Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Ivana Kosírová

Autoreferát dizertačnej práce

Boundedness, a priori estimates and existence of solutions of nonlinear elliptic problems

na získanie vedecko-akademickej hodnosti *philosophiae doctor*
v odbore doktorandského štúdia: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Bratislava 2011

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre aplikovanej matematiky a štatistiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky, Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: Mgr. Ivana Kosírová
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Školiteľ: doc. RNDr. Pavol Quittner, DrSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI UK Bratislava

Oponenti:

Autoreferát bol rozoslaný : ....
Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa .... o .... h
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom spoločnej odborovej komisie dňa ....

v študijnom odbore 9.1.9 Aplikovaná matematika

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Predseda odborovej komisie:
prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

1 Úvod

V tejto práci sa zaoberáme regularitou a apriórnymi odhadmi kladných veľmi slabých riešení eliptických systémov. Takéto systémy popisujú rôzne situácie v biológii, fyzike alebo chémii.

A priori je latinský výraz, ktorý znamená vopred. Pod pojmom apriórny odhad máme na mysli odhad o veľkosti riešení bez toho, aby sme mali informáciu čo i len o existencii riešenia daného sytému. Presnejšie, v tejto práci dokážeme, že za istých predpokladov sú všetky možné kladné riešenia (v danej triede funkcií) eliptického systému ohraničené kladnou konštantou C nezávislou od riešenia.

Apriórne odhady zohrávajú dôležitú úlohu v dokazovaní existencie riešenia problému. Vskutku, pokiaľ úloha nemá variačnú štruktúru, na existenciu riešenia treba použiť iné, nevariačné metódy ako napríklad topologické, a tie zvyčajne vyžadujú znalosť apriórnych odhadov pre všetky možné riešenia. Naviac, apriórne odhady poskytujú informácie o štruktúre riešení a využívajú sa pri skúmaní bifurkačných vetiev.

Presnejšie, zaujímame sa o systémy tvaru

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u &= f(.\,,u,v) \\ -\Delta v &= g(.\,,u,v) \end{aligned}\right\} \quad \text{v } \Omega, \tag{1}$$

spolu s Drichletovými okrajovými podmienkami

$$\left.\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{na } \partial\Omega, \tag{2}$$

alebo nelineárnymi okrajovými podmienkami tvaru

$$\left.\begin{aligned} \partial_\nu u &= \tilde{f}(.\,,u,v) \\ \partial_\nu v &= \tilde{g}(.\,,u,v) \end{aligned}\right\} \quad \text{na } \partial\Omega, \tag{3}$$

kde $f, g, \tilde{f}, \tilde{g}$ sú Carathéodoryho funkcie s vhodným polynomiálnym rastom a Ω je hladká ohraničená oblasť v $\mathbb{R}^N$.

Existujú rôzne metódy na získanie apriórnych odhadov. Technika zvaná „blow-up" bola prvýkrát použitá v [25] v prípade skalárnej úlohy. Metóda je založená na dôkaze sporom. Predpokladá sa, že existuje postupnosť riešení, ktorá nie je ohraničená. Po vhodnom preškálovaní a vybraní podpostupnosti sa získa postupnosť, ktorá konverguje ku kladnému riešeniu eliptickej úlohy v celom priestore (alebo v polpriestore). Existencia takéhoto riešenia je ale v rozpore s vetou Liouvilleovho typu. Táto metóda vedie k optimálnym výsledkom vzhľadom k rastu funkcií f, g, pokiaľ sú známe príslušné vety Liouvilleovho typu. V prípade systému (1), (2) je však znalosť viet Liouvilleovho typu často otvorený problém.

Ďaľšou používanou metódou je metóda Rellichových-Pohozaeovových identít a „moving planes". Prvýkrát bola použitá na dokázanie apriórnych odhadov riešení skalárnej úlohy v [21]. Metóda pozostáva z viacerých krokov. V prípade systému (1), (2) sa riešenia najprv odhadnú v blízkosti hranice Ω pomocou metódy „moving planes", načo je potrebné, aby boli nelinearity nezávislé od x a neklesajúce. Následne sa použijú identity Rellichovho-Pohozaevovho typu. Tieto identity obmedzujú použiteľnosť tejto metódy pre prípad funkcií $f = f(v)$ a $g = g(u)$. Naviac, Ω musí byť konvexná, alebo musia byť splnené ďaľšie technické predpoklady na f a g. Táto metóda vedie k optimálnym výsledkom v modelovom prípade $f(v) = v^p$ a $g(u) = u^q$, ale často sa nedá použiť v prípade všeobecnejších funkcií f a g.

Metóda Hardy-Sobolevových nerovností bola prvýkrát použitá v [14] v prípade skalárnej úlohy, kde H. Brezis a R. E. L. Turner študovali variačné riešenia skalárnej úlohy. Táto metóda je založená na použití prvej vlastnej funkcie Laplaceovej rovnice ako testovacej funkcie. To vedie k odhadu nelinearity, ktorý spolu s vhodnými rastovými predpokladmi a Hardy-Sobolevovými nerovnosťami implikuje H^1 ohraničenosť. V prípade systému (1), (2), táto metóda vyžaduje iba horné ohraničenie na rast nelineárít f, g, ale nevedie k optimálnym výsledkom vzhľadom k rastu pravých strán.

