

VEDECKÁ RADA FAKULTY MATEMATIKY,
FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Mgr. Soňa Kilianová

Autoreferát dizertačnej práce

Stochastické dynamické optimalizačné modely dôchodkového plánovania

na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia:
11-14-09 Aplikovaná matematika

Bratislava 2008

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre aplikovanej matematiky a štatistiky, Fakulty matematiky, fyziky a informatiky (FMFI) Univerzity Komenského (UK) v Bratislave.

Predkladateľ: Mgr. Soňa Kilianová
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI - UK v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Školiteľ: Doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI - UK v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Oponenti:

Autoreferát bol rozoslaný dňa:

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa: o pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia 11-14-09 Aplikovaná matematika vymenovanou podpredsedom spoločnej odborovej komisie dňa na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Podpredseda spoločnej odborovej komisie:
Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI - UK v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

1 Úvod

V posledných desaťročiach mnohé európske i zámorské krajiny prijali viaceré ekonomické a sociálne reformy. Dôchodková reforma je jednou z najdiskutovanejších tém i v Slovenskej republike. Hlavným dôvodom prijatia reformy dôchodkového systému vo väčšine krajín bolo predpovedané rýchle starnutie populácie z dôvodu nízkej miery reprodukcie obyvateľstva a zvýšenej očakávanej dĺžky života. Kým doposiaľ v Európskej únii (EÚ) prispievali na jedného dôchodcu štyria ľudia v produktívnom veku, podľa Svetovej banky a Medzinárodného menového fondu ([4], [2]) sa ich do roku 2050 očakáva iba polovičný počet. Ďalším dôvodom reformy v EÚ je zvýšená vnútorná migrácia pracovnej sily. Reformy dávajú do užšieho súvisu dôchodkové odvody a príspevky, predlžujú dobu pripievania zvýšením veku odchodu do dôchodku a diverzifikujú zdroje dôchodkových dávok.

Objavili sa dva základné typy dôchodkových reforiem. Parametrický typ spočíva v zmene spôsobu indexácie dávok, predlžovaní dôchodkového veku, predlžovaní doby povinných platieb odvodov do systému, pritvrzovaní podmienok výplaty dávok, a v efektívnejšej administratíve ([13]). Paradigmatický ([4]) typ reformy znamená zásadnú zmenu v štruktúre dôchodkového systému. Dovtedy monopolný priebežný systém bol nahradený viac-pilierovým systémom. Dôchodkové benefity sa tak rozkladajú medzi viaceré zdroje. Väčšinou sa jedná o troj-pilierové systémy. Prvý pilier predstavuje priebežný systém dôchodkového zabezpečenia, kde aktívna pracovná sila prispieva na dôchodky dôchodcom. Druhý pilier spočíva v pravidelnom odvádzaní príspevkov na osobný dôchodkový účet, kde sú prostriedky zhodnocované a sporené v prospech vlastnej budúcnosti sporeteľa. Tretí pilier sa týka dobrovoľného doplnkového dôchodkového sporenia a je vo väčšine krajín iba málo využívaný. Príkladmi krajín, ktoré prijali troj-pilierový systém, sú Bulharsko, Chorvátsko, Dánsko, Maďarsko, Litva, Lotyšsko, Slovenská republika, Švédsko, Veľká Británia, Chile, Spojené Štáty Americké, Rusko a iné.

2 Štruktúra dôchodkového systému Slovenskej republiky

”Troj-pilierová” dôchodková reforma v Slovenskej republike bola uvedená do platnosti v januári 2004. Prvý pilier je založený na priebežnom systéme odvádzania príspevkov pre dôchodcov. Druhý pilier pozostáva z dôchodkového sporenia občanov na osobných dôchodkových účtoch spravovaných dôchodkovými správcovskými spoločnosťami. Dobrovoľný tretí pilier je určený pre doplnkové dôchodkové sporenie.

Ľudia, ktorí po prvý krát vstúpili na pracovný trh pred januárom 2004, mali možnosť výberu, či si želajú zostať výhradne v priebežnom systéme, alebo sa chcú zapojiť aj do druhého, kapitalizačného piliera. Nová pracovná sila po januári 2004 mala vstup doňho povinný. Výška odvodov pre účastníkov oboch pilierov je stanovená na 9% z hrubej mzdy do priebežného piliera a 9% do kapitalizačného piliera.

Prostriedky v druhom pilieri sú spravované dôchodkovými správcovskými spoloč-

Fond	Akcie	Dlhopisy
Rastový fond (1)	najviac 80%	aspoň 20%
Vyvážený fond (2)	najviac 50%	aspoň 50%
Konzervatívny fond (3)	žiadne	100%

Tabuľka 1: Obmedzenia na investície pre jednotlivé typy dôchodkových fondov v Slovenskej republike.

nosťami (DSS). Každá z nich je zo zákona povinná umožniť sporiteľom investovanie v troch rôznych fondoch, ktoré sa navzájom odlišujú v ich rizikových profiloch. Rastový fond je najrizikovejší, s potenciálne najvyšším výnosom. Zákon povoľuje DSS v Rastovom investovať až 80% prostriedkov do rizikových aktív, napr. akcií. Zvyšných minimálne 20% musí byť uložených do relatívne bezrizikových, alebo nízko rizikových pozícií, napr. do dlhopisov. Prostriedky vo Vyváženom fonde smú byť rozložené medzi rizikové a nízko rizikové aktíva v pomere 50 : 50 percent. Najmenej rizikový je Konzervatívny fond, ktorého prostriedky DSS nesmú investovať do rizikových aktív. Zároveň sa však očakáva, že Konzervatívny fond ponúka najnižší výnos. V Tabuľke 1 uvádzame zhrnutie týchto obmedzení.

Sporitelia v druhom pilieri majú možnosť si podľa vlastného uváženia vybrať jeden zo spomínaných troch fondov. Navyše, svoje rozhodnutie môžu kedykoľvek zmeniť, avšak nie častejšie ako jedenkrát za rok. To znamená, že sporitelia môžu do istej miery ovplyvniť výšku svojej nasporenej sumy a zároveň neistotu jej dosiahnutia.

Pripomeňme ešte, že existujú vládne regulačné obmedzenia, ktoré nepovoľujú investovať do Rastového fondu v období 15 a menej rokov pred plánovaným odchodom do dôchodku, a nariaďujú investovať do Konzervatívneho fondu aspoň posledných 7 rokov dôchodkového sporenia. V prípade predčasného úmrtia sporiteľa sa nasporená suma stáva predmetom dedenia.

3 Ciele

Cieľom dizertačnej práce bolo vybudovať matematicko-štatistický aparát uľahčujúci sporiteľom rozhodovanie o výbere typu dôchodkového fondu. K problému sme pristupovali dvoma rôznymi spôsobmi:

- I maximalizuje sa očakávaná užitočnosť sporiteľa z nasporenej sumy po skončení sporenia v okamihu odchodu do dôchodku,
- II minimalizuje sa rizikovosť investícií, teda neistota dosiahnutia určitej želananej sumy.

