Udržateľnosť v modeloch optimálneho ekonomického rastu

(Obhajoba dizertačnej práce v odbore aplikovaná matematika)

Mgr. Ing. Pavol Jurča
Školiteľka: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského

22. október 2010

Modely udržateľného ekonomického rastu

- Koncepcia udržateľného ekonomického rastu zahŕňa rôzne environmentálne, sociologické a ekonomické aspekty
- Jednotne prijatá definícia udržateľnosti zatiaľ neexistuje
- Udržateľný vývoj – vývoj, ktorý zohľadňuje preferencie súčasnej generácie bez zhoršenia možnosti budúcich generácií naplniť ich vlastné preferencie
- Ciele dizertačnej práce:
  - Matematická analýza modelov udržateľnej miery rastu a spotreby v ekonomike, v ktorej je produkcia ekonomických statkov závislá od čerpania neobnoviteľných zdrojov
  - Popis optimálneho čerpania zdrojov, ak sú dokonale substituovateľné, ale ich produktivita sa mení
  - Teoretické výsledky v teórii optimálneho riadenia

Dynamika modelu

Dynamiku modelu ekonomiky s neobnoviteľnými zdrojmi možno popísať nasledovne:

$$
\begin{aligned}
&\dot{k} = d(t)f(k,r) - \delta(k) - c, \quad k(0) = k_0 > 0 \text{ dané},\\
&\dot{s} = -r, \quad s(0) = s_0 > 0 \text{ dané},\\
&k \geq 0, \quad s \geq 0, \quad r \geq 0, \quad c \geq 0,
\end{aligned}
$$

- k(t) je obnoviteľný kapitál ($k \in \mathbb{R}^N$),
- s(t) je neobnoviteľný (vyčerpateľný) kapitál ($s \in \mathbb{R}^M$),
- c(t) je spotreba obnoviteľného kapitálu ($c \in \mathbb{R}^N$),
- r(t) je miera čerpania neobnoviteľného kapitálu ($r \in \mathbb{R}^M$),
- f je produkčná funkcia,
- d je exogénne daný technologický rast,
- δ je miera amortizácie kapitálu,

Dva prístupy ku kritériu optimality

1. Úloha A. Maximalizácia celkovej diskontovanej užitočnosti:

$$\max_{\{c(t),r(t)\}} \int_0^\infty \pi(t) U(c(t), s(t))\, dt,$$

   kde $\pi(t) > 0$ je diskontný faktor, pričom $\int_0^\infty \pi(t)\, dt < \infty$.

2. Úloha B. Maximalizácia užitočnosti generácie s najnižšou mierou užitočnosti:

$$\max_{\{c(t),r(t)\}} \inf_{t \geq 0} U(c(t), s(t)).$$

   Zavedením novej stavovej premennej w môžeme toto kritérium prepísať do tvaru

$$\max_{\{c(t),r(t)\}} w(0), \quad \text{kde } t \in \langle 0, \infty),$$
$$U(c(t), s(t)) \geq w(t),$$
$$\dot{w}(t) = 0, \quad w(0) \text{ voľné.}$$

Hartwickov výsledok a Hartwickovo pravidlo

- Hartwickovho pravidlo:
  Všetky výnosy z ťažby neobnoviteľných zdrojov musia byť v plnej výške reinvestované do obnoviteľného kapitálu.

- Hartwickov výsledok pre Úlohu A:
  Nech (k, s, c, r) je prípustné vnútorné riešenie Úlohy A, ktoré spĺňa nutné podmienky optimality spolu s adjungovanými premennými (ψ^0, ψ_k, ψ_s) a nech

  $$\psi_k^T \dot{k} = \psi_s^T r \qquad \text{pre každé } t \geq 0$$

  (Hartwickovo pravidlo). Potom $U(c(t)) \equiv$ konšt. pre každé $t \geq 0$.

- Zovšeobecnenie Hartwickovho výsledku pre Úlohu A:
  Hartwickovo pravidlo možno zovšeobecniť:

  $$\psi_k^T \dot{k} - \psi_s^T r = I \qquad \text{pre každé } t \geq 0,$$

  kde I je konštanta (prípustné je iba $I \geq 0$).

