Vedecká Rada Fakulty Matematiky,
Fyziky a Informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave

Mgr. Ing. Pavol Jurča

Autoreferát dizertačnej práce

Udržateľnosť v modeloch optimálneho ekonomického rastu

na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia:
11-14-09 **Aplikovaná matematika**

Bratislava 2010

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre aplikovanej matematiky a štatistiky, Fakulty matematiky, fyziky a informatiky (FMFI) Univerzity Komenského (UK) v Bratislave.

Predkladateľ: Mgr. Ing. Pavol Jurča
Odbor regulácie a finančných analýz
Národná banka Slovenska
Imricha Karvaša, 813 25 Bratislava

Školiteľ: Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI - UK v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Oponenti: prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI - UK v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

RNDr. Juraj Zeman, CSc., MA.
Odbor výskumu
Národná banka Slovenska
Imricha Karvaša, 813 25 Bratislava

prof. RNDr. Rudolf Zimka, PhD.
Katedra kvantitatívnych metód a informačných systémov
Ekonomická fakulta UMB
Tajovského 10, 974 09 Banská Bystrica

Autoreferát bol rozoslaný dňa 10.9.2010. Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa 22.10.2010 o 11:00 pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia 11-14-09 Aplikovaná matematika vymenovanou podpredsedom spoločnej odborovej komisie dňa 30.8.2010 v posluchárni C na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Podpredseda spoločnej odborovej komisie:
Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI - UK v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

1 Úvod

Využívanie neobnoviteľných zdrojov ako napr. ropy, uhlia, zemného plynu, uránu a iných nerastných surovín je kľúčovým predpokladom pre fungovanie svetovej ekonomiky. Do popredia záujmu odbornej aj laickej verejnosti vrátane diskusií na najvyšších politických úrovniach sa preto stále viac dostáva otázka udržateľnosti súčasného ekonomického rastu a spotreby.

Koncepcia udržateľného ekonomického rastu je pomerne široká. Zahŕňa v sebe environmentálne, sociologické a ekonomické aspekty, napr. vplyv ekonomického rastu na životné prostredie a klimatické zmeny, udržateľnosť rastu obyvateľstva, udržateľnosť rastúcej spotreby energií závislej na čerpaní neobnoviteľných zdrojov a pod. Jednotne prijatá definícia udržateľnosti zatiaľ neexistuje. Často sa však udržateľný vývoj chápe ako vývoj, ktorý zohľadňuje preferencie súčasnej generácie bez zhoršenia možnosti budúcich generácií naplniť ich vlastné preferencie.

Motivácia výskumu popísaného v dizertačnej práci vychádza najmä z ekonomickému aspektu udržateľnosti ekonomického rastu. Venujeme sa matematickej analýze modelov udržateľnej miery rastu a spotreby v ekonomike, v ktorej je produkcia ekonomických statkov závislá od čerpania neobnoviteľných zdrojov.

Základný dynamický model optimálneho ekonomického rastu publikoval Ramsey (1928). Hlavnou myšlienkou tohto modelu je nájsť optimálnu alokáciu vyprodukovaných statkov medzi spotrebu, ktorá prináša užitočnosť v súčasnosti, a investície s cieľom zvýšiť spotrebu v budúcnosti. Inak povedané, úlohou je určiť optimálny časový vývoj miery spotreby so zreteľom na obmedzenosť ekonomických zdrojov. Ramseyho model bol pôvodne formulovaný ako úloha variačného počtu a neskôr ako úloha optimálneho riadenia.

Pôvodný Ramseyho model nezahŕňa neobnoviteľné zdroje. Takýmto rozšírením Ramseyho modelu sa prvýkrát zaoberali Dasgupta a Heal (1974) a Solow (1974). Cieľom týchto prác bolo analyzovať optimálnu mieru spotreby, ak je produkcia podmienená čerpaním neobnoviteľných zdrojov. Ďalším cieľom bolo ukázať, že takéto modely môžu byť použité na analýzu udržateľnosti optimálneho ekonomického rastu, a to napriek kritike reprezentovanej predovšetkým Johnom Rawlsom. Rawls (1971) totiž vyjadril pochybnosť o možnosti určiť optimálnu alokáciu produkcie medzi spotrebu a investície tak, aby nezohľadňovala iba preferencie súčasnej generácie, ale bola spravodlivá aj pre budúce generácie.

V dizertačnej práci sa preto zaoberáme analýzou modelov udržateľného ekonomického rastu formulovaných v tvare úlohy optimálneho riadenia. Okrem toho sú v nej uvedené aj výsledky týkajúce sa samotnej teórie optimálneho riadenia.

2 Súčasný stav problematiky a ciele práce

2.1 Základný popis dynamiky modelu

Pred samotným formulovaním cieľov práce bližšie popíšeme model ekonomiky s neobnoviteľnými zdrojmi. Zároveň uvedieme základné prístupy k analýze udržateľnosti ekonomického rastu v takomto modeli.

Predpokladajme existenciu n typov obnoviteľného (investičného) kapitálu a m typov neobnoviteľných zdrojov. Aktuálne množstvo obnoviteľného kapitálu označme vektorom $k(t) \in \mathbb{R}^n_+$ a zostávajúce množstvo neobnoviteľných zdrojov označme $s(t) \in \mathbb{R}^m_+$. [1] Predpokladajme, že počiatočné množstvo všetkých typov obnoviteľného kapitálu a neobnoviteľných zdrojov (k_0, s_0) je kladné (t.j. $k_0 > 0$ a $s_0 > 0$.) Množstvo produkcie za časovú jednotku je dané produkčnou funkciou f, ktorá závisí od aktuálneho množstva obnoviteľných statkov $k(t)$, miery ťažby $r(t) \in \mathbb{R}^m_+$ neobnoviteľných zdrojov za časovú jednotku a počtu obyvateľov $n(t)$, ktorého miera rastu ($\vartheta(t) > 0$) je exogénne daná. Okrem toho môže byť veľkosť produkcie ovplyvňovaná exogénne daným rastom produktivity. Preto predpokladáme, že produkčná funkcia môže závisieť explicitne od časovej premennej t.

Časť produkcie môže byť investovaná do zvýšenia obnoviteľného kapitálu ($\dot{k}(t)$). Ďalšia časť produkcie môže byť spotrebovaná (spotrebu označujeme ako $c(t) \in \mathbb{R}^n_+$, kde jednotlivé zložky vektora c predstavujú spotrebu jednotlivých typov investičných statkov). Zostávajúca časť produkcie môže byť použitá na obnovu amortizovaného kapitálu ($\delta(k)$), kde $\delta : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ je exogénne daná funkcia vyjadrujúca amortizáciu obnoviteľného kapitálu. Celkovo teda dostávame, že

$$f(t, k(t), r(t), n(t)) = \dot{k}(t) + c(t) + \delta(k(t)), \tag{1}$$

kde

$$r(t) = -\dot{s}(t), \quad \frac{\dot{n}(t)}{n(t)} = \vartheta(t), \tag{2}$$

a

$$k(t) \geq 0, \quad s(t) \geq 0, \tag{3}$$
$$r(t) \geq 0, \quad c(t) \geq 0 \tag{4}$$

pre každé $t \in \langle 0, \infty)$.

