú procedúru:

1. vektor driftov  $\mu$  sme odhadli štandardným spôsobom z denných logaritmickejých výnosov aktív za obdobie posledných 252 dní ku dňu kalibrácie,
2. jednotlivé prvky kovariančnej matice  $\sigma^2$  odhadneme ako výberové kovariancie denných logaritmickejých výnosov aktív za obdobie posledných 252 dní ku dňu kalibrácie, maticu  $\sigma$  odvodíme numericky s použitím Choleskeho dekompozície,
3. bezrizikovú úrokovú mieru  $r$  určíme ako výnos 10-ročných amerických štátnych dlhopisov ku dňu kalibrácie.

Tabuľka 6.3: Odhady parametrov (okrem driftov a volatilit) pre jednotlivé obdobia.

Parameter	2010	2011	2012	2013
$r$	0,0383	0,0332	0,0196	0,0190
$\ \kappa\ $	2,24	1,03	3,31	1,89
$\bar{\xi}$	198,41	16,65	366,28	119,14
$\underline{\xi}$	7,97	3,11	57,09	5,09
$\hat{c}$	0,15	0,28	0,26	0,21

Tabuľka 6.4: Odhady driftov vybraných aktív.

Akcia	2010	2011	2012	2013
IBM	43,17	14,03	24,62	6,86
GS	70,01	-0,81	-59,34	34,41
CVX	7,56	17,76	21,65	3,11
MMM	37,86	7,48	-0,34	14,58
BA	26,76	16,85	12,92	6,60

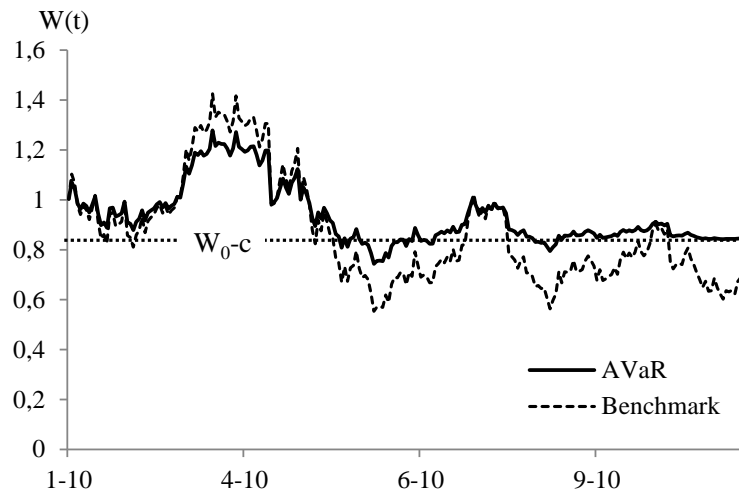
Tabuľka 6.5: Odhady kovariančných matíc po rozklade Choleskeho dekompozíciou.

Akcia	2010					2011				
IBM	27,44	35,23	16,49	16,53	17,58	17,72	11,71	13,63	13,01	17,42
GS		48,96	11,12	11,26	10,97		28,96	3,88	2,74	6,47
CVX			20,98	10,62	16,40			15,04	6,85	7,01
MMM				21,81	8,63				14,16	5,71
BA					28,63					21,19
Akcia	2012					2013				
IBM	22,48	20,85	17,54	19,06	21,46	16,33	12,13	9,57	8,25	9,23
GS		32,28	10,51	11,67	10,30		25,48	5,27	5,40	4,81
CVX			19,14	7,98	6,93			13,80	3,96	3,07
MMM				15,22	4,69				9,64	6,14
BA					17,27					13,96

Na základe vyššie uvedených odhadov vypočítame parametre koncovej výplatnej funkcie  $y_1, y_2, \xi, \bar{\xi}$  a tiež hodnotu  $\hat{c}$ , ako riešenie optimalizačnej úlohy (4.15). Úlohu riešime štandardnými numerickými metódami, ilustračný priebeh účelovej funkcie pre rôzne hodnoty parametra  $c$  je uvedený na Obr. 6.3. Parametre rekalibrujeme na začiatku každého ročného obdobia a po zvyšok obdobia predpokladáme ich konštantnosť. Hodnoty odhadnutých parametrov sú uvedené v Tabuľkách 6.3, 6.4 a 6.5.

Pre odvodenie optimálnej hodnoty portfólia a expozície v rizikových aktívach v každom čase je potrebné poznať stav, v akom sa trh nachádza. Pre výpočet uvedených veličín sme postupovali nasledovne:

- v čase  $t$  vypočítame na základe trhových cien aktuálnu hodnotu portfólia  $\hat{W}(t)$ ,
- dosadením hodnoty portfólia do vzťahu (4.20) numericky riešime implicitný vzťah pre aktuálny stav trhu  $\xi_t$ ,
- dosadením hodnôt  $\hat{W}(t)$  a  $\xi_t$  do vzťahu (4.28) dostávame optimálne rozloženie investície v rizikových aktívach v čase  $t$ , na základe ktorého vykonáme preváženie portfólia.