Predpokladom prvého prístupu je, že úžitková funkcia sporiteľa je známa. Špecifikovaním úžitkovej funkcie sa špecifikuje aj sporiteľov postoj k riziku, ktorý je vyjadrený

koeficientom averzie k riziku. Predpokladom druhého prístupu je, že sporiteľ má stanovenú cieľovú sumu, ktorú by chcel sporením dosiahnuť. Pritom platí pravidlo, že čím vyššia želaná suma, tým vyššie riziko spojené s investovaním.

Ciele dizertačnej práce sú:

- vybudovať matematický model založený na maximalizácii očakávanej užitočnosti,
- vybudovať matematický model založený na minimalizácii rizikovosti investícií za predpokladu stanovenia želanej sumy,
- navrhnúť numerické schémy pre oba typy modelov a implementovať ich pre prípad Slovenskej republiky,
- preskúmať citlivosť výsledkov na meniace sa parametre modelov,
- zosumarizovať všeobecné pravidlá pre rozhodovanie o výbere fondov na základe experimentálnych výsledkov.

4 Dosiahnuté výsledky

4.1 Dynamický akumulčný model

Dynamický akumulčný model (DAM) je prvým z nami vybudovaných modelov, založených na maximalizácii očakávanej užitočnosti z nasporenej sumy. Model bol prezentovaný autorkou a spoluautormi v článkoch [1*], [2*]. V modeli DAM budeme označovať

T	očakávaný čas odchodu do dôchodku,
J	počet typov fondov,
r_t^j	výnos fondu j v čase t ,
u_t	akumulovaná nasporená suma v čase t ,
w_t	hrubá mzda v čase t ,
β_t	rast miezd v čase t definovaný pomocou $w_{t+1} = w_t(1 + \beta_t)$,
d_t	podiel akumulovanej sumy u_t ku mzde w_t ,
τ	výška pravidelného odvodu ako percento z hrubej mzdy.

Predpokladajme teda, že sporiteľ s očakávaným odchodom do dôchodku o T rokov odvádza jedenkrát ročne časť τ zo svojej hrubej mzdy w_t do niektorého z fondov $j \in \{1, \dots, J\}$. Keďže peňažné prostriedky fondov sú investované na finančných trhoch, o výnosoch fondov predpokladáme, že sú stochastické. Rovnice popisujúce vývoj nasporenej akumulovanej sumy u_t v čase sú

$$\begin{aligned} u_0 &= w_1 \tau, \\ u_{t+1} &= u_t(1 + r_t^j) + w_{t+1} \tau, \quad t = 0, 1, \dots, T - 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Je rozumné predpokladať, že v čase odchodu do dôchodku sa bude dôchodca snažiť o udržanie životného štandardu, na aký bol zvyknutý na konci sporenia. Z tohto pohľadu nie je dôležitá absolútna nasporená suma, ale jej relatívna výška ako násobok poslednej mzdy. Preto zdefinujeme novú premennú $d_t = u_t/w_t$, ktorej vývoj budú popisovať rovnice

$$\begin{aligned} d_0 &= \tau, \\ d_{t+1} &= F_t(d_t, j), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \end{aligned} \quad (2)$$

kde

$$F_t(d, j) = d \frac{1 + r_t^j}{1 + \beta_t} + \tau, \quad t = 0, 1, \dots, T-1. \quad (3)$$

Sporiteľovo rozhodovanie o výbere fondu je založené na jeho informácii, ktorú má v čase t .

Predpoklad A1. Výnosy fondov r_t^j sú stochastické pre všetky j, t , a sú pre fixované j navzájom nezávislé v čase.

Predpoklad A2. Miery rastu miezd $\beta_t, t = 0, 1, \dots, T$, sú deterministické a známe.

Za predpokladov A1 a A2 je všetka relevantná informácia obsiahnutá iba vo výške doposiaľ nasporenej relatívnej sumy d_t . Teda $j \equiv j(t, d_t)$. Za cieľom maximalizácie sporiteľovho úžitku môžeme naformulovať úlohu stochastického dynamického programovania:

$$\max_{\mathcal{J}} E(U(d_T)) \quad (4)$$

s ohraničeniami

$$\begin{aligned} d_0 &= \tau, \\ d_{t+1} &= F_t(d_t, j(t, d_t)), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \end{aligned} \quad (5)$$

kde maximum sa uvažuje cez všetky možné stratégie $\mathcal{J} = \{j(t, d_t) : t = 0, 1, \dots, T-1\}$. Symbol U označuje úžitkovú funkciu sporiteľa. Nasledovná veta hovorí o spôsobe nájdenia optimálneho riešenia pre túto úlohu.

Veta 4.1. Optimálna stratégia úlohy (4)-(5) je riešením Bellmanovej rovnice

$$V_t(d) = \max_{j \in \{1, 2, \dots, J\}} \mathbb{E}[V_{t+1}(F_t(d, j, r_t^j))] = \mathbb{E}[V_{t+1}(F_t(d, j(t, d), r_t^j))], \quad (6)$$

pre $t = 0, 1, \dots, T-1$, kde $V_T(d) = U(d)$. Optimálna stratégia $j(t, d_t)$ systému rovníc (6) sa dá nájsť rekurentne od koncového času T po čas 0.

Dôkaz vety je založený na zákone iterovaných čakávaní platnom pre stredné hodnoty podmienené filtráciou informácií ([1, pg. 34],[8]). Možno ho nájsť v predkladanej dizertačnej práci.

Optimálna stratégia určená podľa (6) dáva sporiteľovi informáciu o optimálnom výbere fondu pre každý čas t v závislosti od výšky dovtedy nasporenej sumy d_t . Za predpokladu, že stochastickosť výnosov fondov r_t^j je popísaná hustotou f_t^j pravdepodobnostného rozdelenia, môžeme rovnicu (6) prepísať v integrálnom tvare

$$\begin{aligned}
V_t(d) &= \max_{j \in \Delta_t} \mathbb{E}[V_{t+1}(F_t(d, j, r_t^j))] \\
&= \max_{j \in \Delta_t} \int_{\mathbb{R}} V_{t+1} \left(d \frac{1+r}{1+\rho_t} + \tau \right) f_t^j(r) dr \\
&= \max_{j \in \Delta_t} \int_{\mathbb{R}} V_{t+1}(y) f_t^j \left((y - \tau) \frac{1+\rho_t}{d} - 1 \right) \frac{1+\rho_t}{d} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} V_{t+1}(y) f_t^{j(t,d)} \left((y - \tau) \frac{1+\rho_t}{d} - 1 \right) \frac{1+\rho_t}{d} dy
\end{aligned} \tag{7}$$

pričom sme použili substitúciu $y = d(1+r)(1+\rho_t)^{-1} + \tau$. Znak \mathbb{R} označuje množinu reálnych čísel, Δ_t označuje vládne obmedzenia regulujúce výber fondu.