[1] Používame nasledujúce označenie: $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ a $\mathbb{R}^n_{++} := \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\}$.

2.2 Prístupy k analýze udržateľnosti ekonomického rastu

Pre analýzu udržateľnosti ekonomického rastu v modeli, ktorého dynamika je popísaná vzťahmi (1) – (4), existuje viacero spôsobov, z ktorých najvýznamnejšie sú nasledovné:

1. **Formulácia v tvare úlohy optimálneho riadenia.** V tomto prípade je model sformulovaný ako úloha optimálneho riadenia. Pritom predpokladáme, že účelová funkcia vyjadruje preferencie ekonomických agentov. Tie sú popísané funkciou užitočnosti, ktorá závisí od miery spotreby jednotlivých obnoviteľných statkov. Okrem toho môže závisieť aj od aktuálneho zostávajúceho množstva neobnoviteľných zdrojov. Konkrétny tvar účelovej funkcie modelu závisí od zvoleného prístupu:

   - **1. prístup:** Maximalizácia celkovej diskontovanej užitočnosti. V tomto prístupe predpokladáme, že cieľom je maximalizovať celkovú diskontovanú užitočnosť zo spotreby ekonomických statkov pri vyššie uvedenej dynamike. Účelová funkcia má v tomto prípade tvar:

     $$\max_{\{c(t),r(t)\}} \int_0^\infty \pi(t) U(c(t), s(t))\, \mathrm{d}t, \tag{5}$$

     kde $\pi(t) > 0$ je diskontný faktor, pričom $\int_0^\infty \pi(t)\, \mathrm{d}t < \infty$. Ide o klasický prístup formulácie modelov optimálneho ekonomického rastu. Požiadavka udržateľnosti však nie je v účelovej funkcii zhrnutá. Tento prístup využil napr. Mitra (2002).

   - **2. prístup:** Maximalizácia užitočnosti generácie s najnižšou mierou užitočnosti. Účelová funkcia je v nasledujúcom tvare:

     $$\max_{\{c(t),r(t)\}} \inf_{t \geq 0} U(c(t), s(t)). \tag{6}$$

     Kritérium udržateľnosti je zahrnuté priamo v účelovej funkcii. Tento prístup navrhol Solow (1974), ale jeho podrobnejšou analýzou sa zaoberali až Cairns a Tian (2003) a Cairns a Long (2006).

   Pri prístupe maximalizácie celkovej diskontovanej užitočnosti vystupuje do popredia otázka, za akých podmienok spĺňajú riešenia modelu podmienku, že užitočnosť zostáva konštantná. V tomto kontexte je jedným z najdôležitejších výsledkov tzv. Hartwickov výsledok (Hartwick (1977)), podľa ktorého je konštantnosť užitočnosti zachovaná, ak je hodnota obnoviteľného (investičného) kapitálu vždy zvýšená presne o hodnotu čerpaného množstva neobnoviteľných zdrojov. Tento výsledok bol neskôr hlbšie skúmaný a aplikovaný na rôzne ďalšie rozšírené modely.

2. **Aplikácia zákonov zachovania (***conservation laws***).** V prípade analýzy riešení uvedeného modelu formulovaného ako úloha optimálneho riadenia sa hľadajú podmienky, za ktorých zostane užitočnosť zo spotreby zachovaná. Znamená to, že požiadavka na to, čo má zostať zachované, je určená vopred. Martinet a Rotillon (2007) však navrhli iný prístup: Na základe vlastností príslušného modelu určiť, čo môže zostať zachované pozdĺž trajektórií optimálneho riešenia. Ide vlastne o úlohu nájsť zákon zachovania, resp. výraz, ktorý zostáva invariantný na zmenu časovej premennej. Ako ďalej navrhujú Martinet a Rotillon, existenciu týchto invariantov možno odvodiť z Noetherovej vety. Aplikáciou tejto vety na úlohy optimálneho riadenia dostaneme, že ak daná úloha vykazuje určitý druh symetrie, potom v nej existuje zákon zachovania. Závery ich článku sú však pomerne skeptické, pretože pre dostatočne širokú triedu úloh sa im nepodarilo nájsť všeobecne platný zákon zachovania.

3. **Teória dosiahnuteľnosti (***viability theory***).** Uvedenú úlohu maximalizácie užitočnosti zo spotreby pri danom počiatočnom množstve obnoviteľných a neobnoviteľných zdrojov možno obrátiť: Úlohou je potom nájsť minimálne množstvo zdrojov (tzv. *viability kernel*), z ktorých pri optimálnej alokácii produkcie možno dosiahnuť maximálnu celkovú užitočnosť. Týmto prístupom sa bližšie zaoberali Martinet (2004) a Martinet a Doyen (2007).

4. **Analýza trhovo efektívnych riešení (***competitive paths***).** V tomto prípade sa uvedený model formuluje ako úloha nájsť takú mieru spotreby obnoviteľných statkov a miery ťažby neobnoviteľných zdrojov, ktorá pri trhových cenách jednotlivých statkov v každom čase maximalizuje okamžitú diskontovanú užitočnosť zo spotreby a okamžitý zisk zo zmeny trhovej hodnoty spotreby a ekonomických statkov. Tento prístup ako prví uviedli Dixit et al. (1980), ale bol použitý aj v ďalších významných prácach týkajúcich sa analýzy udržateľnosti ekonomického rastu (napr. Asheim et al. (2003), Buchholz et al. (2005) a iné).

2.3 Ciele práce a ich motivácia

Ako vidieť z vyššie uvedeného prehľadu, rozdielnosť používaných prístupov, modelov a predpokladov je pomerne veľká. Formulácia modelov v tvare úloh optimálneho riadenia, ktorou sa zaoberáme v dizertačnej práci, je iba jedným z možných prístupov. Prvým cieľom práce je preto zhrnúť najvýznamnejšie poznatky v tejto oblasti a formulovať ich v kontexte jednotného modelu. Z uvedených spôsobov analýzy udržateľnosti ekonomického rastu sa podrobnejšie zaoberáme prvými dvoma spôsobmi.

Bližšie sa zameriame na výsledky týkajúce sa Hartwickovho pravidla, ktoré bolo uvedené vyššie. Dostupná literatúra na túto tému je pomerne široká a stále sa rozrastá. Ďalej sa v nej skúmajú podmienky, za ktorých je Hartwickovo pravidlo aj nutnou podmienkou udržateľnosti užitočnosti. Študuje sa jeho aplikácia na modely so zahrnutím ďalších rozšírení – napr. rastu obyvateľstva, technologického rastu, časovo meniacich sa preferencií a pod. Úroveň matematickej korektnosti jednotlivých publikácií je rôzna. Druhým cieľom dizertačnej práce je preto prezentácia výsledkov založená na presnej formulácii nutných podmienok optimality pre úlohy optimálneho riadenia. Na základe tejto teórie uvádzame presnejšiu alebo všeobecnejšiu formuláciu niektorých známych výsledkov alebo zjednodušenie ich dôkazov. Zaoberáme sa porovnaním podmienok pre udržateľnosť určitej miery udržateľnosti pre oba typy prístupov k formulácii účelovej funkcie.