Na odvodenie apriórnych odhadov sa používa aj takzvaná „bootstrap" metóda. Procedúra spočíva v splnení istých predpokladov, ktoré naštartujú proces, vedúci v konečnom počte krokov k žiadanému výsledku. Presnejšie, pokiaľ informácie o lepšej regularite f a/alebo g zaručia lepšiu regularitu riešenia a následne lepšia regularita riešenia spolu s rastovými predpokladmi na f, g implikuje lepšiu regularitu f, g, stačí dokázať lepšiu regularitu f, g a overiť, že sa tým spustí iterovaný proces, ktorý vedie v konečnom počte krokov k žiadanej regularite a apriórnym odhadom riešení. Táto metóda sa použila na odvodenie apriórnych odhadov riešení rôznych úloh či systémov ako napríklad v [29, 32, 33, 34, 41, 42]. V [42], P. Quittner a Ph. Souplet použili nový druh metódy striedavého „bootstrapu", ktorá viedla k značnému vylepšeniu dovtedy známych výsledkov o apriórnych odhadoch a existencii riešení systému (1) spolu s (2). Táto metóda sa môže používať za slabších počiatočných predpokladov na riešenie na rozdiel od metódy „blow-up" či metódy Rellichových-Pohozaeovových identít a „moving planes", ktoré vyžadujú variačné alebo klasické riešenia.

Dizertačná práca sa skladá z nasledujúcich kapitol: Kapitola 1 dizertačnej práce sa venuje definíciám rôznych typov riešení eliptického systému (1) s Dirichletovými okrajovými podmienkami (2). V Kapitole 2 uvedieme niekoľko súvisiacich známych výsledkov o regularite a apriórnych odhadoch kladných riešení eliptických skalárnych úloh a systémov. Kapitola 3 obsahuje naše vylepšenia výsledkov z [32] v prípade eliptických systémov s Dirichletovými okrajovými podmienkami. V Kapitole 4 uvedieme naše výsledky o regularite a apriórnych odhadoch veľmi slabých riešení eliptických systémov s nelineárnymi okrajovými podmienkami. Dokážeme optimálnosť týchto výsledkov a zovšeobecníme ich aj na nelokálne problémy.

2 Ciele

2.1 Eliptické systémy s Dirichletovými okrajovými podmienkami

Ako sme už spomínali, P. Quittner a Ph. Souplet v [42] použili novú metódu striedavého „bootstrapu". Táto bola nedávno vylepšená v [32]. Y. Li [32] získal apriórne odhady veľmi slabých riešení systému (1) s Dirichletovými okrajovými podmienkami (2) za nasledujúcich všeobecnejších predpokladov na rast f, g ako v [42]:

$$\left.\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & f(x,u,v) & \leq & C_1(1+|u|^r|v|^p+|u|^\gamma), \\ 0 & \leq & g(x,u,v) & \leq & C_1(1+|u|^q|v|^s+|v|^\sigma), \end{array}\right\} \tag{4}$$

kde $p, q, r, s, \gamma, \sigma$ spĺňajú nasledujúce (optimálne) vzťahy:

$$r, s, \min\{p+r, q+s\} \in [0, p_c)\,, \tag{5}$$

$$\max\{p+1-s, q+1-r\} > \frac{pq-(1-r)(1-s)}{p_c-1}, \tag{6}$$

$$1 \leq \gamma, \sigma < p_c \tag{7}$$

a platí $p, q > 0$. V podmienkach (5), (6) a (7), p_c predtavuje istý kritický exponent, ktorého hodnota záleží od toho, či skúmame H_0^1-riešenia, L^1-riešenia alebo L^1_δ-riešenia. Y. Li dokázal, že každé kladné L^1_δ-riešenie systému (1) spolu s (2) spĺňajúce:

$$||u||_{L^1_\delta} + ||v||_{L^1_\delta} \leq M,$$

je apriórne ohraničené:

$$||u||_\infty + ||v||_\infty \le C, \tag{8}$$

kde $C = C(\Omega, p, q, \gamma, \sigma, N, C_1, M)$.

Naším cieľom je rozšírenie tohto výsledku pre všeobecnejší prípad:

- Nech f, g spĺňajú rastové predpoklady:

$$\left.\begin{aligned} 0 \le f(x,u,v) &\le C_1(1 + |u|^{r_1}|v|^{p_1} + |u|^{r_2}|v|^{p_2} + |u|^{\gamma}), \\ 0 \le g(x,u,v) &\le C_1(1 + |u|^{q_1}|v|^{s_1} + |u|^{q_2}|v|^{s_2} + |v|^{\sigma}). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

  Chceme nájsť vzťah medzi rastovými koeficientami $r_1, p_1, q_1, s_1, r_2, p_2, q_2$ a s_2, ktorý by garantoval apriórnu ohraničenosť L^1_δ-riešení problému (1), (2). Aby sme ukázali vylepšenie výsledkov z [32], chceme tiež skonštruovať príklad systému (1) s (2), ktorého nelinearity spĺňajú rastové predpoklady (9), ale nespĺňajú predpoklady vyžadované v [32].

2.2 Eliptické systémy s nelineárnymi okrajovými podmienkami

Ďalej sme sa v práci zaoberali veľmi slabými riešeniami systému (1) doplneného nelineárnymi okrajovými podmienkami (3).

Regularita a apriórne odhady veľmi slabých riešení príslušnej skalárnej úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta u &= h(\cdot, u) \qquad \text{v } \Omega, \\ \partial_\nu u &= \tilde{h}(\cdot, u) \qquad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{10}$$

boli nedávno študované v [41]. Označme

$$N^* := \begin{cases} \frac{N}{N-2} & \text{ak } N > 2, \\ +\infty & \text{ak } N \le 2. \end{cases} \tag{11}$$

Jeden z hlavných výsledkov [41] znie nasledovne:

Veta 2.1. *Nech* $r, \tilde{r} \geq 1$ *a nech sú* $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $\tilde{h} : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Carathéodoryho funkcie spĺňajúce polynomiálny rast:*

$$|h(x,u)| \leq C_h(1+|u|^r), \qquad |\tilde{h}(y,u)| \leq C_{\tilde{h}}(1+|u|^{\tilde{r}}), \tag{12}$$

pre všetky $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$ *a* $u \in \mathbb{R}$. *Ak* $N > 2$, *nech naviac platí*

$$\max\Big\{r, \frac{N}{N-1}\tilde{r}\Big\} < N^*. \tag{13}$$

Nech je u *veľmi slabé riešenie* (10) *také, že*

$$||h(\cdot,u)||_{L^1(\Omega)} + ||\tilde{h}(\cdot,u)||_{L^1(\partial\Omega)} \leq C_1.$$