4.2 Model proporcionálnych investícií

Modifikáciou modelu DAM je tzv. Model proporcionálnych investícií (Proportional investment allocation model, PIAM). Predpokladajme, že všetky fondy investujú finančné prostriedky do rovnakej skupiny aktív $i \in \{1, \dots, I\}$. Fondy sa od seba odlišujú mierou zastúpenia aktív i v ich portfóliu. Ak niektoré aktívum v investičnej stratégii fondu zatúpené nie je, uvažujeme ho s váhou 0. V jednoduchom prípade predpokladajme $I = 2$, pričom fondy investujú do akcií s váhou $\theta_t \in [0, 1]$ a do dlhopisov s váhou $1 - \theta_t$. V prípade Slovenskej republiky, ak označíme Rastový, Vyvážený a Konzervatívny fond v poradí 1, 2, 3, tak platí $\theta_t^1 = 0.8$, $\theta_t^2 = 0.5$ a $\theta_t^3 = 0$. Horné indexy označujú poradové číslo fondu.

Namiesto úlohy výberu jedného z J fondov sa môžeme pýtať podobnú otázku: aké je optimálne zastúpenie akciovej zložky v každom čase t ? Premenná θ_t sa teda stáva novou riadiacou premennou, namiesto presného určenia fondu j . Sporiteľ si potom môže vybrať fond, ktorého akciová zložka je najbližšie k vypočítanému optimálnemu θ_t . Podobná verzia tohto modelu bola tiež studovaná v [9].

Pre lepšie teoretické výpočty budeme používať spojité úročenie. Výnosy fondov označíme R_t a budeme o nich opäť predpokladať, že sú normálne rozdelené. Teda predpokladáme

$$R_t \sim N(\mu(\theta_t), \sigma^2(\theta_t)).$$

R_t má pravdepodobnostnú funkciu hustoty

$$g_t(R) = \frac{1}{\sigma(\theta_t)\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(R - \mu(\theta_t))^2}{2\sigma^2(\theta_t)} \right\}.$$

Ak označíme $R_t^{(s)}$ a $R_t^{(b)}$ náhodné premenné výnosov akcií a dlhopisov s príslušnými strednými hodnotami $\mu^{(s)}$ a $\mu^{(b)}$ a volatilitami $\sigma^{(s)}$ a $\sigma^{(b)}$, tak pre výnosy fondov a ich

volatility platia vzťahy

$$\mu(\theta_t) = \theta_t \mu_t^{(s)} + (1 - \theta_t) \mu_t^{(b)}, \quad (8)$$

$$\sigma^2(\theta_t) = \theta_t^2 (\sigma_t^{(s)})^2 + 2\theta_t(1 - \theta_t) \sigma_t^{(s)} \sigma_t^{(b)} \text{corr}(R_t^{(s)}, R_t^{(b)}) + (1 - \theta_t)^2 (\sigma_t^{(b)})^2, \quad (9)$$

kde corr je korelačný koeficient náhodných premenných $R_t^{(s)}$ a $R_t^{(b)}$. Pri spojitom úročení dostávame $d_{t+1} = F_t(d, \theta_t, y)$, kde

$$F_t(d, \theta_t, y) = d_t \exp \left\{ \mu(\theta_t) - \frac{1}{2} \sigma^2(\theta_t) - \beta_t + \sigma(\theta_t) y \right\} + \tau, \quad t = 1, \dots, T, \quad (10)$$

začínajúc z bodu $d_0 = \tau$. Parameter y tu predstavuje realizáciu náhodnej premennej $\Psi \sim N(0, 1)$. Podľa (6), optimálnu stratégiu môžeme nájsť ako riešenie rekurentnej rovnice

$$V_t(d) = \max_{\theta_t \in \Delta_t^\theta} \int_{\mathbb{R}} V_{t+1} \left(d \exp \left\{ \mu(\theta_t) - \frac{1}{2} \sigma^2(\theta) - \beta_t + \sigma(\theta_t) y \right\} + \tau \right) f(y) dy, \quad (11)$$

pre $t = T - 1, \dots, 1$, kde $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{y^2}{2}\}$ je funkcia hustoty štandardného normálneho rozdelenia. Pre funkciu V platí nasledovné tvrdenie.

Tvrdenie 4.1. Ak funkcia $U(d)$ je spojitá a rastúca v d , tak aj funkcia $V_t(d)$ je spojitá a rastúca v d .

Nahradme teraz v rovnici (11) časový krok 1 iba malým časovým krokom $\epsilon > 0$. Uvažovaním nekonečne malého $\epsilon \rightarrow 0^+$ sa dá odvodiť nasledovná parciálna diferenciálna rovnica pre funkciu V .

Veta 4.2. Funkcia V je riešením plne nelineárnej parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{\theta_t \in \Delta_t^\theta} \left\{ (d(\mu(\theta_t) - \beta) + \tau) \frac{\partial V}{\partial d} + \frac{1}{2} d^2 \sigma^2(\theta_t) \frac{\partial^2 V}{\partial d^2} \right\} = 0. \quad (12)$$

s terminálovou podmienkou $V_T(d) = U(d)$ pre $d > 0$. Optimálna hodnota θ_t je určená ako argument maxima vystupujúceho v rovnici.

4.3 Modely minimalizujúce riziko

Neistota náhodného výnosu v budúcnosti môže byť meraná viacerými spôsobmi. Slúžia na to takzvané miery rizika. Jedným príkladom miery rizika je štandardná odchýlka náhodnej premennej, ktorú vo svojej teórii o optimalizácii portfólia používal i Markowitz [7]. Neskôr sa však odhalili niektoré nevhodné vlastnosti štandardnej odchýlky na meranie rizikovosti investícií. Príkladom je fakt, že štandardná odchýlka považuje za nepriaznivé veľmi nízke zisky, ale i veľmi vysoké. Vhodnými alternatívami na meranie rizikovosti investície je napríklad v praxi veľmi používaná miera value-at-risk deviation, ktorá je funkciou kvantilového typu.

Predpokladajme, že máme dané pravdepodobnostné rozdelenie budúceho majetku Y . Potom miera value-at-risk z náhodnej premennej Y na úrovni α je tá najväčšia hodnota majetku, ktorá sa prekročí s pravdepodobnosťou $1 - \alpha$. V praxi sa typicky používajú nízke hodnoty α , zvyčajne 0.5%, 1% alebo 5%. Pri použití tejto miery rizika považujeme za akceptovateľné pozície, ak v menej ako α prípadoch nastanú potiaže.

Definícia 4.1. Miera value-at-risk $VaR_\alpha(Y)$ z náhodnej premennej zisku Y s distribučnou funkciou F na úrovni spoľahlivosti α , $0 < \alpha < 1$, je definovaná ako α -kvantil $F^{-1}(\alpha)$, tzn.

$$VaR_\alpha(Y) = F^{-1}(\alpha) = \inf\{u : F(u) \geq \alpha\}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Value-at-risk deviation z náhodnej premennej zisku Y na úrovni spoľahlivosti α je definovaná ako rozdiel

$$VaRD_\alpha(Y) = \mathbb{E}(Y) - VaR_\alpha(Y), \quad 0 < \alpha < 1,$$

kde $\mathbb{E}(Y)$ označuje štatistickú strednú hodnotu náhodnej premennej Y . Poznamenajme, že $VaRD_\alpha$ môže nadobúdať aj záporné hodnoty.