Vo väčšine dostupnej literatúry sa analyzujú iba riešenia, v ktorých nie sú ohraničenia (4) na nezápornosť jednotlivých premenných aktívne. Takáto analýza postačuje, napr. pokiaľ jednotlivé neobnoviteľné zdroje sú iba čiastočne substituovateľné. Na druhej strane, ak uvedený prístup rozšírime na model s dokonale substituovateľnými neobnoviteľnými zdrojmi, do úvahy je potrebné zobrať aj ohraničenia na nezápornosť stavových premenných, ktorých dôsledkom je náročnejšia formulácia nutných podmienok optimality. Tretím cieľom práce je preto kvalitatívna analýza modelu s dvoma dokonale substituovateľnými neobnoviteľnými zdrojmi, ktorých produktivita sa mení v čase. Tento model aj jeho analýza je originálnym prínosom tejto práce.

V dizertačnej práci zároveň podstatne rozšírime doteraz známe výsledky z aplikácie zákonov zachovania. Ich doterajšia aplikácia v tejto oblasti bola založená iba na predpoklade určitej invariantnosti týchto modelov. Ako však ukázal Torres (2004), tento predpoklad možno oslabiť. To nám umožňuje získať nové výsledky.

Okrem analýzy modelov udržateľného rastu sa podrobne zaoberáme aj samotnou teóriu optimálneho riadenia, ktorá je potrebná na matematicky korektnú formuláciu jednotlivých výsledkov. Podrobnejšie sa venujeme najmä úlohám s čistými ohraničeniami na stavové premenné. Vychádzame z dvoch typov formulácie nutných podmienok optimality – prvý typ nutných podmienok uviedli Seierstad a Sydsæter (1987) a druhý Feichtinger a Hartl (1986). V dizertačnej práci sú formulované a dokázané tvrdenia o vzájomnej suvislosti medzi týmito dvoma typmi nutných podmienok. To nám zároveň umožňuje vzájomne kombinovať výsledky z oboch zdrojov.

3 Dosiahnuté výsledky

3.1 Formulácia modelu

Pred samotnou formuláciou výsledkov uvedených v dizertačnej práci uvedieme formuláciu modelu ekonomiky s neobnoviteľnými zdrojmi, ktorá bola popísaná vyššie.

Najprv je však potrebné preformulovať účelovú funkciu uvedenú v (6), pretože takáto formulácia nepredstavuje štandardný tvar účelovej funkcie v úlohách optimálneho riadenia. Zavedením nového parametra $w \in \mathbb{R}$ možno toto kritérium prepísať do nasledujúceho tvaru:

$$\max_{\{c(t),r(t),w\}} w, \tag{7}$$

$$U(c(t),s(t)) \geq w, \text{ kde } t \in \langle 0,\infty). \tag{8}$$

V tomto prípade dostávame úlohu optimálneho riadenia s parametrom. Túto úlohu možno ďalej prepísať do tvaru štandardnej úlohy optimálneho riadenia, ak $w(t)$ považujeme za novú stavovú premennú s voľným začiatočným stavom $w(0)$, ktorá je v čase konštantná (t.j. $\dot{w}(t) = 0$).

Celkovo teda možno uvedený model formulovať nasledovne:

$$\max_{\{c(t),r(t)\}} \int_0^\infty \pi(t)U(c(t),s(t))\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

alebo

$$\begin{aligned} &\max_{\{c(t),r(t)\}} w(0), \quad \text{kde } t \in \langle 0,\infty), \\ &U(c(t),s(t)) \geq w(t), \\ &\dot{w}(t) = 0, \quad w(0) \text{ voľné} \end{aligned} \tag{10}$$

za podmienok

$$
\begin{aligned}
&\dot{k}(t) = f(t, k(t), r(t), n(t)) - \delta(k(t)) - c(t), \quad k(0) = k_0 > 0 \text{ dané,}\\
&\dot{s}(t) = -r(t), \quad s(0) = s_0 > 0 \text{ dané,}\\
&\dot{n}(t) = \vartheta(t) n(t), \quad n(0) = n_0 > 0 \text{ dané,}\\
&k(t) \geq 0, \quad s(t) \geq 0,\\
&r(t) \geq 0, \quad c(t) \geq 0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

3.2 Hartwickovo pravidlo

V tejto časti uvedieme prehľad výsledkov, ktoré sa týkajú Hartwickovho pravidla. Tieto výsledky sú v dizertačnej práci uvedené v Kapitole 4. Hoci väčšinou ide o známe výsledky, prínosom tejto časti je ich prehľad v kontexte jednotného modelu a v niektorých prípadoch aj ich presnejšia resp. všeobecnejšia formulácia.

3.2.1 Hartwickov výsledok

Obsahom Hartwickovho výsledku je formulácia postačujúcej podmienky konštantnej užitočnosti v oboch vyššie uvedených prístupoch. Pre jednoduchosť sa zaoberáme modelom, v ktorom funkcia užitočnosti nezávisí od s a do produkčnej funkcie nevstupuje technologický rast ani počet obyvateľov. V tomto zmysle chápame aj odkaz na (9) a (11) v tejto časti. Pre prístup založený na maximalizácii celkovej diskontovanej užitočnosti je touto postačujúcou podmienkou Hartwickovo pravidlo, o čom hovorí tzv. Hartwickov výsledok (v dizertačnej práci uvedený ako Theorem 4.1):

Veta 1 (Hartwickov výsledok, 1. prístup).[2] *Nech (k, s, c, r) je prípustné vnútorné riešenie úlohy (9) a (11), ktoré spĺňa nutné podmienky optimality spolu s adjungovanými premennými (ψ^0, ψ_k, ψ_s). Ďalej predpokladajme, že*

$$\psi_k^T \dot{k} = \psi_s^T r \qquad \textit{pre každé } t \geq 0 \tag{12}$$

(Hartwickovo pravidlo). Potom $U(c(t)) \equiv$ konšt. pre každé $t \geq 0$.

Dôkaz tohto tvrdenia vyplýva z rovnosti

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\Big(t, x^*(t), u^*(t), \psi(t)\Big) = \frac{\partial H}{\partial t}\Big(t, x^*(t), u^*(t), \psi(t)\Big), \tag{13}$$

[2] Porovnaj napr. Hartwick (1977) [s. 973] alebo Mitra (2002) [s. 367]. Ďalšie referencie sú uvedené v dizertačnej práci.

kde $H\Big(t, x^*(t), u^*(t), \psi(t)\Big)$ je Hamiltonova funkcia a zo spojitosti Hamiltonovej funkcie. Obe tieto podmienky sú nutnými podmienkami optimality.

Adjungované premenné $\psi_k \in \mathbb{R}^n$ a $\psi_s \in \mathbb{R}^m$, ktoré prislúchajú jednotlivým typom obnoviteľných a neobnoviteľných statkov, možno v diskontovaných úlohách optimálneho riadenia s voľným koncovým stavom interpretovať ako súčasnú hodnotu tieňovej ceny (t.j. ceny na konkurenčnom trhu) týchto statkov. Hartwickovo pravidlo (12) potom znamená, že súčasná hodnota čistých investícií v čase t ocenená tieňovými cenami diskontovaná do času 0 musí byť nulová. Inak povedané, všetky výnosy z ťažby neobnoviteľných zdrojov musia byť v plnej výške reinvestované do obnoviteľného kapitálu.