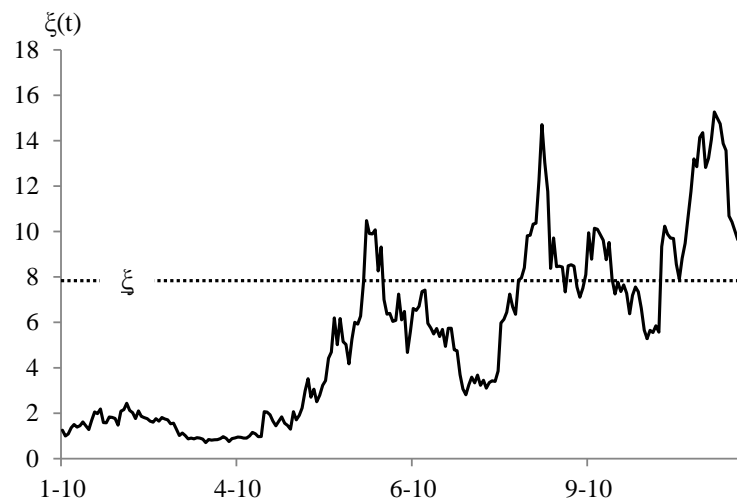


Obr. 6.4: Vývoj hodnoty AVaR a nezaisteného portfólia v roku 2010.

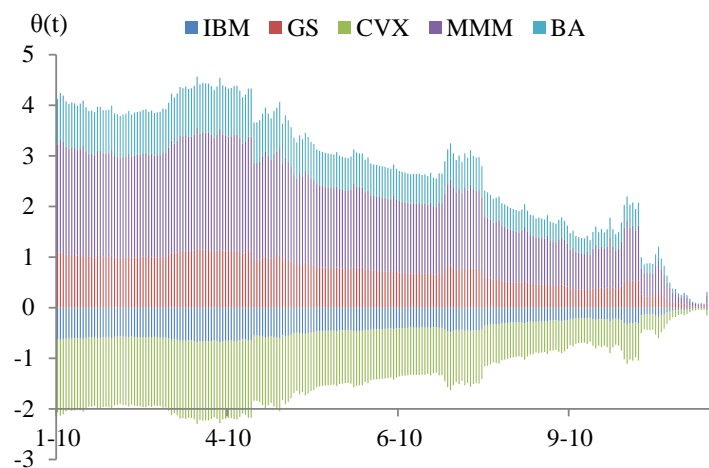
## 6.2 Výsledky a diskusia

### 6.2.1 1. obdobie

Vývoj hodnoty AVaR portfólia a taktiež nezaisteného portfólia počas roku 2010 je znázornený na Obr. 6.4. V období prvého kvartálu hodnota oboch portfólií rastie, nezaistené portfólio dosahuje o niečo vyššie výnosy ako AVaR portfólio. Tento vývoj je v súlade s predpokladom bezarbitrážneho prostredia: AVaR investor obetoval časť prostriedkov na zakúpenie zaistenia, preto musí v dobrých časoch dosahovať menší výnos ako nezaistený investor. V ďalších mesiacoch roku 2010 sa trend otáča a obe portfóliá znižujú svoju hodnotu. Hodnota AVaR portfólia sa v dôsledku zaistenia drží približne na hranici 85% z počiatočnej hodnoty portfólia, čo zodpovedá hodnote výplatnej funkcie v tzv. prechodných stavoch. Potvrďuje to aj vývoj stavovej premennej  $\xi_t$  na Obr. 6.5, ktorá sa v posledných dvoch tretinách zväčša drží medzi hraničnými hodnotami  $\underline{\xi}$  a  $\bar{\xi}$ , ktoré vymedzujú spomínané obdobie prechodných stavov. Na Obr. 6.6 sú znázornené váhy v rizikových aktívach pre AVaR stratégiu. Váhy v nezaistenom portfóliu sú konštantné počas celého obdobia, čomu sa dalo nahliadnuť už zo vzťahu (3.9). Pre zachovanie konštantných váh je taktiež potrebné neustále upravovanie pozícií, nakoľko sa aj nezaistené portfólio prevažuje vplyvom precenenia jednotlivých aktív. Súčet váh v portfóliách nemusí byť nutne rovný 1. Súčet menší ako 1 naznačuje diverzifikáciu portfólia medzi rizikové a bezrizikové aktívum. Súčet väčší ako 1 indikuje tzv. pákovanie pozície v rizikových aktívach, t.j. investor otvára krátku pozíciu v bezrizikovom aktíve (požičiava si dodatočné zdroje) a navyšuje pozície v rizikových aktívach. Z priebehu stratégie AVaR investora je zrejmé, že investor pri poklese hodnoty portfólia postupne zatvára pozície v rizikových aktívach, v dôsledku čoho znižuje pákový efekt a tým znižuje citlivosť portfólia na ďalší pokles cien (Obr. 6.7). Pozorovaný vývoj portfólia je v súlade



Obr. 6.5: Vývoj stavovej premennej  $\xi_t$  AVaR portfólia v roku 2010.



Obr. 6.6: Vývoj expozície v rizikových aktívach AVaR portfólia v roku 2010.



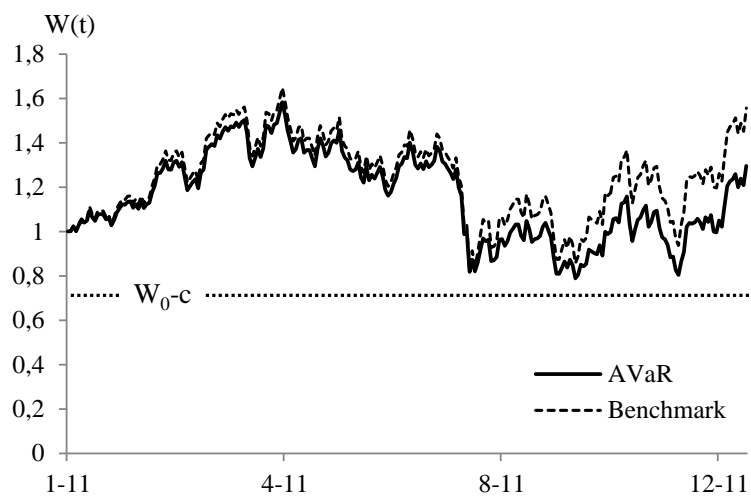


Obr. 6.7: Priebeh relatívnej expozície v rizikových aktívach AVaR portfólia v roku 2010.