Potom $u \in L^\infty(\Omega)$ *a existuje konštanta*

$$C = C(C_1, C_h, C_{\tilde{h}}, r, \tilde{r}, N, \Omega) > 0$$

taká, že

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

Je všeobecne známe, že podmienka $r < N^*$ v (13) je zároveň nutnou pre ohraničenosť veľmi slabých riešení (10) (viď [38]). P. Quittner a W. Reichel v [41] ukázali, že aj druhá podmienka (13) je optimálna: ak $N > 2$ a $\tilde{r} > (N-1)/(N-2)$ potom existuje Ω a funkcia $\tilde{h}$ s rastom (12) taká, že problém (10) s $h \equiv 0$ má neohraničené riešenie.

V prípade eliptických systémov (1) s homogénnou Neumannovou okrajovou podmienkou:

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_\nu u &=& 0 \\ \partial_\nu v &=& 0 \end{array}\right\} \quad \text{na } \partial\Omega, \tag{14}$$

vyplýva nasledujúca veta z výsledkov získaných v [42].

Veta 2.2. *Nech* $p, q, r, s \geq 1$ *a nech sú* $f, g : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *Carathéodoryho funkcie spĺňajúce polynomiálny rast:*

$$|f(x,u,v)| \leq C_f(1 + |u|^r + |v|^p),$$
$$|g(x,u,v)| \leq C_g(1 + |u|^q + |v|^s),$$

pre všetky $x \in \Omega$ *a* $u, v \in \mathbb{R}$. *Ak* $N > 2$, *nech naviac platí*

$$r, s < N^* \tag{15}$$

a

$$\min(p,q) + 1 < N^*(1 + 1/\max(p,q)). \tag{16}$$

Nech je (u, v) *veľmi slabé riešenie systému* (1), (14) *také, že*

$$||f(\cdot,u,v)||_{L^1(\Omega)} + ||g(\cdot,u,v)||_{L^1(\Omega)} \leq C_1.$$

Potom $u, v \in L^\infty(\Omega)$ *a existuje konštanta*

$$C = C(C_1, C_f, C_g, p, q, r, s, N, \Omega) > 0$$

taká, že

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} + ||v||_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

Je opäť známe, ze podmienky (15) a (16) sú optimálne, viď [45].

Našim cieľom je rozšíriť výsledky z [41, 42] na získanie regularity a apriórnych odhadov veľmi slabých riešení eliptických systémov (1) s nelineárnymi okrajovými podmienkami (3) na hranici. Uvedený cieľ sme rozdelili na nasledujúce podciele:

- Predpokladajme na začiatku pre jednoduchosť, že $f \equiv g \equiv 0$ a $\tilde{f}, \tilde{g}$ spĺňajú nasledujúcu rastovú podmienku:

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(y,u,v)| &\leq C_{\tilde{f}}(1 + |u|^{\tilde{r}} + |v|^{\tilde{p}}), \\ |\tilde{g}(y,u,v)| &\leq C_{\tilde{g}}(1 + |u|^{\tilde{q}} + |v|^{\tilde{s}}), \end{aligned} \tag{17}$$

pre všetky $y \in \partial\Omega$ a $u, v \in \mathbb{R}$. Použijúc lineárnu teóriu vybudovanú v [41], chceme nájsť optimálny vzťah medzi rastovými koeficientami $\tilde{r}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{s}$, ktorý garantuje apriórnu ohraničenosť veľmi slabých riešení.

- Chceme ukázať optimalitu našich podmienok na $\tilde{r}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{s}$, t.j. skonštruovať neohraničené veľmi slabého riešenia systému (1), (3) s $f \equiv g \equiv 0$ v prípade, že nami nájdené podmienky na $\tilde{r}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{s}$ nebudú platiť.

- Chceme nájsť podmienky garantujúce ohraničenosť veľmi slabých riešení vo všeobecnom prípade systému (1) a (3). Predpokladajme polynomiálny rast funkcií $f, g, \tilde{f}, \tilde{g}$:
$$\begin{aligned} |f(x,u,v)| &\le C_f(1+|u|^r+|v|^p), \\ |g(x,u,v)| &\le C_g(1+|u|^q+|v|^s), \\ |\tilde{f}(y,u,v)| &\le C_{\tilde{f}}(1+|u|^{\tilde{r}}+|v|^{\tilde{p}}), \\ |\tilde{g}(y,u,v)| &\le C_{\tilde{g}}(1+|u|^{\tilde{q}}+|v|^{\tilde{s}}), \end{aligned} \tag{18}$$
pre všetky $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$ a $u, v \in \mathbb{R}$. Chceme nájsť optimálny vzťah medzi všetkými rastovými koeficientami garantujúci ohraničenosť a apriórne odhady veľmi slabých riešení.

- Ďalej chceme skonštruovať neohraničené veľmi slabé riešenie systému (1) spolu s (3) v prípade, že nami nájdené podmienky na $r, p, q, s, \tilde{r}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{s}$ nebudú platiť.

- Chceli by sme naše výsledky využiť na dôkaz existencie riešenia v prípade niektorých konkrétnych systémov a tiež nájsť podmienky na funkcie $f, g, \tilde{f}, \tilde{g}$ garantujúce ohraničenosť ich L^1 nôrm.

- Budeme sa snažiť zovšeobecniť výsledky pre systém (1) s nelineárnymi okrajovými podmienkami (3) na systémy, ktoré závisia od riešenia aj nelokálne.