Ako uvádzajú napr. Dixit et al. (1980) [Theorem 1, s. 553], Veta 1 ostane v platnosti, aj ak Hartwickovo pravidlo nahradíme tzv. zovšeobecneným Hartwickovým pravidlom v tvare $\psi_k^T \dot{k} - \psi_s^T r = I$ pre každé $t \geq 0$, kde I je konštanta. Navyše možno ukázať, že prípustné je iba $I \geq 0$. Toto zovšeobecnenie Hartwickovho pravidla možno interpretovať tak, že postačujúcou podmienkou konštantnej užitočnosti pozdĺž riešenia spĺňajúceho nutné podmienky optimality je konštantná nezáporná hodnota čistých investícií. Tieto výsledky sú v dizertačnej práci uvedené ako Theorem 4.2 a Lemma 4.1.

V prípade druhého prístupu, v ktorom sa maximalizuje užitočnosť generácie s najnižšou užitočnosťou, je postačujúcou podmienkou pre konštantnú užitočnosť tzv. regularita daného prípustného riešenia (k, s, c, r) pre úlohu (10) a (11), ktoré spĺňa nutné podmienky optimality pre túto úlohu. Táto regularita znamená, že hodnota Lagrangeovho multiplikátora $\mu_w(t)$, ktorý je priradený ohraničeniu $U(c(t)) \geq 0$, je kladná pre každé $t \geq 0$. Jednou z nutných podmienok optimality je tzv. podmienka komplementarity v tvare $\mu_w(t) \geq 0$ a $\mu_w(t)(U(c(t)) - w(t)) = 0$ pre každé $t \geq 0$. Z tejto podmienky priamo vyplýva, že ak $\mu_w(t) > 0$, potom $U(c(t)) = w(t)$ pre každé $t \geq 0$, a teda $U(c(t))$ je konštantné kvôli stavovej rovnici $\dot{w}(t) = 0$. V dizertačnej práci je toto tvrdenie sformulované ako Theorem 4.3. Ekonomicky možno podmienku regularity interpretovať tak, že tieňová cena za uvoľnenie ohraničenia $U(c) \geq w$ je kladná.

Cairns a Tian (2003) sa zaoberali skúmaním súvislosti medzi jednotlivými prístupmi, t.j. medzi prípustnými riešeniami pre úlohu danú (9) a (11) a pre úlohu danú (10) a (11). Túto súvislosť sme v dizertačnej práci sformulovali a dokázali v podobe tvrdení Theorem 4.4 a Theorem 4.5.

Veta 2 (Súvislosť medzi 1. a 2. prístupom)**.** *Ak prípustné vnútorné riešenie úlohy (9) a (11) spĺňa nutné podmienky optimality a Hartwickovo pravidlo, potom spĺňa aj nutné podmienky optimality pre úlohu (10) a (11), pričom pre Lagrangeov mul-*

tiplikátor μ_w platí $\mu_w(t) = \pi(t)$ pre každé $t \geq 0$. Na druhej strane, ak prípustné vnútorné riešenie úlohy (10) a (11) spĺňa nutné podmienky optimality a predpoklad regularity ($\mu_w(t) > 0$ pre každé $t \geq 0$), potom spĺňa aj nutné podmienky optimality pre úlohu (9) a (11), pričom pre diskontný faktor π platí $\pi(t) = \mu_w(t)$ pre každé $t \geq 0$.

3.2.2 Obrátený Hartwickov výsledok

Ako bolo uvedené v predchádzajúcej časti (Veta 1), Hartwickovo pravidlo bolo pôvodne sformulované ako postačujúca podmienka pre konštantnú úžitočnosť pozdĺž riešení úlohy (9) a (11) pri maximalizácii celkovej diskontovanej funkcii užitočnosti. Neskôr sa však viacerí autori zaoberali otázkou, či a za akých podmienok je Hartwickovo pravidlo aj nutnou podmienkou pre konštantnú užitočnosť.

Ako ukázal Mitra (2002) [s. 369-370] nájdením príslušného protipríkladu, Vetu 1 nemožno jednoducho obrátiť. Priamo možno obrátiť iba zovšeobecnený Hartwickov výsledok, t.j. ak je užitočnosť konštantná pozdĺž prípustného vnútorného riešenia úlohy (9) a (11) spĺňajúceho nutné podmienky optimality, potom je súčasná hodnota čistých investícií konštantná. Pre obrátenie pôvodného Hartwickovho výsledku sú potrebné ďalšie predpoklady, ktoré sme v dizertačnej práci zhrnuli v tvrdení Theorem 4.7:

Veta 3 (Obrátený Hartwickov výsledok). [3] *Nech (k^*, s^*, c^*, r^*) je prípustné vnútorné riešenie úlohy (9) a (11), ktoré spĺňa nutné podmienky optimality spolu s adjungovanými premennými (ψ^0, ψ_k, ψ_s). Ďalej predpokladajme, že je splnená aspoň jedna z nasledujúcich dvoch podmienok:*

(i) (k^*, s^*, c^*, r^*) spĺňa aj podmienku nulovosti Hamiltoniánu pre $t \to \infty$, alebo

(ii) $\delta(k) = 0$ pre každé $k \geq 0$ a existuje $j = \{1, \ldots, m\}$ a kladné číslo ϱ také, že

$$\frac{r_j^*(t)\frac{\partial f_i}{\partial r_j}(k^*(t), r^*(t))}{f_i(k^*(t), r^*(t))} \geq \varrho \tag{14}$$

pre každé $t \geq 0$ a pre každé $i = 1, \ldots, n$.

Potom z podmienky $U(c^*(t)) \equiv const.$ pre každé $t \geq 0$ vyplýva $\psi_k^T \dot{k}^* = \psi_s^T r^*$.

---

[3] Pokiaľ je nám známe, táto formulácia obráteného Hartwickovho výsledku nebola doteraz publikovaná. Tvrdenie obsahujúce iba podmienku (i) formuloval napr. Mitra (2002) [Theorem 2, s. 375]. Na druhej str ane, tvrdenie obsahujúce iba podmienku (ii) prezentoval Buchholz et al. (2005) [Theorem 1, s. 556], ale iba pre prípad $n = m = 1$ s dodatočným predpokladom na produkčnú a amortizačnú funkciou, ktorý však nie je nevyhnutný.

Podmienku (ii) možno interpretovať tak, že amortizácia obnoviteľného kapitálu je nulová a aspoň jeden z neobnoviteľných zdrojov je nevyhnutný pre produkciu všetkých obnoviteľných statkov. Presnejšie povedané, relatívna elasticita produkcie vzhľadom na čerpanie tohto neobnoviteľného zdroja je odrazená od nuly pre produkciu všetkých obnoviteľných zdrojov.