- Analógia Hartwickovho výsledku pre Úlohu B:
  Multiplikátor $\mu_w(t)$ priradený k ohraničeniu $U(c(t)) \geq w(t)$ spĺňa $\mu_w(t) > 0$.

Súvislosť medzi dvoma prístupmi ku kritériu optimality

- Ak prípustné vnútorné riešenie Úlohy A spĺňa nutné podmienky optimality a Hartwickovo pravidlo, potom spĺňa aj nutné podmienky optimality pre Úlohu B, pričom pre Lagrangeov multiplikátor μ_w platí $\mu_w(t) = \pi(t)$ pre každé $t \geq 0$.
- Ak prípustné vnútorné riešenie Úlohy B spĺňa nutné podmienky optimality a predpoklad $\mu_w(t) > 0$ pre každé $t \geq 0$, potom spĺňa aj nutné podmienky optimality pre Úlohu A, pričom pre diskontný faktor π platí $\pi(t) = \mu_w(t)$ pre každé $t \geq 0$.

Obrátený Hartwickov výsledok

Hartwickov výsledok nemožno jednoducho obrátiť. Pre sformulovanie opačnej implikácie sú potrebné dodatočné predpoklady:

Obrátený Hartwickov výsledok

Nech (k^*, s^*, c^*, r^*) je prípustné vnútorné riešenie Úlohy A, ktoré spĺňa nutné podmienky optimality spolu s adjungovanými premennými (ψ^0, ψ_k, ψ_s). Ďalej predpokladajme, že je splnená aspoň jedna z nasledujúcich dvoch podmienok:

(i) (k^*, s^*, c^*, r^*) spĺňa aj podmienku nulovosti Hamiltoniánu pre $t \to \infty$, alebo

(ii) $\delta(k) = 0$ pre každé $k \geq 0$ a existuje $j = \{1, \dots, m\}$ a kladné číslo ϱ také, že

$$\frac{r_j^*(t)\frac{\partial f_i}{\partial r_j}(k^*(t), r^*(t))}{f_i(k^*(t), r^*(t))} \geq \varrho$$

pre každé $t \geq 0$ a pre každé $i = 1, \dots, n$.

Potom z podmienky $U(c^*(t)) \equiv \text{const.}$ vyplýva $\psi_k^T \dot{k}^* = \psi_s^T r^*$.

Predpoklady modelu

- Predpokladajme, že v ekonomike existujú dva dokonale substituovateľné zdroje, pričom ich hraničná miera substitúcie sa v čase mení.
- Produkčná funkcia je v Cobb-Douglasovom tvare:

$$f(t, k(t), r_1(t), r_2(t)) = k(t)^{\alpha}(r_1(t) + d(t)r_2(t))^{1-\alpha},$$

(Predpokladáme, že $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ a d je kladná spojitá rastúca funkcia).

- Je potrebné zobrať do úvahy možnosť aktívnych ohraničení na nezápornosť stavových premenných s_1 a s_2.

Kvalitatívna charakteristika riešení

Nech $(k^*, s_1^*, s_2^*, w^*, c^*, r_1^*, r_2^*)$ je optimálne riešenie vyššie popísaného modelu, ktoré je regulárne (t.j. $\mu_w(t) > 0$) a platí $k(t) > 0$, $c(t) > 0$ a $r_1(t) + d(t)r_2(t) > 0$ pre každé $t > 0$. Potom existuje také $T \geq 0$, že miery ťažby $r_1^*(t)$ a $r_2^*(t)$ neobnoviteľných zdrojov majú nasledujúci tvar:

$$\begin{array}{llll} \text{Pre každé } t \in \langle 0, T \rangle : & r_1^*(t) > 0 & \text{a} & r_2^*(t) = 0, \\ \text{pre každé } t \in (T, \infty) : & r_1^*(t) = 0 & \text{a} & r_2^*(t) > 0. \end{array}$$

Interpretácia:

Pokiaľ začneme čerpať druhý neobnoviteľný zdroj, ktorého produktivita je rastúca, už nie je optimálne vrátiť sa k čerpaniu prvého zdroja (t.j. prípadné čerpanie prvého zdroja musí nastať skôr).