3 Dosiahnuté výsledky

3.1 Eliptické systémy s Dirichletovými okrajovými podmienkami

Podarilo sa nám rozšíriť výsledky z článku [32] a dokázali sme ohraničenosť kladných veľmi slabých riešení systému (1) s Dirichletovými okrajovými podmienkami (2) za všeobecnejších predpokladov na f, g. Nech je p_{BT} exponent definovaný nasledovne:

$$p_{BT} := \begin{cases} \infty, & \text{pre } N < 2, \\ \frac{N+1}{N-1}, & \text{pre } N \geq 2. \end{cases}$$

Výsledky o ohraničenosti a apriórnych odhadoch veľmi slabých riešení systému (1) sa dajú zhrnúť do nasledujúcej vety:

Veta 3.1. *Nech sú $f, g : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ Carathéodoryho funkcie spĺňajúce rastové podmienky* (9)*:*

$$\begin{aligned} f(x,u,v) &\leq C_1(1 + |u|^{r_1}|v|^{p_1} + |u|^{r_2}|v|^{p_2} + |u|^{\gamma}), \\ g(x,u,v) &\leq C_1(1 + |u|^{q_1}|v|^{s_1} + |u|^{q_2}|v|^{s_2} + |v|^{\sigma}), \end{aligned}$$

kde $p_i, q_i, r_i, s_i \geq 0$ pre $i = 1,\ 2$, $\max\{p_1, p_2\}, \max\{q_1, q_2\} > 0$ a platí

$$1 \leq \gamma, \sigma < p_{BT}.$$

Predpokladajme tiež, že

$$\left.\begin{aligned} \min\{\max\{p_1 + r_1,\ p_2 + r_2\},\ \max\{q_1 + s_1,\ q_2 + s_2\}\} < p_{BT}, \\ r_i, s_i < p_{BT}, \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, \tag{19}$$

$$\max\{p_i + 1 - s_j,\ q_j + 1 - r_i\} > \frac{p_i q_j - (1 - r_i)(1 - s_j)}{p_{BT} - 1}, \qquad i, j = 1, 2, \tag{20}$$

a (u, v) je kladné riešenie systému (1) *spĺňajúce*

$$||u||_{L^1_\delta} + ||v||_{L^1_\delta} \leq M. \tag{21}$$

Potom patrí (u, v) *do* $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ *a*

$$||u||_{L^\infty} + ||v||_{L^\infty} \leq C(\Omega, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2, \gamma, \sigma, N, C_1, M). \quad (22)$$

Pripomeňme, že p_{BT} je exponent, ktorý sa prvýkrát objavil v práci H. Brezisa a R.E.L. Turnera [14] v prípade apriórnych odhadov variačných riešení skalárnej úlohy. Ukázalo sa (viď [42], [45]), že exponent p_{BT} je kritickým exponentom pre veľmi slabé riešenia eliptických systémov s Dirichletovou okrajovou podmienkou.

Podobne ako v prípade Y. Liho sa kritický exponent pre veľmi slabé riešenia p_{BT} dá nahradiť iným kritickým exponentom, ak skúmame L^1-riešenia alebo variačné riešenia a výsledky Vety 3.1 ostanú v platnosti.

Ďalej sme skonštruovali systém (1) s pravými stranami:

$$\left.\begin{aligned} f(x,u,v) &= u^{1-\varepsilon}v + v^{\frac{5}{4}-\varepsilon}, \\ g(x,u,v) &= u^4 v, \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

kde $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{7}\right)$ a $N = 3$. Všimnime si, že $p_{BT} = 2$. Je zrejmé, že každé nezáporné veľmi slabé riešenie (u, v) problému (23) patrí do $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ vďaka Vete 3.1 pre rastové koeficinety $p_1 = 1 - \varepsilon, r_1 = 1, p_2 = \frac{5}{4} - \varepsilon, r_2 = 0, \gamma = 1, q_1 = 4, s_1 = 1, q_2 = s_2 = 0, \sigma = 1$. Zároveň sme ukázali, že takto definované f, g nespĺňajú Liho podmienky (4), (5), (6) a (7).

3.2 Eliptické systémy s nelineárnymi okrajovými podmienkami

V prípade systémov (1) s nelineárnymi okrajovými podmienkami (3) sa nám podarilo nájsť optimálne podmienky na rast funkcií $f, g, \tilde{f}, \tilde{g}$ garantujúce apriórnu ohraničenosť veľmi slabých riešení systému:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(\cdot, u, v), & -\Delta v &= g(\cdot, u, v) \quad \text{v } \Omega, \\ \partial_\nu u &= \tilde{f}(\cdot, u, v), & \partial_\nu v &= \tilde{g}(\cdot, u, v) \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (24)$$

Presnejšie, nech platia rastové podmienky (18) pre funkcie $f, g, \tilde{f}, \tilde{g}$. V záujme prehľadnosti označme

$$\left.\begin{aligned} &\mathsf{P} := \max\Big\{p, \tilde{p} + \frac{1}{N-2}\Big\}, && \mathsf{Q} := \max\Big\{q, \tilde{q} + \frac{1}{N-2}\Big\}, \\ &\mathcal{P} := \max\Big\{p, \frac{N}{N-1}\tilde{p}\Big\}, && \mathcal{Q} := \max\Big\{q, \frac{N}{N-1}\tilde{q}\Big\}, \\ &\mathcal{R} := \max\Big\{r, \frac{N}{N-1}\tilde{r}\Big\}, && \mathcal{S} := \max\Big\{s, \frac{N}{N-1}\tilde{s}\Big\}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

pre $N > 2$. Dokázali sme platnosť nasledujúcej vety:

Veta 3.1. *Nech $p, q, r, s \geq 1$, $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s} \geq 0$ a nech sú $f, g : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $\tilde{f}, \tilde{g} : \partial\Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Carathéodoryho funkcie spĺňajúce* (18). *Pokiaľ $N > 2$, nech platí aj*

$$\mathcal{R}, \mathcal{S} < N^* \tag{26}$$

a

$$\min\{\mathsf{P}, \mathsf{Q}\} + 1 < N^*(1 + 1/\max\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}). \tag{27}$$

