

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

NÁHODNÉ DYNAMICKÉ SYSTÉMY GENEROVANÉ
ZOBRAZENIAMÍ INTERVALU DO SEBA

Dizertačná práca

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

NÁHODNÉ DYNAMICKÉ SYSTÉMY GENEROVANÉ ZOBRAZENIAMÍ INTERVALU DO SEBA

Dizertačná práca

Študijný program: Aplikovaná matematika
Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Katarína Janková, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Mgr. Jozef Kováč
Študijný program: aplikovaná matematika (Jednoodborové štúdium, doktorandské III. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: dizertačná
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Náhodné dynamické systémy generované zobrazeniami intervalu do seba
Random dynamical systems generated by selfmappings of the interval

Anotácia: V diskretných dynamických systémoch generovaných zobrazeniami intervalu do seba sa študujú otázky motivované aplikáciami pri modelovaní, ako stabilita, chaos a veličiny s ním spojené. Pri modelovaní je užitočné brať do úvahy aj náhodné malé chyby alebo náhodné zmeny podmienok v čase, čo možno opísať náhodnými dynamickými systémami. Obsahom práce budú výsledky týkajúce sa náhodných dynamických systémov v súvislosti s charakterizáciou stabilného správania, ako aj niektorými typmi chaosu.

Školiteľ: doc. RNDr. Katarína Janková, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
Dátum zadania: 20.02.2015

Dátum schválenia: 23.02.2015
prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
garant študijného programu

študent

školiteľ

Abstrakt

V tejto práci sa zaoberáme náhodnými dynamickými systémami generovanými spojitými intervalovými zobrazeniami. Práca ma tri hlavné časti. Prvá časť je venovaná systémom, ktoré sú generované Alleeho zobrazeniami - zobrazeniami používanými v populačnej dynamike. Ukazuje sa, že ak uvažujeme rastúce Alleeho zobrazenia, správanie náhodných dynamických systémov je veľmi podobné deterministickým systémom. Ak však uvažujeme unimodálne Alleeho zobrazenia, správanie systému sa môže výrazne zmeniť. V druhej časti sa zaoberáme distribučným chaosom a jeho mierou v náhodných dynamických systémoch. Uvádzame niekoľko postačujúcich podmienok pre nulovú mieru chaosu a príklady systémov, v ktorých je miera chaosu kladná. Ďalej ukazujeme, že chaotickosť zobrazení, ktorými generujeme systém vo všeobecnosti neovplyvňuje chaotickosť náhodného dynamického systému - chaotický systém môže vzniknúť aj z nechaotických zobrazení a naopak. Okrem toho ukazujeme, že miera chaosu je v istom zmysle nestabilná. Posledná časť je venovaná topologickej entropii. Uvádzame podmienky pre horné, resp. dolné ohraničenie topologickej entropie a príklady systémov, v ktorých vieme topologickú entropiu presne vyčísliť. Napokon sa zaoberáme vzťahom medzi topologickou entropiou a distribučným chaosom.

Kľúčové slová: náhodný dynamický systém, systém iterovaných funkcií, Alleeho zobrazenia, distribučný chaos, topologická entropia

Abstract

In this thesis, we study random dynamical systems generated by continuous interval maps. The thesis has three main parts. The first part deals with Allee maps, which are used in population dynamics. It is shown that the behavior of the random dynamical systems is very similar to the behavior of the deterministic system if we use strictly increasing Allee maps. However, in the case of unimodal Allee maps, the behavior can dramatically change. The second part deals with distributional chaos and its measure in random dynamical systems. We give some sufficient conditions for a zero measure of chaos and examples of chaotic systems. We demonstrate that the chaoticity of the functions that generate a system does not, in general, affect the chaoticity of the system, i.e. a chaotic system can arise from two nonchaotic functions and vice versa. Finally, we show that distributional chaos for random dynamical system is, in some sense, unstable. In the last part, we study the topological entropy. We show some conditions for upper and lower bounds for the topological entropy and demonstrate examples of systems, in which we are able to calculate the topological entropy. Finally, we deal with the relationship between the topological entropy and distributional chaos.

Keywords: Random dynamical system, Iteration function system, Allee maps, Distributional chaos, Topological entropy

Predhovor

Dynamické systémy slúžia na matematické opísanie pohybu bodu v danom priestore s meniacim sa časom - na ten sa môžeme pozerieť spojito alebo diskretné. V práci budeme pracovať výlučne s diskretným časom, teda bod v priestore budeme sledovať iba v určitých pravidelných časových okamihoch. Takéto systémy majú využitie v mnohých vedných odboroch, napr. fyzike (pohyb telies), biológii (populačná dynamika) alebo ekonómii (napr. [8],[12],[29],[36]). Teória sa zameriava najmä na dlhodobé správanie dynamických systémov - či sa po dostatočne dlhom čase systém ustáli v nejakom vyváženom stave (napr. pevnom bode) alebo či sa správa chaoticky, teda nepredvídateľne, resp. zdanlivo náhodne - napriek tomu, že systém je deterministický.

V štandardných dynamických systémoch sa na modelovanie používa jedna funkcia - to však môže byť na modelovanie reálnych situácií nedostačujúce, preto sa skúmajú aj tzv. neautonómne dynamické systémy, v ktorých sa berie do úvahy viacero funkcií. My sa v tejto práci zameriame na systémy, v ktorých zohľadníme aj istú náhodnosť a to takým spôsobom, že v každom kroku (čase) opíšeme pohyb bodu náhodne zvolenou funkciou z nejakej množiny funkcií (v práci spravidla dvojprvkovej). Takto vytvorené systémy možno zaradiť do triedy náhodných dynamických systémov. V literatúre sa možno stretnúť aj s pojmom systém iterovaných funkcií (z angl. „iterated function system”) - takéto systémy možno považovať za akúsi podmnožinu náhodných dynamických systémov.

Problematica náhodných dynamických systémov je pomerne nová - väčší rozmach literatúry v tejto oblasti možno zaznamenať v osemdesiatych rokoch dvadsiateho storočia. Dynamickým systémom s náhodnými perturbáciami sa venovali napr. Ruelle v článku [30] z roku 1981, prípadne Kifer v monografii [22] z roku 1988. Ergodickej teórii náhodných transformácií je venovaná Kiferova publikácia [21] z roku 1986. Systémy iterovaných funkcií sa v tom čase študovali najmä v súvislosti s konštrukciou fraktálov - napríklad články Hutchinsona [19] a Barnsleyho et al. [6],[7]. Z novších publikácií možno spomenúť monografie Arnolda [3] z roku 1998, Bhattacharyu a Majumdara [8] z roku 2007 a Swishchuka a Islama [37] z roku 2013, ktorá sa venovala aplikáciám vo finančnej matematike. Nakoľko je nám známe, štúdium náhodných dynamických sys-

témov sa zameriava hlavne na existenciu stacionárneho rozdelenia (napr. [8],[14],[35]) a zriedkavejšie sa venuje témam týkajúcim sa chaosu - entropii je venovaná druhá kapitola monografie [21], chaosu v systémoch iterovaných funkcií sa venovali články [5] a [16] - avšak v týchto článkoch sa nebrala do úvahy pravdepodobnosť.

Hoci som počas môjho magisterského štúdia odboru Pravdepodobnosť a matematická štatistika nemal s dynamickými systémami - či už deterministickými, alebo náhodnými - nijakú skúsenosť, téma ma veľmi rýchlo zaujala. Môže za to zrejme moja inklinácia k „pekným“ teoretickým výsledkom (ktorých je v dynamických systémoch veľmi veľa) a takisto úzky súvis náhodných dynamických systémov s Markovovskými procesmi, ktoré ma zaujali už počas magisterského štúdia.

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať mojej školiteľke doc. Kataríne Jankovej, ktorá ma Markovovské procesy učila a nakoniec ma priviedla k tejto téme. Ďakujem jej za jej ľudský prístup, za čas venovaný pri konzultáciach a za cenné rady, nápady a podnety. Vďaka patrí aj mojej manželke Silvii za podporu a trpezlivosť.

Obsah

Úvod	1
1 Diskrétné dynamické systémy	3
1.1 Základné pojmy	3
1.2 Pevné a periodické body	5
1.3 Chaotické správanie	7
1.3.1 Transitivity	7
1.3.2 Premiešavanie	8
1.3.3 Topologická entropia	9
1.3.4 Li-Yorkeov chaos	12
1.3.5 Distribučný chaos	13
1.3.6 Ilustrácia niektorých typov chaosu	15
2 Náhodné dynamické systémy	19
2.1 Markovovské procesy	19
2.2 Náhodné dynamické systémy	24
3 Alleeho zobrazenia	29
3.1 Rastúce Alleeho zobrazenia	30
3.2 Unimodálne Alleeho zobrazenia	34
4 Distribučný chaos	43
4.1 Definícia	44
4.2 Nulová miera chaosu	45
4.3 Príklady distribučne chaotických systémov	49
4.4 Nestabilita	59
4.5 Poznámky k distribučnému chaosu	66
4.5.1 Iné typy náhodných dynamických systémov	66
4.5.2 Typy distribučného chaosu	66
4.5.3 Nechaotický systém z dvoch premiešavajúcich zobrazení	67

5	Topologická entropia	73
	Záver	79
	Literatúra	81

Úvod

Dôležitou otázkou v teórii diskretných dynamických systémov je zložitosť takéhoto systému - v niektorých prípadoch sa systém môže správať v istom zmysle jednoducho (napr. každá trajektória konverguje k periodickej, špeciálne k pevnému bodu), inokedy sa systém neustáli, naopak, správa sa chaoticky (zdanlivo náhodne). Existuje viacero pojmov, ktoré zložitosť systému umožňujú charakterizovať - napr. viaceré typy chaosu, tranzitivita, topologická entropia a iné. Cieľom tejto práce je študovať otázky zložitosti (resp. jednoduchosti) v náhodných dynamických systémoch, spravidla tvaru

$$x_{n+1} = \begin{cases} f(x_n) & \text{s pravdepodobnosťou } p \\ g(x_n) & \text{s pravdepodobnosťou } 1 - p, \end{cases} \quad (1)$$

kde f, g sú spojité intervalové zobrazenia a p je číslo z intervalu $[0, 1]$ (v tretej kapitole k takémuto systému pridáme aj malé náhodné perturbácie). Vyvstáva však prirodzená otázka - má vôbec zmysel venovať sa takýmto otázkam v náhodných dynamických systémoch, keďže sú vždy - z podstaty veci - náhodné (istým spôsobom chaotické)? Ukazuje sa, že áno, pretože v mnohých prípadoch sa môžu niektoré ich aspekty správať nenáhodne alebo aspoň - v istom zmysle - usporiadane, resp. jednoducho.

Práca je členená nasledovne. V prvej kapitole uvedieme základné pojmy a niektoré elementárne výsledky z teórie diskretných dynamických systémov. Keďže značná časť práce je venovaná chaosu, v tejto kapitole spomenieme aj niektoré typy chaotického správania v diskretných dynamických systémoch.

Druhá kapitola bude zameraná na základnú teóriu náhodných dynamických systémov. Vychádzajúc z [8] a [21] budeme predpokladať, že v každom kroku (čase) vyberáme funkciu náhodne podľa toho istého rozdelenia a nezávisle od minulosti, čím prirodzene vzniká Markovovský proces. Z toho dôvodu bude časť druhej kapitoly venovaná takýmto procesom. Všeobecnejšiemu prístupu k náhodným dynamickým systémom (bez predpokladu nezávislosti a rovnakého rozdelenia vybraných funkcií) sa venuje monografia [3], avšak v tejto práci sa takýmto prístupom nebudeme zaoberať.

Vo zvyšných troch kapitolách predstavíme naše výsledky. V tretej kapitole budeme analyzovať náhodné dynamické systémy generované špeciálnou triedou zobrazení (tzv.

Alleeho zobrazenia) používanými v populačnej dynamike. Mierne modifikovaná verzia tretej kapitoly bola publikovaná v časopise *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering* [27].

V štvrtej kapitole sa budeme zaoberať distribučným chaosom v náhodných dynamických systémoch. Tento typ chaosu bol zvolený kvôli jeho pravdepodobnostnej interpretácii, vďaka ktorej sa dá jeho definícia ľahko preniesť aj na náhodné dynamické systémy. Stručnejšia verzia tejto kapitoly bola publikovaná v časopise *Journal of Difference Equations and Applications* [26].

Posledná kapitola je zameraná na topologickú entropiu v náhodných dynamických systémoch. Tejto problematike sa venovala už publikácia [21], my pridáme niektoré ďalšie výsledky.

Kapitola 1

Diskrétné dynamické systémy

1.1 Základné pojmy

Na úvod uvedieme niektoré základné definície z teórie diskretných dynamických systémov. Definície sú prebraté z kníh [8] a [31].

Definícia. *Dynamický systém je určený dvojicou (X, f) , kde X je neprázdna množina (nazývaná aj priestor stavov) a f je zobrazenie z X do X .*

Ako bolo spomenuté v úvode, dynamické systémy slúžia na matematické opísanie pohybu bodu v danom priestore stavov s meniacim sa časom - ak je systém v čase t v bode (v stave) $x_t \in X$, potom v čase $t + 1$ bude v bode $x_{t+1} = f(x_t)$. Zobrazenie f je preto niekedy nazývané aj zákon pohybu (z angl. „law of motion”). Ďalšími dôležitými pojmami sú pojmy iterácia, trajektória, orbita a omega-limitná množina.

Definícia. *Funkcia $f^j : X \rightarrow X$ definovaná predpisom*

$$f^j(x) = f(f^{j-1}(x)) \quad (1.1)$$

pre $j \geq 1$ (kde $f^0(x) = x$) sa nazýva j -ta iterácia funkcie f .

Definícia. *Trajektória bodu $x \in X$ je postupnosť $\tau(x) = \{f^j(x)\}_{j=0}^{\infty}$.*

Definícia. *Orbita bodu $x \in X$ je množina $\gamma(x) = \{y \in X : y = f^j(x) \text{ pre nejaké } j \geq 0\}$.*

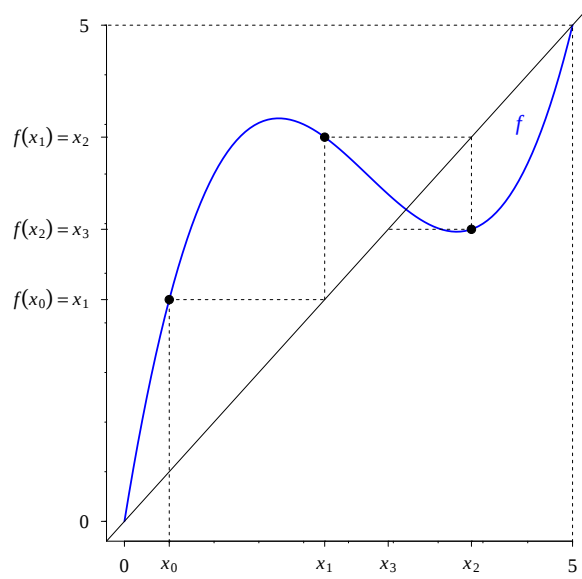
Definícia. *Omega-limitná množina $\omega(f, x)$ trajektórie $\tau(x)$ bodu x je množina definovaná predpisom*

$$\omega(f, x) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{\gamma(f^j(x))}, \quad (1.2)$$

kde $\overline{A}$ je uzáver množiny A .

Omega-limitná množina $\omega(f)$ zobrazenia f je množina definovaná predpisom

$$\omega(f) = \bigcup_{x \in X} \omega(f, x). \quad (1.3)$$

Obr. 1.1: Príklad začiatku trajektórie bodu x_0 .

Omega-limitná množina $\omega(f, x)$ istým spôsobom zachytáva dlhodobé správanie trajektórie dynamického systému (pri počiatocnom stave $x_0 = x$). V prípade, že sa obmedzíme na spojité zobrazenie na uzavretom intervale, potom sa na omega-limitnú množinu môžeme pozeráť nasledovne: ak vieme, že nejaký bod y sa nachádza v množine $\omega(f, x)$, potom pre ľubovoľne malé okolie bodu y platí, že trajektória nekonečne veľakrát prejde týmto okolím; formálne - pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje taká postupnosť $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ prirodzených čísel, že $f^{n_k}(x) \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ pre ľubovoľné $k = 0, 1, 2, \dots$

Hoci na definovanie dynamického systému nám stačila neprázdna množina X a zobrazenie $f : X \rightarrow X$, v praxi je pre viacero výsledkov potrebné pridať ďalšie predpoklady. V ďalších častiach preto budeme veľakrát pracovať s takzvaným topologickým dynamickým systémom.

Definícia. Pod topologickým dynamickým systémom budeme rozumieť dvojicu (X, f) , kde $f : X \rightarrow X$ je spojité zobrazenie a X je kompaktný metrický priestor. Metriku na tomto priestore budeme označovať písmenom d .

V prípade takýchto systémov zhrnieme niektoré vlastnosti omega-limitných množín v nasledovnom tvrdení (preberáme z [31]).

Tvrdenie 1.1. Nech (X, f) je topologický dynamický systém, kde $x \in X$ a $n \geq 1$. Potom

(i) $\omega(x, f)$ je uzavretá množina,

(ii) $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$,

$$(iii) \quad \omega(f^n(x), f) = \omega(x, f),$$

$$(iv) \quad f(\omega(f)) = \omega(f),$$

$$(v) \quad \omega(f^n) = \omega(f).$$

V niektorých prípadoch môžu mať tieto množiny zložitejšiu štruktúru, avšak často je systém „priťahovaný“ iba konečným počtom bodov - v takomto prípade ide o pevné alebo periodické body.

1.2 Pevné a periodické body

Definícia. *Nech k je prirodzené číslo. Bod $x \in X$ sa nazýva periodický bod zobrazenia f periódou k , ak platí $f^k(x) = x$, pričom k je najmenšie prirodzené číslo s touto vlastnosťou. Periodický bod periódou 1 budeme nazývať pevným bodom zobrazenia f .*

Pevné a periodické body možno chápať ako nejaký vyvážený stav - ekvilibrium dynamického systému, do ktorého keď sa systém dostane, tak v ňom už aj zotrva. Tieto body sú pri skúmaní dynamických systémov veľmi dôležité, preto existuje viacero výsledkov o existencii (a jednoznačnosti) pevného bodu. Jedným z fundamentálnych výsledkov je Banachova veta o pevnom bode (uvádzame podľa [8]). Predtým je ale potrebné zadať pojem kontraktívnosti.

Definícia. *Nech (X, d) je metrický priestor. Zobrazenie $f : X \rightarrow X$ je kontraktívne, ak existuje také $c \in (0, 1)$, že pre ľubovoľné $x, y \in X$ platí*

$$d(f(x), f(y)) < cd(x, y). \quad (1.4)$$

Veta 1.2 (Banachova veta o pevnom bode). *Nech $X \neq \emptyset$, (X, d) je úplný metrický priestor a nech $f : X \rightarrow X$ je kontraktívne zobrazenie. Potom existuje jediný pevný bod $x^* \in X$ zobrazenia f a navyše pre ľubovoľné $x \in X$ platí, že trajektória $\{f^j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ konverguje k bodu x^* .*

V prípade Banachovej vety platí, že každá trajektória konverguje k pevnému bodu. Podobne aj v mnohých iných situáciach pevné body „priťahujú“ trajektórie dynamického systému. To ale nemusí platiť pre každý pevný bod - v niektorých prípadoch sa systém akýmsi spôsobom „vyhýba“ týmto pevným bodom. O viacerých typoch pevných bodov hovorí nasledujúca definícia.

Definícia. *Pevný bod $x^* \in X$ zobrazenia f je (lokálne) priťahujúci alebo (lokálne) stabilný, ak existuje taká otvorená množina U obsahujúca x^* , že pre každé $x \in U$ trajektória bodu x konverguje k bodu x^* .*

Ak pre ľubovoľné $x \in X$ trajektória z x konverguje k pevnému bodu x^* , tak x^* je globálne stabilný.

Pevný bod x^* zobrazenia f je odpudzujúci, ak existuje taká otvorená množina U obsahujúca x^* , že pre ľubovoľné $x \in U \setminus \{x^*\}$ existujú také $k \geq 1$, že $f^k(x) \notin U$.

Analogickú definíciu môžeme použiť v prípade periodických bodov, pretože periodický bod periódy k zobrazenia f je pevný bod zobrazenia f^k .

V prípade spojite diferencovateľných zobrazení na intervale vieme pomocou nasledujúceho tvrdenia (z [8]) veľmi jednoducho rozlíšiť, či je pevný bod priťahujúcim pevným bodom alebo nie.

Tvrdenie 1.3. *Nech $X = [a, b]$ a nech f je spojité na $[a, b]$ a spojite diferencovateľné na (a, b) . Nech $x^* \in (a, b)$ je pevný bod zobrazenia f .*

(a) *Ak $|f'(x^*)| < 1$, potom x^* je lokálne stabilný.*

(b) *Ak $|f'(x^*)| > 1$, potom x^* je odpudzujúci.*

Z hľadiska konverencie k pevným bodom sú špecifickou kategóriou rastúce zobrazenia. Uvažujme počiatočný bod x_0 a rastúce zobrazenie f . Ak neberieme do úvahy triviálnu situáciu, že x_0 je pevným bodom, potom sú pre bod $x_1 = f(x_0)$ dve možnosti - buď $f(x_0) > x_0$ alebo $f(x_0) < x_0$. V prípade prvej možnosti $x_1 > x_0$ môžeme využiť rastúcosť, z čoho dostaneme, že $f(x_1) > f(x_0)$, a teda $x_2 > x_1$. Analogicky môžeme pokračovať ďalej a dostaneme, že trajektória bodu x_0 je rastúca - ak platí, že je aj ohraničená, potom musí platiť, že konverguje, a to k pevnému bodu. Podobne v druhom prípade ($x_1 < x_0$) platí, že trajektória bodu x_0 je klesajúca, a teda ak je ohraničená, tak konverguje k pevnému bodu. To môžeme využiť v nasledujúcich tvrdeniach (preberáme z [8]).

Tvrdenie 1.4. *Nech $X = [0, \infty)$ a nech zobrazenie $f : X \rightarrow X$ je spojité, neklesajúce a také, že existuje $x^* > 0$, pre ktoré platí*

$$f(x) > x \text{ pre } 0 < x < x^*,$$

$$f(x) < x \text{ pre } x > x^*.$$

Potom pre ľubovoľné $x > 0$ trajektória $\tau(x)$ bodu x konverguje k bodu x^ .*

Tvrdenie 1.5. *Nech $X = [0, \infty)$ a $f : X \rightarrow X$ je spojité, rastúce zobrazenie splňajúce nasledovné*

1. $f(0) = 0$,

2. existujú kladné pevné body $0 < x_{(1)}^* < x_{(2)}^*$ také, že

- (a) $f(x) < x$ pre $x \in (0, x_{(1)}^*)$,
- (b) $f(x) > x$ pre $x \in (x_{(1)}^*, x_{(2)}^*)$,
- (c) $f(x) < x$ pre $x > x_{(2)}^*$.