Nevýhodou miery value-at-risk je, že nie je konvexná, čo sťažuje optimalizáciu. Zavádzame ďalšiu mieru rizika, od nej odvodenú. Tá sa nazýva average value-at-risk deviation, známa i pod menami conditional value-at-risk deviation či tail value-at-risk deviation. Definovaná je všeobecne nasledovným spôsobom.

Definícia 4.2. [14] Nech Y je náhodná premenná zisku s distribučnou funkciou F , ktorá môže byť nepojitá. Nech F_α je distribučná funkcia α -chvosta, ktorá sa rovná 1 pre zisky prekračujúce VaR_α , a rovná sa $\frac{F}{\alpha}$ pre zisky menšie alebo rovné úrovni VaR_α . Miera average value-at-risk náhodnej premennej Y na úrovni α je definovaná ako stredná hodnota distribúcie α -chvosta, t.j. F_α .

To znamená, že pre spojité náhodné premenné je average value-at-risk definovaná ako integrál

$$AVaR(Y) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(u) du. \quad (13)$$

Opäť, average value-at-risk deviation je definovaná ako rozdiel strednej hodnoty a average value-at-risk, teda

$$AVaRD(Y) = \mathbb{E}(Y) - AVaR(Y). \quad (14)$$

Mnohé vlastnosti miery average value-at-risk je možné nájsť v [10]. Ako sme už naznačili, výhodou tejto miery rizika je, že sa dá ekvivalentne prepísať do tvaru uľahčujúceho optimalizáciu. Konkrétne, platí nasledovná veta.

Veta 4.3. [12] Average value-at-risk náhodnej premennej Y na úrovni α môže byť reprezentovaná ako optimálna hodnota nasledujúcej optimalizačnej úlohy:

$$AVaR_\alpha(Y) = \max_{x \in \mathbb{R}} \left\{ x - \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}([Y - x]^-) \right\} \quad (15)$$

kde $[g]^- = \max\{-g, 0\}$ označuje negatívnu časť funkcie g . Maximum v (15) sa nadobúda.

Túto vlastnosť budeme využívať pri budovaní modelov založených na minimalizácii miery average value-at-risk deviation. Modely boli prezentované v [3*].

Pred samotným prístupom k opisu modelov upozorníme na jeden dôležitý rozdiel oproti modelom DAM a PIAM: namiesto možnosti vybrať si v jednom časovom okamihu iba jediný fond povolíme rozdelenie investície do viacerých fondov súčasne. Preto, rozhodovacou premennou v čase t už nebude číslo fondu j , ale množstvá $y_t^j \geq 0$, ktoré sporiteľ investuje do fondov $j \in \{1, \dots, J\}$. Ich vektor budeme označovať $\mathbf{y}_t = [y_t^1, \dots, y_t^J]^\top$.

Prvý z modelov nazveme TRMM (Terminal Risk Minimizing Model) a budeme v ňom uvažovať sporiteľa, ktorý chce minimalizovať neistotu svojho záverečného majetku, t.j. nasporenej sumy v čase T odchodu do dôchodku. Pritom vývoj jeho dôchodkového účtu v medzičasoch ho nezaujíma.

Keď označíme $s_t^j = \frac{1+r_t^j}{1+\beta_t}$ výnosy fondov upravené o rast miezd a vektor $\mathbf{s}_t = [s_t^1, \dots, s_t^J]^\top$, tak evolučné rovnice pre hodnotu majetku sú potom

$$\mathbf{y}_0^\top \mathbf{1} = \tau, \quad (16)$$

$$\mathbf{y}_t^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{t-1}^\top \mathbf{s}_t + \tau \quad \text{pre všetky } t \in \{1, \dots, T-1\}, \quad (17)$$

$$\mathbf{y}_T^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{T-1}^\top \mathbf{s}_T, \quad (18)$$

$$\mathbf{y}_t \geq \mathbf{0} \quad \text{pre všetky } t \in \{1, \dots, T\}. \quad (19)$$

Význam týchto rovníc je samozrejímavý: v čase $t = 0$ rozdeľujeme medzi jednotlivé fondy iba sumu rovnú výške prvého odvodu τ . V časoch $t = 1, \dots, T-1$ sa čiastky investované do jednotlivých fondov zhodnocujú príslušnými výnosmi (skalárny súčin $\mathbf{y}_{t-1}^\top \mathbf{s}_t$) a pridáva sa nový pravidelný príspevok τ . Suma takto získaná, t.j. suma na pravej strane rovnice (17), sa opäť prerozdeľuje medzi fondy. Posledná rovnica hovorí, že na konci sporenia sa už príspevok τ neodvádza.

Ďalším obmedzením vystupujúcim v modeli TRMM je požiadavka minimálnej výšky nasporenej sumy v zmysle jej očakávanej hodnoty, t.j.

$$\mathbb{E}(\mathbf{y}_T^\top \mathbf{1}) \geq \mu. \quad (20)$$

Poznamenávame, že všetky ohraničenia (16) - (20) sú lineárne v premenných y_t^j .

Za účelovú funkciu vezmeme spomínanú mieru rizika average value-at-risk deviation, aplikovanú na náhodnú premennú $\mathbf{y}_T^\top \mathbf{1}$ predstavujúcu nasporenú sumu sporiteľa v koncovom čase T . Takže účelová funkcia bude mať tvar

$$g(\mathbf{y}) = \mathbb{E}(\mathbf{y}_T^\top \mathbf{1}) - AVaR_\alpha(\mathbf{y}_T^\top \mathbf{1}) \quad (21)$$

a našou snahou je ju minimalizovať vzhľadom na ohraničenia (16) - (20).

Pripomínáme, že parametre s_t^j tvoria stochastický proces. Ten môžeme aproximovať takzvaným stromov scenárov (scenario tree, [3], [8]), kde každý uzol v strome v časovej vrstve t predstavuje jeden možný stav náhodného vektora \mathbf{s}_t . V strome scenárov pre proces $\mathbf{s}_t, t = 0, 1, \dots, T$, budeme označovať:

0	koreň,
$\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, N\}$	množinu všetkých uzlov v strome,
S	počet koncových uzlov v strome,
$\mathcal{T} = \{N - S + 1, \dots, N\}$	množinu všetkých S koncových uzlov v strome,
$\mathcal{N}_0 = \{1, \dots, N - S\}$	množinu vnútorných uzlov,
n_-	jediného predchodcu uzla $n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$,
$\{n\}^+$	množinu nasledovníkov uzla $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$,
$\xi(n) \in \{0, \dots, T\}$	časovú vrstvu uzla $n \in \mathcal{N}$.