Nech je (u, v) veľmi slabé riešnie systému (24) *také, že*

$$\begin{aligned} &||f(\cdot, u, v)||_{L^1(\Omega)} + ||g(\cdot, u, v)||_{L^1(\Omega)} \\ &\qquad + ||\tilde{f}(\cdot, u, v)||_{L^1(\partial\Omega)} + ||\tilde{g}(\cdot, u, v)||_{L^1(\partial\Omega)} \leq C_1. \end{aligned} \tag{28}$$

Potom $u, v \in L^\infty(\Omega)$ a existuje konštanta

$$C = C(C_1, C_f, C_g, C_{\tilde{f}}, C_{\tilde{g}}, p, q, r, s, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s}, N, \Omega) > 0 \tag{29}$$

taká, že

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} + ||v||_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

Všimnime si, že z Vety 3.1 vyplývajú Veta 2.1 (výberom $f = f(x, u)$, $\tilde{f} = \tilde{f}(y, u)$, $g = g(x, v)$, $\tilde{g} = \tilde{g}(y, v)$, $p = q = 1$ a $\tilde{p} = \tilde{q} = 0$) ako aj Veta 2.2 (výberom $\tilde{f} = \tilde{g} = 0$, $\tilde{p} = \tilde{q} = \tilde{r} = \tilde{s} = 0$).

Výsledky pre skalárnu úlohu (viď [38, 41]) garantujú optimálnosť podmienky (26) v nasledujúcom zmysle: Ak $\max\{\mathcal{R}, \mathcal{S}\} > N^*$, potom existuje Ω a funkcie $f, g, \tilde{f}$ a $\tilde{g}$ s rastom daným podmienkou (18) také, že (24) má neohraničené veľmi slabé riešenie. Podobne, nasledujúca veta ukazuje, že podmienka (27) je optimálna (až na kritický prípad).

Veta 3.2. *Nech $N > 2$, $p, q \geq 1$, $\tilde{p}, \tilde{q} \geq 0$ a*

$$\min\{\mathsf{P}, \mathsf{Q}\} + 1 > N^*(1 + 1/\max\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}). \tag{30}$$

potom existuje Ω a $f, g, \tilde{f}, \tilde{g}$ spĺňajúce rast (18) *s $r = s = 1$ a $\tilde{r} = \tilde{s} = 0$ také, že systém* (24) *má kladné neohraničené veľmi slabé riešenie.*

Podobne ako v [42], naše výsledky o apriórnych odhadoch sa dajú použiť na dôkaz existencie netriviálnych riešení, pokiaľ môžeme odhadnúť L^1 normy pravých strán. Toto je, vo všeobecnosti, netriviálna úloha (viď [42, Section 3] v prípade homogénnych Dirichletových okrajových podmienok). Ukázali sme niekoľko typických príkladov, kde sa L^1-ohraničenosť nôrm a existencia kladných riešení dá dokázať. Napríklad sme sa zaoberali prípadom $f(x, u, v) = -u$ a $g(x, u, v) = -v$, keďže bol skúmaný aj inými metódami. V nasledujúcom tvrdení nech $\lambda_1^{\mathcal{N}}$ označuje prvú vlastnú hodnotu problému:

$$-\Delta\varphi + \varphi = 0 \quad \text{v } \Omega, \qquad \partial_\nu \varphi = \lambda^{\mathcal{N}} \varphi \quad \text{na } \partial\Omega. \tag{31}$$

Dokázali sme platnosť nasledujúceho tvrdenia:

Tvrdenie 3.3. *Nech je $N > 2$. Uvažujme systém* (1) *s $f(x, u, v) = -u$, $g(x, u, v) = -v$ a nech Carathéodoryho funkcie $\tilde{f}, \tilde{g} \geq 0$ spĺňajú rastové predpoklady* (18)*, kde*

$$\tilde{r}, \tilde{s} < \frac{N-1}{N-2}, \qquad \tilde{p} \leq \tilde{q} < \frac{N-1}{N-4}, \qquad \tilde{p}(N-2) < 1 + \frac{N-1}{\tilde{q}}.$$

predpokladajme, že existujú $\alpha, \beta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, c_1 > 0$ *a* $\varepsilon < \lambda_1^{\mathcal{N}} < \mu$ *také, že*

$$\alpha \tilde{f}(y,u,v) + \beta \tilde{g}(y,u,v) \geq \mu(\alpha u + \beta v) - c_1 \tag{32}$$

pre všetky $y \in \partial\Omega$ *a* $u, v \geq 0$*, naviac nech platí*

$$\tilde{\alpha} \tilde{f}(y,u,v) + \tilde{\beta} \tilde{g}(y,u,v) \leq \varepsilon(\tilde{\alpha} u + \tilde{\beta} v) \tag{33}$$

pre všetky $y \in \partial\Omega$ *a* $u, v \geq 0$ *malé. Potom má problém* (1), (3) *kladné ohraničené riešenie* (u, v).

Existencia netriviálneho riešenia problému (24) s $f(x,u,v) = -u$ a $g(x,u,v) = -v$ a superlineárnymi $\tilde{f}, \tilde{g}$ bola skúmaná viacerými autormi, ako napríklad [10, 11, 12, 26, 44]. V [10], autori dokázali existenciu pomocou apriórnych odhadov klasických kladných riešení. Na získanie apriórnych odhadov použili metódy založené na škálovaní a vetách Liouvilleovho typu. V porovnaní s Tvrdením 3.3, metóda škálovania vyžaduje špecifické asymptotické správanie sa nelinearít pre veľké u, v. Na druhej strane, vo všeobecnosti, metóda škálovania a použitie optimálnych Liouvilleových viet zvyčajne umožnujú získať apriórne odhady pre väčší rozsah exponentov (viď napríklad [43, Chapter I]). Bohužiaľ, optimálne Liouvilleove vety pre systémy sa ťažko dokazujú (viď [46] a referencie). Naviac, autori [10] museli tiež predpokladať technickú podmienku $\tilde{p}, \tilde{q} \leq N^*$. Všimnime si, ze naše tvrdenie nevyžaduje takéto obmedzenia: ak $p = q = 1$ a $\tilde{p}$ je dostatočne malé, potrebujeme len podmienku $\tilde{q} < (N-1)/(N-4)$.