3.2.3 Hartwickovo pravidlo v prípade rastu počtu obyvateľov

Mitra (2008) formuloval úlohu o ekonomickom raste v ekonomike s obnoviteľnými aj neobnoviteľnými zdrojmi a s exogénne daným exponenciálnym rastom počtu obyvateľov ($\vartheta(t) =$ konšt.), s Cobb-Douglasovou produkčnou funkciou $f(k,r,n) = k^{\alpha} r^{\beta} n^{1-\alpha-\beta}$, $(0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$ a $\alpha + \beta < 1)$ a s funkciou užitočnosti nezávislou od s. Úloha nie je formulovaná v tvare úlohy optimálneho riadenia. Pre túto úlohu odvodil Hartwickovo pravidlo v tvare

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{k} + \dot{s}) = (wn - p\bar{c}n)\vartheta, \tag{15}$$

kde

$$p = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial r}(k,r,n)} \qquad \text{a} \qquad w = p\frac{\partial f}{\partial n}(k,r,n). \tag{16}$$

Jeho dôkaz tohto tvrdenia je pomerne dlhý a technický. V dizertačnej práci (Theorem 4.9) sme odvodili rovnaký výsledok formuláciou analogickej úlohy v tvare úlohy optimálneho riadenia (9) a (11), dokonca so všeobecnejšími predpokladmi na produkčnú funkciu.

3.3 Model s dokonale substituovateľnými neobnoviteľnými zdrojmi

Piata kapitola dizertančnej práce analyzuje udržateľnosť ekonomického rastu v ekonomike s dvoma neobnoviteľnými zdrojmi, ktoré sú navzájom dokonale substituovateľné. Formulácia príslušného modelu, ako aj jeho kvalitatívna analýza je originálnym prínosom dizertačnej práce.

Ako bolo ukázané v dizertačnej práci, v takomto modeli je potrebné zobrať do úvahy možnosť, že miera ťažby niektorého z neobnoviteľných zdrojov je nulová na určitom časovom úseku. Dokonca môže prísť k úplnému vyčerpaniu niektorého z neobnoviteľných zdrojov. Vzhľadom na predpoklad dokonalej substituovateľnosti oboch zdrojov je možné vyčerpaný neobnoviteľný zdrojov nahradiť druhým zdrojom, takže produkcia obnoviteľného kapitálu, a teda aj jeho spotreba, je naďalej možná.

Z pohľadu teórie optimálneho riadenia to znamená, že je potrebné zobrať do úvahy možnosť aktívnych ohraničení na nezápornosť stavových premenných. Z hľadiska teórie optimálneho riadenia predstavujú úlohy s aktívnymi ohraničeniami na stavové premenné istú komplikáciu, pretože tu neplatí tradičný predpoklad o spojitosti adjungovaných premenných. Možnosť aktívnych ohraničení na nezápornosť stavových premenných a ich možné dôsledky iba krátko diskutujú Dixit et al. (1980) a Cairns a Long (2006). Podrobnejšiu analýzu, avšak iba zo statického pohľadu a bez aplikovania teórie optimálneho riadenia, uvádza Martinet (2009).

Pri analýze kvalitatívnych vlastností riešení spĺňajúcich nutné podmienky optimality sme sa zaoberali modelom (10) a (11) s jedným obnoviteľným kapitálom k a s dvoma neobnoviteľnými zdrojmi s_1 a s_2. Predpokladali sme, že funkcia užitočnosti nezávisí od s_1 a s_2, počet obyvateľov je konštantný a produkčná funkcia má Cobb-Douglasov tvar

$$f(t,k(t),r_1(t),r_2(t)) = k(t)^{\alpha}(r_1(t)+d(t)r_2(t))^{1-\alpha}, \tag{17}$$

kde $\alpha \in (\frac{1}{2},1)$. Funkcia $d(t) > 0$, ktorá je daná, vyjadruje v čase meniacu sa hraničnú mieru substitúcie medzi mierou ťažby oboch neobnoviteľných zdrojov. Alternatívne možno túto funkciu interpretovať aj ako mieru produktivity druhého neobnoviteľného zdroja. Predpokladali sme, že táto funkcia je rastúca a spojitá. Pre takýto model sme dokázali nasledujúcu vetu (v dizertačnej práci uvedenú ako Theorem 5.1):

Veta 4. *Nech $(k^*, s_1^*, s_2^*, w^*, c^*, r_1^*, r_2^*)$ je optimálne riešenie vyššie popísaného modelu, ktoré je regulárne (t.j. $\mu_w(t) > 0$) a platí $k(t) > 0$, $c(t) > 0$ a $r_1(t) + dr_2(t) > 0$ pre každé $t > 0$. Potom existuje také $T \geq 0$, že miery ťažby $r_1^*(t)$ a $r_2^*(t)$ neobnoviteľných zdrojov majú nasledujúci tvar:*

$$\begin{aligned} &\textit{Pre každé } t \in \langle 0,T\rangle: \quad r_1^*(t) > 0 \quad a \quad r_2^*(t) = 0,\\ &\textit{pre každé } t \in (T,\infty): \quad r_1^*(t) = 0 \quad a \quad r_2^*(t) > 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Táto veta dáva kvalitatívne zaujímavý výsledok, ktorý hovorí, že pokiaľ začneme čerpať druhý neobnoviteľný zdroj, ktorého produktivita je rastúca, už nie je optimálne vrátiť sa k čerpaniu prvého zdroja. Prípadné čerpanie prvého zdroja musí nastať skôr.

Okrem tvrdenia uvedeného vo Vete 4 sme sformulovali aj Hartwickovo pravidlo pre tento model. Ako bolo uvedené vyššie, Hartwickovo pravidlo má zmysel najmä pri úlohe s maximalizáciou celkovej diskontovanej užitočnosti, preto sme ďalej uvažovali model s účelovou funkciou v tvare (9), hoci ostatné vyššie uvedené predpoklady zostali zachované. Potom sme dokázali, že Veta 1 zostáva v platnosti aj pre takýto model, pokiaľ predpoklad prípustných vnútorných riešení rozšírime aj na tie prípustné riešenia, v ktorých môže byť najviac jedna z funkcií r_1 a r_2 nulová na nejakom časovom intervale, a pokiaľ Hartwickovo pravidlo formulujeme nasledovne:

$$\psi_k(t)\dot{k}^*(t) + \psi_1(t)\dot{s}_1^*(t) + \psi_2(t)\dot{s}_2^*(t) = \int_0^t \psi_k(\tau)\frac{\partial f}{\partial r_2}\frac{\dot{d}(\tau)}{d(\tau)}r_2^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad (19)$$

pre každé $t \geq 0$. Pritom ψ_k, ψ_1 a ψ_2 sú adjungované premenné pre k, s_1 a s_2.

Rovnosť (19) možno interpretovať tak, že celková súčasná hodnota čistých investícií do všetkých typov ekonomických statkov ocenená tieňovými cenami v čase t sa rovná celkovej zmene produkcie len z dôvodu plynutia času (tzv. čistý efekt času na produkciu) na časovom intervale $(0, t)$ ocenenej tieňovou cenou obnoviteľného kapitálu. Táto zmena produkcie je rovná súčinu aktuálnej hraničnej produkcie pri zmene r_2 o jednotku vynásobenej mierou ťažby druhého neobnoviteľného zdroja r_2 a ďalej vynásobenej mierou rastu produktivity r_2. Tento výsledok je v dizertačnej práci sformulovaný a dokázaný ako Theorem 5.2.