Prispôsobenie označenia premenných a parametrov na "stromovú reprezentáciu" je priamočiary. S využitím (15) dostávame nasledovný tvar optimalizačnej úlohy pre model TRMM:

$$\min_{\mathbf{y}} \left\{ \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m(\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1}) - \max_a \left\{ a - \frac{1}{\alpha} \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m[\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1} - a]^- \right\} \right\}. \quad (22)$$

s ohraničeniami

$$\sum_{m \in \mathcal{T}} p_m(\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1}) \geq \mu, \quad (23)$$

$$\mathbf{y}_0^\top \mathbf{1} = \tau, \quad (24)$$

$$\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{n_-}^\top \mathbf{s}_n + \tau \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}_0, \quad (25)$$

$$\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{n_-}^\top \mathbf{s}_n \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{T}, \quad (26)$$

$$\mathbf{y}_n \geq 0 \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}. \quad (27)$$

Účelová funkcia môže byť navyše prepísaná do lineárneho tvaru

$$\min_{a, \mathbf{z}, \mathbf{y}} \left(\sum_{m \in \mathcal{T}} p_m(\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1}) - a + \frac{1}{\alpha} \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m z_{m-N+S} \right), \quad (28)$$

pričom do množiny ohraničení musíme pridať dve doplnkové ohraničenia, konkrétne

$$-a + \mathbf{y}_m^\top \mathbf{1} + z_{m-N+S} \geq 0, \quad z_{m-N+S} \geq 0, \quad \text{for all } m \in \mathcal{T}. \quad (29)$$

Ekvivalentnosť týchto dvoch úloh je dokázaná v dizertačnej práci (Proposition 6.2.1). Teda, model TRMM vedie na úlohu lineárneho programovania. Platí nasledovná veta.

Veta 4.4. Existuje konštanta μ_{max} taká, že ak $\mu \leq \mu_{max}$, tak úloha minimalizácie (28) pri ohraničeníach (29), (23)–(27) nadobúda optimum.

Dôkaz vety využíva okrem iného poznatky z teórie lineárneho programovania ([11]) a nachádza sa v dizertačnej práci v podkapitole 6.2.4. Obrovský rozmer úlohy pri uvažovaní typickej doby sporenia $T = 40$ rokov však spôsobuje na bežných počítačoch implementačné problémy kvôli pamäťovej náročnosti. Preto sme model zovšeobecnil na prípad, kedy sporiteľ nemení svoje rozhodnutie o výbere fondu každý rok, ale iba raz za niekoľko rokov. Predpokladáme, že rozhodovacie okamžiky sú v rokoch $0 = t_0, t_1, \dots, t_\omega < T$. Dĺžky príslušných medziobdobí $[t_{k-1}, t_k]$ označíme $l_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, \dots, \omega$. Takáto modifikácia problému spôsobí, že ohraničenie (25) sa zmení na dvojicu ohraničení

$$\frac{\tau_n^j}{\tau} = \frac{y_n^j}{\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1}} \quad \text{for all } j \in \{1, \dots, J\}, n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}, \quad (30)$$

$$\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{n-}^\top \mathbf{s}_n + \tau_{n-}^\top \sum_{i=0}^{l_{\xi(n)}-1} (\mathbf{s}_n)^{i/l_{\xi(n)}} \quad \text{for all } n \in \mathcal{N}_0, \quad (31)$$

z ktorých (30) je nelineárne. Vyjadrením premennej τ_n^j z (30) a dosadením do (31) môžeme tieto dve ohraničenia spojiť do jedného nelineárneho ohraničenia.

Druhým modelom minimalizujúcim rizikovosť sporenia vo fondoch je model MRMM (Multi-period Risk Minimizing Model), v ktorom sporiteľ minimalizuje rizikovosť svojich úspor vo všetkých časových medziobdobiach, nie len na konci sporenia. Viac-periódová miera akceptovateľnosti average value-at-risk je definovaná vzťahom

$$AVaR_{\alpha,c}(Y; \mathcal{F}) = \sum_{t=1}^T c_t \mathbb{E}[AVaR_{\alpha_t}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1})],$$

kde $c_t \in \mathbb{R}$ sú diskontné faktory v čase t , $\alpha_t \in (0, 1)$ sú úrovne spoľahlivosti pre average value-at-risk v čase t , \mathcal{F}_{t-1} je σ -algebra reprezentujúca sporiteľovu informáciu v čase $t - 1$. Potom viac-periódová miera rizika average value-at-risk deviation je definovaná ako

$$AVaRD_{\alpha,c}(Y; \mathcal{F}) = \sum_{t=1}^T c_t \mathbb{E}[AVaRD_{\alpha_t}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1})].$$

Podobným postupom ako v jedno-periódovom prípade môžeme príslušnú optimalizačnú úlohu vyjadriť ako úlohu lineárneho programovania. Pre jej riešiteľnosť platí obdoba Vety 4.4. Avšak, pri uvažovaní rozhodovacích okamžikov iba raz za niekoľko rokov, sa opäť v ohraničeniach vyskytne nelinearita. Dostávame úlohu

$$\min_{a,z,y} \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}} c_{\xi(n)} p_n \left(\sum_{k \in \{n\}^+} (pc(k) \mathbf{y}_k^\top \mathbf{1}) - a_n + \frac{1}{\alpha} \sum_{k \in \{n\}^+} pc(k) z_{kn} \right) \quad (32)$$

s ohraničeniami

$$-a_n + \mathbf{y}_k^\top \mathbf{1} + z_{kn} \geq 0, \quad z_{kn} \geq 0, \quad \text{for all } k \in \{n\}^+, n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}, \quad (33)$$

$$\sum_{m \in \mathcal{T}} p_m (\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1}) \geq \mu, \quad (34)$$

$$\mathbf{y}_0^\top \mathbf{1} = \tau, \quad (35)$$

$$\frac{\tau_n^j}{\tau} = \frac{y_n^j}{\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1}} \quad \text{pre všetky } j \in \{1, \dots, J\}, n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}, \quad (36)$$

$$\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{n-}^\top \mathbf{s}_n + \tau_{n-}^\top \sum_{i=0}^{l_{\xi(n)}-1} (\mathbf{s}_n)^{i/l_{\xi(n)}} \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}_0, \quad (37)$$

$$\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{n-}^\top \mathbf{s}_n \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{T}, \quad (38)$$

$$\mathbf{y}_n \geq 0 \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}. \quad (39)$$

Opäť, ohraničenia (36) a (37) môžu byť spojené do jedného nelineárneho ohraničenia.

Na zvládnutie nelinearity v tomto ohraničení v oboch modeloch TRMM a MRMM navrhujeme iteračnú numerickú schému, ktorou sa úloha opäť linearizuje a dostaneme úlohu veľkorozmerného lineárneho programovania. Implementačnou výhodou okrem linearity je aj riedkosť matice reprezentujúcej ohraničenia.

4.4 Numerické schémy

4.4.1 Modely DAM a PIAM

Pre lepšiu numerickú stabilitu pri implementácii vzorca (7) pre modely DAM a PIAM sme navrhli nasledovnú numerickú schému, ktorej účelom je zlepšiť narábanie s obrovskými i veľmi malými hodnotami, ktoré nadobúda použitá mocninová úžitková funkcia

$$U(d) = -d^{1-a}, \quad d > 0, \quad (40)$$

kde $a > 0$ je konštantný relatívny koeficient averzie k riziku. Použili sme škálovaciu techniku, ktorá sa bežne používa pri podobných okolnostiach.