Potom pre $x \in (0, x_{(1)}^*)$ je trajektória $\tau(x)$ bodu x klesajúca a konverguje k 0, pre $x \in (x_{(1)}^*, x_{(2)}^*)$ je trajektória $\tau(x)$ bodu x rastúca a konverguje k bodu $x_{(2)}^*$ a pre $x > x_{(2)}^*$ je trajektória $\tau(x)$ klesajúca a konverguje k bodu $x_{(2)}^*$.

Konvergenca všetkých trajektorií súvisí aj s existenciou periodických bodov istých periód - hovorí o tom nasledovné tvrdenie (preberáme z [34]).

Tvrdenie 1.6. *Nech $f : I \rightarrow I$ je spojitá funkcia (I je interval), ktorá má iba periodické body periód $1, 2, 2^2, \dots, 2^n$. Potom pre ľubovoľné $x \in I$ platí, že $\tau(x)$ konverguje k pevnému bodu alebo periodickej trajektórii.*

Vo vyššie uvedených tvrdeniach bolo správanie dynamického systému veľmi jednoduché - bez ohľadu na počiatočný bod trajektórie konvergovali k nejakému pevnému bodu alebo periodickej trajektórii. V niektorých prípadoch však systém vykazuje akési nepredvídateľné a zdánlivo náhodné správanie - napriek tomu, že systém je deterministický. Takéto správanie nazývame chaos. V ďalšej časti uvedieme niektoré pojmy, ktoré opisujú chaotické správanie a vzťahy medzi týmito pojmi.

1.3 Chaotické správanie

V tejto časti už budeme pracovať výlučne iba s topologickým dynamickým systémom. Definície a tvrdenia preberáme z [31].

1.3.1 Tranzitivita

Pojem (topologickej) tranzitivity pochádza už z roku 1920 (pozri [24]). Jednou z interpretácií v diskretných dynamických systémoch je, že pre ľubovoľné dva body x, y sa vie topologicky tranzitívny systém dostať z ľubovoľne malého okolia bodu x ľubovoľne blízko k bodu y . V samotnej definícii však nepracujeme s okoliami, ale s ľubovoľnými otvorenými množinami.

Definícia. *Nech (X, f) je topologický dynamický systém. Zobrazenie f je tranzitívne, ak pre ľubovoľné dve neprázdne, otvorené množiny $U, V \subset X$ existuje $n \geq 0$ také, že $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ (alebo $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$).*

Uzavretá, invariantná množina $E \subset X$ je tranzitívna, ak je zobrazenie $f|_E : E \rightarrow E$ tranzitívne.

Definícia. *Nech (X, f) je topologický dynamický systém. Zobrazenie f je úplne tranzitívne ak f^n je tranzitívne pre každé $n \geq 1$.*

O ďalšej interpretácii tranzitivity hovorí nasledujúce tvrdenie (často používané ako ekvivalentná definícia tranzitivity).

Tvrdenie 1.7. *Nech (X, f) je topologický dynamický systém, a navyše predpokladajme, že X nemá izolovaný bod. Potom f je tranzitívne práve vtedy, keď existuje bod, ktorého orbita je hustá v X .*

V prípade intervalových zobrazení má tranzitivita zaujímavý dôsledok pre periodické body.

Tvrdenie 1.8. *Ak $f : I \rightarrow I$ je tranzitívne intervalové zobrazenie, potom množina periodických bodov je hustá v I .*

1.3.2 Premiešavanie (z angl. mixing)

Koncept premiešavania pochádza z roku 1939 z článku [17] - v tomto článku bol však použitý pojem *trvalá oblastná tranzitivita* (z angl. permanent regional transitivity).

Definícia. *Nech (X, f) je topologický dynamický systém. Zobrazenie f je premiešavajúce, ak pre ľubovoľné dve neprázdne, otvorené množiny $U, V \subset X$ existuje také $N \geq 0$, že pre každé $n \geq N$ platí $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Ako možno vidieť priamo z definície, každé premiešavajúce zobrazenie je tranzitívne. Interpretácia tohto typu chaotického správania sa dá dobre ukázať na intervalových zobrazeniach.

Tvrdenie 1.9. *Zobrazenie $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ je premiešavajúce práve vtedy, ak pre každé $\varepsilon > 0$ a každý nedegenerovaný interval $J \subset [a, b]$ existuje také prirodzené číslo N , že $f^n(J) \supset [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ pre každé $n \geq N$.*

Vzťah medzi tranzitívnymi a premiešavajúcimi zobrazeniami zhŕňajú nasledovné dve vety.

Veta 1.10. *Nech $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ je tranzitívne zobrazenie. Potom nastáva jeden z nasledujúcich prípadov:*

- Zobrazenie f je premiešavajúce.
- Existuje také $c \in (a, b)$, že $f([a, c]) = [c, b]$, $f([c, b]) = [a, c]$ a zobrazenia $f^2|_{[a, c]}$ a $f^2|_{[c, b]}$ sú premiešavajúce. Navyše c je jediný pevný bod zobrazenia f .

Veta 1.11. *Nech $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ je intervalové zobrazenie. Nasledujúce vlastnosti sú ekvivalentné:*

- f je tranzitívne a má periodický bod nepárnej periódy inej ako 1.
- f^2 je tranzitívne.
- f je úplne tranzitívne.
- f je premiešavajúce.
- Pre každé $\varepsilon > 0$ a každý nedegenerovaný interval $J \subset [a, b]$ existuje také prirodzené číslo N , že $f^n(J) \supset [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ pre každé $n \geq N$.

1.3.3 Topologická entropia

Topologická entropia je nezáporné číslo alebo $+\infty$, ktoré istým spôsobom vyjadruje zložitost' systému - meria exponenciálne tempo rastu počtu rozlíšiteľných orbít (s rastúcim časom). Dynamický systém považujeme za chaotický, pokiaľ je toto číslo nenulové. Pojem topologickej entropie bol zavedený v roku 1965 v článku [1]. V prípade, že máme na priestore stavov X definovanú metriku d , potom sa k tomuto číslu vieme dopracovať aj pomocou Bowenovho postupu (z článku [11] z roku 1971) - uvádzame najprv tento postup (preberáme z knihy [13]).

Nech (X, f) je topologický dynamický systém. Pre ľubovoľné prirodzené číslo n definujeme funkciu

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq k \leq n-1} d(f^k(x), f^k(y)), \quad (1.5)$$

pre $x, y \in X$. O d_n sa dá ukázať, že je to metrika na X . Okrem toho z definície vyplýva, že $d_n \geq d_{n-1}$ a $d_1 = d$.

Definícia. *Nech $\varepsilon > 0$ je pevné. Množina $A \subset X$ je (n, ε) -sieť (z angl. *spanning*), ak ku každému $x \in X$ existuje také $y \in A$, že $d_n(x, y) < \varepsilon$.*

Množina $B \subset X$ je (n, ε) -separovaná, ak pre ľubovoľné dva rôzne body $x, y \in B$ platí, že $d_n(x, y) \geq \varepsilon$.

Označme

- $\text{span}(n, \varepsilon, f)$ minimálnu kardinalitu (n, ε) -siete,
- $\text{sep}(n, \varepsilon, f)$ maximálnu kardinalitu (n, ε) -separovanej množiny,
- $\text{cov}(n, \varepsilon, f)$ minimálnu kardinalitu pokrytia X množinami, ktorých d_n -diameter je menší ako ε .

Z kompaktnosti množiny X vyplýva, že čísla $\text{span}(n, \varepsilon, f)$, $\text{sep}(n, \varepsilon, f)$ a $\text{cov}(n, \varepsilon, f)$ sú konečné.

Lema 1.12. *Platia nerovnosti*

$$\text{cov}(n, 2\varepsilon, f) \leq \text{span}(n, \varepsilon, f) \leq \text{sep}(n, \varepsilon, f) \leq \text{cov}(n, \varepsilon, f). \quad (1.6)$$

Veta 1.13 (a definícia). *Označme*

$$h_\varepsilon(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\text{cov}(n, \varepsilon, f)). \quad (1.7)$$

Limita

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h_\varepsilon(f) \quad (1.8)$$

existuje (môže nadobúdať aj hodnotu ∞) a nazýva sa topologická entropia.

Z Lemy 1.12 vyplýva, že topologickú entropiu vieme vyjadriť aj nasledovne:

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\text{span}(n, \varepsilon, f)) \quad (1.9)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\text{sep}(n, \varepsilon, f)). \quad (1.10)$$

Platí, že toto číslo je invariantné vzhľadom na voľbu metriky a dá sa definovať aj na kompaktných topologických priestoroch (na ktorých nemusí byť definovaná žiadna metrika) - takto bola topologická entropia definovaná pôvodne (v článku [1]).

Veta 1.14. *Nech (X, G) je kompaktný topologický priestor a $\mathcal{A}$ nejaké jeho pokrytie. Označme*

$$H(\mathcal{A}) = \log \mathcal{N}(\mathcal{A}), \quad (1.11)$$

kde $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ je počet množín v konečnom podpokrytí pokrytia $\mathcal{A}$ s najmenšou možnou kardinalitou. Pre ľubovoľné zobrazenie $f : X \rightarrow X$ definujeme

$$h(f, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{A} \vee f^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{A})) \quad (1.12)$$

kde pre dve pokrytia $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ a $\mathcal{D} = \{D_j\}_{j \in J}$ je $\mathcal{C} \vee \mathcal{D}$ definované ako $\mathcal{C} \vee \mathcal{D} = \{C_i \cap D_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ (I a J sú ľubovoľné indexové množiny). Potom limita vo výraze (1.12) existuje a navyše

$$h(f) = \sup_{\mathcal{A} - \text{pokrytie } X} h(f, \mathcal{A}). \quad (1.13)$$

V nasledujúcich tvrdeniach zhrnieme niektoré vlastnosti topologickej entropie - predtým ale zdefinujeme pojem topologickej konjugácie.

Definícia. *Nech (X, f) a (Y, g) sú topologické dynamické systémy. (X, f) a (Y, g) sú topologicky konjugované, ak existuje taký homeomorfizmus $\varphi : Y \rightarrow X$, že $f(\varphi(y)) = \varphi(g(y))$.*

Veta 1.15. *Ak sú topologické dynamické systémy (X, f) a (Y, g) topologicky konjugované, tak $h(f) = h(g)$.*

Tvrdenie 1.16. *Nech (X, f) je topologický dynamický systém a m je prirodzené číslo. Platí*

a) $h(f^m) = mh(f)$.

b) *Ak existujú také kompaktné množiny A_i , $i = 1, \dots, k$, že $f(A_i) \subset A_i$ pre každé $i = 1, \dots, k$ a $A_1 \cup \dots \cup A_k = X$, potom*

$$h(f) = \max_{1 \leq i \leq k} h(f|_{A_i}). \quad (1.14)$$

S topologickou entropiou súvisí aj existencia cyklov istých rádov (viď Veta 1.19) a pojem podkovy.

Definícia. *Nech $f : I \rightarrow I$ je intervalové zobrazenie a nech $p \geq 2$ je prirodzené číslo. Nech $J_1, \dots, J_p \subset I$ sú uzavreté, nedegenerované intervaly, ktoré majú po dvoch disjunktné vnútra. Ak pre ľubovoľné $i = 1, \dots, p$ platí, že $f(J_i) \supset J_1 \cup \dots \cup J_p$, potom p -ticu $(J_1, \dots, J_p)$ nazývame p -podkova zobrazenia f .*

Ak sú intervaly $J_1, \dots, J_p$ disjunktné, potom p -ticu $(J_1, \dots, J_p)$ nazývame striktná p -podkova (z angl. strict horseshoe).

Tvrdenie 1.17. *Ak má spojité intervalové zobrazenie $f : I \rightarrow I$ p -podkovu, potom platí, že $h(f) \geq \log p$.*

Veta 1.18 (Misiurewiczova). *Nech $f : I \rightarrow I$ je spojité intervalové zobrazenie, ktoré má kladnú topologickú entropiu. Pre každé $\lambda < h(f)$ a každé N existujú také intervaly $J_1, \dots, J_p$ a také prirodzené číslo $n \geq N$, že $(J_1, \dots, J_p)$ je striktná p -podkova zobrazenia f^n a $\frac{\log p}{n} \geq \lambda$.*

Veta 1.19. *Nech $f : I \rightarrow I$ je spojité intervalové zobrazenie. Nasledovné tvrdenia sú ekvivalentné:*

a) *topologická entropia zobrazenia f je kladná,*

b) *f má periodický bod, ktorého perióda nie je mocninou čísla 2,*

c) *existuje také prirodzené číslo $n \geq 1$, že f^n má striktnú podkovu.*

K nasledujúcemu tvrdeniu uvádzame aj dôkaz (podľa knihy [31]), keďže jeho ideu v tejto práci viackrát použijeme.

Tvrdenie 1.20. *Nech $f : I \rightarrow I$ je intervalové zobrazenie, ktoré je Lipschitzovsky spojité, t.j. existuje také $\lambda \geq 1$, že $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ pre každé $x, y \in I$. Potom $h(f) \leq \log \lambda$.*

Dôkaz. Nech $\varepsilon > 0$ a n je prirodzené číslo. Nech množina $E = \{x_1 < x_2 < \dots < x_s\}$ je (n, ε) -separovaná s maximálnou možnou kardinalitou, t.j. $s = \text{sep}(n\varepsilon, f)$. Z definície platí, že pre ľubovoľné $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ existuje $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ pre ktoré platí

$$|f^k(x_{i+1}) - f^k(x_i)| \geq \varepsilon. \quad (1.15)$$

Z Lipschitzovskej spojitosti ale zároveň máme

$$|f^k(x_{i+1}) - f^k(x_i)| \leq \lambda^k |x_{i+1} - x_i| \leq \lambda^n (x_{i+1} - x_i), \quad (1.16)$$

a teda

$$x_{i+1} - x_i \geq \lambda^{-n} \varepsilon \quad (1.17)$$

pre ľubovoľné $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$. Z toho potom vyplýva

$$|I| \geq x_s - x_1 = (x_s - x_{s-1}) + (x_{s-1} - x_{s-2}) + \dots + (x_2 - x_1) \geq (s-1)\lambda^{-n}\varepsilon \quad (1.18)$$

a po jednoduchých úpravách dostaneme nerovnosť

$$\text{sep}(n, \varepsilon, f) = s \leq \frac{|I|}{\varepsilon} \lambda^n + 1. \quad (1.19)$$

Z (1.10) potom dostávame $h(f) \leq \log \lambda$. $\square$

O vzťahu s predchádzajúcimi typmi chaotického správania hovorí nasledovné tvrdenie.

Tvrdenie 1.21. *Nech $f : I \rightarrow I$ je intervalové zobrazenie.*

- Ak f je tranzitívne, potom $h(f) \geq \frac{\log 2}{2}$.
- Ak f je premiešavajúce, potom $h(f) > \frac{\log 2}{2}$.

1.3.4 Li-Yorkeov chaos

Pojem chaosu bol v matematike prvýkrát uvedený v roku 1975 v článku Li a Yorkea [28] - v tomto článku ukázali, že ak má spojité intervalové zobrazenie periodický bod periódy tri, potom existuje nespočítateľná množina takých bodov, že každá dvojica rôznych bodov z tejto množiny je proximálna (trajektórie týchto bodov sú nekonečne veľakrát ľubovoľne blízko), ale nie asymptotická (trajektórie sa nikdy - ani limitne - „nestretnú“). Takýto typ správania nazývame chaos v zmysle Li-Yorke (alebo Li-Yorkeov chaos), formálne ho môžeme definovať nasledovne.

Definícia. *Nech (X, f) je topologický dynamický systém, $x, y \in X$ a $\delta > 0$. Dvojica (x, y) sa nazýva Li-Yorke dvojica modulu δ , ak platí*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta \quad (1.20)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0. \quad (1.21)$$

Dvojica (x, y) sa nazýva Li-Yorke dvojica, ak je to Li-Yorke dvojica modulu δ pre nejaké δ .

Množina $S \subset X$ sa nazýva chaotická (resp. δ -chaotická - z angl. scrambled) množina, ak pre ľubovoľné dva rôzne body $x, y \in S$ platí, že (x, y) je Li-Yorke dvojica (resp. Li-Yorke dvojica modulu δ).

Topologický dynamický systém (X, f) je chaotický v zmysle Li-Yorke, ak existuje nespočítateľná chaotická množina.

1.3.5 Distribučný chaos

Akési zovšeobecnenie Li-Yorkeovho chaosu je takzvaný distribučný chaos zavedený Schweizerom a Smítalom v článku [33] z roku 1994. Na jeho zadefinovanie potrebujeme najprv zadefinovať pojmy dolnej a hornej distribučnej funkcie

Definícia. *Nech (X, f) je topologický dynamický systém a nech $x, y \in X$. Pre ľubovoľné $t \in \mathbb{R}$ a prirodzené číslo n definujeme funkciu*

$$F_{xy}^{(n)}(t, f) = \frac{1}{n} \# \{i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : d(f^i(x), f^i(y)) < t\}. \quad (1.22)$$

Dolnú a hornú distribučnú funkciu $F_{xy}(\cdot, f), F_{xy}^(\cdot, f) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definujeme nasledovne:*

$$F_{xy}(t, f) = \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{xy}^{(n)}(t, f) \quad (1.23)$$

$$F_{xy}^*(t, f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{xy}^{(n)}(t, f). \quad (1.24)$$

Priamo z definície možno vidieť niektoré základné vlastnosti týchto dvoch funkcií.

Tvrdenie 1.22. *Nech (X, f) je topologický dynamický systém a nech $x, y \in X$. Platí, že*

$$a) \ F_{xy}(t, f) = F_{xy}^*(t, f) = 0 \text{ pre ľubovoľné } t \leq 0,$$

$$b) \ F_{xy}(t, f) = F_{xy}^*(t, f) = 1 \text{ pre ľubovoľné } t > \text{diam}(X) = \max_{u, v \in X} d(u, v),$$

$$c) \ \text{zobrazenia } F_{xy} \text{ a } F_{xy}^* \text{ sú v premennej } t \text{ neklesajúce a navyše } F_{xy}(t, f) \leq F_{xy}^*(t, f) \text{ pre ľubovoľné } t \in \mathbb{R}.$$

Definícia. *Nech (X, f) je topologický dynamický systém. Hovoríme, že v systéme je distribučný chaos*

- *typu 1 (DC1), ak*

$$\exists x, y \in X, \exists \delta > 0 : F_{xy}(t, f) = 0 \quad \forall t \in (0, \delta) \quad \text{a} \quad F_{xy}^*(t, f) = 1 \quad \forall t > 0, \quad (1.25)$$

- *typu 2 (DC2), ak*

$$\exists x, y \in X, \exists \delta > 0 : F_{xy}(t, f) < 1 \quad \forall t \in (0, \delta) \quad \text{a} \quad F_{xy}^*(t, f) = 1 \quad \forall t > 0, \quad (1.26)$$

- *typu 3 (DC3), ak*

$$\exists x, y \in X, \exists 0 < a < b : F_{xy}(t, f) < F_{xy}^*(t, f) \quad \forall t \in (a, b). \quad (1.27)$$

O vzťahoch medzi týmito typmi distribučného chaosu a medzi topologickou entropiou v prípade intervalových zobrazení hovorí nasledovná veta.

Veta 1.23. *Nech $f : I \rightarrow I$ je spojité intervalové zobrazenie. Potom sú nasledujúce tvrdenia je ekvivalentné*

- a) *f je DC1,*
- b) *f je DC2,*
- c) *f je DC3,*
- d) *$h(f) > 0$.*

Takisto sa dá z definície vidieť, že distribučný chaos implikuje Li-Yorkeov chaos.

Výhodou tohto typu chaosu je, že ho vieme kvantifikovať - pomocou takzvanej (hlavnej) miery chaosu (z angl. principal measure of chaos, viď [32]).

Definícia. *Nech (X, d) je metrický priestor s konečným diametrom d_X a nech $f : X \rightarrow X$ je zobrazenie. Miera chaosu zobrazenia f je číslo $\mu(f) \in [0, 1]$ definované ako*

$$\mu(f) = \sup_{x, y \in X} \frac{1}{d_X} \int_0^\infty (F_{xy}^*(t, f) - F_{xy}(t, f)) dt. \quad (1.28)$$

Táto miera nadobúda hodnoty z intervalu $[0, 1]$, pričom ak je nulová, tak v systéme distribučný chaos nie je.

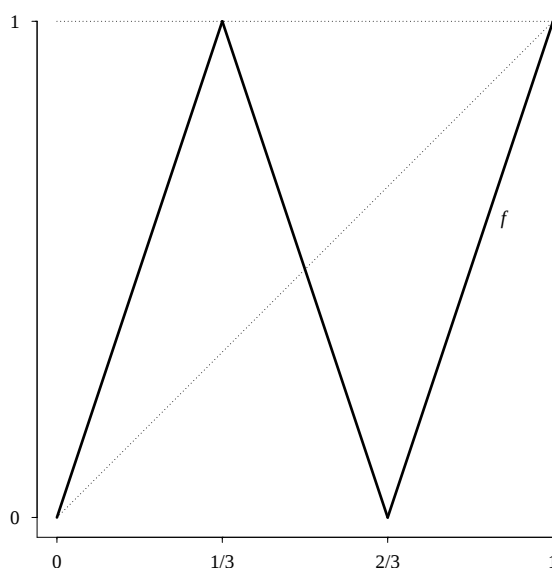
1.3.6 Ilustrácia niektorých typov chaosu

Na záver tejto kapitoly ilustrujeme niektoré typy chaosu na konkrétnom príklade.

Príklad 1.24. Uvažujme dynamický systém (X, f) , kde $X = [0, 1]$ a $f : X \rightarrow X$ je dané predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{ak } x < \frac{1}{3}, \\ -3x + 2 & \text{ak } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 3x - 2 & \text{ak } x > \frac{2}{3}. \end{cases} \quad (1.29)$$

Ukážeme, že toto zobrazenie je premiešavajúce, jeho topologická entropia je $\log 3$ a že



Obr. 1.2: Graf funkcie f .

je distribučne chaotické s mierou chaosu $\mu(f) = 1$.