Výsledok analogický s Hartwickovým výsledkom

Predpoklad: Účelová funkcia v tvare A (maximalizácia celkovej diskontovanej užitočnosti).

Ak prípustné slabo vnútorné riešenie $(k^*, s_1^*, s_2^*, c^*, r_1^*, r_2^*)$ spĺňa nutné podmienky optimality a nasledujúcu rovnosť:

$$\underbrace{\psi_k(t)\dot{k}^*(t) + \psi_1(t)\dot{s}_1^*(t) + \psi_2(t)\dot{s}_2^*(t)}_{\text{Celková súčasná hodnota čistých investícií}} = \underbrace{\int_0^t \psi_k(\tau)\frac{\partial f}{\partial r_2}\frac{\dot{d}(\tau)}{d(\tau)}r_2^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{Čistý efekt času na produkciu}}$$

potom $U(c)$ je konštantná.

Interpretácia: Čistý efekt času na produkciu je súčinom nasledujúcich faktorov:

- ψ_k – diskontovaná tieňová cena jednotky kapitálu,
- $\frac{\partial f}{\partial r_2}$ – aktuálna hraničná produkcia pri zmene r_2 o jednotku,
- $\frac{\dot{d}(\tau)}{d(\tau)}$ – miera rastu produktivity r_2,
- r_2 – miera ťažby druhého neobnoviteľného zdroja.

Zákony zachovania

- Martinet a Rotillon (2007): analýza udržateľnosti ekonomického rastu pomocou tzv. zákonov zachovania
  - využíva sa invariantnosť modelov vzhľadom na transformáciu stavových a riadiacich premenných.
- V dizertačnej práci boli nájdené príslušné zákony zachovania aj za slabších predpokladov – v tzv. kvázi-invariantných úlohách (t.j. postačuje iba invariantnosť stavových rovníc).
- Za predpokladu homogénnej produkčnej funkcie rádu 1 sú stavové rovnice v Úlohách A aj B škálovo invariantné, čo vedie na zákon zachovania

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_k^T k + \psi_s^T s) + \psi^0 \pi \left(\frac{\partial U}{\partial c}(c,s)\, c + \frac{\partial U}{\partial s}(c,s)\, s \right) \equiv 0.$$

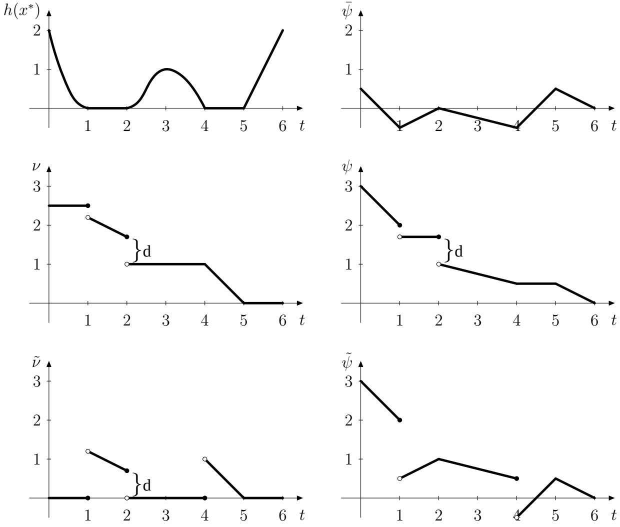
- V prípade funkcie užitočnosti s konštantnou relatívnou averziou k riziku máme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_k^T k + \psi_s^T s) = -(1-\theta)\pi U(c,s).$$

Výsledky v teórii optimálneho riadenia (1)

Porovnanie multiplikátorov podľa Seierstada a Sydsætera (1987) (ψ,ν) a podľa Feichtingera a Hartla (1986) ($\tilde{\psi}$,$\tilde{\nu}$):

- h(x): čisté ohraničenia na stavové premenné,
- ψ, $\tilde{\psi}$: adjungované premenné,
- ν, $\tilde{\nu}$: Lagrangeove multiplikátory pre čisté ohraničenia na stavové premenné.