Nech $H_t(d)$ je ľubovoľná ohraničená kladná funkcia pre $t = 1, 2, \dots, T$. Funkciu V_t preškalujeme funkciou H_t , t.j. definujeme novú pomocnú funkciu

$$W_t(d) = H_t(d)V_t(d).$$

Pôvodnú funkciu $V_t(d)$ môžeme potom poľahky vypočítať z $W_t(d)$ pomocou $V_t(d) = W_t(d)/H_t(d)$. Pre každý časový krok t od $t = T$ do $t = 2$ potom dostávame

$$W_T(d) = H_T(d)V_T(d)$$

a

$$W_{t-1}(d) = \max_{j \in \Delta_t} \int_{\mathbb{R}} \frac{H_{t-1}(d)W_t(y)}{H_t(y)} f_t^j \left((y - \tau) \frac{1 + \rho_t}{d} - 1 \right) \frac{1 + \rho_t}{d} dy. \quad (41)$$

Škálovacie funkcie $H_t, t = T, T - 1, \dots, 2, 1$, definujeme rekurzívne pomocou predchádzajúceho vypočítaného riešenia vzťahom

$$H_T = \frac{1}{\sqrt{1 + V_T^2}}, \text{ a } H_t = \frac{1}{\sqrt{1 + V_{t+1}^2}} \text{ pre } t = T - 1, \dots, 1. \quad (42)$$

V našom algoritme počítame hodnoty funkcie $W_t = W_t(d)$ pre diskkrétne hodnoty d z časovo závislého intervalu $d \in (d_{min}, t/2)$, kde $d_{min} = d_0 = 0.09$. Horná hranica $t/2$ bola zvolená vzhľadom na maximálne očakávané hodnoty premennej d . Stochastické výnosy fondov r_t^j sú normalne rozdelené. Integrál v (41) sme aproximovali Simpsonovým pravidlom. Numerické výpočty boli realizované v prostredí softvéru Matlab.

4.4.2 Modely TRMM a MRMM

Na vysporiadanie sa s nelinearitou v ohraničení optimalizačných úloh modelov TRMM a MRMM sme navrhli použiť iteračnú schému, ktorá nelineárny člen nahradí konštantným členom určeným pomocou riešenia z predchádzajúcej iterácie.

1. zvoľ pevne štartovací bod $\tau_n^j = \tau/J$ pre všetky $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}, j \in \{1, \dots, J\}$;
2. rieš lineárny systém (32)–(39) s fixovanými parametrami τ_n^j . Získaj optimálne riešenie y_n^j pre všetky n, j .
3. vypočítaj nové τ_n^j pre všetky n, j podľa (36);
4. opakuj kroky 2,3,4, pokiaľ sa nedosiahne požadovaná presnosť normy rozdielu optimálnych hodnôt dvoch za sebou idúcich iterácií.

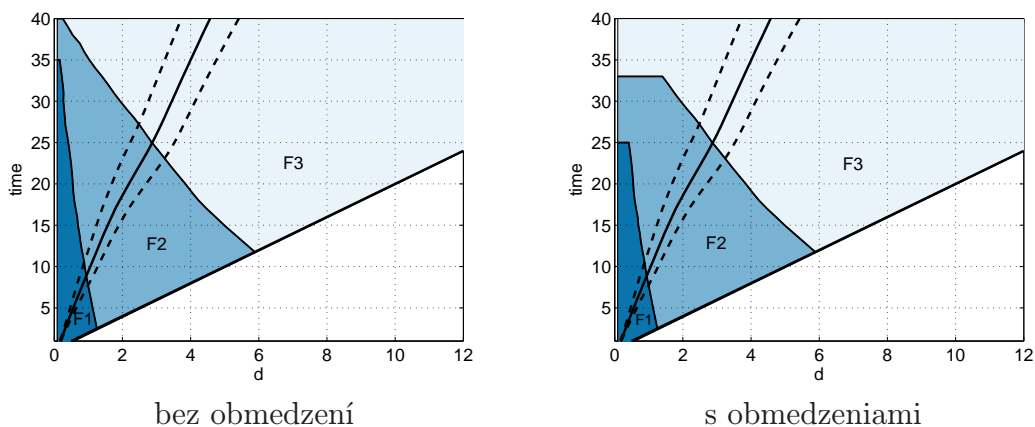
O konvergencii navrhnutej metódy pojednávame v predkladanej dizertačnej práci v podkapitole 7.4.

4.5 Výsledky

Model DAM sme implementovali pre vstupné parametre: koeficient averzie k riziku $a = 9$, stredná hodnota výnosu akcií $r^{(s)} = 0.09185$ a jeho volatilita $\sigma^{(s)} = 0.1726$, stredná hodnota výnosu dlhopisov $r^{(b)} = 0.06694$ a jeho volatilita $\sigma^{(b)} = 0.03398$, rast miezd β_t predikovaný Ekonomickým ústavom Slovenskej akadémie vied ([5]). Bariérová funkcia reprezentujúca vládne obmedzenia na výber fondov mala tvar

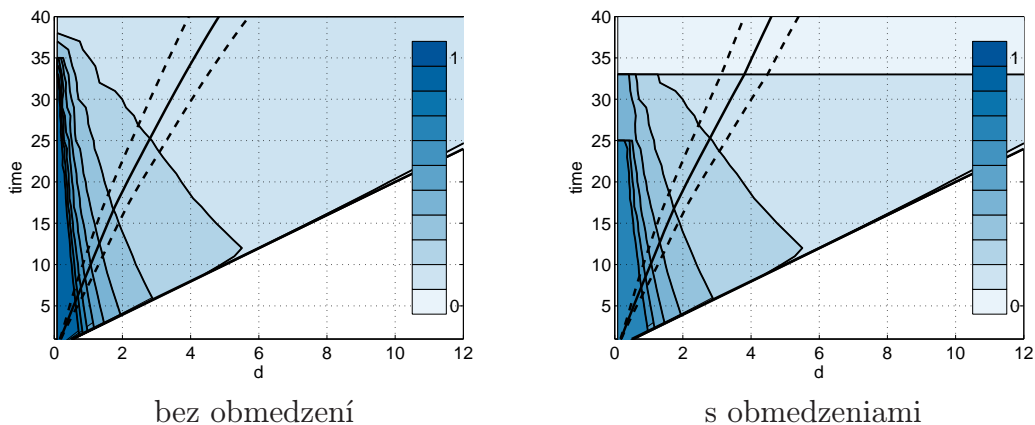
$$\Delta_t = \begin{cases} \{1, 2, 3\} & \text{if } t \leq 25, \\ \{2, 3\} & \text{if } 25 \leq t \leq 32, \\ \{3\} & \text{if } t \geq 33. \end{cases} \quad (43)$$