Pri študovaní chaosu je v mnohých prípadoch praktické prejsť z desiatkovej sústavy do nejakej inej číselnej sústavy. V práci budeme najčastejšie využívať trojkový zápis čísel z intervalu $[0, 1]$ - napríklad číslo $\frac{7}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}$ v trojkovej sústave zapíšeme ako $\frac{7}{9} = 0.21000\dots$. Pri práci s takýmto zápisom budeme používať nasledovné označenie:

- s bude označovať nekonečnú postupnosť núl, jednotiek a dvojek;
- r bude označovať konečnú postupnosť núl, jednotiek a dvojek; $\ell(r)$ bude označovať dĺžku postupnosti r ;
- pre prirodzené číslo k (prípadne $k = \infty$) bude 0^k označovať postupnosť núl dĺžky k , podobne pre 1^k a 2^k ; 0^0 , 1^0 a 2^0 bude označovať 'prázdny symbol' (napríklad $r0^0s = rs$);

- keďže každé číslo z intervalu $[0, 1]$ možno zapísať v tvare $0.s$ pre nejaké s , pre jednoduchosť budeme vynechávať ‘0.’;
- pre prirodzené číslo k bude $s(k)$ označovať k -ty člen postupnosti s ;
- pre postupnosť s bude $\bar{s}$ označovať postupnosť vytvorenú z s zámenou núl a dvojiek (napr. ak $s = 012022\dots$, potom $\bar{s} = 210200\dots$);
- pre $x, y \in [0, 1]$ bude $U(x, y)$ označovať poslednú pozíciu v trojkovej sústave, na ktorej sa ešte x a y nelíšia, teda

$$U(x, y) \equiv \min\{k \in \{1, 2, \dots\} \text{ také, že } s_x(k) \neq s_y(k)\} - 1, \quad (1.30)$$

kde s_x , resp. s_y je trojkový zápis čísla x , resp. y . V prípade nejednoznačnosti (napríklad $s_x = r02^\infty = r10^\infty$) sa s_x a s_y zvolia tak, aby $U(x, y)$ bolo maximálne možné. Napríklad $U(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}) = 2$ pretože $s_{\frac{1}{3}} = 02^\infty$ a $s_{\frac{2}{9}} = 020^\infty$. Zjavne platí, že ak $U(x, y) \geq k$, potom $|x - y| \leq 3^{-k}$.

Pre zobrazenie f zjavne platí, že $f(0s) = f(2s) = s$ a $f(1s) = \bar{s}$, teda f celú postupnosť „posunie” o jednu pozíciu doľava (a prípadne vymení nuly a dvojky). Najprv ukážeme, že pre ľubovoľné $x, y \in [0, 1]$ sa vieme z ľubovoľne malého okolia bodu x dostať do bodu y - teda pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje také N a také $x_0 \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ že $f^N(x_0) = y$.

Označme s_x trojkový zápis čísla x a s_y trojkový zápis čísla y . Nech n je také číslo, ktoré pre dané $\varepsilon > 0$ spĺňa $3^{-n} < \varepsilon$. Nech číslo x_0 je tvaru rs_y , kde r je zvolené tak, aby $U(x_0, x) > n$ a zároveň aby r obsahovalo párny počet jednotiek. Zjavne $|x_0 - x| < 3^{-n} < \varepsilon$ a zároveň $f^N(x_0) = y$ pre $N = \ell(r)$, pretože posunutiami sa „zbavíme” postupnosti r a párny počet jednotiek zabezpečí, že dostaneme s_y a nie $\bar{s}_y$.

Z predchádzajúceho vyplýva, že pre ľubovoľné ε existuje také N , že sa z intervalu $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ vieme po N krokoch dostať do ľubovoľného bodu z intervalu $[0, 1]$ - teda $f^N((x - \varepsilon, x + \varepsilon)) = [0, 1]$.

Nech sú teraz dané ľubovoľné dve otvorené množiny $U, V \subset [0, 1]$. Keďže U je otvorená, tak sa v nej určite nachádza nejaký bod aj s jeho okolím - z predošlého výsledku teda máme, že existuje také N , že $f^N(U) = [0, 1]$. Keďže triviálne platí $f([0, 1]) = [0, 1]$, tak platí aj $f^n(U) = [0, 1]$ pre ľubovoľné $n \geq N$, tým pádom $f^n(U) \cap V = V \neq \emptyset$ pre každé $n \geq N$. Tým sme ukázali, že zobrazenie f je premiešavajúce.

Ďalej ukážeme, že tento systém je distribučne chaotický, pričom $\mu(f) = 1$. Uvažujme postupnosť prirodzených čísel $\{k_n\}_{n=1}^\infty$, ktorá spĺňa $\frac{k_1+k_2+\dots+k_n}{k_{n+1}} \searrow 0$ (napr. $k_1 = 1$ a $k_{n+1} = n(k_1 + \dots + k_n)$). Nech $y = 0$ (pevný bod) a nech trojkový zápis čísla x je $0^{k_1}2^{k_2}0^{k_3}2^{k_4}\dots$. Z toho, ako sú x a y definované vyplýva, že ich iterácie budú striedavo veľmi „blízko”

(to je zabezpečené úsekmi tvaru 0^{k_i}) a veľmi „ďaleko” (zabezpečené úsekmi tvaru 2^{k_j}). „Blízko” a „ďaleko” v tomto prípade znamená, že limitne ich vzdialenosti budú 0 a 1. Navyše z vlastnosti postupnosti $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyplýva, že časy, kedy sú tieto iterácie „blízko” a „ďaleko” sa stále viac a viac predlžujú, teda pre ľubovoľné $t \in (0, 1)$ dostaneme, že $F_{xy}(t, f) = 0$ a $F_{xy}^*(t, f) = 1$. Vidíme teda, že takýto dynamický systém spĺňa definície všetkých troch typov distribučného chaosu a navyše miera chaosu $\mu(f)$ je v tomto prípade maximálna možná, t.j. $\mu(f) = 1$.

Nakoniec ukážeme, že topologická entropia tohto zobrazenia je $\log 3$. Hoci toto vyplýva priamo z Tvrdení 1.17 a 1.20, v ďalšej časti tejto práce bude užitočné, ak sa k tejto hodnote dopracujeme cez separované množiny.

Lema 1.25. *Nech m a n sú ľubovoľné prirodzené čísla a nech $\varepsilon = 3^{-2m}$. Pre zobrazenie f z (1.29) platí*

$$3^{\frac{n-m}{m}(m-1)} \leq \text{sep}(n, \varepsilon, f) \leq 3^{n+2m} + 1. \quad (1.31)$$

Dôkaz. Druhú nerovnosť dostaneme rovnako ako v dôkaze Tvrdenia 1.20 ($|I| = 1, \lambda = 3$).

Uvažujme teraz funkciu f^m . Najprv ukážeme, že táto funkcia má striktnú podkovu $(J_1, J_2, \dots, J_{3^m-2})$, kde

$$J_i = \left[\frac{i}{3^m} + \frac{1}{3^{2m}}, \frac{i+1}{3^m} - \frac{1}{3^{2m}} \right], \quad (1.32)$$

$i = 1, 2, \dots, 3^m - 2$. Označme r_i takú konečnú postupnosť dĺžky m , pre ktorú platí, že $r_i 0^\infty$ je trojkový zápis čísla $\frac{i}{3^m}$. Platí

$$\begin{aligned} f^m \left(\frac{i}{3^m} + \frac{1}{3^{2m}} \right) &= f^m(r_i 0^{m-1} 10^\infty) = \\ &= \begin{cases} 0^{m-1} 10^\infty = \frac{1}{3^m} & \text{ak má } r_i \text{ párny počet jednotiek,} \\ 2^{m-1} 12^\infty = 2^m 0^\infty = \frac{3^m-1}{3^m} & \text{ak má } r_i \text{ nepárny počet jednotiek} \end{cases} \end{aligned}$$

a zároveň

$$\begin{aligned} f^m \left(\frac{i+1}{3^m} - \frac{1}{3^{2m}} \right) &= f^m \left(\frac{i}{3^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{3^{2m}} \right) = f^m(r_i 2^m 0^\infty) = \\ &= \begin{cases} 2^m 0^\infty = \frac{3^m-1}{3^m} & \text{ak má } r_i \text{ párny počet jednotiek,} \\ 0^m 2^\infty = 0^{m-1} 10^\infty = \frac{1}{3^m} & \text{ak má } r_i \text{ nepárny počet jednotiek,} \end{cases} \end{aligned}$$

teda pre každé $i \in \{1, \dots, 3^m - 2\}$ platí $f^m(J_i) \supseteq \left[\frac{1}{3^m}, \frac{3^m-1}{3^m} \right] \supseteq J_1 \cup \dots \cup J_{3^m-2}$. Položme

$$J_{i_1 i_2 \dots i_n} \equiv \{x \in [0, 1] : x \in J_{i_1}, f^m(x) \in J_{i_2}, \dots, f^{(n-1)m}(x) \in J_{i_n}\}, \quad (1.33)$$

$i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, \dots, 3^m - 2\}$. Týchto množín je zjavne $(3^m - 2)^n$, sú disjunktné a každá z nich je neprázdna, pretože $(J_1, \dots, J_{3^m-2})$ je striktná podkova.

Uvažujme teraz nejaké $x \in J_{i_1 \dots i_n}$ a $y \in J_{j_1 \dots j_n}$, kde $i_k \neq j_k$ pre nejaké $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Potom $f^{m(k-1)}(x) \in J_{i_k}$ a $f^{m(k-1)}(y) \in J_{j_k}$. Avšak J_{i_k} a J_{j_k} sú od seba vzdialené aspoň o $\frac{2}{3^{2m}}$, teda

$$|f^{m(k-1)}(x) - f^{m(k-1)}(y)| \geq \frac{2}{3^{2m}} > 3^{-2m} = \varepsilon. \quad (1.34)$$

Z toho vyplýva, že $d_{mn}(x, y) > \varepsilon$ (metrika d_n bola definovaná v (1.5)), a teda

$$\text{sep}(mn, \varepsilon, f) \geq (3^m - 2)^n \geq 3^{n(m-1)}. \quad (1.35)$$

Navyše zjavne platí, že hodnota $\text{sep}(n, \varepsilon, f)$ je neklesajúca v n , preto máme

$$\text{sep}(n, \varepsilon, f) \geq 3^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor (m-1)} \geq 3^{\frac{n-m}{m} (m-1)}.$$

□

Z Lemy 1.25 potom máme

$$h(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{sep}(n, 3^{-2m}, f) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(3^{n+2m} + 1) = \log 3$$

a

$$\begin{aligned} h(f) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{sep}(n, 3^{-2m}, f) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 3^{\frac{n-m}{m} (m-1)} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{(n-m)(m-1)}{m} \log 3 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m-1}{m} \log 3 = \log 3. \end{aligned}$$

Kapitola 2

Náhodné dynamické systémy

Trajektórie náhodných dynamických systémov - tak ako ich budeme chápať my - vytvárajú Markovovské procesy. Z toho dôvodu sa v prvej časti tejto kapitoly budeme venovať práve týmto procesom.

2.1 Markovovské procesy

Na úvod opäť uvedieme niektoré základné pojmy a tvrdenia (prebraté z knihy [8]).

Definícia. *Nech S je priestor stavov (neprázdna množina) so σ -algebrou $\mathcal{S}$. Náhodný proces $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ s hodnotami v S má Markovovu vlastnosť, ak pre ľubovoľné prirodzené čísla n a m platí, že podmienené rozdelenie $(X_{n+1}, \dots, X_{n+m})$ pri danom $X_0, \dots, X_n$ je rovnaké ako podmienené rozdelenie $(X_{n+1}, \dots, X_{n+m})$ pri danom X_n .*

Ak má náhodný proces Markovovu vlastnosť, nazýva sa Markovov proces.

Ak je priestor stavov S spočítateľný, potom náhodný proces nazývame Markovov reťazec.

Ak toto podmienené rozdelenie $(X_{n+1}, \dots, X_{n+m})$ nezávisí od n , hovoríme, že Markovov proces je homogénny.

Zobrazenie $p : S \times \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$ definované predpisom

$$p(x, B) = P(X_{n+1} \in B | X_n = x) \quad (2.1)$$

sa nazýva pravdepodobnosť prechodu (z bodu x do množiny B).

Ďalej budeme uvažovať iba homogénne Markovovské procesy.

Nasledujúce tvrdenie hovorí o tom, že definíciu Markovovej vlastnosti vieme ešte o niečo zjednodušiť.

Tvrdenie 2.1. *Náhodný proces $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ má Markovovu vlastnosť práve vtedy, ak pre ľubovoľné prirodzené číslo n platí, že podmienené rozdelenie X_{n+1} pri danom $X_0, \dots, X_n$ závisí iba od X_n .*

V prípade Markovových reťazcov má priestor $(S, \mathcal{S})$ jednoduchšiu štruktúru (pretože S je spočítateľná) - z toho dôvodu sa namiesto pravdepodobnosti prechodu chápanej ako funkcie definovanej v (2.1) používa takzvaná matica prechodu.

Definícia. *Nech $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ je Markovov reťazec. Matica $\mathbf{p} = (p_{ij})_{i,j \in S}$, kde $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$, sa nazýva matica prechodu.*

Predpokladajme, že náhodná premenná X_0 má rozdelenie $\mu = (\mu_i)_{i \in S}$. Potom

$$P(X_1 = j) = \sum_{i \in S} P(X_1 = j | X_0 = i) P(X_0 = i) = \sum_{i \in S} \mu_i p_{ij}, \quad (2.2)$$

a teda rozdelenie X_1 vieme určiť ako $\mu \mathbf{p}$ (na μ sa pozeráme ako na riadkový vektor), analogicky rozdelenie X_n je $\mu \mathbf{p}^n$. To nás vedie k nasledujúcej definícii.

Definícia. *Rozdelenie π sa nazýva stacionárne (invariantné) rozdelenie Markovovho reťazca, ak platí*

$$\pi \mathbf{p} = \pi \quad (2.3)$$

$$\text{alebo } \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} = \pi_j \text{ pre každé } j \in S. \quad (2.4)$$

V prípade Markovových reťazcov s konečným počtom stavov vieme vždy nájsť stacionárne rozdelenie. Pred tým ako uvedieme vetu, ktorá pojednáva o tomto rozdelení v nerozložiteľných Markovových reťazcoch, je potrebné zdefinovať niektoré pojmy.

Definícia. *Hovoríme, že podmnožina stavov $C \subset S$ je uzavretá, ak pre každé $i \in C$ a pre každé $j \in S \setminus C$ platí, že $p_{ij} = 0$.*

Markovov reťazec je nerozložiteľný (irreducibilný), ak v množine jeho stavov neexistuje netriviálna (t.j. S alebo $\emptyset$) uzavretá podmnožina.

Hovoríme, že stav $i \in S$ je prechodný, ak platí

$$P(\inf\{n \geq 1 : X_n = i\} < \infty | X_0 = i) < 1 \quad (2.5)$$

Veta 2.2. *V nerozložiteľnom Markovovom reťazci s konečným počtom stavov existuje jediné stacionárne rozdelenie π , pričom pre každé $i, j \in S$ platí, že*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n P(X_k = j | X_0 = i) = \pi_j. \quad (2.6)$$

V ďalších častiach tejto práce bude pre nás dôležitá najmä existencia limit vo výraze (2.6). V nasledujúcej leme ukážeme, že tá je zabezpečená aj v prípade rozložiteľných reťazcov.

Lema 2.3. *Nech $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ je Markovov reťazec s konečnou množinou stavov S . Potom pre ľubovoľné $i, j \in S$ limita*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n P(X_k = j | X_0 = i) \quad (2.7)$$

existuje.

Dôkaz. Prípad, kedy je reťazec nerozložiteľný rieši Veta 2.2. Predpokladajme teraz, že reťazec je rozložiteľný na $s \in \mathbb{N}$ uzavretých množín, t.j. $S = C_1 \cup \dots \cup C_s \cup T$, kde T je množina prechodných stavov a $C_1, \dots, C_s$ sú uzavreté množiny, na ktorých je už reťazec nerozložiteľný. $\Pi(C_l)$ bude označovať jediné stacionárne rozdelenie na C_l , $l = 1, \dots, s$ (to podľa Vety 2.2 existuje). Ak

1. $i \in C_l$, potom

- ak $j \in C_l$, potom limita (2.7) existuje a je rovná hodnote $\Pi_j(C_l)$,
- ak $j \notin C_l$, potom je limita (2.7) zjavne rovná 0,

2. $i \in T$, teda stav i je prechodný, potom

- ak j je tiež prechodný, potom je limita (2.7) zjavne rovná 0,
- ak $j \in C_l$, potom je limita (2.7) rovná hodnote $\Pi_j(C_l) \cdot \nu(C_l)$, kde $\nu(C_l)$ je podmienená pravdepodobnosť absorpcie množinou C_l za podmienky $X_0 = i$.

Tým sú vyriešené všetky možnosti. □

V prípade, že množina stavov S nie je spočítateľná (napríklad ak S je interval), nemá zmysel hovoriť o matici prechodu - k pojmu stacionárneho rozdelenia sa v tom prípade dostaneme nasledovne:

Ak má počiatočný stav X_0 rozdelenie μ , potom rozdelenie X_1 vieme určiť ako $T^*\mu$, kde T^* je operátor definovaný na priestore všetkých konečných zovšeobecnených mier na $(S, \mathcal{S})$ vzťahom

$$T^*\mu(C) = \int_S p(x, C) \mu(dx), \quad (2.8)$$

kde $C \in \mathcal{S}$. Analogicky vieme rozdelenie X_2 určiť ako $T^{*2}\mu \equiv T^*(T^*\mu)$, atď. Stacionárne rozdelenie potom prirodzene definujeme ako také rozdelenie π , ktoré spĺňa vzťah

$$T^*\pi = \pi. \quad (2.9)$$

Na záver tejto časti uvedieme niektoré tvrdenia o Markovovských procesoch, ktoré neskôr v tejto práci použijeme - Tvrdenie 2.4 je z knihy [15] a Tvrdenie 2.7 možno nájsť v článku [20].

Tvrdenie 2.4. *Nech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených náhodných premenných, ktoré nadobúdajú iba hodnoty -1 a 1 , pričom*

$$P(X_n = 1) = p, \quad (2.10)$$

kde p je z intervalu $(0, 1)$. Položme $S_0 = 0$ a $S_n = S_{n-1} + X_n$ pre $n \geq 1$. Proces $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ je Markovov proces, nazývame ho jednoduchá náhodná prechádzka a pre pravdepodobnosť $P_k = P(\exists n \in N : S_n = -k)$ toho, že proces niekedy prejde bodom $-k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) platí, že

- *ak $p \leq \frac{1}{2}$, potom $P_k = 1$,*
- *ak $p > \frac{1}{2}$, potom $P_k = \left(\frac{1-p}{p}\right)^k$.*

Analogicky pre pravdepodobnosť $P'_k \equiv P(\exists n \in N : S_n = k)$ toho, že proces niekedy prejde bodom k ($k = 0, 1, 2, \dots$) platí

- *ak $p < \frac{1}{2}$, potom $P'_k = \left(\frac{1-p}{p}\right)^k$,*
- *ak $p \geq \frac{1}{2}$, potom $P'_k = 1$.*

Dôsledok 2.5. *Uvažujme maximum náhodnej prechádzky $M_n \equiv \max_{i \in \{0, 1, \dots, n\}} S_i$ po n krokoch. Ak $p < \frac{1}{2}$, potom pre $M_{\infty} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ platí*

$$\begin{aligned} P(M_{\infty} = k) &= P(M_{\infty} \geq k) - P(M_{\infty} \geq k+1) \\ &= P'_k - P'_{k+1} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1-p}{p}\right), \end{aligned}$$

pre $k = 0, 1, \dots$, teda M_{∞} má geometrické rozdelenie s parametrom $1 - \frac{1-p}{p}$.

Analogicky, ak $p > \frac{1}{2}$, potom pre $m_{\infty} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$, kde $m_n \equiv \min_{i \in \{0, 1, \dots, n\}} S_i$ platí

$$P(m_{\infty} = -k) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1-p}{p}\right), \quad (2.11)$$

pre $k = 0, 1, \dots$, teda $-m_{\infty}$ má geometrické rozdelenie s parametrom $1 - \frac{1-p}{p}$.

Tvrdenie 2.6. *Pre maximum jednoduchej náhodnej prechádzky M_n skoro všade platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{ak } p \leq \frac{1}{2}, \\ 2p - 1 & \text{ak } p > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Dôkaz. Prípád $p < \frac{1}{2}$ vyplýva priamo z Dôsledku 2.5. Podobne prípad $p = \frac{1}{2}$ priamo z faktu, že $\frac{M_n}{\sqrt{n}}$ má asymptoticky rovnaké rozdelenie ako náhodná premenná $|X|$, kde X má štandardizované normálne rozdelenie (viď napr. [15]).

Uvažujme teraz $p > \frac{1}{2}$ a pre pevné n náhodné premenné

$$\begin{aligned} S_0^{(n)} &= 0 = S_n - S_n, \\ S_1^{(n)} &= X_n = S_n - S_{n-1}, \\ S_2^{(n)} &= X_n + X_{n-1} = S_n - S_{n-2}, \\ &\vdots \\ S_n^{(n)} &= X_n + X_{n-1} + \dots + X_1 = S_n - S_0. \end{aligned}$$

Položme $\tilde{m}_n \equiv \min\{S_0^{(n)}, S_1^{(n)}, \dots, S_n^{(n)}\}$. Platí

$$\begin{aligned} \tilde{m}_n &= \min\{S_0^{(n)}, S_1^{(n)}, \dots, S_n^{(n)}\} = \\ &= \min\{S_n - S_n, S_n - S_{n-1}, S_n - S_{n-2}, \dots, S_n - S_0\} = \\ &= -\max\{S_n - S_n, S_{n-1} - S_n, S_{n-2} - S_n, \dots, S_0 - S_n\} = \\ &= -\max\{S_n, S_{n-1}, S_{n-2}, \dots, S_0\} + S_n = \\ &= -M_n + S_n, \end{aligned}$$

a teda

$$M_n = S_n - \tilde{m}_n. \quad (2.13)$$

Keďže $S_n = X_1 + \dots + X_n$, zo silného zákona veľkých čísel vyplýva, že skoro všade $\frac{S_n}{n} \rightarrow E(X_1) = 2p - 1$ pre $n \rightarrow \infty$. Ďalej $\tilde{m}_\infty$ má podľa Dôsledku 2.5 geometrické rozdelenie, a teda skoro všade platí $\frac{\tilde{m}_n}{n} \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$. Z toho už vyplýva, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{m}_n}{n} = 2p - 1 \quad (2.14)$$

skoro všade. $\square$

Tvrdenie 2.7. *Nech $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ je Markovov proces a nech $X_n \in B$ pre každé $n \in N$, kde B je ľubovoľná množina. Nech $B_1 \subset B$ je taká podmnožina množiny B , že $P(X_{n+k} \in B_1 | X_n \in B) \geq \lambda$ pre nejaké $\lambda > 0$ a $k \in N$. Potom $P(\exists n_0 \in N : X_{n_0} \in B_1) = 1$.*

Dôsledok 2.8. *Nech E a F sú také množiny, že $P(X_{n+m} \in F | X_n \in E) \geq \lambda$ pre nejaké $\lambda > 0$ a $m \in N$. Potom*

$$P(\{n \in N : X_n \in F\} \text{ je neohraničená} | \{n \in N : X_n \in E\} \text{ je neohraničená}) = 1. \quad (2.15)$$

(Ak sa proces nekonečne veľakrát vráti do množiny E , potom sa skoro iste nekonečne veľakrát vráti aj do množiny F).