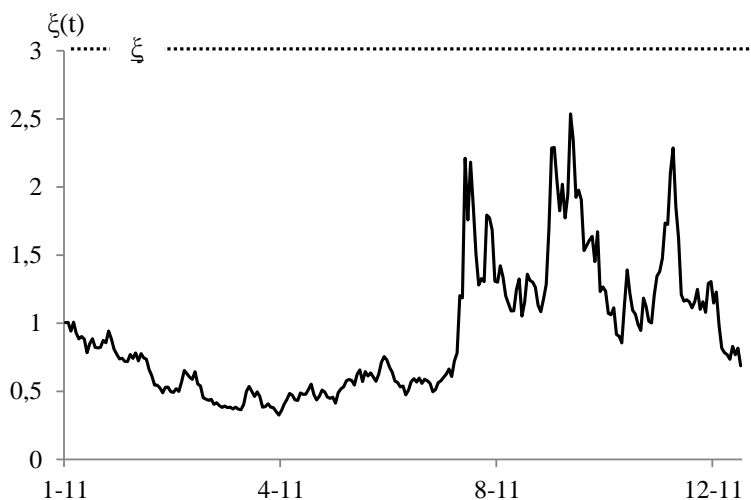
s vlastnosťami AVaR stratégie, odvodenými v predošlých častiach (viď napr. časť 5.3) a je priamym dôsledkom uplatnenia rizikového ohraničenia v definícii základnej úlohy AVaR investora.

### 6.2.2 2. obdobie

Vývoj hodnoty oboch portfólií je znázornený na Obr. 6.8. V prvej polovici roku 2011 hodnota oboch portfólií rýchlo rastie, AVaR aj nezaistené portfólio udržiavajú porovnateľné pozície. Približne v polovici roka pozorujeme prudký pokles hodnoty oboch portfólií, ktorá sa zníži relatívne blízko ku kritickej hodnote AVaR portfólia na úrovni 72% z počiatočnej hodnoty investície. AVaR stratégia v zmysle očakávaní vyhodnotí negatívne smerovanie trhu, zvýši hodnoty stavovej premennej  $\xi_t$ , ktorá sa v tomto období zdola blíži k hodnote  $\underline{\xi}$  (Obr. 6.9). V dôsledku toho pozorujeme v druhej polovici roka znižovanie pákového efektu u AVaR portfólia, čo však na tejto trajektórii spôsobuje spomalenie potenciálneho rastu portfólia na pôvodné úrovne a v dôsledku toho na konci obdobia AVaR portfólio nadobúda nižšie hodnoty ako nezaistené portfólio. Vývoj absolútnej aj relatívnej expozície v rizikových aktívach pre AVaR portfólio je znázornený na Obr. 6.10 a 6.11.



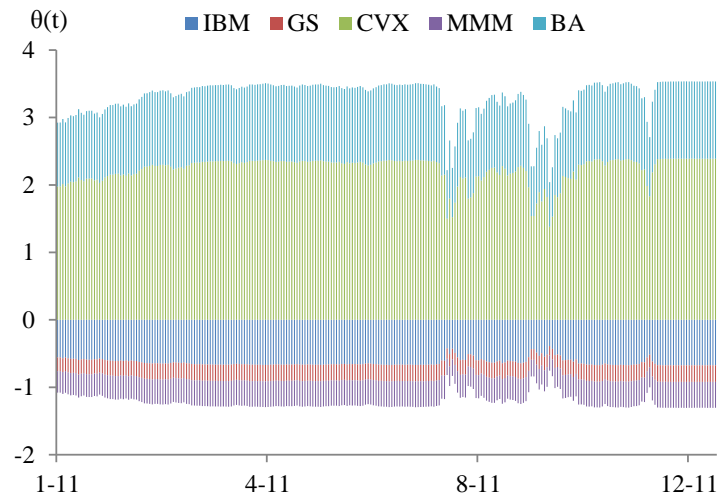
Obr. 6.8: Priebeh hodnoty AVaR a nezaisteného portfólia v roku 2011.



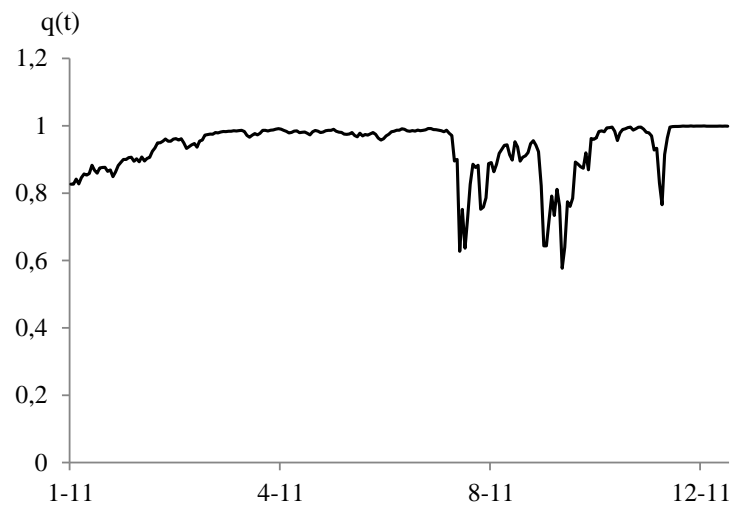
Obr. 6.9: Vývoj stavovej premennej  $\xi_t$  AVaR portfólia v roku 2011.