Články [11, 12, 26, 44] sa zaoberajú existenciou riešenia problému v Tvrdení 3.3 vo variačnom prípade a používajú variačné metódy, ktorými však nedosiahnu apriórne odhady. Aj keď sa skúmanie obmedzilo iba na prípad variačných problémov, autori všetkých článkov okrem [12] predpokladali $\tilde{p}, \tilde{q} \leq N^*$.

Výsledky Vety 3.1 sme naviac zovšeobecnili pre systémy, ktorých pravá strana môže závisieť od u a v nelokálne. V prípade takýchto systémov

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \mathcal{F}(u,v,Tu,Tv), & -\Delta v &= \mathcal{G}(u,v,Tu,Tv) \quad \text{v } \Omega, \\ \partial_\nu u &= \tilde{\mathcal{F}}(u,v,Tu,Tv), & \partial_\nu v &= \tilde{\mathcal{G}}(u,v,Tu,Tv) \quad \text{na } \Omega, \end{aligned} \tag{34}$$

kde T je operátor stopy, sa nám podarilo dokázať obmenu Vety 3.1. Jej výsledky sa dajú aplikovať napríklad na nasledujúci systém:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= auv + bu, & -\Delta v &= cu & &\text{v } \Omega, \\ \partial_\nu u &= 0, & \partial_\nu v &= -\tilde{g}(v) + \Phi(\tilde{g}(v)) & &\text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{35}$$

kde $N \leq 3$, $\Phi(w)(y) := \int_{\partial\Omega} \varphi(y,z)w(z)\,dS_z$, $\varphi \in L^\infty$, $\tilde{g}$ je spojitá funkcia spĺňajúca rastovú podmienku $|\tilde{g}(v)| \leq C(1+|v|^{\tilde{s}})$ a a, b, c sú reálne konštanty. Systém rovníc v (35) opisuje drobnú obmenu modelu nukleárneho reaktora, kde u a v predstavujú tok neutrónov a teplotu reaktora; porovnaj s [28, system (6)–(7)]. Nelokálna nelineárna okrajová podmienka v (35) vystupuje v probléme prenosu radiačného tepla: $\tilde{g}(v)$ je hustota toku povrchovej radiácie ($\tilde{g}(v) = \sigma v^4$ v prípade čierneho telesa) a $\Phi(\tilde{g}(v))(y)$ je hustota toku povrchovej radiácie absorbovaná v bode y, viď [4], [19] a príslušné referencie. Predpoklady našej vety sú splnené pokiaľ $N = 2$ a $\tilde{s}$ je ľubovoľné alebo ak $N = 3$ a $\tilde{s} < 2$.

4 Záver

V tejto dizertačnej práci sme vylepšili výsledky o ohraničenosti, regularite, apriórnych odhadoch a existencii pozitívnych veľmi slabých riešení eliptických systémov a tým sme splnili nami stanovené ciele.

Najprv sme uvažovali eliptické systémy spolu s Dirichletovými okrajovými podmienkami. Odvodili sme podmienky na rast pravých strán, ktoré garantujú ohraničenosť všetkých možných pozitívnych veľmi slabých riešení a ich apriórne odhady. Náš dôkaz bol založený na metóde striedavého „bootstrapu" podobne ako v [42], [32], pracovali sme však so značným množstvom rastových koeficientov. Podobne ako v [32], naše výsledky platia aj pre variačné riešenia alebo L^1-riešenia problému (1), (2) za predpokladu, že nahradíme kritický rastový exponent pre veľmi slabé riešenie príslušným kritickým rastovým exponentom pre variačné alebo L^1-riešenia. Náš príklad systému (1), (2), ktorého pozitívne veľmi slabé riešenia sú apriórne ohraničené vďaka našim výsledkom, ale f, g nespĺňajú predpoklady požadované v [32], jednoznačne ukazuje, že výsledky z [32] sme vylepšili.

Tiež sme sa zaoberali eliptickými systémami (1) doplnenými nelineárnymi okrajovými podmienkami (3). Už v projekte dizertačnej práce sa nám podarilo nájsť podmienky na rast pravých strán na $\partial\Omega$ za predpokladu $f \equiv g \equiv 0$. V práci sa nám podarilo odvodiť optimálne podmienky pre rast všetkých pravých strán aj v prípade netriviálnych f, g. Nami nájdené podmienky garantujú apriórne odhady pozitívnych veľmi slabých riešení takýchto systémov.

Podobne ako v prípade [41] a [42], naše dôkazy sú založené na výsledkoch o regularite lineárnych problémov a metóde striedavého „bootstrapu". Vzhľadom k prítomnosti nelineárnych okrajových podmienok, museli sme simultánne dokazovať odhady riešenia v Ω ako aj jeho stopy na hranici $\partial\Omega$. To a tiež prítomnosť značného množstva rastových exponentov spôsobilo, že naše dôkazy zďaleka nie sú triviálnymi modifikáciami dôkazov v [41] a [42]. Ďalšie opodstatnenie našej práce vychádza zo skutočnosti, že optimálne podmienky pre rast systému (1) a (3) by sa sotva dal uhádnuť z príslušných rastových podmienok v [41] a [42].