Tvrdenie 2.9. *Nech $X_1, X_2, \dots$ sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné premenné na nejakom pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pričom*

$$X_1 = \begin{cases} 3 & \text{s pravdepodobnosťou } \frac{1}{2}, \\ -2 & \text{s pravdepodobnosťou } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Potom pre náhodnú prechádzku $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ platí, že existuje také prirodzené číslo m , že

$$P(S_n < -m \text{ pre nejaké } n \in \mathbb{N}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dôkaz. Označme

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\omega \in \Omega : S_n(\omega) < -1 \text{ pre nejaké } n \in \mathbb{N}\}, \\ A_2 &= \{\omega \in \Omega : S_n(\omega) < -2 \text{ pre nejaké } n \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

analogicky $A_3, A_4, \dots$. Zjavne $A_i \supset A_{i+1}$, a teda pre množinu

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega : \forall K \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) < -K\} \quad (2.16)$$

platí

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \quad (2.17)$$

Naším cieľom je ukázať, že $P(A) = 0$ - z definície limity už potom vyplýva, že k $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje také m , že $P(A_m) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Označme $B = \{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = \infty\}$. Zo silného zákona veľkých čísel máme, že $P(B) = 1$ (pretože $E(X_i) = \frac{1}{2}$). Na dokončenie dôkazu stačí ukázať, že $B \cap A = \emptyset$.

Nech $\omega \in B$. Z definície limity platí, že $S_n(\omega) \geq 1$ pre každé $n \geq n_0$ pre nejaké n_0 . Tým pádom ale $S_i(\omega) \geq -2n_0$ pre každé $i \in \mathbb{N}$ (do času n_0 sa pod $-2n_0$ nedostaneme), a teda $\omega \notin A$, z čoho vyplýva $B \cap A = \emptyset$. $\square$

2.2 Náhodné dynamické systémy

Fungovanie náhodných dynamických systémov je veľmi podobné nenáhodným systémom - jediný rozdiel je v tom, že s meniacim časom sa poloha bodu (stav) nemení deterministicky podľa jedného zákona pohybu (zobrazenia), ale podľa náhodne zvoleného zobrazenia z nejakej množiny zobrazení. Napríklad v priestore stavov X môžu náhodný dynamický systém generovať dve zobrazenia $f, g : X \rightarrow X$ takým spôsobom, že ak je systém v čase n v stave x_n , potom v čase $n+1$ bude systém buď v stave $f(x_n)$ (s nejakou pravdepodobnosťou $p \in (0, 1)$), alebo v stave $g(x_n)$ (s pravdepodobnosťou $1-p$). Ďalším príkladom náhodného dynamického systému je systém generovaný jednou funkciou f s náhodnými perturbáciami - ak je systém v čase n v stave x_n , potom v čase $n+1$ bude v stave $f(x_n) + \varepsilon_n$, kde $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť nezávislých a rovnako rozdelených náhodných premenných, ktoré nadobúdajú hodnoty z nejakého intervalu $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$.

Napriek podobnosti s deterministickým dynamickým systémom je formálna definícia o niečo komplikovanejšia (definície a postupy preberáme z [8] a [21]).

Definícia. *Nech (X, d) je metrický priestor so σ -algebrou $\mathcal{X}$, nech Γ je trieda zobrazení z X do X s takou σ -algebrou Σ , že zobrazenie $(\gamma, x) \mapsto (\gamma(x))$ z $(\Gamma \times X, \Sigma \otimes \mathcal{X})$ do $(X, \mathcal{X})$ je merateľné. Nech Q je pravdepodobnostné rozdelenie na (Γ, Σ) . Trojica $((X, \mathcal{X}), (\Gamma, \Sigma), Q)$ (resp. (X, Γ, Q)) určuje náhodný dynamický systém.*

Uvažujme postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených (podľa pravdepodobnosti Q) funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z množiny Γ a počiatočný stav $x_0 \in X$ (môže to byť aj náhodná premenná). Trajektória $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ náhodného dynamického systému je určená nasledovne:

$$x_1 = f_1(x_0) \quad (2.18)$$

$$x_{n+1} = f_{n+1}(x_n) \text{ pre } n \geq 1. \quad (2.19)$$

V ďalších častiach tejto práce bude dôležité uviesť si, že samotná postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kde

- $\Omega = \Gamma^{\infty}$ je priestor všetkých nekonečných postupností zobrazení z množiny Γ (napr. ak $\Gamma = \{f, g\}$, potom jeden z prvkov množiny Ω môže mať napríklad tvar $\omega = (f, f, g, g, f, f, g, g, \dots)$),
- $\mathcal{F}$ je cylindrická σ -algebra, t.j. σ -algebra generovaná množinami typu

$$\{\omega \in \Omega : (\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_n}) \in B\}, \quad (2.20)$$

kde n a $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ sú ľubovoľné prirodzené čísla, $B \in \Sigma^{\otimes n}$, kde $\Sigma^{\otimes n} = \Sigma \otimes \Sigma \otimes \dots \otimes \Sigma$ (n -krát) a pre prirodzené číslo k označuje ω_k k -ty člen postupnosti ω .

- P je pravdepodobnosť daná konečno rozmernými pravdepodobnosťami

$$P(\{\omega \in \Omega : \omega_{t_1} \in B_1, \dots, \omega_{t_n} \in B_n\}) \equiv \prod_{i=1}^n Q(B_i), \quad (2.21)$$

kde $n, t_1 < \dots < t_n$ sú ľubovoľné prirodzené čísla, $B_1, \dots, B_n \in \Sigma$.

Na trajektóriu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bodu $x = x_0$ sa potom môžeme pozeráť ako na náhodný proces definovaný na priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ktorý je daný predpisom

$$x_n(\omega) = \omega_n \circ \omega_{n-1} \circ \dots \circ \omega_1(x) \quad (2.22)$$

pre $n = 1, 2, \dots$, resp.

$$x_n(\omega) = \omega_n(x_{n-1}(\omega)). \quad (2.23)$$

Poznámka. Pre pevné ω je $\{x_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ trajektória takzvaného neautonómneho systému (pozri napr. [25]).

Ak je dané x_n , potom náhodná premenná x_{n+1} zjavne nezávisí od $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0$, takže trajektória $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je Markovov proces. Pravdepodobnosť prechodu z bodu $x \in X$ do množiny $C \in \mathcal{X}$ budeme - rovnako ako v predchádzajúcej časti - označovať ako $p(x, C)$,

$$p(x, C) = Q(\{f \in \Gamma : f(x) \in C\}). \quad (2.24)$$

V prípade náhodných dynamických systémov sa len málokedy stane, že systém je prítahovaný nejakými konkrétnymi bodmi (aj keď aj táto situácia môže nastať - napríklad ak majú všetky zobrazenia z množiny Γ rovnaký pevný bod), avšak za akúsi analógiu vyváženého stavu môžeme považovať stacionárne rozdelenie náhodného dynamického systému - to je definované rovnako v Markovovských procesoch - pomocou operátora T^* . Pripomíname, že T^* definujeme ako

$$T^*\mu(C) = \int_X p(x, C)\mu(dx). \quad (2.25)$$

Stacionárne rozdelenie náhodného dynamického systému je potom také rozdelenie π , ktoré spĺňa

$$T^*\pi = \pi. \quad (2.26)$$

O existencii (a jednoznačnosti) stacionárneho rozdelenia existuje viacero dôležitých výsledkov (napr. v [8],[14],[35]), avšak v práci sa tomuto rozdeleniu venujeme iba minimálne, preto uvádzame len jeden z nich.

Veta 2.10. *Nech X je nedegenerovaný interval a nech množina Γ obsahuje iba monotónne zobrazenia. Nech existuje také $z_0 \in X$, také čísla $\chi_1, \chi_2 > 0$ a také prirodzené číslo n , že pre ľubovoľné počiatočné $x_0 \in X$ platí*

$$P(x_n \leq z_0) \geq \chi_1, \quad (2.27)$$

$$P(x_n \geq z_0) \geq \chi_2. \quad (2.28)$$

*Potom bez ohľadu na rozdelenie μ počiatočného stavu x_0 platí, že rozdelenie $T^{*n}\mu$ náhodnej premennej x_n konverguje k jedinému stacionárnemu rozdeleniu π v takom zmysle, že*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_K(T^{*n}\mu, \pi) = 0, \quad (2.29)$$

kde d_K označuje Kolmogorovovu vzdialenosť mier - pre dve miery μ a ν ju môžeme definovať pomocou ich distribučných funkcií F_μ a F_ν ako

$$d_K(\mu, \nu) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_\mu(x) - F_\nu(x)|. \quad (2.30)$$

Túto vetu ilustrujeme na nasledovnom príklade.

Príklad 2.11. Uvažujme náhodný dynamický systém na intervale $[0, 1]$ generovaný funkciami f a g , kde

$$f(x) = \frac{1}{2}x \quad (2.31)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \quad (2.32)$$

pričom pravdepodobnosť, že zvolíme funkciu f je $p \in (0, 1)$ a pravdepodobnosť, že zvolíme funkciu g je $1 - p$. Zjavne platí, že

$$P\left(x_1 \leq \frac{1}{2}\right) \geq P(\text{zvolíme funkciu } f) = p,$$

pretože pre ľubovoľné x_0 je $f(x_0)$ v intervale $[0, \frac{1}{2}]$. Podobne

$$P\left(x_1 \geq \frac{1}{2}\right) \geq P(\text{zvolíme funkciu } g) = 1 - p,$$

pretože pre ľubovoľné x_0 je $g(x_0)$ v intervale $[\frac{1}{2}, 1]$. Takýto náhodný dynamický systém teda spĺňa podmienky Vety 2.10 ($z_0 = \frac{1}{2}, \chi_1 = p, \chi_2 = 1 - p$ a $n = 1$), a preto existuje jediné stacionárne rozdelenie.

Kapitola 3

Alleeho zobrazenia

Alleeho efekt (z angl. Allee effect), ktorý prvýkrát opísal W.C.Allee [2], je biologický jav, ktorý je charakterizovaný koreláciou medzi veľkosťou biologickej populácie a rýchlosťou jej rastu. Dôvod tohto efektu, ktorý sa v literatúre vyskytuje najčastejšie, je problém pri hľadaní druhu/družky v malých populáciách [10]. Existuje niekoľko možných variantov správania veľkosti populácie v závislosti od sily Alleeho efektu (viď [10]) - my sme sa zamerali iba na takzvaný variant vyhynutia-prežitia (z angl. extinction-survival scenario). V tomto variante platí, že ak veľkosť populácie klesne pod určitú hranicu, potom v dlhodobom horizonte populácia vymrie; v prípade, že veľkosť populácie je nad touto hranicou, potom je populácia obvykle (v závislosti od modelu) schopná v dlhodobom horizonte prežiť.

Na matematické modelovanie veľkosti populácie s týmto efektom sa používajú takzvané Alleeho zobrazenia. V prípade variantu vyhynutia-prežitia musia mať takéto zobrazenia niektoré vlastnosti, ktoré zhrnieme v nasledujúcej definícii (pozri napr. [29]).

Definícia. *Spojité zobrazenie $f : [0, b] \rightarrow [0, b]$ ($b < \infty$) budeme nazývať Alleeho zobrazenie, pokiaľ spĺňa nasledujúce podmienky:*

- *f má tri pevné body - nulu, ktorá je priťahujúcim pevným bodom, odpudzujúci bod A_f (budeme ho nazývať aj hraničný bod) a pevný bod K_f - ten môže, ale nemusí byť priťahujúci,*
- *$f(x) < x$ pre $x \in (0, A_f) \cup (K_f, b]$,*
- *$f(x) > x$ pre $x \in (A_f, K_f)$.*

V štandardnom deterministickom modeli s Alleeho zobrazením f platí, že ak je veľkosť populácie v n -tej generácii x_n , potom v nasledujúcej generácii je veľkosť populácie

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (3.1)$$

V tejto kapitole budeme študovať náhodné dynamické systémy generované dvoma Alleeho zobrazeniami f a g - budeme uvažovať model

$$x_{n+1} = \begin{cases} f(x_n) & \text{s pravdepodobnosťou } p \\ g(x_n) & \text{s pravdepodobnosťou } 1 - p \end{cases} \quad (3.2)$$

a ten istý model, ale s perturbáciami

$$y_{n+1} = \begin{cases} \chi(f(y_n) + \varepsilon_n) & \text{s pravdepodobnosťou } p \\ \chi(g(y_n) + \varepsilon_n) & \text{s pravdepodobnosťou } 1 - p, \end{cases} \quad (3.3)$$

kde $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť spojitých, nezávislých, rovnako rozdelených náhodných premenných s kladnou hustotou na intervale $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$ a $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia definovaná nasledovne:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x < 0 \\ x & \text{ak } x \in [0, b] \\ b & \text{ak } x > b. \end{cases} \quad (3.4)$$

Táto funkcia slúži na zabezpečenie toho, aby každý člen postupnosti $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ zostal v intervale $[0, b]$.

Niektoré modely podobné modelom (3.2) a (3.3) sa už v literatúre študovali - napr. v článku [29] bola študovaná periodická (nenáhodná) verzia modelu (3.2); v článku [12] bol zase študovaný model s jednou funkciou a (zriedkavými) náhodnými perturbáciami - v tomto článku bolo ukázané, že za istých podmienok populácia vždy vyhynie/prežije bez ohľadu na počiatočnú veľkosť populácie x_0 .

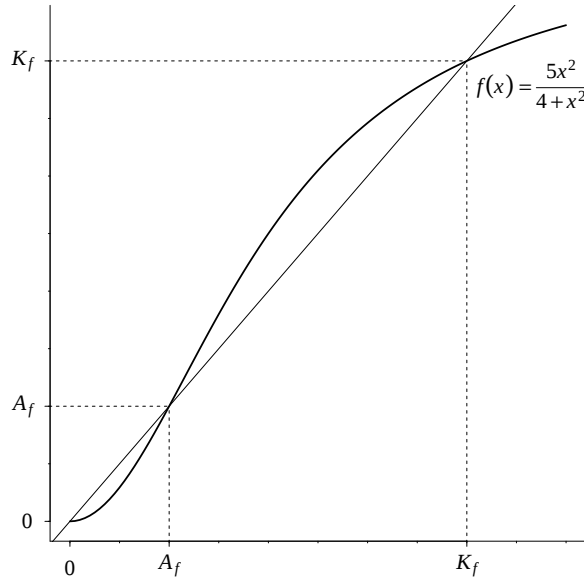
V nasledujúcej časti opíšeme správanie modelov (3.2) a (3.3) v prípade, že zobrazenia f a g sú rastúce. Ďalej budeme uvažovať situáciu, že zobrazenia f a g sú unimodálne a ukážeme, že za istých podmienok populácia v oboch modeloch vyhynie, a to bez ohľadu na počiatočnú veľkosť populácie.

3.1 Rastúce Alleeho zobrazenia

V tejto časti budeme predpokladať, že funkcie f a g sú rastúce. Príkladom takéhoto Alleeho zobrazenia môže byť model

$$f(x) = \frac{\rho x^2}{A + x^2}, \rho > 2\sqrt{A}, \rho > 0, A > 0, \quad (3.5)$$

uvedený v [18]. V nenáhodnom modeli (3.1) je dlhodobé správanie takéhoto systému veľmi jednoduché (pozri Tvrdenie 1.5) - pokiaľ pre počiatočnú veľkosť populácie x_0 platí $x_0 > A_f$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = K_f$, teda populácia prežije; na druhej strane ak $x_0 < A_f$,



Obr. 3.1: Príklad rastúceho Alleeho zobrazenia.

potom $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, teda populácia vyhynie. V nasledujúcich dvoch vetách ukážeme, že správanie modelov (3.2) a (3.3) je v istom zmysle veľmi podobné - pokiaľ je počiatočná veľkosť populácie nad nejakou kritickou hranicou, potom populácia v dlhodobom horizonte prežije a pokiaľ je pod nejakou inou hranicou, tak populácia vyhynie - jediný rozdiel oproti deterministickému modelu je teda v tom, že nemáme jednu hranicu, ale dve. Predtým, ako sformulujeme spomínané vety, uvedieme jeden dôsledok Tvrdenia 2.7.

Dôsledok 3.1. *Nech $I_1 \subset I_2$ sú také intervaly, že $f(I_i) \subset I_i$ a $g(I_i) \subset I_i$, $i = 1, 2$ a nech pre každé $x \in I_2$ existuje také $m \in \mathbb{N}$, že $f^m(x) \in I_1$ alebo $g^m(x) \in I_1$. Potom $P(\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in I_1 \forall n \geq n_0 | x_0 \in I_2) = 1$.*

Veta 3.2. *Nech $A_f < A_g < K_f < K_g$. Potom*

- (i) *ak $x_0 \leq A_f$, tak $p_0 \equiv P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\right) = 1$,*
- (ii) *ak $x_0 \geq A_g$, tak $p_1 \equiv P(\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in [K_f, K_g] \forall n \geq n_0) = 1$,*
- (iii) *ak $x_0 \in (A_f, A_g)$, tak $p_0 > 0, p_1 > 0$ a $p_0 + p_1 = 1$.*

Dôkaz.

- (i) Keďže $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(A_f) = 0$ (lebo $A_f < A_g$), pre ľubovoľné $\eta > 0$ existuje také $m \in \mathbb{N}$, že $g^m(A_f) < \eta$. Avšak funkcia g je rastúca, teda g^m je tiež rastúca, odkiaľ dostaneme, že $g^m(x) < \eta$ pre ľubovoľné $x \leq A_f$. Z toho vyplýva, že môžeme aplikovať Dôsledok 3.1 na intervaly $I_1 = [0, \eta)$ a $I_2 = [0, A_f]$. Toto platí pre ľubovoľne malé $\eta > 0$, a teda ak $x_0 \leq A_f$, potom $p_0 = 1$.

- (ii) Ak $x_0 \in [A_g, K_g]$, potom zjavne $x_n \in [A_g, K_g]$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Označme $B_1 = [K_f, K_g]$. Ak $x \in B_1$, potom $K_f = f(K_f) \leq f(x) \leq x \leq K_g$ (prvá nerovnosť vyplýva z rastúcnosti f a druhá nerovnosť z toho, že $f(x) < x$ pre $x > K_f$) a takisto $K_f \leq x \leq g(x) \leq g(K_g) = K_g$ (podobne), a teda

$$f(B_1) \subset B_1 \text{ a } g(B_1) \subset B_1. \quad (3.6)$$

Ďalej platí, že $A_g < f(A_g) < K_f$ (prvá nerovnosť vyplýva z toho, že $f(x) > x$ na intervale $(A_f, K_f) \ni A_g$; druhá nerovnosť vyplýva z rastúcnosti funkcie f) - z toho máme, že $g^n(f(A_g)) \nearrow K_g$, a teda pre nejaké $m \in \mathbb{N}$ platí $g^m(f(A_g)) \in [K_f, K_g]$. Navyše funkcia $g^m \circ f$ je rastúca, z čoho vyplýva, že $g^m(f(x)) \in [K_f, K_g]$ pre ľubovoľné $x \in [A_g, K_g]$. Z (3.6) a Tvrdenia 2.7 aplikovaného na množiny B_1 , $B = [A_g, K_g]$ a na $\lambda = p(1-p)^m$ dostávame, že $p_1 = 1$.

Ak $x_0 \geq K_g$, potom môžeme aplikovať Dôsledok 3.1 na intervaly $I_1 = [K_f, K_g]$ a $I_2 = [K_f, x_0]$ (pretože $f^n(x_0) \searrow K_f$).

- (iii) Ak $x_0 \in (A_f, A_g)$, potom $f^m(x_0) > A_g$ a $g_m(x_0) < A_f$ pre nejaké $m \in \mathbb{N}$, a teda $p_0 > 0$ a $p_1 > 0$. Ostáva nám ukázať, že $P(x_n \in (A_f, K_f) \forall n \in \mathbb{N}) = 0$. Označme $C = \frac{A_f + A_g}{2}$. Znova platí, že pre nejaké $m \in \mathbb{N}$ je $f^m(C) > A_g$ a zároveň $g^m(C) < A_f$. Z rastúcnosti f a g dostávame, že $f^m(x) > A_g$ pre ľubovoľné $x \geq C$ a $g^m(x) \leq A_f$ pre ľubovoľné $x \leq C$. Môžeme teda aplikovať Tvrdenie 2.7 na množiny $[0, b]$ a $[0, A_f] \cup [A_g, b]$ pre $\lambda = \min(p^m, (1-p)^m)$. $\square$

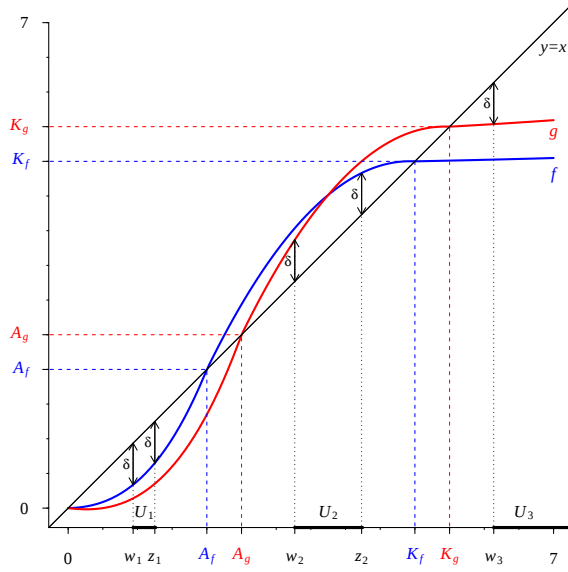
Veta 3.3. *Nech $A_f < A_g < K_f < K_g$. Vezmime δ také, že množiny*

- $U_1 = \{x \in (0, A_f) : \min(x - f(x), x - g(x)) \geq \delta\},$
- $U_2 = \{x \in (A_g, K_f) : \min(f(x) - x, g(x) - x) \geq \delta\},$
- $U_3 = \{x \in (K_g, b) : \min(x - f(x), x - g(x)) \geq \delta\}$

sú neprázdné a navyše pre každé $x \geq K_g$ existuje $x^ \geq x$ také, že $\min(x^* - f(x^*), x^* - g(x^*)) \geq \delta$. Potom*

- (i) *ak $y_0 \in [0, z_1]$, potom $p_0 \equiv P(\exists n_0 \in \mathbb{N} : y_n \in [0, w_1) \forall n \geq n_0) = 1,$*
- (ii) *ak $y_0 \in [w_2, b]$, potom $p_1 \equiv P(\exists n_0 \in \mathbb{N} : y_n \in (z_2, w_3) \forall n \geq n_0) = 1,$*
- (iii) *ak $y_0 \in (z_1, w_2)$, potom $p_0 > 0, p_1 > 0$ a $p_0 + p_1 = 1,$*

kde $w_i = \inf U_i$, $i = 1, 2, 3$ a $z_j = \sup U_j$, $j = 1, 2$ (viď obrázok 3.2).