### 6.2.3 3. obdobie

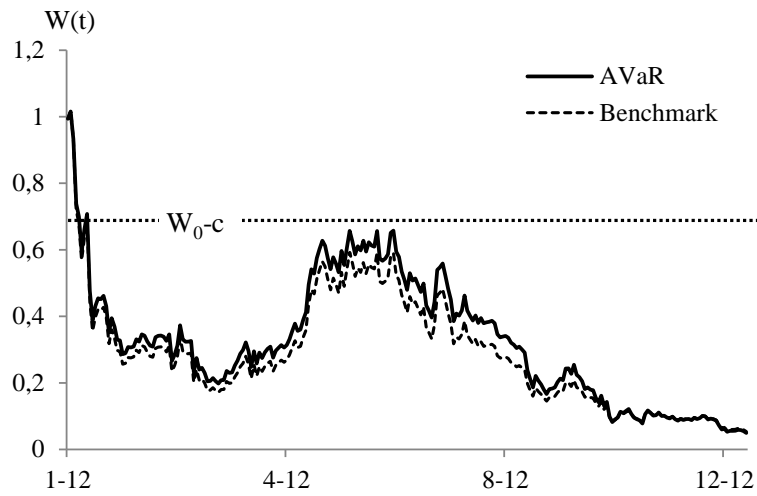
Vývoj hodnoty oboch portfólií v roku 2012 je na znázornený na Obr. 6.12. Toto obdobie je charakterizované poklesom hodnoty oboch portfólií v dôsledku otočenia trendov medzi rokmi 2011 a 2012. Nakoľko kalibrácia pracuje iba s údajmi z roku 2011, dochádza k výraznému odchýleniu očakávaného vývoja cien od skutočnosti a ani jedna zo stratégií nie je schopná zachytiť reálny trend vývoja aktív. Takejto situ-



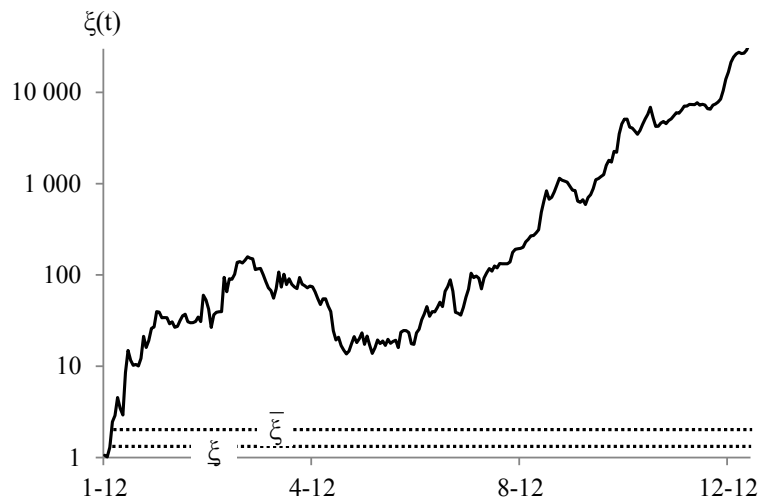
Obr. 6.10: Vývoj expozície v rizikových aktívach AVaR portfólia v roku 2011.



Obr. 6.11: Priebeh relatívnej expozície v rizikových aktívach AVaR portfólia v roku 2011.



Obr. 6.12: Priebeh hodnoty AVaR a nezaisteného portfólia v roku 2012.

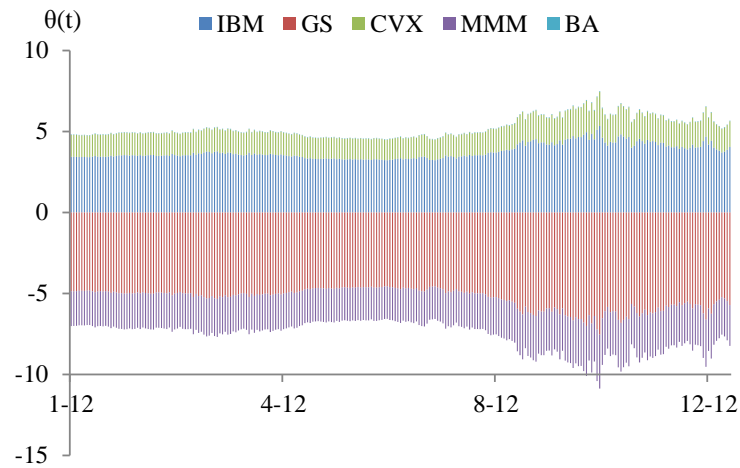


Obr. 6.13: Vývoj stavovej premennej  $\xi_t$  AVaR portfólia v roku 2012. Kvôli veľkému rozsahu hodnôt je graf zobrazený v logaritmickej škále.