Scenáre výnosov s_n^j v modeloch TRMM a MRMM boli generované pomocou simulácií geometrického Brownovho pohybu ([6]). Zloženie fondov sme predpokladali podľa Tabuľky 1. Implementovali sme nasledovné úlohy:

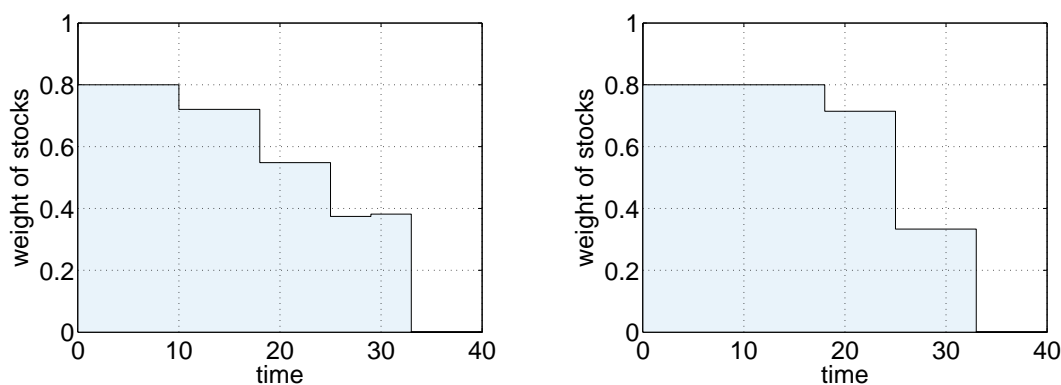


Obr. 1: Model DAM, verzia A a B. Oblasti optimálneho výberu fondov bez a s vládnymi obmedzeniami, $a = 9$. Stredná hodnota priebehu vývoja úspor (plná čiara) plus/mínus štandardná odchýlka (prerušované čiary) z Monte Carlo simulácií.

- Model DAM:
 - Verzia A: bez uvažovania vládných obmedzení na výber fondu j ;
 - Verzia B: so zahrnutím vládných obmedzení na výber fondu j ;
 - Analýza citlivosti výsledkov na meniace sa parametre $a, r^{(s)}, r^{(b)}, \beta_t$;
 - Prípadová štúdia: na rozdiel od Tabuľky 1 sme uvažovali zastúpenie akciovéj a dlhopisovej zložky vo fondoch podľa reálnej situácie na Slovensku k októbru 2007.
- Model PIAM pre spojitý parameter θ diskretizovaný vektorom hodnôt $[1, 0.9, \dots, 0]$:
 - Verzia A: bez uvažovania vládných obmedzení na výber fondu j ;
 - Verzia B: so zahrnutím vládných obmedzení na výber fondu j .
- Model TRMM:
 - Verzia A: bez uvažovania vládných obmedzení na výber fondu j ;
 - Verzia B: so zahrnutím vládných obmedzení na výber fondu j ;
 - Analýza citlivosti výsledkov na meniaci sa parameter α špecifikujúci mieru average value-at-risk deviation.
- Model MRMM:
 - Verzia A: bez uvažovania vládných obmedzení na výber fondu j ;
 - Verzia B: so zahrnutím vládných obmedzení na výber fondu j .



Obr. 2: Model PIAM, verzia A a B. Oblasti optimálneho výberu fondov bez a s vládnymi ohraničovaniami, $a = 9$. Stredná hodnota priebehu vývoja úspor (plná čiara) plus/mínus štandardná odchýlka (prerušované čiary) z Monte Carlo simulácií. Spojitý parameter $\theta_t \in [0, 1]$ je diskretizovaný vektorom $\theta_t \in \{0, 0.1, 0.2, \dots, 1\}$.



Obr. 3: Modely TRMM (vľavo) a MRMM (vpravo), verzia B. Priemerné optimálne váhy zatúpenia akciovej zložky vo výbere fondov. Cieľová suma po 33 rokoch $\mu_{33} = 4.25$.

Výsledky výpočtov boli okrem tabuľkovej formy prezentované i graficky. Typický výsledok optimalizácie pre model DAM je znázornený v Obrázku 1, pre model PIAM v Obrázku 2 a pre modely TRMM a MRMM v Obrázku 3.

Výsledky obdržané zo všetkých modelov vykazujú nasledovnú spoločnú vlastnosť:

Zastúpenie rizikových aktív v optimálnej stratégii je klesajúce v čase.

Túto vlastnosť považujeme za intuitívne zmysluplnú, nakoľko vyššia nasporená suma je citlivejšia na zmeny vo výnosoch fondov. Bezrizikové a menej rizikové fondy sú preto

v neskorších časoch uprednostňované pred vysokorizikovými.

Na základe experimentov vyvodzujeme záver, že za predpokladu, že stredná hodnota výnosov akcií a ich volatilita sú vyššie než stredná hodnota výnosov dlhopisov a ich volatilita, platia nasledovné vlastnosti riešenia:

- Optimálne zastúpenie akciovej zložky vo výbere fondov je klesajúce vzhľadom na čas t , doposiaľ nasporenú sumu d_t , priemerný výnos dlhopisov $r^{(b)}$.
- Optimálne zastúpenie akciovej zložky vo výbere fondov je rastúce vzhľadom na priemerný výnos akcií $r^{(s)}$ a rast miezd β_t .
- Priemerná nasporená suma je klesajúca vzhľadom na koeficient averzie k riziku a určený v úžitkovej funkcii a vzhľadom na rast miezd β_t .
- Priemerná nasporená suma je rastúca vzhľadom na čas t , priemerný výnos akcií $r^{(s)}$ a priemerný výnos dlhopisov $r^{(b)}$.
- v TRMM a MRMM modeloch, optimálne zastúpenie akciovej zložky je rastúce vzhľadom na úroveň spoľahlivosti α špecifikovanú v miere rizika average value-at-risk deviation.

5 Záver

Hlavné prínosy dizertačnej práce sú:

1. vybudovanie modelu DAM založeného na princípe maximalizácie očakávanej užitočnosti sporiteľa z nasporenej sumy v čase odchodu do dôchodku;
2. vybudovanie modelu PIAM, ktorý je zovšeobecnením modelu DAM pre prípad spojitého času a spojitého spektra fondov. Model DAM je diskretnou verziou modelu PIAM;
3. vybudovanie modelu TRMM založeného na minimalizácii rizikovosti investície v koncovom čase sporenia použitím jedno-periódovej miery rizika average value-at-risk deviation;
4. vybudovanie modelu MRMM založeného na minimalizácii rizikovosti investície vo všetkých priebežných časoch počas sporenia použitím viac-periódovej miery rizika average value-at-risk deviation;
5. navrhnutie numerických schém pre oba typy modelov;
6. implementácia modelov v prostredí Matlab a Mosek;
7. experimentálne štúdium citlivosti výsledkov na meniace sa hodnoty rôznych parametrov;
8. na základe experimentálnych skúseností zhrnúť pravidlá popisujúce závislosť optimálnej stratégie výberu fondov od hodnôt parametrov jednotlivých modelov.