Obr. 3.2: Príklad funkcií spĺňajúcich podmienky Vety 3.3.

Dôkaz.

(i) Označme $d_1 = \min(w_1 - f(w_1), w_1 - g(w_1))$. Ak $y_n \in [0, w_1)$, potom

$$f(y_n) + \varepsilon_n < f(w_1) + \varepsilon_n < f(w_1) + \delta \leq f(w_1) + d_1 \leq f(w_1) + w_1 - f(w_1) = w_1 \quad (3.7)$$

(prvá nerovnosť platí vďaka rastúcosti f , druhá z definície ε_n , tretia z toho, ako sme zvolili δ a štvrtá z definície d_1). Rovnaké nerovnosti by platili aj pre funkciu g , a teda platí, že $y_{n+1} \in [0, w_1)$. Analogicky sa dá ukázať, že ak $y_n \in [0, z_1]$, potom $y_{n+1} \in [0, z_1]$. Navyše $f^n(z_1) \searrow 0$, teda môžeme aplikovať Tvrdenie 2.7 na množiny $B = [0, z_1]$ a $B_1 = [0, w_1)$ pre $\lambda = (pP(\varepsilon_n < 0))^k$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Nech $d_2 = \min(f(z_2) - z_2, g(z_2) - z_2)$ a $d_3 = \min(w_3 - f(w_3), w_3 - g(w_3))$. Platí, že ak $y_n \in (z_2, w_3)$, potom

$$f(y_n) + \varepsilon_n > f(z_2) + \varepsilon_n > f(z_2) - \delta \geq f(z_2) - d_2 \geq f(z_2) - (f(z_2) - z_2) = z_2, \quad (3.8)$$

$$f(y_n) + \varepsilon_n < f(w_3) + \varepsilon_n < f(w_3) + \delta \leq f(w_3) + d_3 \leq f(w_3) + w_3 - f(w_3) = w_3, \quad (3.9)$$

podobne pre funkciu g (zdôvodnenie je analogické ako v prípade (i)), a teda aj $y_{n+1} \in (z_2, w_3)$. Ak $y_n > w_3$, potom podľa predpokladov existuje také $z_3 > y_n$, že $\min(z_3 - f(z_3), z_3 - g(z_3)) \geq \delta$. Znova sa dá ukázať, že ak $y_n \in (z_2, z_3)$, potom aj $y_{n+1} \in (z_2, z_3)$, a keďže $f^n(z_3) \searrow K_f \in (z_2, w_3)$, opäť môžeme aplikovať Tvrdenie 2.7 pre $B = (z_2, z_3)$ a $B_1 = (z_2, w_3)$ a pre nejaké λ (zvolené analogicky ako v prípade (i)). Podobne sa dá ukázať aj prípad, keď $y_n > w_2$.

- (iii) Ak $y_0 \in (z_1, w_2)$, potom sa systém po nejakom čase s pravdepodobnosťou 1 dostane z tohto intervalu (dá sa ukázať podobne ako v predchádzajúcej vete), z čoho máme, že $p_0 + p_1 = 1$. Ostáva teda ukázať, že obidve pravdepodobnosti - aj p_0 aj p_1 - sú nenulové.

Ak $z_1 < y_n \leq A_f$, potom očividne platí, $P(y_{n+k} \leq z_1) > 0$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$. Ďalej ukážeme, že okrem toho ale platí aj $P(y_{n+m} > A_f) > 0$ pre nejaké $m \in \mathbb{N}$.

Označme h funkciu definovanú predpisom $h(x) = \min(x - f(x), x - g(x))$. Keďže f a g sú spojité, tak aj funkcia h je spojitá, a teda na intervale $[y_n, A_f]$ nadobúda svoje maximum (označme ho μ). Ďalej podľa predpokladov vety platí, že $\delta > \mu$, a teda pre číslo $\eta \equiv \frac{\delta - \mu}{2}$ máme nerovnosti $0 < \eta < \delta$, a teda pravdepodobnosť, že ε_n nadobudne hodnotu z intervalu $(\delta - \eta, \delta)$ je nenulová (pretože hustota ε_n je nenulová na $(-\delta, \delta)$). Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $y_n - f(y_n) \leq \mu$, a teda $y_n \leq f(y_n) + \mu$ (ak to neplatí pre funkciu f , tak to musí platiť pre funkciu g - z definície μ). Z toho máme, že s nenulovou pravdepodobnosťou bude platiť

$$y_{n+1} = f(y_n) + \varepsilon_n > f(y_n) + \delta - \eta = f(y_n) + \mu + \eta \geq y_n + \eta \quad (3.10)$$

(druhú nerovnosť dostaneme z definície η). Analogicky môžeme s tým istým η pokračovať s $y_{n+1}, y_{n+2}, \dots$. Pre dostatočne veľké $m \in \mathbb{N}$ (také, aby platilo $y_n + m\eta > A_f$) potom máme $P(y_{n+m} > A_f) > 0$. Avšak ak $y_{n+m} > A_f$, potom očividne s nenulovou pravdepodobnosťou platí $y_{n+m+l} > w_2$ pre nejaké $l \in \mathbb{N}$.

Podobne sa dá ukázať, že ak $A_g \leq y_n < w_2$, potom $P(y_{n+k} > w_2) > 0$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$ a takisto $P(y_{n+m} < z_1) > 0$ pre nejaké $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Poznámka. Analogické výsledky platia pre situáciu $A_f < A_g < K_g < K_f$ alebo pre prípady, kedy $A_f = A_g$, resp. $K_f = K_g$. Ak platí $A_f < K_f < A_g < K_g$ (alebo $A_g < K_g < A_f < K_f$), dá sa ľahko ukázať, že v modeli (3.2) $x_n \rightarrow 0$ s pravdepodobnosťou 1 a podobne v modeli (3.3) za istých predpokladov $p_0 = 1$ (pod p_0 v tomto prípade rozumieme výraz ako bol definovaný vo Vete 3.3).

Poznámka. V literatúre sme sa nestretli s modelmi, ktoré by mali konštantné časti, preto sme uvažovali rastúce funkcie (a nie neklesajúce). Dôkazy by sa ale dali aplikovať aj v prípade, ak by obe funkcie boli neklesajúce.

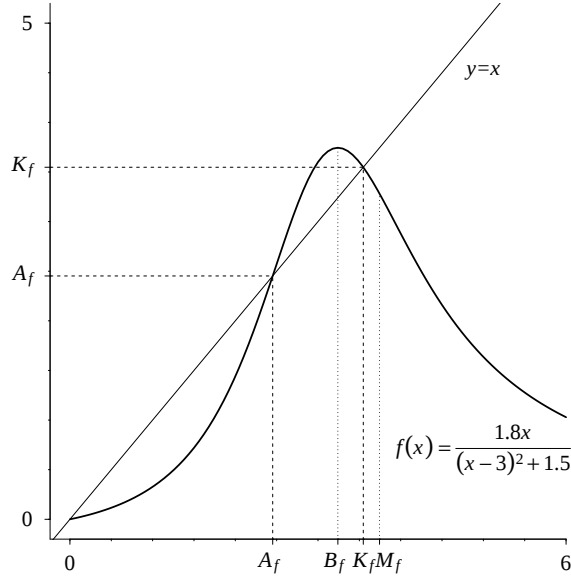
3.2 Unimodálne Alleeho zobrazenia

V tejto časti budeme predpokladať, že existuje také $B_f \in (A_f, K_f)$, že funkcia f je rastúca na $(0, B_f)$ a klesajúca na (B_f, b) (maximum funkcie f budeme označovať ako

$M_f = f(B_f)$). Príkladom takéhoto Alleeho zobrazenia je funkcia

$$f(x) = \frac{Gbx}{(x-T)^2 + b}, b, T > 0, G > 1 \quad (3.11)$$

(viď [4]). Podobne uvažujme unimodálnu funkciu g , ktorá nadobúda maximum M_g v



Obr. 3.3: Príklad unimodálneho Alleeho zobrazenia.

bode B_g .

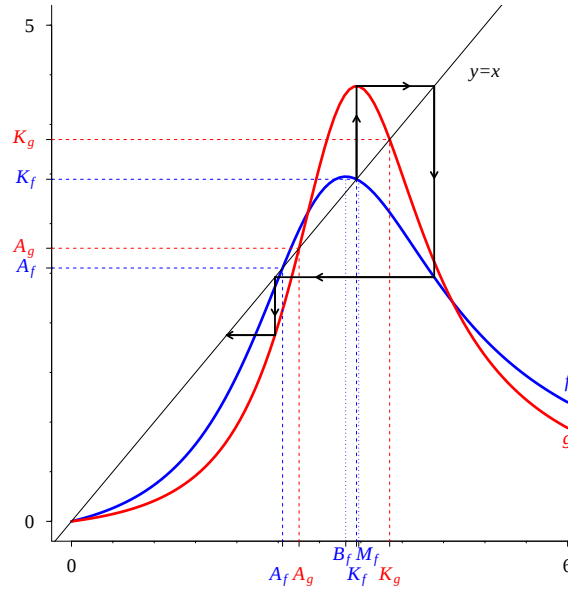
Označme $M = \max(M_f, M_g)$. Pre každé $x \in [0, b]$ platí, že $\max(f(x), g(x)) \leq M$, preto budeme v tejto časti predpokladať, že $b = M$. V nenáhodnom modeli (3.1) opäť platí, že ak $x_0 < A_f$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Avšak ak $x_0 > A_f$, potom sa správanie modelu môže líšiť v závislosti od zobrazenia f (systém môže konvergovať k bodu 0, k bodu K_f alebo k nejakému periodickému bodu, ale môže dôjsť aj ku chaotickému správaniu). Z hľadiska prežitia-vyhynutia je pre prežitie populácie postačujúce, aby platilo $f(M_f) > A_f$ (v takomto prípade systém nikdy neklesne pod hraničný bod A_f). V nasledujúcich dvoch vetách ukážeme, že v modeli (3.2) za určitých podmienok dôjde k vyhynutiu populácie s pravdepodobnosťou 1.

Veta 3.4. *Nech $A_f < A_g$ a nech f je diferencovateľná, pričom $|f'(x)| < 1$ pre každé $x \in (B_f, M_f)$. Ak existujú také funkcie $h_1, \dots, h_m \in \{f, g\}$, pre ktoré platí $h_1 \circ \dots \circ h_m(K_f) < A_f$, potom*

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\right) = 1 \quad (3.12)$$

pre ľubovoľné x_0 .

Príklad 3.5. Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{2.2x}{(x-3)^2+2}$ a $g(x) = \frac{1.3x}{(x-3.3)^2+1}$ (pozri Obr. 3.4). V tomto prípade $A_f = 3 - \sqrt{0.2} \approx 2.553$, $K_f = 3 + \sqrt{0.2} \approx 3.447$, $A_g = 3.3 - \sqrt{0.3} \approx 2.752$ a



Obr. 3.4: Príklad funkcií spĺňajúcich podmienky Vety 3.4.

$K_g = 3.3 + \sqrt{0.3} \approx 3.848$ (teda platí $A_f < A_g$). Ďalej platí, že $g(f(g(K_f))) \approx 1.876 < A_f$, takže v tomto prípade $h_1 = g$, $h_2 = f$ a $h_3 = g$. Navyše sa dá ukázať, že funkcia f je konkávna na intervale (B_f, M_f) , teda na tomto intervale je prvá derivácia klesajúca. Keďže $f'(B_f) = 0$ a $f'(M_f) \approx -0.475$, podmienka $|f'(x)| < 1$ je splnená pre ľubovoľné (B_f, M_f) , teda s pravdepodobnosťou jedna platí $x_n \rightarrow 0$.

Dôkaz (Vety 3.4). Keďže M_f je maximum funkcie f , očividne platí

$$P(x_{n+1} \in [0, M_f] | x_n \in [0, M]) \geq p > 0. \quad (3.13)$$

Ďalej platí, že $g(A_f) < A_f$ (pretože $A_f < A_g$) a g je spojitá, teda musí existovať také $C \in (A_f, B_f)$, že $g(x) < A_f$ pre každé $x \in [A_f, C)$, a teda

$$P(x_{n+1} \in [0, A_f] | x_n \in [0, C)) \geq 1 - p > 0. \quad (3.14)$$

Označme $h(x)$ funkciu definovanú predpisom $h(x) = h_1 \circ \dots \circ h_m(x)$. Táto funkcia je spojitá (pretože f a g sú spojité), teda existuje také $\eta > 0$, že $h(x) < A_f$ pre ľubovoľné $x \in (K_f - \eta, K_f + \eta)$. Z toho máme

$$P(x_{n+m} < A_f | x_n \in (K_f - \eta, K_f + \eta)) > (p(1-p))^m > 0. \quad (3.15)$$

Navyše $f^n(x) \rightarrow K_f$ pre ľubovoľné $x \in (A_f, M_f]$ (lebo $|f'(x)| < 1$ pre každé $x \in (B_f, M_f)$), a teda existuje také $r \in \mathbb{N}$, že $f^r(x) \in (K_f - \eta, K_f + \eta)$ pre ľubovoľné $x \in [C, M_f]$, teda

$$P(x_{n+r} \in (K_f - \eta, K_f + \eta) | x_n \in [C, M_f]) \geq p^r > 0. \quad (3.16)$$

Teraz môžeme postupne aplikovať Dôsledok 2.8 na množiny

- $[0, M]$ a $[0, M_f]$ (z (3.13)),
- $[0, M_f]$ a $[0, A_f) \cup [C, M_f]$ (ak $x_n \in [0, C)$, môžeme použiť (3.14) a ak $x_n \in [C, M_f]$, potom $f(x_n) \in [C, M_f]$),
- $[0, A_f) \cup [C, M_f]$ a $[0, A_f) \cup (K_f - \eta, K_f + \eta)$ (využijúc (3.16) a fakt, že $f([0, A_f)) \subseteq [0, A_f)$ a $g([0, A_f)) \subseteq [0, A_f)$),
- $[0, A_f) \cup (K_f - \eta, K_f + \eta)$ a $[0, A_f)$ (z (3.15)).

Z toho vyplýva, že systém sa niekedy dostane do množiny $[0, A_f)$, a teda z výsledkov v predchádzajúcej časti (Veta 3.2, časť (i)) máme, že $x_n \rightarrow 0$ s pravdepodobnosťou 1 bez ohľadu na počiatočné x_0 . $\square$

Veta 3.6. *Nech $A_g < A_f$ a nech f je diferencovateľná, pričom $|f'(x)| < 1$ pre každé $x \in (B_f, M_f)$. Nech existujú také funkcie $h_1, \dots, h_m \in \{f, g\}$, že platí $h_1 \circ \dots \circ h_m(K_f) < A_f$. Ak navyše platí $f(g(A_f)) \neq A_f$, potom*

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\right) = 1 \quad (3.17)$$

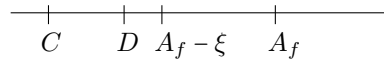
pre ľubovoľné x_0 .

Dôkaz. Keďže $h(K_f) = h_1 \circ \dots \circ h_m(K_f) < A_f$, tak musí existovať také $D < A_f$, že $h(K_f) < D$. Zo spojitosti h potom máme

$$P(x_{n+m} < D | x_n \in (K_f - \eta, K_f + \eta)) > (p(1-p))^m > 0 \quad (3.18)$$

pre nejaké $\eta > 0$. Keďže $f(g(A_f)) \neq A_f$, potom musí platiť jedna z dvoch možností - buď $f(g(A_f)) < A_f$, alebo $f(g(A_f)) > A_f$.

Ak $f(g(A_f)) < A_f$, potom $f(g(A_f)) < C$ pre nejaké $C < A_f$ a zo spojitosti funkcie $f \circ g$ potom máme $f(g(x)) < C$ pre ľubovoľné $x \in (A_f - \xi, A_f + \xi)$, kde $0 < \xi < \min(A_f - C, A_f - D)$ (pozri Obr. 3.5). Z toho máme, že



Obr. 3.5: Príklad možnej pozície bodov $C, D, A_f - \xi$ a A_f .

$$P(x_{n+2} \in [0, A_f - \xi] \mid x_n \in [0, A_f + \xi]) \geq p(1-p) > 0. \quad (3.19)$$

Opäť môžeme aplikovať Dôsledok 2.8 na množiny

- $[0, M]$ a $[0, M_f]$ (z (3.13))

- $[0, M_f]$ a $[0, A_f - \xi] \cup [A_f + \xi, M_f]$ (využívajúc (3.19) ak $x_n \in [0, A_f + \xi]$) a fakt, že $f([A_f + \xi, M_f]) \subseteq [A_f + \xi, M_f]$ ak $x_n \in [A_f + \xi, M_f]$,
- $[0, A_f - \xi] \cup [A_f + \xi, M_f]$ a $[0, A_f - \xi] \cup (K_f - \eta, K_f + \eta)$ (ako v predchádzajúcej vete),
- $[A_f - \xi] \cup (K_f - \eta, K_f + \eta)$ a $[0, A_f - \xi]$ (z (3.18)),
- $[0, A_f - \xi]$ a $[0, A_g)$ (keďže $f^n(A_f - \xi) \searrow 0$ a teda pre nejaké $s \in \mathbb{N}$ musí platiť $f^s(x) < A_g$ pre ľubovoľné $x \in [0, A_f - \xi]$).

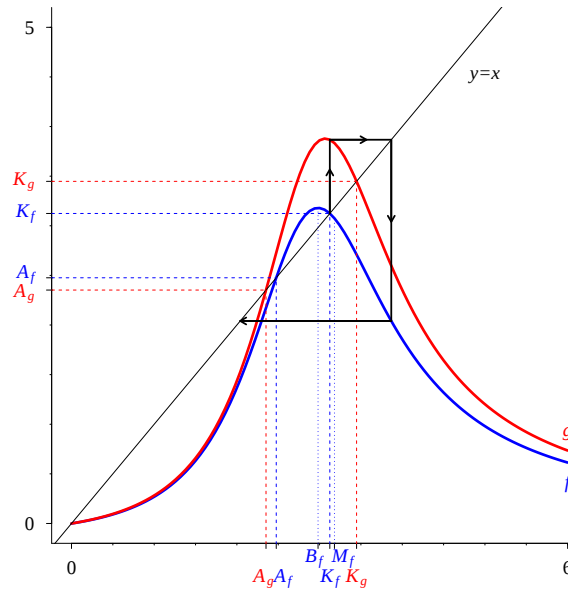
Z toho vyplýva, že systém sa niekedy dostane do množiny $[0, A_g)$, a teda $x_n \rightarrow 0$ s pravdepodobnosťou 1 pre ľubovoľné x_0 .

Ak $f(g(A_f)) > A_f$, potom $f(g(A_f)) > C'$ pre nejaké $C' > A_f$ a taktiež $f(g(A_f)) \leq M_f$ (pretože M_f je maximum funkcie f). Podobne ako v prvom prípade máme

$$P(x_{n+2} \in [A_f + \xi, M_f] \mid x_n \in (A_f - \xi, A_f + \xi)) \geq p(1 - p) > 0 \quad (3.20)$$

pre nejaké $0 < \xi < \min(A_f - D, C' - A_f)$. Zvyšok dôkazu je analogický ako v prípade $f(g(A_f)) < A_f$. $\square$

Príklad 3.7. Nech $f(x) = \frac{1.155x}{(x-2.8)^2+1.05}$ a $g(x) = \frac{1.3}{(x-2.9)^2+1}$ (pozri Obr. 3.6). V tomto



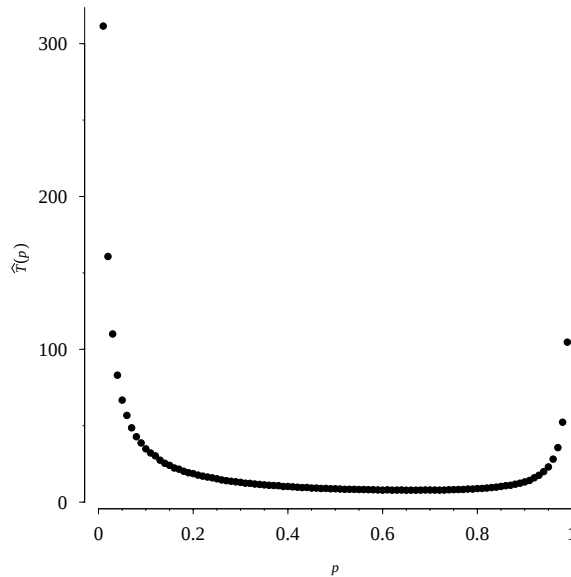
Obr. 3.6: Príklad funkcií spĺňajúcich podmienky Vety 3.6.

prípade $A_f \approx 2.476$, $K_f \approx 3.124$, $A_g \approx 2.352$ a $K_g \approx 3.448$ (a teda $A_g < A_f$). Ďalej $f(g(A_f)) \approx 2.986 \neq A_f$ a $f(g(K_f)) \approx 2.041 < A_f$. Navyše f je opäť konkávna na (B_f, M_f) a $f'(M_f) \approx -0.989 > -1$, teda $|f'(x)| < 1$ pre každé $x \in (B_f, M_f)$ - tým sú

splnené všetky podmienky Vety 3.6 a teda $x_n \rightarrow 0$ s pravdepodobnosťou 1 pre ľubovoľné x_0 .

Na tomto príklade je zaujímavé to, že ak vezmeme x_0 z intervalu (A_f, M_f) , tak pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ platí $f^n(x_0) \in [A_f, M_f]$ a $g^n(x_0) \in [A_g, M_g]$ - to znamená, že pri oboch modeloch (deterministických) populácia prežije, avšak ak skombinujeme tieto dva modely, potom populácia skoro iste vyhynie.

Poznámka. To že vo vyššie uvedených prípadoch populácia skoro iste vyhynie je spôsobené tým, že veľkosť populácie skoro iste po nejakom čase klesne pod kritickú hranicu $\min(A_f, A_g)$. Môže byť preto zaujímavé rátať strednú hodnotu času, za ktorý sa systém pod túto hranicu dostane. Vo všeobecnosti to môže byť veľmi zložitý problém, pretože tento čas závisí na voľbe funkcií f a g a pravdepodobnosti p . Ak však máme k dispozícii konkrétne funkcie a pravdepodobnosť p , tento čas môžeme odhadnúť simulačne. Na Obr. 3.7 je zobrazený tento simulačný výpočet v prípade funkcií z Príkladu 3.7 - na x -ovej osi sú rôzne hodnoty pravdepodobnosti p , na y -ovej osi sú odhady strednej hodnoty času $\hat{T}(p)$, za ktorý systém klesne pod kritickú hranicu; pre každú hodnotu p ($p = 0.01, 0.02, \dots, 0.99$) sme náhodne zvolili počiatočný bod x_0 z intervalu (A_f, M_f) a zaznamenali sme číslo $\min\{n \in \mathbb{N} : x_n < \min(A_f, A_g)\}$ - toto sme zopakovali 10000-krát a následne spriemerovali. Z Obr. 3.7 vidno, že pre hodnoty p blížiacie sa k číslam 0 a 1



Obr. 3.7: Odhad strednej hodnoty času $T(p)$.

odhad $\hat{T}(p)$ výrazne stúpa - dá sa usudzovať, že platí $T(p) \rightarrow \infty$ pre $p \rightarrow 0$, resp. $p \rightarrow 1$, čo je v súlade s uvedeným príkladom, pretože ak vezmeme do úvahy iba deterministický

model určený funkciou f alebo g (t.j. $p = 0$ alebo $p = 1$), tak veľkosť populácie nikdy neklesne pod hodnotu $\min(A_f, A_g)$.