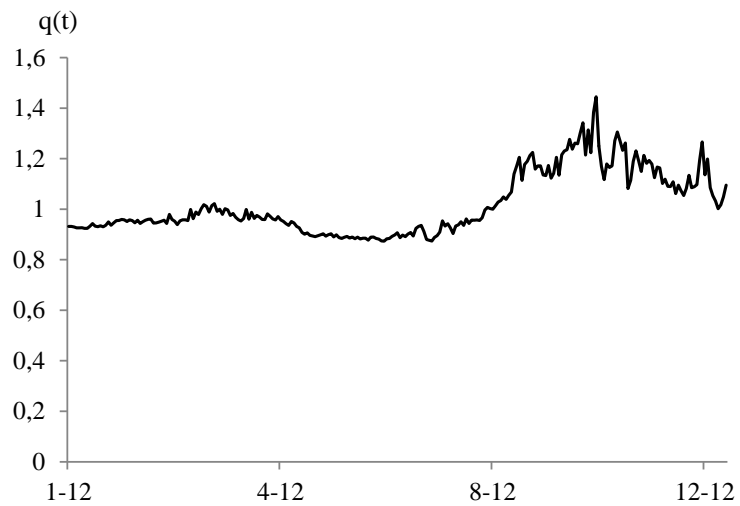
ácii sa v reálnych aplikáciách dá predísť častejšou rekalibráciou modelu. Z Obr. 6.13 vyplýva, že AVaR portfólio sa od prvých dní nachádza v oblasti najhorších stavov, t.j. nad hranicou  $\bar{\xi}$ .

V tejto oblasti sa AVaR stratégia vo vhodnej chvíli snaží o zvýšenie pákového efektu, s cieľom zvýšiť hodnotu portfólia nad požadovanú úroveň. Portfólio sa vďaka vplyvu aktívneho zaistenia drží takmer po celú dobu nad hodnotou nezaisteného

portfólia, v závere roka jeho hodnota poklesne približne na úroveň nezaisteného portfólia. Vývoj absolútnej aj relatívnej expozície v rizikových aktívach pre AVaR portfólio je znázornený na Obr. 6.14 a 6.15.



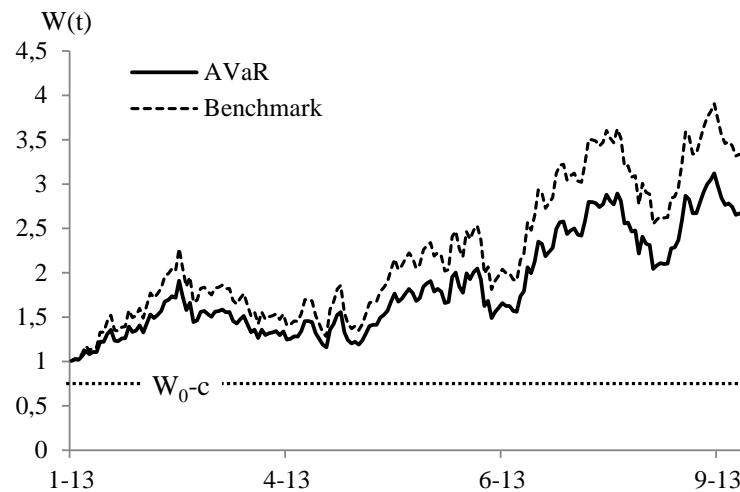
Obr. 6.14: Vývoj expozície v rizikových aktívach AVaR portfólia v roku 2012.



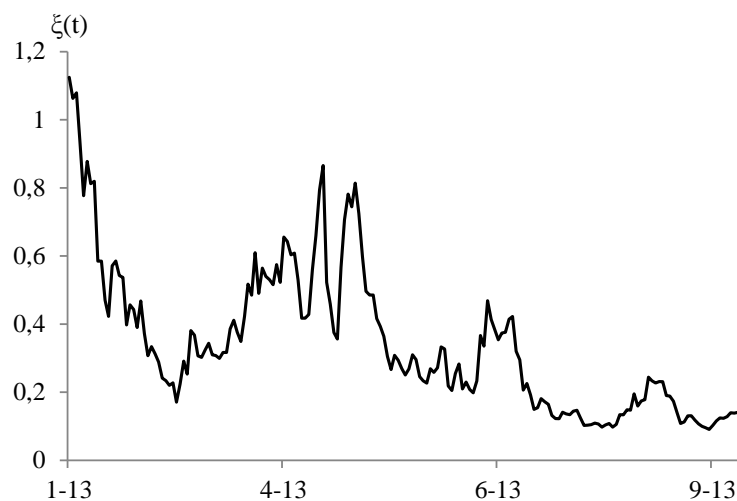
Obr. 6.15: Priebeh relatívnej expozície v rizikových aktívach AVaR portfólia v roku 2012.