3.4 Zákony zachovania

V kapitole 6 dizertačnej práce sme študovali aplikáciu zákonov zachovania na analýzu udržateľnosti ekonomického rastu. Podstatne sme rozšírili výsledky, ktoré prezentovali Martinet a Rotillon (2007). Ich analýza totiž hľadala zákony zachovania iba pre invariantné úlohy. Na druhej strane, Torres (2004) ukázal, že zákony zachovania možno nájsť aj za slabších predpokladov – v tzv. kvázi-invariantných úlohách, ktoré sám definoval. Zamerali sme sa preto na aplikáciu Torresovho výsledku na model udržateľného ekonomického rastu. Najprv však bolo potrebné túto teóriu rozšíriť, aby sme ju mohli použiť na úlohu formulovanú vyššie. Trieda úloh, na ktoré sme aplikovali hľadanie zákonov zachovania, bola navyše širšia ako v prípade analýzy, ktorú prezentovali Martinet a Rotillon. Toto rozšírenie predstavuje najmä aplikácia na model s maximalizáciou užitočnosti generácie s najnižšou spotrebou, zohľadnenie rastu počtu obyvateľov a funkcie užitočnosti závislej aj od zostatkového množstva neobnoviteľných zdrojov.

Úloha optimálneho riadenia sa nazýva kvázi-invariantnou, ak existuje taká transformácia (závislá od parametra $\xi \in \mathbb{R}$) stavových a riadiacich premenných a časovej premennej, ktorá nezmení tvar žiadnej zo stavových rovníc (až na členy rádu vyššieho ako 1 v parametri ξ).[4] V práci je ukázané, že za predpokladu ho-

[4]Presná definícia kvázi-invariantných úloh optimálneho riadenia je uvedená v dizertačnej práci (Definition 5.1).

mogénnej produkčnej funkcie rádu 1 (t.j. $f(t, \zeta k, \zeta r, \zeta n) = \zeta f(t, k, r, n)$ pre každé $\zeta > 0$) a lineárnej amortizačnej funkcie (t.j. $\delta(k) = \bar{\delta}k$) je úloha (9) a (11), resp. úloha (10) a (11) kvázi-invariantná vzhľadom na transformáciu

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= (1+\xi)k, \\ \tilde{s} &= (1+\xi)s, \\ \tilde{n} &= (1+\xi)n, \\ \tilde{c} &= (1+\xi)c, \\ \tilde{r} &= (1+\xi)r, \\ \tilde{t} &= t. \end{aligned} \tag{20}$$

Na základe transformácie (20) a s využitím tvrdenia uvedeného a dokázaného v dizertačnej práci (Theorem 5.1), ktorý vychádza z výsledkov formulovaných Torresom (Torres (2004)) sme pre úlohu (9) a (11) aj úlohu (10) a (11) odvodili nasledujúci vzťah:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\psi_k^T k + \psi_s^T s + \psi_n^T n\right) + \psi^0 \pi \left(\frac{\partial U}{\partial c}(c,s)\, c + \frac{\partial U}{\partial s}(c,s)\, s \right) \equiv 0. \tag{21}$$

Z tohto vzťahu vyplýva, že celková súčasná hodnota všetkých obnoviteľných aj neobnoviteľných statkov a pracovnej sily ocenená tieňovými cenami je nerastúca v čase. V konkrétnom prípade účelovej funkcie s konštantnou relatívnou averziou k riziku v tvare

$$U(c,s) = \frac{\bar{C}(c,s)^{1-\theta}}{1-\theta}, \tag{22}$$

kde $\bar{C}(c,s)$ je homogénna funkcia rádu 1, dostávame

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_k^T k + \psi_s^T s + \psi_n^T n) = -(1-\theta)\pi U(c,s). \tag{23}$$

Tento vzťah ukazuje súvis medzi zmenou hodnoty ekonomických statkov (na ľavej strane) a diskontovanou hodnotou okamžitej užitočnosti ($\pi U(c,s)$).

Ako je ďalej ukázané v dizertačnej práci, pri určitých špecifických predpokladoch možno odvodiť aj viacero navzájom nezávislých zákonov zachovania.

3.5 Nové výsledky v teórii optimálneho riadenia

Okrem analýzy vyššie uvedených modelov ekonomického rastu pri zohľadnení jeho udržateľnosti sme sa v siedmej kapitole dizertačnej práce zaoberali aj teoretickými výsledkami týkajúcimi sa formulácie nutných podmienok optimality pre úlohy s čistými ohraničeniami na stavové premenné v tvare $h_j(x) \geq 0$, $j = 1, \ldots, q$. Pritom sme vychádzali z dvoch rôznych formulácií týchto podmienok – prvú z nich uviedli Seierstad a Sydsæter (1987) a druhú Feichtinger a Hartl (1986). V dizertačnej práci bola prvá z nich uvedená ako Theorem 7.1 a druhá ako Theorem 7.2.

Základným výsledkom tejto časti je formulácia a dôkaz tvrdenia, ktoré vyjadruje súvis medzi týmito dvoma typmi nutných podmienok. Predpokladáme pritom, že časový horizont môže byť rozdelený do konečného počtu podintervalov, pre ktoré platí, že na každom z nich je množina aktívnych ohraničení na stavové premenné konštantná. Potom možno uvedenú súvislosť zjednodušene formulovať nasledovne:[5]

Veta 5. *Nech prípustné riešenie spĺňa nutné podmienky podľa Seierstada a Sydsætera (1987) spolu s ψ^0, $\psi(t)$ (vektor adjungovaných premenných), $\mu(t)$ (vektor Lagrangeových multiplikátorov pre zmiešané ohraničenia na stavové aj riadiace premenné) a $\nu(t)$ (vektor Lagrangeových multiplikátorov pre čisté ohraničenia na stavové premenné). Potom toto optimálne riešenie spĺňa aj nutné podmienky podľa Feichtingera a Hartla (1986) (s možnou výnimkou podmienky súčasnej nenulovosti multiplikátorov) spolu s*

$$\tilde{\nu}_j(t) := \begin{cases} 0 & \text{ak } h_j(x^*(t)) > 0 \text{ alebo } t \text{ je vstupný alebo kontaktný čas,} \\ \nu_j(t) - \nu_j(\tau^+) & \text{ak } h_j(x^*(t)) = 0 \text{ a } t \text{ nie je vstupný ani kontaktný čas,} \end{cases} \tag{24}$$

kde τ je výstupný čas[6], ktorý je najbližší výstupný čas väčší alebo rovný t (resp. koncový bod časového horizontu, ak taký výstupný čas neexistuje),

$$\tilde{\psi}^T(t) := \psi^T(t) - \tilde{\nu}^T(t)\frac{dh}{dx}(x^*(t)), \tag{25}$$

$$\tilde{\psi}^0 := \psi^0, \tag{26}$$

$$\tilde{\eta}(t) := \big(\nu(t^-) - \tilde{\nu}(t^-)\big) - \big(\nu(t^+) - \tilde{\nu}(t^+)\big), \tag{27}$$

$$\tilde{\mu}(t) := \mu(t). \tag{28}$$

Veta 6. *Nech prípustné riešenie spĺňa nutné podmienky podľa Feichtingera a Hartla (1986) spolu s $\tilde{\psi}^0$, $\tilde{\psi}(t)$ (vektor adjungovaných premenných), $\tilde{\mu}(t)$ (vektor Lagrangeových multiplikátorov pre zmiešané ohraničenia na stavové aj riadiace premenné), $\tilde{\nu}(t)$ (vektor Lagrangeových multiplikátorov pre čisté ohraničenia na stavové premenné) a $\tilde{\eta}(t)$ (vektor nespojitostí vektora adjungovaných premenných). Potom toto*

[5] Presné znenie vety je uvedené v dizertačnej práci (Theorem 6.4 a Theorem 6.5).