Taktiež sme dokázali, že naše výsledky sú optimálne. Ukázali sme, že existujú oblasti a pravé strany, ktoré nespĺňajú požadované podmienky pre rast také, že príslušný eliptický systém s nelineárnymi okrajovými podmienkami má kladné neohraničené veľmi slabé riešenie.

Využili sme naše výsledky o apriórnych odhadoch na dôkaz existencie netriviálneho riešenia niekoľkých typických problémov, pre ktoré sme vedeli odhadnúť L^1- normy pravých strán.

Jednou z výhod použitia metódy striedavého „bootstrapu" je jej robustnosť. Nevyžaduje ani škálovacie vlastnosti ani variačnú alebo lokálnu štruktúru. Preto sme naše výsledky mohli použiť pre problémy s nelokálnymi nelinearitami. Ukázali sme aj aplikácie našich výsledkov v prípade určitých špecifických nelokálnych problémov.

Summary

In this thesis, we improved results on regularity and apriori estimates of positive very weak solutions of elliptic systems. First, we considered elliptic system complemented by Dirichlet boundary conditions and we derived conditions on growth exponents of right-hand sides guaranteeing essential boundedness of all possible positive very weak solutions and their a priori estimates. Our proof was based on alternate-bootstrap arguments where we were dealing with a significant amount of growth exponents. Similarly to [32], our results hold true if we treat variational solutions or L^1-solutions of (1) and (2) provided we replace critical growth exponent for very weak solutions by corresponding critical growth exponent for variational or L^1-solutions. Our example of system (1), (2), whose positive very weak solutions are a priori bounded thanks to our results but f, g do not satisfy assumptions required by [32], clearly shows that we improved results in [32].

We also considered elliptic systems complemented by nonlinear boundary conditions. We derived optimal conditions on growth of right-hand sides guaranteeing a priori estimates of positive very weak solutions of such systems. Similarly as in the case of [41] and [42], our proofs are based on regularity results for linear problems and alternate-bootstrap arguments. Due to the presence of nonlinear boundary conditions, one has to prove simultaneous estimates for the solutions and their traces on the boundary $\partial\Omega$. This difficulty and also presence of significant amount of growth exponents make our proofs to be far from a trivial modification of the proofs in [41] and [42]. Another justification of our computations comes from the fact that the optimal growth conditions for system (1) and

(3) could hardly be guessed just from the the corresponding conditions in [41] and [42].

We also proved that our results are optimal. We showed that there exist a domain and right-hand sides which do not satisfy required conditions on growth, such that elliptic problem with nonlinear boundary conditions possesses a positive unbounded very weak solution.

We used our results on a priori estimates to prove existence of nontrivial solutions of few typical problems where the L^1-bounds of right-hand sides can be estimated.

One of the advantages of using alternate bootstrap method is its robustness. It do require neither scaling properties nor variational or local structure. Hence, our results could also be applied for problems with nonlocal nonlinearities. We also showed applications of our results in the study of some particular nonlocal problems.

References

[1] R. A. Adams: *Sobolev spaces.* Academic Press, New York 1975.

[2] H. Amann: *Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems.* Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis (1993), 9–126

[3] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz: *Dual variational methods in critical point theory and applications.* J. Functional Analysis **14** (1973), 349–381.

[4] A.A. Amosov: *Global solvability of a nonlinear nonstationary problem with a nonlocal boundary condition of radiative heat transfer type.* Differ. Equations **41** (2005), 93–104.

[5] P. Aviles: *On isolated singularities in some nonlinear partial differential equation.* Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), 773–791.

[6] M.-F. Bidaut-Véron, A. Ponce and L. Véron: *Boundary singularities of positive solutions of some nonlinear elliptic equations.* C .R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **344** (2007), 83–88.

[7] M.-F. Bidaut-Véron, A. Ponce and L. Véron: *Boundary isolated singularities of positive solutions of some non-monotone semilinear elliptic equations.* Calc. Var. **40** (2011), 183–221.

[8] M.-F. Bidaut-Véron and L. Vivier: *An elliptic semilinear equations with source term involving boundary measures: the subcritical case.* Rev. Mat. Iberoamericana **16** (2000), 477–513.

[9] M.-F. Bidaut-Véron and C. Yarur: *Semilinear elliptic equations and systems with measure data: existence and a priori estimates.* Adv. Differ. Equations **7** (2002), 257–296.

[10] J.F. Bonder and J.D. Rossi: *Existence for an elliptic system with nonlinear boundary conditions via fixed-point methods.* Adv. Differ. Equations **6** (2001) 1–20.

[11] J.F. Bonder, S. Martinez and J.D. Rossi: *Existence results for gradient elliptic systems with nonlinear boundary conditions.* NoDEA **14** (2007) 153–179.

[12] J.F. Bonder, J.P. Pinasco and J.D. Rossi: *Existence results for Hamiltonian elliptic systems with nonlinear boundary conditions.* Electronic J. Differ. Equations **1999, 40** (1999) 1–15.

[13] H. Brezis and T. Kato: *Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials.* J. Math. Pures Appl.(9) **58** (1979), 137-151.

[14] H. Brezis and R. E. L. Turner: *On a class of superlinear elliptic problems.* Commun. Partial Differential Equations **2** (1977), 601–614.

[15] Y. Chen and H. Gao: *Existence of positive solutions for nonlocal and nonvariational elliptic systems.* Bull. Australian Math. Soc. **72** (2005), 271–281.

[16] M. Chipot, M. Fila and P. Quittner: *Stationary solutions, blow up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions.* Acta Math. Univ. Comenianae **60** (1991), 35–103.

[17] F.A. Davidson and N. Dodds: *Existence of positive solutions due to non-local interactions in a class of nonlinear boundary value problems.* Methods Appl. Analysis **14** (2007), 15–28.