#### 6.2.4 4. obdobie

Vývoj hodnoty oboch portfólií je na znázornený na Obr. 6.16. V tomto období pozorujeme rast portfólií, AVaR portfólio sa počas celého obdobia nachádza vysoko nad kritickou hodnotou 79% z počiatočnej hodnoty investície, čo potvrdzuje aj vývoj stavovej premennej  $\xi_t$  na Obr. 6.17. V dobrých stavoch sa efekt zaistenia prejavuje minimálne a AVaR portfólio sa vyvíja podobne ako nezaistené portfólio. V dôsledku



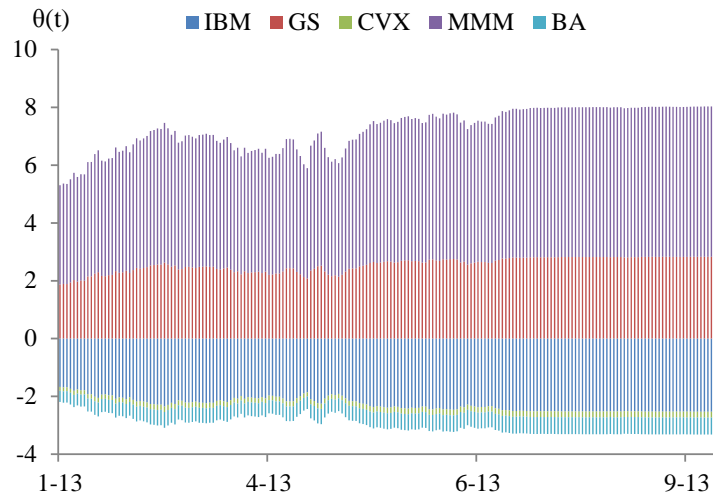
Obr. 6.16: Priebeh hodnoty AVaR a nezaisteného portfólia v roku 2013.



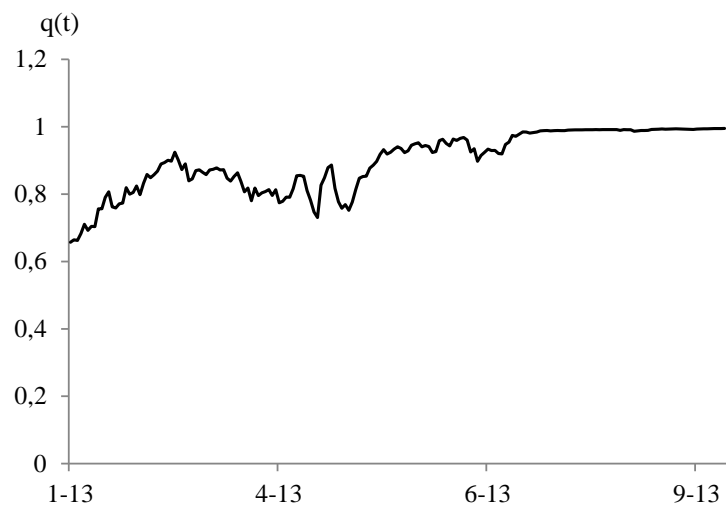
Obr. 6.17: Vývoj stavovej premennej  $\xi_t$  AVaR portfólia v roku 2013.

bezarbitrážneho prostredia je hodnota AVaR portfólia v dobrých stavoch vždy nižšia ako hodnota nezaisteného portfólia.

Na Obr. 6.18 a 6.19 je znázornený priebeh absolútnej a relatívnej expozície v rizikových aktívach AVaR portfólia. Pozorujeme, že počas celého obdobia sa expozícia AVaR portfólia výraznejšie nelíši od stratégie nezaisteného investora, čo je v súlade s vlastnosťami odvodenými v predošlých častiach.



Obr. 6.18: Vývoj expozície v rizikových aktívach AVaR portfólia v roku 2013.



Obr. 6.19: Priebeh relatívnej expozície v rizikových aktívach AVaR portfólia v roku 2013.

### 6.2.5 Vyhodnotenie

V tejto časti sme analyzovali vlastnosti AVaR stratégie pri riadení portfólia zostaveného z reálnych finančných aktív. Cieľom bolo preukázať vhodnosť použitia predstavenej stratégie v podmienkach zodpovedajúcich reálnym situáciám na finančnom trhu. Stratégiu sme aplikovali na portfólio v rokoch 2010 až 2013, pričom každé z období bolo charakteristické odlišnými trhovými podmienkami. Vo všetkých sledovaných obdobiach dosahovala AVaR stratégia výnosy porovnateľné s nezaisteným portfóliom. AVaR stratégia menila pákovanie portfólia v závislosti od vývoja trhových podmienok, čím umožňovala do istej miery kontrolovať rizikovú expozíciu portfólia v čase  $T$ . Výsledky analýzy potvrdili závery diskutované v časti 5.3 a to najmä:

- AVaR stratégia, na rozdiel od nezaisteného portfólia, reaguje na smerovanie trhu zmenou pákového efektu. Nezaistené portfólio udržiava váhy konštantné za každých podmienok,
- v dobrých stavoch zvolí AVaR stratégia podobnú expozíciu v rizikových aktívach ako nezaistené portfólio, v dôsledku čoho sa portfóliá vyvíjajú porovnateľne,
- v dobrých stavoch je hodnota AVaR portfólia menšia ako hodnota nezaisteného portfólia, čo je v súlade s predpokladom bezarbitrážneho trhového prostredia,
- v prechodných stavoch je hodnota AVaR portfólia priťahovaná k hodnote  $W_0 - \hat{c}$ , vďaka čomu môže hodnota AVaR portfólia dosahovať vyššie úrovne ako hodnota nezaisteného portfólia,
- v najhorších stavoch AVaR stratégia zvyšuje pákový efekt s cieľom zvýšiť hodnotu portfólia nad požadovanú úroveň, vďaka čomu môže hodnota AVaR portfólia prevýšiť hodnotu nezaisteného portfólia.

Vyššie uvedené závery, spolu s výsledkom o ohraničenosti stratégie AVaR portfólia v každom čase a stave naznačujú, že AVaR stratégia môže za určitých okolností efektívne konkurovať nezaistenej stratégii, na rozdiel od ktorej kontroluje rizikovú expozíciu, voči ktorej je investícia vystavená.