[6] Pre ohraničenie $h_j(x) \geq 0$ definujeme vstupný čas ako čas, v ktorom sa ohraničenie stáva aktívnym. Výstupný čas definujeme ako čas, v ktorom ohraničenie prestáva byť aktíve. A napokon kontaktný čas je čas, v ktorom je toto ohraničenie aktívne, hoci na jeho okolí aktívne nie je.

optimálne riešenie spĺňa aj nutné podmienky podľa Seierstada a Sydsætera (1987) (s možnou výnimkou podmienky maxima) spolu s

$$\begin{aligned}
\psi(t)^T &:= \tilde{\psi}(t)^T + \tilde{\nu}(t)^T \frac{dh}{dx}(x^*(t)), && (29)\\
\psi^0 &:= \tilde{\psi}^0, && (30)\\
\mu(t) &:= \tilde{\mu}(t), && (31)\\
\nu(t) &:= \tilde{\nu}(t) + \sum_{\tau \geq t} \tilde{\eta}(\tau). && (32)
\end{aligned}$$

Ako vidieť z predchádzajúcej vety, toto tvrdenie nevylučuje existenciu prípustného riešenia, ktoré spĺňa všetky podmienky podľa Feichtingera a Hartla (1986), ale nespĺňa podmienku maxima podľa Seierstada a Sydsætera (1987). Znamená to, že takéto riešenie nemôže byť optimálne, ale podmienky formulované Feichtingerom a Hartlom ho identifikujú ako možného kandidáta na optimálne riešenie. Príklad takého riešenia je uvedený v dizertačnej práci (pozri Example 7.5). Tento výsledok je originálny.

Na druhej strane, pokiaľ vyššie uvedená podmienka maxima vyplýva z ostatných nutných podmienok (napr. v prípade, že Hamiltonova funkcia je konkávna v riadiacej premennej), možno Vetu 6 využiť na kombinovanie výsledkov z oboch zdrojov. Toto sme využili aj pri analýze modelov ekonomického rastu: Základom pre analýzu boli nutné podmienky podľa Seierstada a Sydsætera (1987), tie sme však doplnili niektorými podmienkami (prepísanými pomocou uvedených transformácií), ktoré uvádzajú Feichtinger a Hartl (1986) – napr. podmienka (13). Na druhej strane, ak by sme vychádzali iba z podmienok, ktoré fomulovali Feichtinger a Hartl (1986), nemali by sme k dispozícii podmienky pre úlohy s voľným začiatočným stavom pre úlohu s čistými ohraničeniami na stavové premenné na nekonečnom horizonte.

Okrem tvrdení uvedeného vo Vetách 5 a 6 je v dizertačnej práci formulovaných a dokázaných niekoľko ďalších pomocných tvrdení, z ktorých niektoré majú aj samostatný význam. Napríklad v Lemme 7.1 je dokázaná spojitosť Hamiltonovej funkcie, v Lemme 7.3 sú bližšie charakterizované body nespojitosti funkcií ψ, μ, ν, $\tilde{\psi}$, $\tilde{\mu}$ a $\tilde{\nu}$. Rozdiely v oboch typoch podmienok optimality sme ilustrovali na príkladoch.

4 Záver

Hlavné výsledky dizertačnej práce sú:

1. Formulácia a dôkaz súvislosti dvoch rôznych formulácií podmienok, ktoré prezentovali Seierstad a Sydsæter (1987) a Feichtinger a Hartl (1986): Našli sme transformácie (Vety 5 a 6), ktoré umožňujú previesť adjungované premenné a multiplikátory z jednej množiny podmienok do druhej a naopak. Zároveň sme uviedli príklad, pre ktorý je prvý typ podmienok silnejší.

2. Kvalitatívna analýza modelu s navzájom dokonale substituovateľnými zdrojmi s meniacou sa produktivitou: Pomocou nutných podmienok optimality pri zohľadnení možnosti aktívnych čistých ohraničení na stavové premenné sme dokázali, že na každom časovom intervale musí byť čerpaný práve jeden zo zdrojov. Navyše je optimálne čerpať najprv prvý zdroj (s konštantnou produktivitou) a až potom čerpať druhý zdroj (s rastúcou produktivitou) (Veta 4). Odvodili a interpretovali sme Hartwickovo pravidlo (19) pre takýto typ ekonomiky. Ukázali sme, že zmena súčasnej hodnoty čistých investícií sa musí rovnať celkovej zmene produkcie len v dôsledku plynutia času.

3. Aplikácia zákonov zachovania: Na základe kvázi-invariantných vlastností analyzovaných modelov sme odvodili nové kvantitatívne veličiny, ktoré zostávajú konštantné pozdĺž riešení týchto modelov. Ukázali sme, že v oboch uvažovaných prístupoch dostaneme rovnaký výsledok. Na túto analýzu sme využili výsledky, ktoré publikoval Torres (2004), pričom sme ich rozšírili tak, aby boli aplikovateľné na náš model.

Okrem toho obsahuje dizertačná práca aj niekoľko ďalších nových vsledkov:

a) Známe výsledky o Hartwickovom výsledku (Veta 1) a obrátenom Hartvickovom výsledky (Veta 3) sme sformulovali presnejšie a v druhom prípade aj všeobecnejšie s využitím teórie optimálneho riadenia. Ukázali sme súvis medzi prístupom maximalizácie celkovej diskontovanej užitočnosti a maximalizácie užitočnosti generácie s najnižšou užitočnosťou (Veta 2). Táto časť bola podkladom publikácie Jurča (2007).

b) Hartwickovo pravidlo pre model s rastom počtu obyvateľov, ktoré prezentoval Mitra (2008), sme odvodili jednoduchšie pomocou formulácie analogického problému v tvare úlohy optimálneho riadenia.

c) V teórii optimálneho riadenia pre úlohy s čistými ohraničeniami na stavové premenné sme sformulovali a dokázali niektoré ďalšie pomocné tvrdenia.