Pre model (3.3) máme veľmi podobné výsledky.

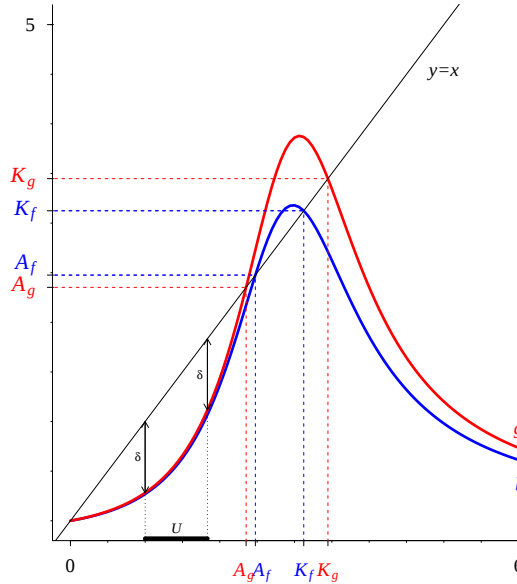
Veta 3.8. *Nech f je diferencovateľná funkcia a $|f'(x)| < 1$ pre ľubovoľné $x \in (B_f, M_f)$. Nech existujú také funkcie $h_1, \dots, h_m \in \{f, g\}$, že $h_1 \circ \dots \circ h_m(K_f) < A_f$. Ak platí, že množina*

$$U = \{x \in [0, \min(A_f, A_g)] : \min(x - f(x), x - g(x)) \geq \delta\}$$

je neprázdna (pozri Obr. 3.8), potom

$$P(\exists n_0 \in \mathbb{N} : y_n \in [0, \inf U) \quad \forall n \geq n_0) = 1 \quad (3.21)$$

pre ľubovoľné y_0 .



Obr. 3.8: Príklad funkcií spĺňajúcich podmienky Vety 3.8.

Dôkaz je takmer taký istý - nerovnosť (3.13) možno upraviť na

$$P(y_{n+1} \in [0, M_f] \mid y_n \in [0, M]) \geq pP(\varepsilon_n < 0) > 0, \quad (3.22)$$

podobne nerovnosť (3.14). Nerovnosť (3.15) sa dá ukázať nasledovne:

Predpokladajme, že $h_1(h_2(K_f)) < A_f$ pre nejaké $h_1, h_2 \in \{f, g\}$ (dôkaz by bol rovnaký pre m funkcií). Zo spojitosti h_1 máme, že $h_1(x) < A_f$ pre ľubovoľné $x \in I_1 = (h_2(K_f) - \eta_1, h_2(K_f) + \eta_1)$ pre nejaké $\eta_1 > 0$ a zo spojitosti h_2 zase máme, že existuje také $\eta_2 > 0$, že $h_2(x) \in I_1$ pre každé $x \in I_2 = (K_f - \eta_2, K_f + \eta_2)$. Nech teraz $y_n \in I_2$.

Potom $h_2(Y_n) \in I_1$ a keďže I_1 je otvorená množina, tak existuje také $\mu \in (0, \delta)$, že $(h_2(y_n) - \mu, h_2(y_n) + \mu) \subset I_1$. Z toho vyplýva, že

$$P(y_{n+1} \in I_1 | y_n \in I_2) \geq p(1-p)P(\varepsilon_n \in (-\mu, \mu)) > 0. \quad (3.23)$$

Ďalej ak $y_{n+1} \in I_1$, potom $h_1(y_{n+1}) < A_f$ a teda existuje také $\nu \in (0, \delta)$, že $h_1(y_{n+1}) + \nu < A_f$, z čoho máme

$$P(y_{n+2} < A_f | y_n \in I_2) \geq (p(1-p))^2 P(\varepsilon_n \in (-\mu, \mu)) P(\varepsilon_{n+1} \in (-\nu, \nu)) > 0. \quad (3.24)$$

Nerovnosti (3.16), (3.18), (3.19) a (3.20) sa dajú ukázať analogicky - využitím spojitosti funkcií f a g a tým, že hustota ε_n je kladná na $(-\delta, \delta)$.

Poznámka. Podmienka $f(g(A_f)) \neq A_f$, ktorá bola vo Vete 3.6 v tomto prípade nie je potrebná - Dôsledok 2.8 možno použiť priamo na množiny $[0, M_f]$ a $[0, A_f - \frac{\delta}{2}] \cup [A_f + \frac{\delta}{2}, M_f]$.

Poznámka. Ak δ nespĺňa podmienky Vety 3.3, resp. Vety 3.8 (t.j. ε_n môže nadobúdať aj relatívne vysoké hodnoty), potom nie je možné predpovedať dlhodobé správanie systému - aj z bodu 0 sa systém môže dostať na vysoké hodnoty a naopak - z vysokých hodnôt sa môže dostať do nuly.

Kapitola 4

Distribučný chaos v náhodných dynamických systémoch

Táto kapitola bude zameraná na distribučný chaos a jeho mieru v náhodnom dynamickom systéme

$$x_{n+1} = \begin{cases} f(x_n) & \text{s pravdepodobnosťou } p \\ g(x_n) & \text{s pravdepodobnosťou } 1 - p, \end{cases} \quad (4.1)$$

kde $p \in [0, 1]$ a f, g sú spojité funkcie definované na uzavretom intervale I . Pripomeňme, že v takom prípade $\Omega = \{f, g\}^\infty$ a pravdepodobnosť P je daná konečno rozmernými pravdepodobnosťami

$$P(\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega : \omega_{i_1} = \varphi_1, \dots, \omega_{i_n} = \varphi_n\}) = p^{\sum_{k=1}^n I_f(\varphi_k)} (1 - p)^{\sum_{k=1}^n I_g(\varphi_k)}, \quad (4.2)$$

kde n a $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ sú prirodzené čísla, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \{f, g\}$,

$$I_f(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{ak } \varphi = f \\ 0 & \text{ak } \varphi \neq f \end{cases} \quad (4.3)$$

a I_g je definovaná analogicky ako I_f . Trajektória bodu $x \in I$ je potom daná predpisom

$$x_n(\omega) = \omega_n \circ \omega_{n-1} \circ \dots \circ \omega_1(x) \quad (4.4)$$

pre $n = 1, 2, \dots$ a $x_0(\omega) = x$.

Kapitola je členená nasledovne. V prvej časti zadefinujeme distribučný chaos a mieru chaosu pre systém (4.1). Druhá časť je zameraná na niektoré postačujúce podmienky pre nulovú mieru chaosu. V tretej časti uvedieme dva príklady systémov, ktoré sú distribučne chaotické a vypočítame ich mieru chaosu. Štvrtá časť sa zaoberá stabilitou distribučného chaosu.

4.1 Definícia

Pripomeňme, že v deterministickom dynamickom systéme bola definícia distribučného chaosu založená na funkcii $F_{xy}^{(n)}(t)$. Na hodnotu $F_{xy}^{(n)}(t)$ sa môžeme pozeráť aj ako na pravdepodobnosť toho, že vzdialenosť medzi bodmi x_J a y_J bude menšia ako t , kde J má rovnomerné rozdelenie na množine $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Pri takejto interpretácii môžeme v náhodnom dynamickom systéme definovať funkciu $F_{xy}^{(n)}(t, f, g, p)$ ako

$$\begin{aligned} F_{xy}^{(n)}(t, f, g, p) &= P(|x_J - y_J| < t) = \\ &= P(|x_J - y_J| < t \mid J = 0)P(J = 0) + \\ &\quad + P(|x_J - y_J| < t \mid J = 1)P(J = 1) + \dots + \\ &\quad + P(|x_J - y_J| < t \mid J = n-1)P(J = n-1) = \\ &= \frac{1}{n}P(|x_0 - y_0|) + \dots + \frac{1}{n}P(|x_{n-1} - y_{n-1}|) = \\ &= \frac{1}{n}(P(|x_0 - y_0| < t) + \dots + P(|x_{n-1} - y_{n-1}| < t)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Zároveň platí, že takto definovaná funkcia $F_{xy}^{(n)}(t, f, g, p)$ je aj strednou hodnotou výrazu

$$\frac{1}{n} \# \{i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : |x_i - y_i| < t\}, \quad (4.6)$$

ktorý je v náhodných dynamických systémoch náhodnou premennou. Tento výraz totižto môžeme písať ako

$$\frac{1}{n} \# \{i \in \{0, \dots, n-1\} : |x_i - y_i| < t\} = \frac{1}{n} (I_0(t, f, g, p) + \dots + I_{n-1}(t, f, g, p)),$$

kde

$$I_k(t, f, g, p) = \begin{cases} 1 & \text{ak } |x_k - y_k| < t, \\ 0 & \text{ak } |x_k - y_k| \geq t \end{cases} \quad (4.7)$$

pre $k = 0, 1, \dots, n-1$. Náhodná premenná $I_k(t, f, g, p)$ má alternatívne rozdelenie, preto

$$E(I_k(t, f, g)) = P(|x_k - y_k| < t), \quad (4.8)$$

a teda

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{n} \# \{i \in \{0, \dots, n-1\} : |x_i - y_i| < t\}\right) &= \\ &= \frac{1}{n}(P(|x_0 - y_0| < t) + \dots + P(|x_{n-1} - y_{n-1}| < t)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Keď máme definovanú funkciu $F_{xy}^{(n)}(t, f, g, p)$, tak dolnú, resp. hornú distribučnú funkciu môžeme definovať analogicky ako v deterministickom prípade, teda

$$F_{xy}(t, f, g, p) = \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{xy}^{(n)}(t, f, g, p), \quad (4.10)$$

$$F_{xy}^*(t, f, g, p) = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{xy}^{(n)}(t, f, g, p). \quad (4.11)$$

Takisto môžeme definovať mieru distribučného chaosu μ ako

$$\mu(f, g, p) = \sup_{x, y \in I} \frac{1}{|I|} \int_0^\infty (F_{xy}^*(t, f, g, p) - F_{xy}(t, f, g, p)) dt. \quad (4.12)$$

Pre funkcie $F_{xy}(t, f, g, p)$ a $F_{xy}^*(t, f, g, p)$ triviálne platí, že sú neklesajúce a

$$0 \leq F_{xy}(t, f, g, p) \leq F_{xy}^*(t, f, g, p) \leq 1. \quad (4.13)$$

Z neklesajúcnosti vyplýva, že majú nanajvýš spočítateľne veľa bodov nespojitosti, takže funkcia $F_{xy}^*(t, f, g, p) - F_{xy}(t, f, g, p)$ je skoro všade spojitá, čo stačí na to, aby integrál v (4.12) vždy existoval. Ďalej zjavne platí, že miera $\mu(f, g, p)$ je vždy nezáporná. Ak je táto miera kladná, budeme hovoriť, že náhodný dynamický systém (4.1) je distribučne chaotický.

Poznámka. V ďalších častiach budeme pre jednoduchosť používať rovnaké označenie ako v deterministickom systéme, t.j. $F_{xy}^{(n)}(t)$, $F_{xy}(t)$ a $F_{xy}^*(t)$. Okrem toho budeme vynechávať p z $\mu(f, g, p)$.

4.2 Nulová miera chaosu

Vo všeobecnosti môže byť veľmi zložitý presne vypočítať mieru $\mu(f, g)$, avšak v niektorých (aj relatívne všeobecných) prípadoch sa dá ukázať, že táto miera je nulová.

Lema 4.1. *Ak v systéme (4.1) platí, že pre ľubovoľné t a ľubovoľné x_0 a y_0 existuje limita*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{xy}^{(n)}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(|x_0 - y_0| < t) + \dots + P(|x_{n-1} - y_{n-1}| < t)}{n}, \quad (4.14)$$

potom platí, že $\mu(f, g) = 0$.

Dôkaz. Z definície. □

Dôsledok 4.2. *Ak v systéme (4.1) platí, že pre ľubovoľné t a ľubovoľné x_0 a y_0 existuje limita*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|x_n - y_n| < t), \quad (4.15)$$

potom miera distribučného chaosu $\mu(f, g)$ je nulová.

Dôkaz. Využijeme fakt, že ak nejaká postupnosť konverguje k číslu a , tak k tomuto číslu konvergujú aj aritmetické priemery prvých n členov tejto postupnosti. □

Tvrdenie 4.3. *Ak sú v systéme (4.1) funkcie f a g kontraktívne, potom $\mu(f, g) = 0$.*

Dôkaz. Nech, $x_0, y_0 \in I$ sú ľubovoľné. Funkcie f a g sú kontraktívne, teda existujú také čísla $c_1, c_2 \in (0, 1)$, že $|f(x) - f(y)| \leq c_1|x - y|$ a $|g(x) - g(y)| \leq c_2|x - y|$ pre ľubovoľné $x, y \in I$. Ak označíme $c = \max(c_1, c_2)$, potom (bez ohľadu na to, akú funkciu vyberieme) platí, že $|x_1 - y_1| \leq c|x_0 - y_0|$, podobne $|x_2 - y_2| \leq c|x_1 - y_1| \leq c^2|x_0 - y_0|$ a analogicky $|x_n - y_n| \leq c^n|x_0 - y_0| \rightarrow 0$, lebo $c \in (0, 1)$. Z toho máme, že $P(|x_n - y_n| < t) \rightarrow 1$ pre ľubovoľné $t > 0$, a teda z Dôsledku 4.2 máme $\mu(f, g) = 0$. $\square$

Predtým, než uvedieme ďalšie tvrdenia, budeme potrebovať nasledovnú lemu.

Lema 4.4. *Nech X_n má binomické rozdelenie s parametrami n a $p \in (0, 1)$ a nech a, b sú ľubovoľné reálne čísla. Potom*

$$(i) \text{ ak } a > p, \text{ potom } \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq an + b) = 0,$$

$$(ii) \text{ ak } 0 < a < p, \text{ potom } \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq an + b) = 1.$$

Dôkaz. Pripomeňme, že stredná hodnota X_n je np a disperzia X_n je $np(1-p)$. Využijúc Čebyševovu nerovnosť dostávame

$$(i) \quad P(X_n \geq an + b) = P(X_n - np \geq (a - p)n + b) \leq \\ \leq P(|X_n - np| \geq (a - p)n + b) \leq \frac{np}{((a - p)n + b)^2} \rightarrow 0$$

pre $n \rightarrow \infty$,

$$(ii) \quad P(X_n < an + b) = P(X_n - np < (a - p)n + b) = \\ = P(np - X_n > (p - a)n - b) \leq \\ \leq P(|np - X_n| > (p - a)n - b) \leq \\ \leq P(|X_n - np| \geq (p - a)n - b) \leq \frac{np}{((p - a)n - b)^2} \rightarrow 0,$$

pre $n \rightarrow \infty$, a teda $P(X_n \geq an + b) \rightarrow 1$.

Veta 4.5. *Nech f je Lipschitzovsky spojitá (t.j. existuje také $M < \infty$, že $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ pre každé $x, y \in I$) a nech g je kontraktívna (t.j. existuje také $c < 1$, že $|g(x) - g(y)| \leq c|x - y|$ pre každé $x, y \in I$). Ďalej predpokladajme, že $cM \geq 1$. Označme r najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré $c^r M \leq 1$. Ak je pravdepodobnosť p (toho, že zvolíme funkciu f) menšia ako $\frac{1}{1+r}$, potom $\mu(f, g) = 0$.*

Dôkaz. Nech $x, y \in I$ a $t > 0$ sú ľubovoľné. K danému t existuje také prirodzené číslo k , že $c^k|I| < t$, a teda

$$c^k(c^r M)^m|I| < t \tag{4.16}$$

pre ľubovoľné prirodzené číslo m . Nech X_n je náhodná premenná, ktorá označuje, koľkokrát sme do času n zvolili funkciu f . Formálnejšie - pre ľubovoľné $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$ položme

$$X_n(\omega) = \sum_{i=1}^n I_f(\omega_i), \tag{4.17}$$

kde I_f bolo definované v (4.3). Z vlastností funkcií f a g vyplýva, že

$$|x_n - y_n| \leq c^{n-X_n} M^{X_n} |x - y| \leq c^{n-X_n} M^{X_n} |I|. \quad (4.18)$$

Ak teda $n - X_n \geq rX_n + k$, potom $|x_n - y_n| < t$ - v „najhoršom“ prípade ($n - X_n = rX_n + k$) dostaneme, že

$$|x_n - y_n| \leq c^{rX_n+k} M^{X_n} |I| = c^k (c^r)^{X_n} M^{X_n} |I| = c^k (c^r M)^{X_n} |I| < t. \quad (4.19)$$

Náhodná premenná X_n má zjavne binomické rozdelenie s parametrami n a p , a teda z Lemy 4.4 máme

$$\begin{aligned} P(|x_n - y_n| < t) &\geq P(n - X_n \geq rX_n + k) = P(rX_n + X_n \leq n - k) = \\ &= P\left(X_n \leq \frac{1}{1+r}n - \frac{k}{1+r}\right) = 1 - P\left(X_n > \frac{1}{1+r}n - \frac{k}{1+r}\right) \geq \\ &\geq 1 - P\left(X_n \geq \frac{1}{1+r}n - \frac{k}{1+r}\right) \rightarrow 1, \end{aligned}$$

pretože $\frac{1}{1+r} > p$. Z toho vyplýva, že $P(|x_n - y_n| < t) \rightarrow 1$ pre ľubovoľné $x, y \in I$ a ľubovoľné $t > 0$, teda z Dôsledku 4.2 máme $\mu(f, g) = 0$.

Veta 4.6. *Nech f je Lipschitzovsky spojitá, nech g je kontraktívna (s takými istými konštantami M a c ako vo Vete 4.5) a nech $cM \leq 1$. Označme r najväčšie prirodzené číslo, pre ktoré $cM^r \leq 1$. Ak je pravdepodobnosť p menšia ako $\frac{r}{1+r}$, potom $\mu(f, g) = 0$.*

Dôkaz je analogický dôkazu predchádzajúcej vety.

Veta 4.7. *Nech pre ľubovoľné $x \in I$ platí, že trajektória x_n konverguje ku konečnej množine $A \equiv \{a_1, \dots, a_m\}$ v takom zmysle, že*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n \in A) = 1 \quad (4.20)$$

Potom $\mu(f, g) = 0$.

Pre prehľadnosť dôkazu najprv sformulujeme a dokážeme pomocnú lemu.

Lema 4.8. *Ak $x, y \in A$, potom pre ľubovoľné $t > 0$ limita*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P(|x_i - y_i| < t) \quad (4.21)$$

existuje.

Dôkaz. Uvažujme Markovov reťazec $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ so stavmi d_{ij} , $i, j = 1, \dots, m$, ktorý je určený takým spôsobom, že Z_n je v stave d_{ij} práve vtedy, keď $x_n = a_i$ a $y_n = a_j$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $Z_0 = d_{12}$. Položme

$$K \equiv \{(i, j) \in \{1, \dots, m\}^2 : |a_i - a_j| < t\}. \quad (4.22)$$

Z definície tejto množiny vyplýva, že $|x_n - y_n| < t$ práve vtedy, keď

$$Z_n \in \{d_{ij}, (i, j) \in K\}. \quad (4.23)$$

Z toho vyplýva, že

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(|x_k - y_k| < t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{(i,j) \in K} P(Z_k = d_{ij} | Z_0 = d_{12}) = \\ &= \sum_{(i,j) \in K} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(Z_k = d_{ij} | Z_0 = d_{12}). \end{aligned}$$

Ide o konečný súčet limit, pričom z Lemy 2.3 vieme, že každá z týchto limit existuje. $\square$

Dôkaz (Vety 4.7). Nech je dané ľubovoľné $x, y \in I$, $t > 0$ a ľubovoľné $\delta > 0$. Ukážeme, že $F_{xy}^*(t) - F_{xy}(t) \leq \delta$. Podľa predpokladu k danému δ existuje také n_0 , že

$$P(x_{n_0} \in A \wedge y_{n_0} \in A) > 1 - \delta. \quad (4.24)$$

Do času n_0 môže nastať iba konečne veľa (konkrétne 2^{n_0}) situácií (napr. pre $n_0 = 3$ sme mohli vyberať iba funkcie $fff, fffg, fgff, gfff, fgg, gfg, ggf, ggg$). Tieto situácie môžeme vyjadriť pomocou množín

$$B_{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{n_0}} \equiv \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega : \omega_1 = \varphi_1, \omega_2 = \varphi_2, \dots, \omega_{n_0} = \varphi_{n_0}\}, \quad (4.25)$$

kde $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_0} \in \{f, g\}$.

Pre jednoduchosť tieto množiny preznačme na $C_1, \dots, C_{2^{n_0}}$ a zoradíme ich tak, aby platilo, že

- ak $\omega \in C_1 \cup \dots \cup C_k$, potom $x_n(\omega) \notin A$ alebo $y_n(\omega) \notin A$ a
- ak $\omega \in C_{k+1} \cup \dots \cup C_{2^{n_0}}$, potom $x_n(\omega) \in A$ a $y_n(\omega) \in A$.

Množiny $C_1, \dots, C_k$ sú zjavne disjunktné, a teda podľa (4.24)

$$P(C_1) + \dots + P(C_k) \leq \delta. \quad (4.26)$$

Máme teda

$$\begin{aligned} F_{xy}^*(t) - F_{xy}(t) &= \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P(|x_i - y_i| < t) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P(|x_i - y_i| < t) = \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{2^{n_0}} P(|x_i - y_i| < t | C_j) P(C_j) - \\ &\quad - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{2^{n_0}} P(|x_i - y_i| < t | C_j) P(C_j) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{2^{n_0}} P(C_j) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P(|x_i - y_i| < t | C_j) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P(|x_i - y_i| < t | C_j) \right). \end{aligned}$$

Avšak $x_{n_0}(\omega)$ a $y_{n_0}(\omega)$ sú už v množine A ak $\omega \in C_j$, $j = k+1, \dots, 2^{n_0}$. Z Lemy 4.8 potom máme, že limes superior a limes inferior sú také isté, pretože ak C_j je tvaru $B_{\varphi_1 \dots \varphi_{n_0}}$, potom

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P(|x_i - y_i| < t | C_j) \quad (4.27)$$

je to isté, čo $F_{x'y'}^*(t)$, $x' = \varphi_{n_0} \circ \dots \circ \varphi_1(x)$, podobne y' a podobne pre limes inferior. Z toho potom vyplýva

$$\begin{aligned} F_{xy}^*(t) - F_{xy}(t) &= \\ \sum_{j=1}^k P(C_j) &\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P(|x_i - y_i| < t | C_j) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P(|x_i - y_i| < t | C_j) \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^k P(C_j) \leq \delta. \end{aligned}$$

Keďže toto platí pre ľubovoľné $\delta > 0$, tak nutne musí platiť $F_{xy}^*(t) - F_{xy}(t) = 0$, a teda aj $\mu(f, g) = 0$.