Modely DAM, TRMM, a MRMM boli prezentované autorkou a spoluautormi v článkoch [1*], [2*], [3*] a na viacerých medzinárodných vedeckých konferenciách.

6 Summary

The goal of this thesis was to develop a model for determining an optimal strategy for the fund selection in pension planning in three-pillar pension systems. We assumed that savers are given a possibility to choose one from a set of various pension funds, differing in their risk profiles. We proposed two types of models:

- I models based on the expected utility maximization (models DAM and PIAM);
- II models minimizing the riskiness of the investment (models TRMM and MRMM).

Model DAM assumes a 0-1 type selection of funds, it means, the savers may choose only one of them at a given time. We showed that this problem leads to a Bellman equation. A solution to it can be found backwards. The PIAM model is a modification of the DAM model. It finds an optimal weight of stocks in the fund selection, which may attain values from the interval $[0, 1]$. The saver can then choose a fund with a risk profile that is closest to the optimal weight of stocks. We derived a nonlinear partial differential equation for the value function V from the Bellman equation, for the case when the time step ϵ in the PIAM model tends to 0.

The first of the risk minimizing models is the TRMM model (Terminal Risk Minimizing Model). It is based on minimizing the insecurity of the terminal value of savings under an assumption that a target terminal value of savings is given. We minimize the average value-at-risk deviation risk measure, which is also known under the name conditional value-at-risk deviation.

The second risk minimizing model is the MRMM model (Multi-period Risk Minimizing Model). We assume that the saver aims to minimize the riskiness of their savings throughout the whole period of saving. This can be reasoned by the fact that, in the case of early death, the saved sum becomes a subject of heritage. We use the multi-period average value-at-risk deviation measure as the objective function.

If the saver makes a decision about the fund weights every year, both models TRMM and MRMM lead to a problem of linear programming. However, this assumption causes memory requirement problems in implementation. Therefore, we modified the models and assumed that the saver makes decisions only once during a period of several years. This modification changes the problems to nonlinear ones.

We proposed numerical schemes for both types of models and implemented them for the case of Slovak Republic. We investigated the sensitivity of the results with respect to varying parameters using the DAM model. We also investigated the influence of the α parameter from the average value-at-risk definition on the results of the TRMM model. Based on experiments, we summarize the qualitative properties of the optimal solutions.

Literatúra

- [1] Baxter, M. and Rennie, A.: *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge University Press, 1996.
- [2] Carone, G. and Costello, D. (2006): Can Europe Afford to Grow Old? *Finance and Development*, A Quarterly Magazine of the IMF, Vol. 43, No 3, September 2006.
- [3] Halada, L., Lucká, M. and Melicherčík, I. (2005): Optimal Multistage Portfolio Management Using a Parallel Interior Point Method. *Algoritmy 2005: Proceedings of contributed papers and posters*, Bratislava, Slovak University of Technology, pp. 359–368.
- [4] Holzmann, R., Orenstein, M. and Rutkowski, M. (Eds.) (2003): *Pension Reform in Europe: Process and Progress*. The World Bank, Washington, DC, 2003.
- [5] Kvetan, V., Mlýnek, M., Páleník, V. and Radvanský M. (2007): *Starnutie, zdravotný stav a determinanty výdavkov na zdravie v podmienkach Slovenska*. Working paper, Ekonomický ústav SAV, Bratislava 2007.
- [6] Kwok, Y. K. (1998): *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer-Verlag Singapore Pte. Ltd., 1998.
- [7] Markowitz, H. (1952): Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.
- [8] Melicherčík, I., Olšarová, L. and Úradníček, V. (2005): *Kapitoly z finančnej matematiky*. EPOS, 2005.
- [9] Melicherčík, I. and Ševčovič, D.: *Dynamic Stochastic Accumulation Model with Application to Pension Savings Management*, submitted (2008).
- [10] Pflug, G. and Römisich, W. (2007): *Modeling, Measuring and Managing Risk*. World Scientific Publishing Company, 2007.
- [11] Plesník, J., Dupačová, J. and Vlach, M. (1990): *Lineárne programovanie*. Alfa, Bratislava 1990.
- [12] Rockafellar, R. T. and Uryasev, S. (2000): Optimization of Conditional Value-at-Risk. *The Journal of Risk*, Vol. 2, No. 3, pp. 21–41.
- [13] Thomay, M. (2002): *Koncepcia reformy dôchodkového systému*. Nadácia F. A. Hayeka, jún 2002.
- [14] Uryasev, S. (2000): *Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications*. *Financial Engineering News*, Vol. 14, February 2000.

- [15] Zhang, Y. (1995): Solving Large-Scale Linear Programs by Interior-Point Methods Under the MATLAB Environment. Optimization Methods and Software, Vol. 10, pp. 1–31, 1998.

Zoznam vlastných publikácií

- [1*] Kilianová, S. (2006): The Second Pillar of the Slovak Pension System - Interest Rate Targeting. Journal of Electrical Engineering, Vol. 57, No. 12/s.

Citované v:

- Melicherčík, I. and Ševčovič, D.: Dynamic Stochastic Accumulation Model with Application to Pension Savings Management, submitted (2008).

Prezentované autorkou na medzinár. konferencii ISCAM 2006, Bratislava.

- [2*] Kilianová, S., Melicherčík, I. and Ševčovič, D. (2006): Dynamic Accumulation Model for the Second Pillar of the Slovak Pension System. Finance a úvěr - Czech Journal of Economics and Finance, Vol. 56, No. 11–12, 506–521.

Citované v:

- Tuš, B., Mlynarovič, M. and Mišková, V. (2007): A Performance and Risk Analysis on the Slovak Private Pension Funds Market. Journal of Economics (03/2007), pp. 232–249

Prezentované autorkou na medzinár. konferencii ICCAM 2006, Leuven, Belgium.

- [3*] Kilianová, S. and Pflug, G.: Optimal pension fund management under multi-period risk minimization. To appear in Annals of Operations Research (2008).

Citované v:

- Tuš, B., Mlynarovič, M. and Mišková, V. (2007): A Performance and Risk Analysis on the Slovak Private Pension Funds Market. Journal of Economics (03/2007), pp. 232–249

Prezentované autorkou na medzinárodných vedeckých konferenciách: APMOD 2006, Madrid, Spain; ICCAM 2006, Leuven, Belgium; MMEI 2007, Herľany, Slovakia; SPXI 2007, Vienna, Austria.

- [4*] Kilianová, S. and Ševčovič, D. (2004): Analytical and numerical methods for stock index derivative pricing. Journal of Electrical Engineering, 55 (2004), 39–42.

Citované v:

- Chiorean I. (2005): Parallel algorithm for solving the Black-Scholes equation. Kragujevac Journal of Mathematics 2005, No. 27, pp. 91–100.

- [5*] Autorka spolupracovala i na experimentálnych výpočtoch, ktorých výsledky sú obsiahnuté v knižnej publikácii [10].