Literatúra

[1] Asheim, G.B., Buchholz, W., Withagen, C. (2003): The Hartwick Rule: Myths and Facts, Environmental and Resource Economics, Vol. 25, 129–150

[2] Buchholz, W., Dasgupta, S., Mitra T. (2005): Intertemporal Equity and Hartwick's Rule in an Exhaustible Resource Model, Scandinavian Journal of Economics, Vol. 107, No. 3, 547–561

[3] Cairns, R.D., Tian, H. (2003): Evolution of Population and Resource with Maximin Objective, proceeding at the Twelfth Annual Meeting of the Canadian Resource and Environmental Economics Study Group, Montréal

[4] Cairns, R. D., Long, N. V. (2006): Maximin: a direct approach to sustainability, Environment and Development Economics, Vol. 11, 275–300

[5] Dasgupta, P., Heal. G. (1974): The Optimal Depletion of Exhaustible Resources, The Review of Economic Studies, Vol. 41, (symposium issue), 3–28

[6] Dixit, A., Hammond, P., Hoel, M. (1980): On Hartwick's Rule for Regular Maximin Paths of Capital Accumulation and Resource Depletion, The Review of Economic Studies, Vol. 47, No. 3, 551–556

[7] Feichtinger, G., Hartl, R. (1986): Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse, W. Gruyter, Berlin – New York (in German).

[8] Hartwick, J. M. (1977): Intergenerational Equity and the Investing of Rents from Exhaustible Resources, The American Economic Review, Vol. 67, No. 5., 972–974

[9] Martinet, V. (2004): The Hartwick Rule and the Characterization of Constant Consumption Paths in the Presence of an Exhaustible Resource, Working Paper, THEMA

[10] Martinet, V., Doyen, L. (2007): Sustainability of an economy with an exhaustible resource: A viable control approach, Resource and Energy Economics, Vol. 29, 17–39

[11] Martinet, V., Rotillon, G. (2007): Invariance in growth theory and sustainable development, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 31, 2827-2846

[12] Mitra, T. (2002): Intertemporal Equity and Efficient Allocation of Resources, Journal of Economic Theory, Vol. 107, 356–376

[13] Mitra, T. (2008): On competitive equitable paths under exhaustible resource constraints: The case of a growing population, International Journal of Economic Theory, Vol. 4, Issue 1, 53–76

[14] Ramsey, F. P. (1928): A mathematical Theory of Saving, Economic Journal, Vol. 38, 543–559

[15] Rawls, J. (1971): A Theory of Justice, Harvard University Press, Cambridge

[16] Seierstad, A., Sydsæter, K. (1987): Optimal Control Theory with Economic Applications, North-Holland, Amsterdam

[17] Solow, R. M. (1974): Intergenerational Equity and Exhaustible Resources, The Review of Economic Studies, Vol. 41 (symposium issue), 29–45

[18] Torres, D. F. M. (2004): Quasi-invariant optimal control problems, Portugaliæ Mathematica, Vol. 61, No. 1, 97–114

Abstract

We deal with models of sustainable economic growth in an economy with renewable as well as exhaustible capital resources, formulated as optimal control problems. For this type of models, one of the most important rules is Hartwick's rule. It states that all revenues from the extraction of exhaustible capital goods should be reinvested to reproducible capital. Based on the rigorous formulation of results from optimal control theory, we summarize the most important results on Hartwick's rule in a unified framework. We consider models of economic growth with discounted utility criterion as well as maximin criterion and shed light on the relationship between them. We provide a new or generalized formulation of some results and simplify some proofs. Then, we propose a novel model with two types of mutually substitutable exhaustible goods with different productivities. Using necessary conditions of optimality for problems with binding pure state constraints, we provide a qualitative analysis of solutions to this model. In particular, we find that it is not optimal to further exploit the resource with a constant productivity after the extraction of the resource with a growing productivity started. Moreover, we extend some results on application of Noether's theorem in optimal control problems and use them for formulating conservation laws which represent quantities that remain sustained along trajectories of optimal solutions. Finally, we also make a contribution to the optimal control theory itself. In particular, we shed light on comparison between two different sets of necessary conditions of optimality for problems with pure state constraints.

Keywords: Sustainability, Hartwick's rule, optimal control, conservation law, exhaustible resources

Zoznam vlastných publikácií

Recenzované publikácie:

[1*] Jurča, P. (2007): On sustainability Constraint in Models with Non-renewable Resources, Proceeding of 15^{th} International Scientific Conference on Mathematical Methods in Economics and Industry, Eds. K. Cechlárová, K., Halická, M., Borbeľová, V., Lacko, V., Herľany, s. 56–67

[2*] Jurča, P. (2005): The Ramsey Model of Economic Growth as an Optimal Control Problem, Journal of Electrical Engineering, Vol. 56, No. 12/s

[3*] Halická, M., Brunovský, P., Jurča, P. (2009): Optimálne riadenie. Viacetapové rozhodovacie procesy v ekonómii a financiách, EPOS, Bratislava, 204 s.

[4*] Jurča, P., Zeman, J. (2008): Macro Stress Testing of the Slovak Banking System, Working paper 1/2008, National Bank of Slovakia

Citácie:

- Festić, M., Bekö, J. (2008): The Banking Sector and Macroeconomic Performance in Central European Economies, Finance a úvěr – Czech Journal of Economics and Finance, 58, No. 3-4, s. 131 – 151
- Fidrmuc, J., Hainz, Ch. (2009): Default Rates in the Loan Market for SMEs: Evidence from Slovakia, Ifo Working Paper No. 72, Munich
- Festić, M., Repina, S. (2009): Financial Stability in the Baltics, Finance a úvěr – Czech Journal of Economics and Finance, 59, No. 6
- Festić, M., Bekö, J. (2009): The sustainability of banking sector results in three new European Union members, International Journal of Sustainable Economy, Vol. 1, No. 2, 186 – 197
- Głogowski, A. (2009): Stress Testing in the EU New Member States, in: Stress-testing the Banking System: Methodologies and Applications, Ed. Quagliariello, M., Cambridge University Press, Cambridge
- Stragiotti, F., Rychtárik, Š. (2009): Liquidity Risk Monitoring Framework: A Supervisory Tool, Cahler D'Études Working Paper, No. 43, Banque Centrale du Luxembourg

Ostatné publikácie:

[5*] Jurča, P., Rychtárik, Š. (2006): Stresové testovanie slovenského bankového sektora, BIATEC, ročník XIV, číslo 4, Národná banka Slovenska

[6*] Jurča, P., Ličák, M., Rychtárik, Š. (2005): Štrukturálne trendy a riziká v bankovom sektore, BIATEC, ročník XIII, číslo 11, Národná banka Slovenska

[7*] Jurča, P. (2009): Vývoj na trhu úverov, BIATEC, ročník XVII, číslo 11, Národná banka Slovenska

Vystúpenia na medzinárodných konferenciách (modely ekonomického rastu):

- ISCAM 2005 – Conference in Applied Mathematics for undergraduate and graduate students, Bratislava, apríl 2005
- 15th International Scientific Conference on Mathematical Methods in Economics and Industry, Herľany, jún 2007

Vystúpenia na medzinárodných konferenciách (finančná stabilita a stresové testovanie):

- First Bratislava Economic Meeting, Bratislava, jún 2008
- Christmas Financial Stability Workshop, Starý Smokovec, december 2009
- Introduction to the Functioning of the ESCB, Praha – september 2008, Praha – marec 2009, Rím – máj 2009
- Advances in Stress Testing, Praha, november 2009
- Stress Testing for Banking Systems, Viedeň, marec 2010