4.3 Príklady distribučne chaotických systémov

V tejto časti uvedieme príklady dvoch systémov, ktoré sú distribučne chaotické a vypočítame ich mieru chaosu. V prvom prípade je miera chaosu spojitou funkciou pravdepodobnosti p , v druhom je táto miera konštantná pre ľubovoľné $p \in (0, 1)$.

Príklad 4.9. Uvažujme funkcie $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ -3x + 2 & \text{ak } x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ 3x - 2 & \text{ak } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \quad (4.28)$$

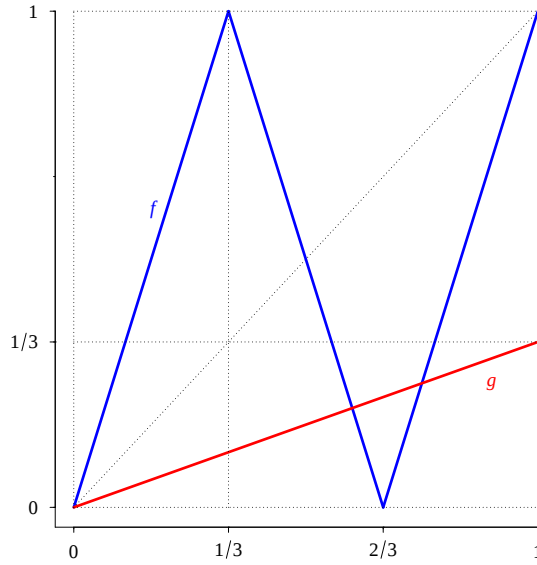
a $g(x) = \frac{1}{3}x$. Ukážeme, že miera chaosu systému generovaného týmito funkciami je

$$\mu(f, g) = \begin{cases} 0 & \text{ak } p < \frac{1}{2}, \\ \frac{6p-3}{4p-1} & \text{ak } p \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.29)$$

Prípád $p < \frac{1}{2}$ vyplýva priamo z Vety 4.5. Aby sme ukázali prípad $p \geq \frac{1}{2}$, dokážeme nasledujúce tvrdenia.

Tvrdenie 4.10. Ak $p \geq \frac{1}{2}$, potom pre ľubovoľné $x, y \in [0, 1]$ platí

$$\int_0^1 F_{xy}^*(t) - F_{xy}(t) dt \leq \frac{6p-3}{4p-1}. \quad (4.30)$$

Obr. 4.1: Funkcie f a g z Príkladu 4.9.

Tvrdenie 4.11. Ak $p > \frac{1}{2}$, potom pre $y \equiv 0$ existuje taká postupnosť bodov $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ z intervalu $[0, 1]$, pre ktorú platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 F_{x^{(k)}y}^*(t) - F_{x^{(k)}y}(t) dt = \frac{6p-3}{4p-1}. \quad (4.31)$$

Ďalej budeme pracovať s trojkovým zápisom čísel z intervalu $[0, 1]$, pričom budeme používať rovnaké označenie ako v Príklade 1.24. V takomto značení pre funkcie f a g platí

- $g(s) = 0s$,
- $f(0s) = f(2s) = s$,
- $f(1s) = \bar{s}$,
- $f(g(s)) = s$,
- $f(0^\infty) = g(0^\infty) = 0^\infty$.

Dôkaz Tvrdenia 4.10. Nech $x, y \in [0, 1]$ sú ľubovoľné. Označme A_1^n množinu

$$A_1^n = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega : \omega_n = g\}. \quad (4.32)$$

Keďže $g(s) = 0s$, pre každé $\omega \in A_1^n$ platí $U(x_n(\omega), y_n(\omega)) \geq 1$, pretože v tomto prípade trojkový zápis $x_n = g(x_{n-1})$ a $y_n = g(y_{n-1})$ začína nulou. Ďalej uvažujme množinu

$$A_3^n = \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{i=0}^2 (I_f(\omega_{n-i}) - I_g(\omega_{n-i})) = -1 \right\}, \quad (4.33)$$

kde I_f a I_g boli definované v (4.3). Ak $\omega \in A_3^n$, potom z definície množiny A_3^n vyplýva, že medzi ω_{n-2} , ω_{n-1} a ω_n je dvakrát funkcia g a jedenkrát funkcia f . Poradie týchto funkcií je buď f, g, g (v takom prípade $x_n = g \circ g \circ f(x_{n-3})$ začína nulou, pretože $g(s) = 0s$), alebo po nejakej funkcii g nasleduje funkcia f (čo je identita), čiže $x_n = \omega_n \circ \omega_{n-1} \circ \omega_{n-2}(x_{n-3}) = g(x_{n-3})$ začína nulou. To isté platí pre y_n , a teda $U(x_n(\omega), y_n(\omega)) \geq 1$ pre ľubovoľné $\omega \in A_3^n$.

Analogicky môžeme definovať množinu

$$A_m^n = \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{i=0}^{m-1} (I_f(\omega_{n-i}) - I_g(\omega_{n-1})) = -1 \right\}, \quad (4.34)$$

kde $m = 1, 2, \dots, n$. Ak je m párne, tak A_m^n je zjavne prázdna. Ak m je nepárne a $\omega \in A_m^n$, potom sa medzi funkciami $\omega_{n-m+1}, \omega_{n-m+2}, \dots, \omega_n$ funkcia g vyskytuje $\frac{m+1}{2}$ -krát a funkcia f $\frac{m-1}{2}$ -krát. Opäť máme dve možnosti:

1. poradie týchto funkcií je $f, f, \dots, f, g, g, \dots, g$, a teda

$$x_n = g \circ g \circ \dots \circ g \circ f \circ \dots \circ f(x_{n-m}) = g(x_{n-1}) \quad (4.35)$$

začína nulou,

2. po nejakej funkcii g nasleduje funkcia f . Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že napríklad $\omega_{n-2} = f$ a $\omega_{n-3} = g$; potom

$$\omega_n \circ \omega_{n-1} \circ f \circ g \circ \omega_{n-4} \circ \dots \circ \omega_{n-m+1} = \omega_n \circ \omega_{n-1} \circ \omega_{n-4} \circ \dots \circ \omega_{n-m+1}, \quad (4.36)$$

pretože $f \circ g$ je identita. Poradie zostávajúcich funkcií $\omega_{n-m+1}, \dots, \omega_{n-4}, \omega_{n-1}, \omega_n$ je opäť buď $f, \dots, f, g, \dots, g$, alebo vieme znovu ‘odstrániť’ nejaké $f \circ g$. Toto môžeme opakovať, až kým nedostaneme $x_n = g(x_k)$ pre nejaké k , takže x_n bude začínať nulou.

Preto ak $\omega \in A_m^n$, potom $U(x_n(\omega), y_n(\omega)) \geq 1$.

Pre $t > \frac{1}{3}$ teraz máme

$$P(|x_n - y_n| < t) \geq P(U(x_n, y_n) \geq 1) \geq P(B_n^1), \quad (4.37)$$

kde $B_n^1 = \bigcup_{i=1}^n A_i^n$, čo môžeme zapísať aj ako

$$B_n^1 = \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{i=0}^{m-1} (I_f(\omega_{n-i}) - I_g(\omega_{n-i})) = -1 \text{ pre nejaké } m \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}. \quad (4.38)$$

Avšak

$$I_f(\omega_{n-i}) - I_g(\omega_{n-i}) = \begin{cases} 1 & \text{ak } \omega_{n-i} = f \text{ (s pravdepodobnosťou } p), \\ -1 & \text{ak } \omega_{n-i} = g \text{ (s pravdepodobnosťou } 1-p), \end{cases} \quad (4.39)$$

takže suma

$$\sum_{i=0}^{m-1} (I_f(\omega_{n-i}) - I_g(\omega_{n-i})) \quad (4.40)$$

je jednoduchá náhodná prechádzka. Využijúc Lemu 2.4 dostávame

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n^1) = \frac{1-p}{p}, \quad (4.41)$$

pretože $p \geq \frac{1}{2}$. Podobne vieme skonštruovať množinu

$$B_n^k \equiv \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{i=0}^{m-1} (I_g(\omega_{n-i}) - I_f(\omega_{n-i})) = -k \text{ pre nejaké } m \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}, \quad (4.42)$$

kde $k = 1, 2, \dots$. Použijúc rovnaké argumenty ako vyššie, dostávame

- $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n^k) = \left(\frac{1-p}{p} \right)^k$,
- ak $\omega \in B_n^k$, potom $U(x_n(\omega), y_n(\omega)) \geq k$; teda, $|x_n(\omega) - y_n(\omega)| \leq 3^{-k}$.

Nech teraz $t \in (0, 1]$ je ľubovoľné a nech k je také prirodzené číslo, pre ktoré platí, že $t \in (3^{-k}, 3^{-k+1}]$. Máme

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(|x_n - y_n| < t) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(U(x_n, y_n) \geq k) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(B_n^k) = \left(\frac{1-p}{p} \right)^k. \quad (4.43)$$

Z toho vyplýva, že

$$F_{xy}(t) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P(|x_i - y_i| < t) \geq \left(\frac{1-p}{p} \right)^k \quad (4.44)$$

pre $t \in (3^{-k}, 3^{-k+1}]$, kde $k = 1, 2, \dots$. Keďže $F_{xy}^*(t)$ nemôže byť väčšia ako 1, maximálna možná plocha medzi F_{xy} a F_{xy}^* je

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_{xy}^*(t) - F_{xy}(t) dt &\leq \int_0^1 1 - F_{xy}(t) dt = 1 - \int_0^1 F_{xy}(t) dt \leq \\ &\leq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (3^{-k+1} - 3^{-k}) \left(\frac{1-p}{p} \right)^k = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^k \left(\frac{1-p}{p} \right)^k = \\ &= 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-p}{3p} \right)^k = 1 - 2 \frac{\frac{1-p}{3p}}{1 - \frac{1-p}{3p}} = 1 - \frac{2-2p}{4p-1} = \frac{6p-3}{4p-1}. \end{aligned}$$

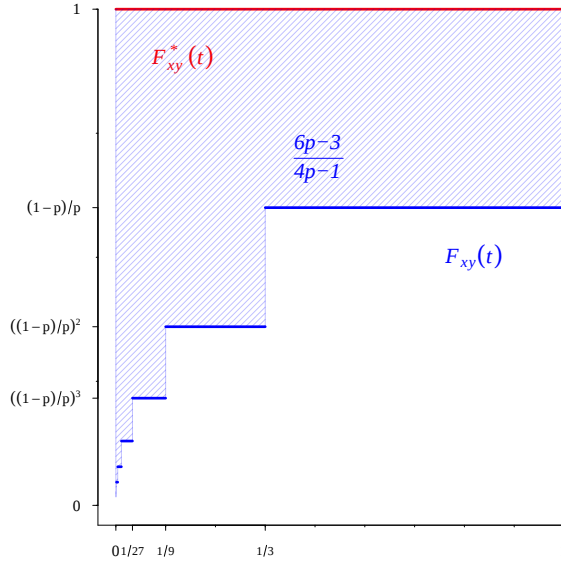
□

Pred tým, než dokážeme Tvrdenie 4.11, budeme potrebovať dve technické lemy.

Lema 4.12. *Nech $t > 0$ a $\varepsilon > 0$ sú ľubovoľné. Pre každú konečnú postupnosť r , ktorá neobsahuje jednotky a každú nekonečnú postupnosť s existujú také prirodzené čísla M a N , že pre $y = 0$ a číslo w s trojkovým zápisom $r0^M s$ platí*

$$|F_{wy}^{(N)}(t) - 1| < \varepsilon. \quad (4.45)$$

Číslo N môžeme navyše zvoliť ľubovoľne veľké.



Obr. 4.2: Maximálna možná plocha medzi F_{xy} a F_{xy}^* v Príklade 4.9.

Lema 4.13. *Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Položme $t_l^k = 3^{-l} - 3^{-k}$, kde k je ľubovoľné pevné prirodzené číslo a $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Pre každú konečnú postupnosť r , ktorá neobsahuje jednotky a každú nekonečnú postupnosť $s \neq 2^\infty$ existujú také prirodzené čísla M a N , že pre $y = 0$ a číslo z s trojkovým zápisom $r2^M s$ platí*

$$\left| F_{zy}^{(N)}(t_l^k) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^{l+1} \right| < \varepsilon \quad (4.46)$$

pre každé $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Číslo N môžeme navyše zvoliť ľubovoľne veľké.

Teraz môžeme dokázať Tvrdenie 4.11 (lemy dokážeme neskôr).

Dôkaz Tvrdenia 4.11. Uvažujme najprv iba $t_0^1 \equiv \frac{2}{3} = 3^0 - 3^{-1}$ a postupujme nasledovne:

- zvolíme ľubovoľné r_1 , ktoré neobsahuje jednotky a s ;
- pre $\varepsilon_1 \equiv 1$ existujú také M_1 a N_1 , že pre $u^1 \equiv r_1 0^{M_1} s$ máme

$$\left| F_{u^1 y}^{(N_1)}(t_0^1) - 1 \right| < 1$$

(Lema 4.12);

- pre $\varepsilon_2 \equiv \frac{1}{2}$, $r_2 = r_1 0^{M_1}$ a s existujú také M_2 a $N_2 > N_1$, že pre $u^2 \equiv r_2 2^{M_2} s$ platí

$$\left| F_{u^2 y}^{(N_2)}(t_0^1) - \frac{1-p}{p} \right| < \frac{1}{2}$$

(Lema 4.13);

- pre $\varepsilon_3 \equiv \frac{1}{3}$, $r_3 = r_1 0^{M_1} 2^{M_2}$ a s existujú také M_3 a $N_3 > N_2$, že pre $u^3 \equiv r_3 0^{M_3} s$ platí

$$\left| F_{u^3 y}^{(N_3)}(t_0^1) - 1 \right| < \frac{1}{3}$$

(Lema 4.12);

-

Z takejto konštrukcie sa dá vidieť, že pre $x^{(1)}$ tvaru $r_1 0^{M_1} 2^{M_2} 0^{M_3} 2^{M_4} \dots$ máme

$$F_{x^{(1)}y}^*(t_0^1) = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{x^{(1)}y}^{(n)}(t_0^1) = 1, \quad (4.47)$$

$$F_{x^{(1)}y}(t_0^1) = \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{x^{(1)}y}^{(n)}(t_0^1) = \frac{1-p}{p}. \quad (4.48)$$

(Z predchádzajúceho v skutočnosti pre limes inferior vyplýva iba nerovnosť, avšak zoberúc do úvahy výsledky z Tvrdenia 4.10 dostaneme rovnosť.)

Ďalej uvažujme čísla $t_0^2 \equiv \frac{8}{9} = 3^0 - 3^{-2}$ a $t_1^2 \equiv \frac{2}{9} = 3^{-1} - 3^{-2}$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade vieme zostrojiť také postupnosti $\{M_i\}_{i=1}^\infty$ a $\{N_i\}_{i=1}^\infty$, že pre $x^{(2)}$ tvaru $r_1 0^{M_1} 2^{M_2} 0^{M_3} 2^{M_4} \dots$ platí

$$\left| F_{x^{(2)}y}^{(N_j)}(t_1^2) - 1 \right| < \frac{1}{j}$$

pre párne j a

$$\begin{aligned} \left| F_{x^{(2)}y}^{(N_j)}(t_0^2) - \frac{1-p}{p} \right| &< \frac{1}{j} \\ \left| F_{x^{(2)}y}^{(N_j)}(t_1^2) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 \right| &< \frac{1}{j} \end{aligned}$$

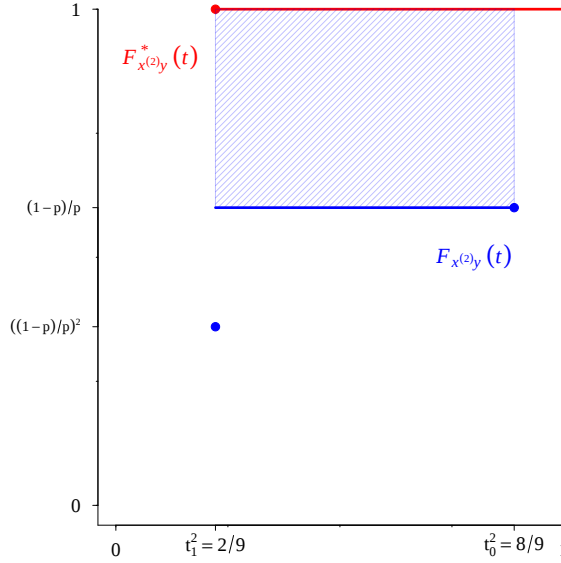
pre nepárne j . Z toho máme

$$\begin{aligned} F_{x^{(2)}y}^*(t_1^2) &= 1, \\ F_{x^{(2)}y}(t_0^2) &= \frac{1-p}{p}, \\ F_{x^{(2)}y}(t_1^2) &= \left(\frac{1-p}{p} \right)^2. \end{aligned}$$

Keďže F_{xy}^* a F_{xy} sú obe neklesajúce, pre ľubovoľné $t > t_1^2$ platí $F_{x^{(2)}y}^*(t) = 1$ a pre ľubovoľné $t \in [t_1^2, t_0^2]$ platí $F_{x^{(2)}y}(t) \in \left[\left(\frac{1-p}{p} \right)^2, \frac{1-p}{p} \right]$. Z toho vyplýva, že plocha medzi funkciami $F_{x^{(2)}y}$ a $F_{x^{(2)}y}^*$ je aspoň

$$\int_0^1 F_{x^{(2)}y}^*(t) - F_{x^{(2)}y}(t) dt \geq (t_0^2 - t_1^2) \cdot \left(1 - \frac{1-p}{p} \right). \quad (4.49)$$

“Najhorší” možný prípad je totiž $F_{x^{(2)}y}(t) = \frac{1-p}{p}$ pre $t \in (t_1^2, t_0^2]$ (viď Obr. 4.3).



Obr. 4.3: Časť funkcií $F_{x^{(2)}y}$ a $F_{x^{(2)}y}^*$ (“najhorší” možný prípad).

Analogicky pre prirodzené číslo k a $t_l^k = 3^{-l} - 3^{-k}$, $l = 0, 1, \dots, k-1$ vieme skonštruovať také $x^{(k)}$, že platí

$$\begin{aligned} F_{x^{(k)}y}^*(t_{k-1}^k) &= 1, \\ F_{x^{(k)}y}(t_l^k) &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{l+1} \end{aligned}$$

pre $l = 0, 1, \dots, k-1$. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade, $F_{x^{(k)}y}^*(t) = 1$ pre každé $t > t_{k-1}^k$ a

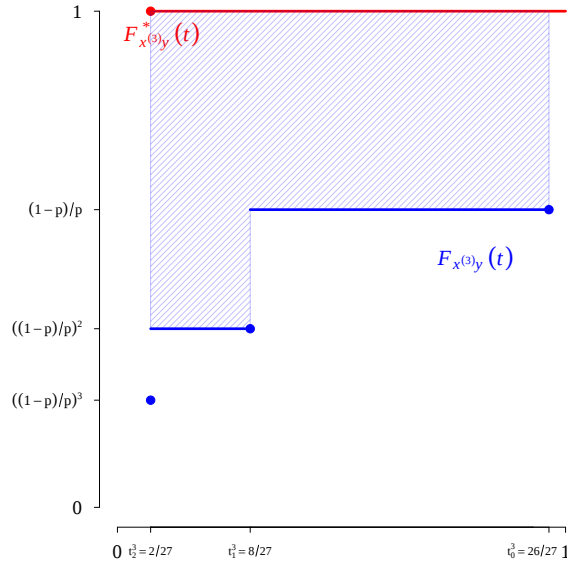
$$F_{x^{(k)}y}(t) \in \left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{i+1}, \left(\frac{1-p}{p}\right)^i \right] \quad (4.50)$$

pre $t \in [t_i^k, t_{i-1}^k]$, $i = 1, 2, \dots, k-1$. Z toho vyplýva, že plocha medzi $F_{x^{(k)}y}$ a $F_{x^{(k)}y}^*$ je aspoň

$$\begin{aligned} &\int_0^1 F_{x^{(k)}y}^*(t) - F_{x^{(k)}y}(t) dt \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^{k-1} (t_{i-1}^k - t_i^k) \cdot \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i\right) = \sum_{i=1}^{k-1} (t_{i-1}^k - t_i^k) - \sum_{i=1}^{k-1} (t_{i-1}^k - t_i^k) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^i = \\ &= t_0^k - t_{k-1}^k - \sum_{i=1}^{k-1} (3^{-(i-1)} - 3^{-k} - (3^{-i} - 3^{-k})) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^i = \\ &= (3^0 - 3^{-k}) - (3^{-(k-1)} - 3^{-k}) - \sum_{i=1}^{k-1} (3^{-(i-1)} - 3^{-i}) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^i = \\ &= 1 - 3^{-(k-1)} - \sum_{i=1}^{k-1} (3^{-i+1} - 3^{-i}) \left(\frac{1-p}{p}\right)^i. \end{aligned}$$

Pre $k \rightarrow \infty$ dostaneme rovnakú sumáciu ako v dôkaze z Tvrdenia 4.10, teda

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 F_{x^{(k)}y}^*(t) - F_{x^{(k)}y}(t) dt \geq \frac{6p-3}{4p-1}. \quad (4.51)$$



Obr. 4.4: Časť funkcií $F_{x^{(3)}y}$ a $F_{x^{(3)}y}^*$ (“najhorší” možný prípad).

Avšak z Tvrdenia 4.10 máme aj

$$\int_0^1 F_{x^{(k)}y}^*(t) - F_{x^{(k)}y}(t) dt \leq \frac{6p-3}{4p-1}, \quad (4.52)$$

pre každé k . Platí teda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 F_{x^{(k)}y}^*(t) - F_{x^{(k)}y}(t) dt = \frac{6p-3}{4p-1}. \quad (4.53)$$

Tým je tvrdenie dokázané. $\square$

Teraz dokážeme Lemu 4.12 a Lemu 4.13.