# Záver

V tejto práci sme analyzovali dynamické zaistené investičné stratégie, ktoré si okrem optimalizácie výnosnosti kladú za cieľ tiež kontrolu rizikovej expozície portfólia. Hlavným prínosom práce je vytvorenie dynamickej stratégie založenej na koherentnej rizikovej miere AVaR, ktorá môže za určitých podmienok viesť ku kvalitatívne lepším portfóliám, ako sú napr. zaistené portfóliá založené na rizikových mierach VaR a LEL, definované v práci [6].

Problém AVaR investora sme definovali ako úlohu maximalizácie očakávanej užitočnosti na úplnom trhu. Rizikovosť portfólia je kontrolovaná definovaním horného limitu na veľkosť rizikovej miery AVaR v konečnom investičnom horizonte. Na základe výsledkov práce [43] sme základnú úlohu AVaR investora previedli na alternatívnu úlohu, ktorá vedie za určitých okolností k rovnakému portfóliu. V alternatívnej úlohe je riziková miera AVaR reprezentovaná príbuzným funkcionálom, ktorý sa javí byť vhodnejším pre použitie v optimalizačných úlohách.

Riešením alternatívnej úlohy sme odvodili optimálnu výplatnú funkciu AVaR portfólia v čase investičného horizontu. S využitím stochastického kalkulu a teórie martingalov sme odvodili proces optimálnej hodnoty portfólia v časoch pred investičným horizontom a taktiež portfólio generujúcu dynamickú investičnú stratégiu. Priebehy výplatných funkcií a dynamiku stratégie sme analyzovali v závislosti od hodnoty stavovej premennej. Analýza vlastností optimálneho portfólia preukázala, že výplatná funkcia v každom čase vykazuje odlišný priebeh na troch oblastiach stavov, v akých sa trh nachádza. V dobrých stavoch trhu má optimálna výplatná funkcia AVaR portfólia podobný priebeh ako výplatná funkcia nezaisteného portfólia. V prechodných stavoch volí AVaR stratégia úplné zaistenie na hodnote, ktorá je implicitne daná nastavením exogénnych premenných. V najhorších stavoch trhu stratégia implikuje výplatnú funkciu, ktorá sa zvyšovaním stavovej premennej zhora blíži k výplatnej funkcii nezaisteného portfólia, vďaka čomu vykazuje AVaR portfólio menšie straty v čase investičného horizontu ako nezaistené portfólio.

Optimálna expozícia v rizikových aktívach AVaR portfólia je násobkom expozície nezaisteného portfólia, kde multiplikátor závisí od času a stavu, v akom sa trh nachádza. To umožňuje zmenou pákového efektu meniť citlivosť AVaR portfólia na zmeny cien rizikových aktív a reagovať tak na aktuálnu situáciu na trhu.

Dôležitým výsledkom práce je analýza ohraničenosti expozície v rizikových aktívach. Aj keď analýza preukázala, že AVaR stratégia môže v zlých stavoch trhu implikovať vyššie úrovne pákovania pozície ako nezaistená stratégia, veľkosť expozície v rizikových aktívach je v každom stave a čase pre každé AVaR portfólio ohraničená. Táto vlastnosť je podľa nás dôležitá pre použitie stratégie v reálnych aplikáciách riadenia portfólia.

Simulácie pre štandardné trhové nastavenia preukázali, že AVaR stratégia vedie za určitých okolností k nižším a menej pravdepodobným stratám v oblasti najhorších stavov, ako porovnávané stratégie VaR-RM a LEL-RM. Výsledky realizovanej prípadovej štúdie na portfóliu zostaveného z reálnych akciových titulov potvrdili vhodnosť použitia AVaR stratégie v prostredí, kedy platnosť všetkých predpokladov nemôže byť zaručená. AVaR stratégia dokázala s prijateľnými transakčnými nákladmi do určitej miery kontrolovať rizikovú expozíciu portfólia.

# Zoznam použitej literatúry

- [1] Acerbi, C., Nardio, C., Sirtori, C.: Expected shortfall as a tool for financial risk management. Working paper, <http://www.gloriamundi.org> (2001)
- [2] Arrow, K.J.: Aspects of the theory of risk-bearing. Helsinki: Yrj Hahnsson Foundation (1965)
- [3] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D.: Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9, 203-228 (1999)
- [4] Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., Vosper, L.: Var without correlations for portfolios of derivative securities. U.S.I. Lugano, Quaderno n. 99-04 (1999)
- [5] Balder, S., Brandl, M., Mahayni, A.: Effectiveness of CPPI strategies under discrete-time trading. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 33, No. 1, 204-220 (2009)
- [6] Basak, S., Shapiro, A.: Value-at-risk based risk management: optimal policies and asset prices. *Review of Financial Studies*, 14, 371-405 (2001)
- [7] Bertrand, P., Prigent, J.L.: Portfolio insurance strategies: OBPI versus CPPI. CREQAM working paper, No. 2001-30 (2001)
- [8] Bodie, Z.: On the risk of stocks in the long run. *Financial Analysts Journal*, May-June, 18-22 (1995)
- [9] Boulier, J.F., Kanniganti, A.: Expected performance and risks of various portfolio insurance strategies. Proceedings of the 5th AFIR International Colloquium, Brussels (1995)
- [10] Bouyé, E.: Portfolio insurance: a short introduction. FERC, Warwick Business School, Working paper (2009)
- [11] Cvitanic, J., Karatzas, I.: On dynamic measures of risk. *Finance and Stochastics*, 3, 451-482 (1999)
- [12] Duffie, D.: Dynamic asset pricing theory. Princeton Series in Finance, Princeton University Press, 3rd edition (2001)
- [13] Engle, R.F., Manganelli, S.: Caviar: conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics*, 22, 367-381 (2004)