[18] M. Del Pino, M. Musso and F. Pacard: *Boundary singularities for weak solutions of semilinear elliptic problems.* J. Funct. Anal. **253** (2007), 241–272.

[19] P. -É. Druet: *Weak solutions to a stationary heat equation with non-local radiation boundary condition and right-hand side in L^p $(p \geq 1)$.* Math. Methods Appl. Sci. **32** (2009), 135–166.

[20] D. G. de Figueiredo: *Positive solutions of semilinear elliptic equations.* Springer Lecture Notes in Mathematics **957** (1982), 34–87.

[21] D. G. de Figueiredo, P.-L. Lions and R. D. Nussbaum: *A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations.* J. Math. Pures Appl. **61** (1982), 41–63.

[22] M. Fila, Ph. Souplet and F. B. Weissler: *Linear and nonlinear heat equations in L^q_δ spaces and universal bounds for global solutions.* Math. Ann. **320** (2001), 87–113.

[23] J. García-Melián, C. Morales-Rodrigo, J.D. Rossi and A. Suárez: *Non-negative solutions to an elliptic problem with nonlinear absorption and a nonlinear incoming flux on the boundary.* Ann. Mat. Pura Appl. **187** (2008), 459–486.

[24] B. Gidas, W.-M. Ni and L. Nirenberg: *Symmetry and related properties via the maximum principle.* Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209–243.

[25] B. Gidas and J. Spruck: *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations.* Comm. Partial Differential Equations **6**, no. 8 (1981), 883–901.

[26] X. He and W. Zou: *Existence and multiplicity of solutions for an elliptic system with nonlinear boundary conditions.* Nonlinear Anal. TMA **71** (2009) 4646–4656.

[27] J. Horák, P.J. McKenna and W. Reichel: *Very weak solutions with boundary singularities for semilinear elliptic Dirichlet problems in domains with conical corners.* J. Math. Anal. Appl. **352** (2009), 496–514.

[28] W.E. Kastenberg and P.L. Chambré: *On the stability of nonlinear space-dependent reactor kinetics.* Nuclear Sci. Engineering **31** (1968), 67–79.

[29] S. Kelemen and P. Quittner: *Boundedness and a priori estimates of solutions to elliptic systems with Dirichlet-Neumann boundary conditions.* Commun. Pure Appl. Anal. **9** (2010), 731–740.

[30] I. Kosírová: *Regularity and a priori estimates of solutions to semilinear elliptic systems.* Acta Math. Univ. Comenian. **79** (2010), 231–244.

[31] I. Kosírová and P. Quittner: *Boundedness, a priori estimates and existence of solutions of elliptic systems with nonlinear boundary conditions.* Advances in Differential Equations, accepted

[32] Y. Li: *Optimal conditions for a priori estimates for semilinear elliptic systems with two components.* Nonlinear Anal. TMA **72** (2010), 1850–1864.

[33] Y. Li: *Optimal conditions for L^∞-regularity and a priori estimates for semilinear elliptic systems.* J. Math. Anal. Appl. **351** (2009), 257–276.

[34] P.J. McKenna and W. Reichel: *A priori bounds for semilinear equations and a new class of critical exponents for Lipschitz domains.* J. Funct. Anal. **244** (2007), 220–246.

[35] J. Malý and W. P. Ziemer: *Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations.* A. M. S. Mathematical Surveys and Monographs, Vol.**51**, AMS, Providence, RI, (1997).

[36] W.-M. Ni, P. Sacks: *Singular behaviour in nonlinear parabolic equations.* Trans. of the AMS **287(2)** (1985), 657–671

[37] R. Nussbaum: *Positive solutions of some nonlinear elliptic boundary value problems.* J. Math. Anal. Appl. **51** (1975), 461–482.

[38] F. Pacard: *Existence and convergence of positive weak solutions of $-\Delta u = u^{\frac{n}{n-2}}$ in bounded domains of $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.* Calc. Var. Partial Differ. Equations **1** (1993), 243–265.

[39] S. I. Pohozaev: *Eigenfunctions of $\Delta u + \lambda f(u) = O$.* Doklady Acad. Sci. SU **165** (1965), 36–39

[40] P. Poláčik, P. Quittner, Ph. Souplet: *Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems, part I: Elliptic equations and systems.* Duke Math. J. **139** (2007), 555–579.

[41] P. Quittner and W. Reichel: *Very weak solutions to elliptic equations with nonlinear Neumann boundary conditions.* Calc. Var. **32** (2008), 429–452.

[42] P. Quittner and Ph. Souplet: *A priori estimates and existence for elliptic systems via bootstrap in weighted Lebesgue spaces.* Arch. Rational Mech. Anal. **174** (2004), 49–81.

[43] P. Quittner and Ph. Souplet: *Superlinear parabolic problems: Blow-up, global existence and steady states.* Birkhäuser, Basel - Boston - Berlin 2007.

[44] M. Schechter and W. Zou: *An infinite-dimensional linking theorem and applications.* J. Differ. Equations **201** (2004) 324–350.

[45] Ph. Souplet: *Optimal regularity conditions for elliptic problems via L^p_δ spaces.* Duke Math. J. **127** (2005), 175–192.

[46] Ph. Souplet: *The proof of the Lane–Emden conjecture in four space dimensions.* Adv. Math. **221** (2009), 1409–1427.

[47] R. E. L. Turner: *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations in two variables.* Duke Math. J. **41** (1974), 759–774.

Vlastné publikácie autora

- I. Kosírová: *Regularity and a priori estimates of solutions to semilinear elliptic systems.* Acta Math. Univ. Comenian. **79** (2010), 231–244.

- I. Kosírová, P. Quittner: *Boundedness, a priori estimates and existence of solutions of elliptic systems with nonlinear boundary conditions.* Advances in Differential Equations, accepted

Výsledky boli ústne prezentované na podujatí:

- Spring school in nonlinear PDEs, Brusel, Belgicko, máj 2010.