Výsledky v teórii optimálneho riadenia (2)

Nech prípustné riešenie spĺňa nutné podmienky podľa Seierstada a Sydsætera (1987) spolu s ψ^0, $\psi(t)$, $\mu(t)$ a $\nu(t)$. Potom toto riešenie spĺňa aj nutné podmienky podľa Feichtingera a Hartla (1986) (s možnou výnimkou podmienky súčasnej nenulovosti multiplikátorov) spolu s

$$\tilde{\nu}_j(t) := \begin{cases} 0 & \text{ak } h_j(x^*(t)) > 0 \text{ alebo } t \text{ je vstupný alebo kontaktný čas,} \\ \nu_j(t) - \nu_j(\tau^+) & \text{ak } h_j(x^*(t)) = 0 \text{ a } t \text{ nie je vstupný ani kontaktný čas,} \end{cases}$$

kde τ je výstupný čas, ktorý je najbližší výstupný čas väčší alebo rovný t (resp. koncový bod časového horizontu, ak taký výstupný čas neexistuje),

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^T(t) &:= \psi^T(t) - \tilde{\nu}^T(t)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x^*(t)), \\ \tilde{\psi}^0 &:= \psi^0, \\ \tilde{\eta}(t) &:= \left(\nu(t^-) - \tilde{\nu}(t^-)\right) - \left(\nu(t^+) - \tilde{\nu}(t^+)\right), \\ \tilde{\mu}(t) &:= \mu(t). \end{aligned}$$

Výsledky v teórii optimálneho riadenia (3)

Nech prípustné riešenie spĺňa nutné podmienky podľa Feichtingera a Hartla (1986) spolu s $\tilde{\psi}^0$, $\tilde{\psi}(t)$, $\tilde{\mu}(t)$, $\tilde{\nu}(t)$ a $\tilde{\eta}(t)$. Potom toto riešenie spĺňa aj nutné podmienky podľa Seierstada a Sydsætera (1987) (s možnou výnimkou podmienky maxima) spolu s

$$\begin{aligned}
\psi(t)^T &:= \tilde{\psi}(t)^T + \tilde{\nu}(t)^T \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x^*(t)), \\
\psi^0 &:= \tilde{\psi}^0, \\
\mu(t) &:= \tilde{\mu}(t), \\
\nu(t) &:= \tilde{\nu}(t) + \sum_{\tau \geq t} \tilde{\eta}(\tau).
\end{aligned}$$

Na vlastnom príklade sme ukázali, že podmienky podľa Seierstada a Sydsætera (1987) môžu byť silnejšie:

- prípustné riešenie spĺňa všetky nutné podmienky podľa Feichtingera a Hartla (1986)
- nespĺňa podmienku maxima podľa Seierstada a Sydsætera (1987).

Najvýznamnejšie výsledky dizertačnej práce:

1. Analýza modelov udržateľného ekonomického rastu:
   - Kvalitatívna charakteristika riešení modelu s dvoma dokonale substituovateľnými neobnoviteľnými zdrojmi a odvodenie analógie Hartwickovho výsledku
   - Výsledky týkajúce sa Hartwickovho výsledku (čiastočne publikované v zborníku konferencie MMEI 2007):
     - formulácia tvrdení na základe presnej formulácie nutných podmienok optimality
     - súhrnná formulácia obráteného Hartwickovho výsledku
     - nový spôsob odvodenia Hartwickovho pravidla pre model s rastom počtu obyvateľov
     - vzájomný súvis dvoch typov účelovej funkcie
   - Odvodenie nového zákonu zachovania (vzťah medzi celkovou hodnotou všetkých typov kapitálu a diskontovanou hodnotou užitočnosti) na základe kvázi-invariantných vlastností skúmaných modelov
2. Výsledky v teórii optimálneho riadenia:
   - Vzájomný vzťah medzi dvoma rôznym formuláciami nutných podmienok optimality pre úlohy s čistými stavovými ohraničeniami
   - Formulácia a dôkaz tvrdení o spojitosti adjungovaných premenných, Lagrangeových multiplikátorov a Hamiltonovej funkcie

Ďakujem za pozornosť.