- [14] Epstein, L.G.: Decreasing risk aversion and mean-variance analysis. *Econometrica*, 53, 945-962 (1985)
- [15] Fama, E. : The behavior of stock-market prices. *The Journal of Business*, Vol. 38, 1, 34-105 (1965)
- [16] Föllmer, H., Schied, A.: *Stochastic finance - an introduction in discrete time*. Walter de Gruyter, Berlin (2002)
- [17] Föllmer, H., Schied, A.: Convex and coherent risk measures. *Encyclopedia of Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, 355-363 (2010)
- [18] Gollier, C.: *The economics of risk and time*. The MIT Press (1999)
- [19] Harcek, M.: *Neparametrické a semiparametrické metódy odhadu value at risk*. Diplomová práca, Univerzita Komenského v Bratislave (2010)
- [20] Christoffersen, P., Hahn, J., Inoue, A.: *Testing and comparing value-at-risk measures*. Scientific Series, Montreal, ISSN 1198-8177 (2001)
- [21] J.P. Morgan/Reuters: *RiskMetrics<sup>TM</sup> Technical document*, New York, 4th Edition (1996)
- [22] Leland, H.E., Rubinstein, M.: The evolution of portfolio insurance. Luskin, D.L. (Ed.), *Portfolio insurance: a guide to dynamic hedging*, Wiley, Hoboken, New Jersey (1976)
- [23] Lundvik, A.: *Portfolio insurance methods for index-funds*. Uppsala University, U.U.D.M. project report (2005)
- [24] Kataoka, S.: A stochastic programming model. *Econometrica*, 31, 181-196 (1963)
- [25] Krajčovičová, Z.: *Riadenie portfólia pomocou zaistených stratégií*. Diplomová práca, Univerzita Komenského v Bratislave (2011)
- [26] Krokmal, P., Palmquist, J., Uryasev, S.P.: Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. *The Journal of Risk*, Vol. 4, 2, 11-27 (2002)
- [27] Krommerová, Cs.: *Dynamic portfolio optimization with risk management and strategy constraints*. Dizertačná práca, Univerzita Komenského v Bratislave (2013)
- [28] Kuester, K., Mittnik, S., Paolella, M.S.: Value-at-risk prediction: a comparison of alternative strategies. *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 4, No. 1, 53-59 (2006)
- [29] Kupiec, P.: Techniques for verifying the accuracy of risk management models. *Journal of Derivatives*, 3, 73-84 (1995)
- [30] Markowitz, H.M.: Portfolio selection. *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1 (1952)

- [31] Mehra, R., Prescott, E.: The equity premium: a puzzle. *Journal of Monetary Economics*, Vol. 15, 145-161 (1985)
- [32] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*. Bratislava, EPOS (2005)
- [33] Merton, R.C.: Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case. *The review of Economics and Statistics*, Vol. 51, No. 3, 247-257 (1969)
- [34] Miklošovič, T.: *Zaistené stratégie*. Diplomová práca, Univerzita Komenského v Bratislave (2010)
- [35] Mlynarovič, V.: Portfolio insurance strategies and their applications. *Ekonomický časopis*, Vol. 59, No. 4, 355-367 (2011)
- [36] von Neumann, J., Morgenstern, O.: *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press (1944)
- [37] Perold, A.: *Constant portfolio insurance*. Harvard Business School, unpublished manuscript (1986)
- [38] Pflug, G.Ch.: Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications* (2000)
- [39] Pflug, G.Ch., Römisch, W.: *Modeling, measuring and managing risk*. World Scientific Publishing Company, UK (2007)
- [40] Pratt, J.W.: Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 32, 122-136 (1964)
- [41] Prigent, J.L.: *Assurance du portefeuille: analyse et extension de la méthode du coussin*. *Banque et Marchés*, 51, 33-39 (2001)
- [42] Prigent, J.L.: *Portfolio optimization and performance analysis*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series (2007)
- [43] Rockafellar, R.T., Uryasev, S.P.: Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2, 21-42 (2000)
- [44] Rockafellar, R.T., Uryasev, S.P.: Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance*, 26, 1443-1471 (2002)
- [45] Roy, A.D.: Safety-first and the holding of assets. *Econometrica*, 20, 431-449 (1952)
- [46] Samuelson, P.A.: Probability, utility and the independence axiom. *Econometrica*, 20, 670-678 (1952)
- [47] Samuelson, P.A.: Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 51, No. 3, 239-246 (1969)

- [48] Ševčovič, D., Stehlíková, B., Mikula, K.: Analytical and numerical methods for pricing financial derivatives. Nova Science Publishers, Inc. (2011)
- [49] Telser, L.: Safety first and hedging. *Review of Economics and Statistics*, 23, 1-16 (1955)
- [50] Vilček, I.: Investičné stratégie v sporivom pilieri dôchodkového systému na Slovensku. Diplomová práca, Univerzita Komenského v Bratislave (2013)
- [51] Wilmott, P., Howison, S., Dewynne, J.: *The mathematics of financial derivatives*. Cambridge University Press (1995)