Dôkaz Lemy 4.12. Uvažujme najprv číslo w' tvaru $r0^\infty$ a množinu

$$C_n^{\ell(r)} \equiv \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{i=1}^m (I_f(\omega_i) - I_g(\omega_i)) = \ell(r) \text{ pre nejaké } m \in \{1, 2, \dots, n\} \right\} \quad (4.54)$$

(pripomeňme, že $\ell(r)$ označuje dĺžku postupnosti r). Nech $\omega \in C_n^{\ell(r)}$ a označme

$$m_0 \equiv \min \left\{ m \in \{1, 2, \dots\} : \sum_{i=1}^m (I_f(\omega_i) - I_g(\omega_i)) = \ell(r) \right\}. \quad (4.55)$$

Potom $w'_{m_0}(\omega) = 0^\infty$ (pretože $f \circ g = id$ a f „posúva” trojkový zápis doľava), a teda aj $w'_n(\omega) = 0^\infty$. Z toho máme

$$P(|w'_n - y_n| < 3^{-k}) = P(w'_n < 3^{-k}) \geq P(C_n^{\ell(r)}),$$

kde k je najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré platí $3^{-k} < t$. Avšak $P(C_n^{\ell(r)}) \rightarrow 1$ pre $n \rightarrow \infty$ (z Lemy 2.4), teda $P(|w'_n - y_n| < 3^{-k}) \rightarrow 1$ a aj $F_{w'y}^{(n)}(3^{-k}) \rightarrow 1$. Preto existuje ľubovoľne veľké prirodzené číslo N , pre ktoré platí

$$F_{w'y}^{(N)}(3^{-k}) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} P(w'_i < 3^{-k}) > 1 - \varepsilon. \quad (4.56)$$

Avšak udalosti $(w'_i < 3^{-k}), i = 0, 1, \dots, N-1$ sú ovplyvnené iba prvými $N+k$ členmi trojkového zápisu čísla w' . Zvyšné členy preto možno nahradiť postupnosťou s . Z toho vyplýva, že pre číslo $w \equiv r0^{N+k-\ell(r)}s$ platí

$$F_{wy}^{(N)}(t) \geq F_{wy}^{(N)}(3^{-k}) > 1 - \varepsilon, \quad (4.57)$$

z čoho máme

$$|F_{wy}^{(N)}(t) - 1| < \varepsilon. \quad (4.58)$$

□

Dôkaz Lemy 4.13. Uvažujme najprv číslo z' tvaru $r2^\infty$. Ukážeme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(z'_n < 3^{-l} - 3^{-k}) = \left(\frac{1-p}{p} \right)^{l+1}. \quad (4.59)$$

Nech $\omega \in B_n^{l+1}$, kde B_n^{l+1} bolo definované v (4.42). Potom $z'_n(\omega)$ začína $l+1$ nulami, a teda

$$z'_n(\omega) \leq 3^{-(l+1)} < 3^{-(l+1)}(3 - 3^{l+1-k}) = 3^{-l} - 3^{-k}. \quad (4.60)$$

Z toho dostávame

$$P(z'_n < 3^{-l} - 3^{-k}) \geq P(B_n^{l+1}) \rightarrow \left(\frac{1-p}{p} \right)^{l+1}. \quad (4.61)$$

Nech teraz $\omega \notin B_n^{l+1}$ a zároveň $\omega \in C_n^{\ell(r)}$ ($C_n^{\ell(r)}$ bolo definované v (4.54)). Potom $z'_n(\omega)$ musí byť z množiny $\{2^\infty, 02^\infty, 0^2 2^\infty, \dots, 0^l 2^\infty\}$, teda $z'_n(\omega) \geq 3^{-l} \geq 3^{-l} - 3^{-k}$. Z toho vyplýva

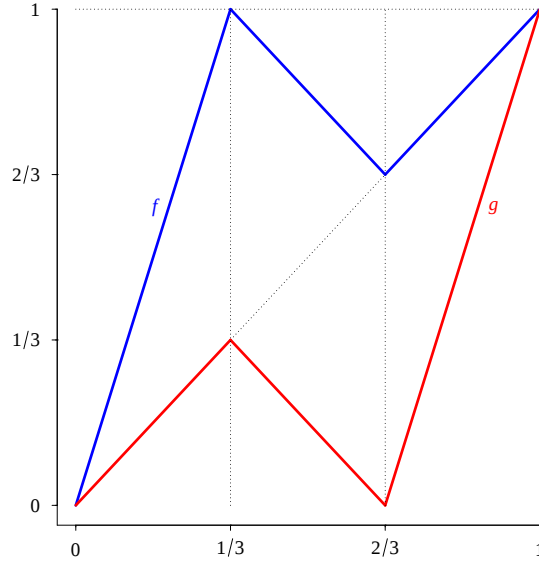
$$P\left((B_n^{l+1})^C \cap C_n^{\ell(r)}\right) \leq P(z'_n \geq 3^{-l} - 3^{-k}). \quad (4.62)$$

Máme teda

$$\begin{aligned} P(z_n < 3^{-l} - 3^{-k}) &\leq P\left(\left((B_n^{l+1})^C \cap C_n^{\ell(r)}\right)^C\right) = P\left(B_n^{l+1} \cup (C_n^{\ell(r)})^C\right) \leq \\ &\leq P(B_n^{l+1}) + P\left((C_n^{\ell(r)})^C\right) \rightarrow \left(\frac{1-p}{p} \right)^{l+1}, \end{aligned}$$

pretože $P(C_n^{\ell(r)}) \rightarrow 1$. Rovnosť (4.59) teda platí. Odtiaľ dostávame, že

$$F_{z'y}^{(n)}(3^{-l} - 3^{-k}) \rightarrow \left(\frac{1-p}{p} \right)^{l+1}, \quad (4.63)$$

Obr. 4.5: Funkcie f a g z Príkladu 4.14.

takže existuje ľubovoľne veľké N , pre ktoré platí

$$\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l+1} - \varepsilon < F_{z'y}^{(N)}(3^{-l} - 3^{-k}) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} P(z'_i < 3^{-l} - 3^{-k}) < \left(\frac{1-p}{p}\right)^{l+1} + \varepsilon. \quad (4.64)$$

Avšak - rovnako ako v dôkaze predchádzajúcej lemy - udalosti $(z'_i < 3^{-l} - 3^{-k}), i = 0, \dots, N-1$ sú ovplyvnené iba prvými $N+k$ členmi trojkového zápisu čísla z' . Zvyšné členy preto možno nahradiť postupnosťou s . Pre z tvaru $r2^{N+k-\ell(r)}s$ teda máme

$$\left| F_{zy}^{(N)}(3^{-l} - 3^{-k}) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{l+1} \right| < \varepsilon \quad (4.65)$$

pre každé $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. □

Príklad 4.14. Uvažujme $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dané predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ -x + \frac{4}{3} & \text{ak } x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ x & \text{ak } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \quad (4.66)$$

a

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ -x + \frac{3}{2} & \text{ak } x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 3x - 2 & \text{ak } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases} \quad (4.67)$$

V trojkovom zápise platí, že $f(0s) = s, f(1s) = 2\bar{s}, f(2s) = 2s, g(0s) = 0s, g(1s) = 0\bar{s}$, a $g(2s) = s$. Použijúc podobnú techniku ako v predchádzajúcom príklade, pre ľubovoľné

prirodzené číslo k je možné nájsť takú postupnosť prirodzených čísel $\{M_n\}_{n=1}^\infty$, že pre číslo $x = 0^{M_1}2^{M_2}0^{M_3}2^{M_4}\dots$ a $y = 0$ platí $F_{xy}(1 - 3^{-k}) = 0$ a $F_{xy}^*(3^{-k}) = 1$. Z definície miery chaosu potom vyplýva, že v tomto prípade $\mu(f, g) = 1$ pre ľubovoľné $p \in (0, 1)$. Avšak f a g sú zjavne nechaotické (každá trajektória konverguje k pevnému bodu), teda $\mu(f, g) = 0$ pre $p \in \{0, 1\}$.

4.4 Nestabilita

Pre funkcie f a g z Príkladu 4.14 platí, že miera $\mu(f, g, p) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ nie je spojitá v bodoch $p = 0$ a $p = 1$, teda miera μ ako funkcia pravdepodobnosti p nemusí byť nutne spojitá. V tejto časti ukážeme, že pre ľubovoľné $p \in (0, 1)$ je miera μ ako funkcia na $C(I, I) \times C(I, I)$ nespojitá v každom bode (f, g) .

Veta 4.15. *Nech $f, g : I \rightarrow I$ sú spojité a nech p je z intervalu $(0, 1)$. Potom pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existujú také spojité funkcie f^* a g^* , že $d(f, f^*) < \varepsilon$, $d(g, g^*) < \varepsilon$ a $\mu(f^*, g^*) = 0$. Miera d je daná predpisom*

$$d(f, f^*) \equiv \sup_{x \in I} |f(x) - f^*(x)|. \quad (4.68)$$

Dôkaz. Pre jednoduchosť vetu dokážeme iba pre interval $I = [0, 1]$. Keďže f a g sú spojité na kompaktnej množine, sú zároveň aj rovnomerne spojité. Pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ preto existuje také $\delta > 0$, že

$$|x - y| < \delta \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon \wedge |g(x) - g(y)| < \varepsilon) \quad (4.69)$$

pre každé $x, y \in [0, 1]$. Nech n je také prirodzené číslo, pre ktoré platí $\frac{1}{n} < \delta$. Idea je skonštruovať také f^*, g^* , že pre množinu

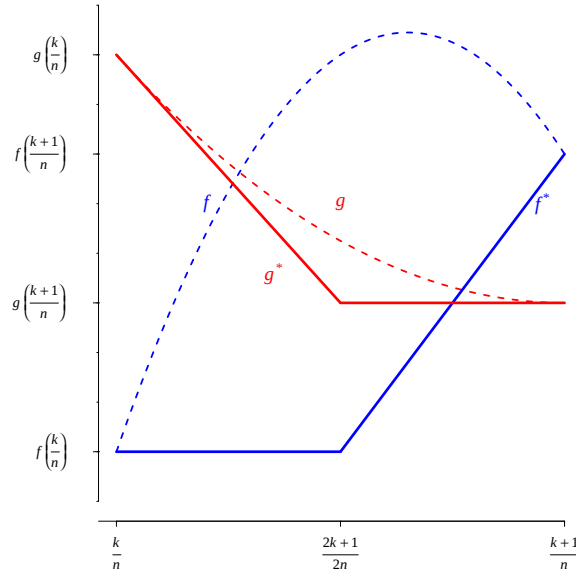
$$A \equiv \left\{ f\left(\frac{0}{n}\right), f\left(\frac{1}{n}\right), \dots, f\left(\frac{n}{n}\right), g\left(\frac{0}{n}\right), g\left(\frac{1}{n}\right), \dots, g\left(\frac{n}{n}\right) \right\}, \quad (4.70)$$

bude platiť

- $f^*(A) \subseteq A$ a $g^*(A) \subseteq A$,
- $P(x_n \in A) \rightarrow 1$ pre ľubovoľné $x \in [0, 1]$ (v náhodnom dynamickom systéme generovanom funkciami f^* a g^*).

Tieto podmienky už podľa Vety 4.7 zaručia, že bude platiť $\mu(f^*, g^*) = 0$, pretože množina A je konečná.

Uvažujme interval $I_k \equiv \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Na tomto intervale skonštruujeme funkcie f^* a g^* nasledovným spôsobom.



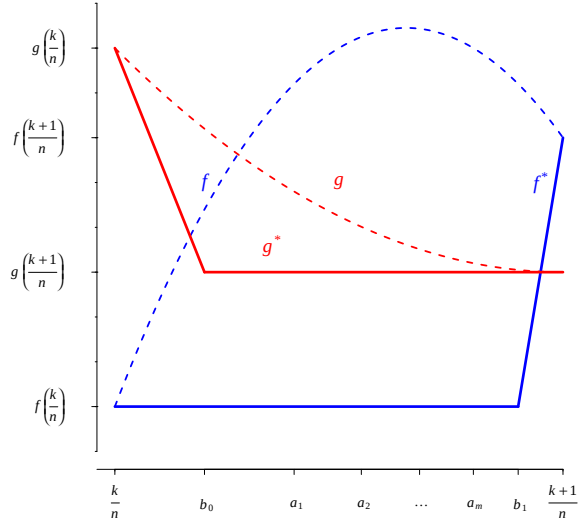
Obr. 4.6: Funkcie f^* a g^* ak $A \cap \text{int}(I_k) = \emptyset$.

1. Ak $A \cap \text{int}(I_k) = \emptyset$, potom položíme

$$\begin{aligned}
 f^*\left(\frac{k}{n}\right) &\equiv f\left(\frac{k}{n}\right), \\
 f^*\left(\frac{2k+1}{2n}\right) &\equiv f\left(\frac{k}{n}\right), \\
 f^*\left(\frac{k+1}{n}\right) &\equiv f\left(\frac{k+1}{n}\right), \\
 g^*\left(\frac{k}{n}\right) &\equiv g\left(\frac{k}{n}\right), \\
 g^*\left(\frac{2k+1}{2n}\right) &\equiv g\left(\frac{k+1}{n}\right), \\
 g^*\left(\frac{k+1}{n}\right) &\equiv g\left(\frac{k+1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

a inde tieto funkcie dodefinujeme lineárne.

2. Ak $A \cap \text{int}(I_k) = \{a_1 < a_2 < \dots < a_m\}$, potom položíme $b_0 \equiv \frac{\frac{k}{n} + a_1}{2}$ (stred medzi bodmi $\frac{k}{n}$ a a_1) a $b_1 \equiv \frac{a_m + \frac{k+1}{n}}{2}$ (stred medzi bodmi a_m a $\frac{k+1}{n}$). Funkcie f^* a g^* potom

Obr. 4.7: Funkcie f^* a g^* ak $A \cap \text{int}(I_k) \neq \emptyset$.

definujeme ako

$$\begin{aligned}
 f^*\left(\frac{k}{n}\right) &\equiv f\left(\frac{k}{n}\right), \\
 f^*(b_1) &\equiv f\left(\frac{k}{n}\right), \\
 f^*\left(\frac{k+1}{n}\right) &\equiv f\left(\frac{k+1}{n}\right), \\
 g^*\left(\frac{k}{n}\right) &\equiv g\left(\frac{k}{n}\right), \\
 g^*(b_0) &\equiv g\left(\frac{k+1}{n}\right), \\
 g^*\left(\frac{k+1}{n}\right) &\equiv g\left(\frac{k+1}{n}\right),
 \end{aligned}$$

a inde tieto funkcie dodefinujeme lineárne.

Funkcia f^* zjavne nie je od funkcie f vzdialená o viac ako ε . Keby totiž pre nejaké $x \in I_k$ platilo $|f(x) - f(x^*)| \geq \varepsilon$, tak by muselo platiť aj $|f(x) - f(\frac{k}{n})| \geq \varepsilon$ alebo $|f(x) - f(\frac{k+1}{n})| \geq \varepsilon$ (pretože $f^*(x)$ je na intervale I_k medzi bodmi $f(\frac{k}{n})$ a $f(\frac{k+1}{n})$). To ale nemôže byť, lebo $|x - \frac{k}{n}| < \frac{1}{n} < \delta$ a $|x - \frac{k+1}{n}| < \frac{1}{n} < \delta$. Analogicky platí, že g nie je od g^* vzdialená o viac ako ε .

Z konštrukcie ďalej vidno, že $f^*(A) \subseteq A$, $g^*(A) \subseteq A$ a

$$P(x_n \notin A) \leq (\max(p, 1-p))^n \rightarrow 0. \quad (4.71)$$

Z toho vyplýva, že $P(x_n \in A) \rightarrow 1$ pre ľubovoľné $x \in [0, 1]$, a teda $\mu(f^*, g^*) = 0$. $\square$

Z tejto vety vyplýva, že každý systém (aj chaotický) sa dá ľubovoľne malou zmenou zmeniť na nechaotický systém. Zaujímavé je, že v prípade nenáhodného dynamického systému niečo také neplatí. Ak máme totiž spojité zobrazenie f na uzavretom intervale I , ktoré je distribučne chaotické, potom existuje také $\varepsilon > 0$, že pre každé spojité zobrazenie f^* platí

$$d(f, f^*) < \varepsilon \Rightarrow f^* \text{ je distribučne chaotické} \Leftrightarrow \mu(f^*) > 0. \quad (4.72)$$

To vyplýva z ekvivalencie distribučného chaosu a kladnej topologickej entropie na uzavretom intervale (Veta 1.23) a z toho, že topologická entropia je polospojité zdola (napr. [9]).

Na základe týchto výsledkov vieme ľahko skonštruovať náhodný dynamický systém generovaný distribučne chaotickými funkciami f^* a g^* , ktorý nie je distribučne chaotický. Možno postupovať nasledovným spôsobom:

1. zvolíme ľubovoľné distribučne chaotické funkcie f a g ,
2. pre f a g nájdeme také ε^* , aby pre obidve funkcie platila implikácia v (4.72),
3. pre ε^* podľa Vety 4.15 skonštruujeme funkcie f^* a g^* tak, že systém generovaný týmito funkciami nebude distribučne chaotický.

Zároveň ale platí, že $d(f, f^*) < \varepsilon^*$ a $d(g, g^*) < \varepsilon^*$, takže podľa implikácie v (4.72) musia byť funkcie f^* a g^* distribučne chaotické. V tomto prípade nám teda náhodnosť dokáže akosi ‘odstrániť’ chaos.

Veta 4.15 hovorí, že dvojice spojitých funkcií (f, g) , ktoré generujú nechaotické systémy sú husté v priestore $C(I, I) \times C(I, I)$. V nasledujúcej vete ukážeme, že to platí aj pre dvojice, ktoré generujú chaotické systémy - teda podobne ako v deterministických systémoch vieme ľubovoľne malou zmenou dostať aj z nechaotického systému systém chaotický.

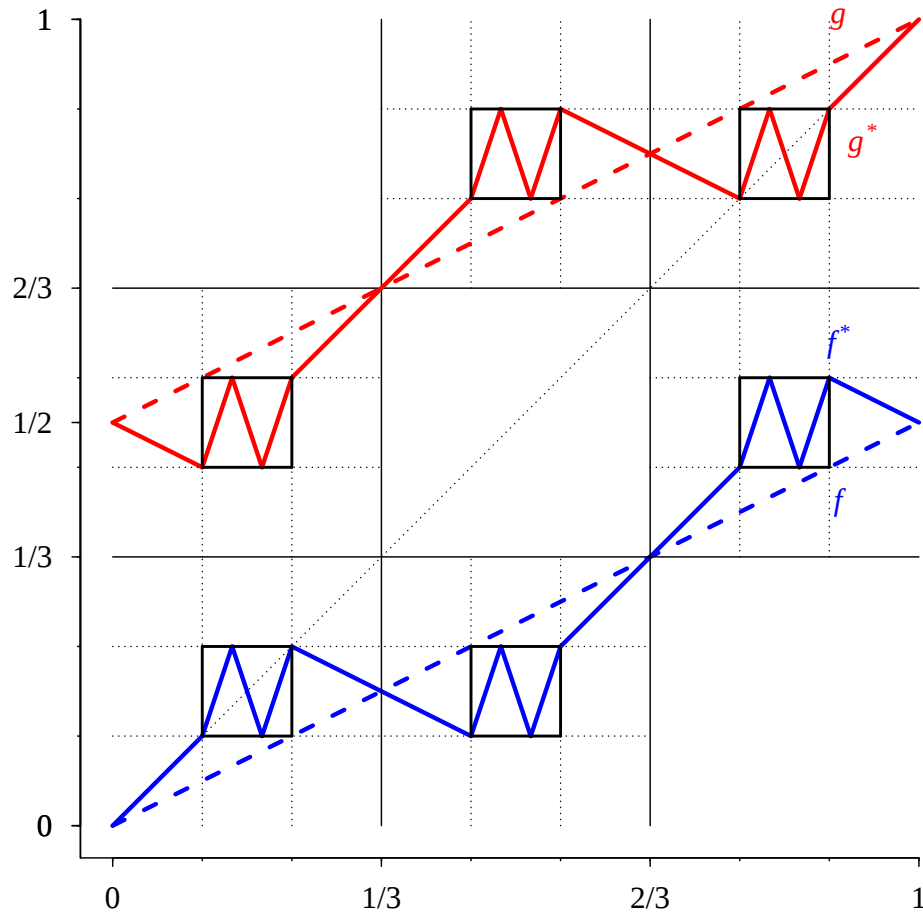
Veta 4.16. *Nech $f, g : I \rightarrow I$ sú ľubovoľné spojité funkcie. Potom pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existujú také spojité funkcie $f^*, g^* : I \rightarrow I$, že platí $d(f, f^*) < \varepsilon$, $d(g, g^*) < \varepsilon$ a náhodný dynamický systém generovaný funkciami f^* a g^* je chaotický.*

Dôkaz. Pre jednoduchosť dôkaz opäť urobíme iba pre interval $[0, 1]$.

Funkcie f, g sú spojité na intervale, a teda sú aj rovnomerne spojité. K danému ε teda existuje také $\delta > 0$, že

$$|x - y| < \delta \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon \wedge |g(x) - g(y)| < \varepsilon) \quad (4.73)$$

pre každé $x, y \in [0, 1]$. Zvoľme prirodzené číslo n tak, aby platilo $\frac{1}{3^n} < \delta$ a zároveň $\frac{2}{3^n} < \varepsilon$. Idea je podobná ako vo Vete 4.15 - rozdiel je v tom, že namiesto konštantných častí



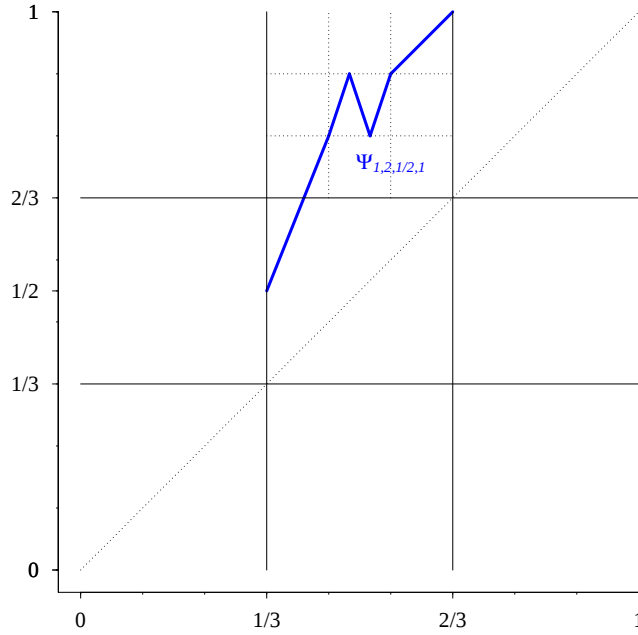
Obr. 4.8: Funkcie f^* a g^* ak $f(x) = \frac{1}{2}x$, $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ a ε je dostatočne veľké.

na intervaloch I_k do funkcií f a g zakomponujeme nejakú pevnú chaotickú funkciu. Pre funkcie $f(x) = \frac{1}{2}x$ a $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ je táto idea ilustrovaná na Obr. 4.8. Ďalej budeme pracovať s trojkovým zápisom čísel z intervalu $[0, 1]$. Začneme s niektorými označeniami, resp. faktami:

- pre $i = 0, 1, \dots, 3^n - 1$ bude r_i označovať takú konečnú postupnosť dĺžky n , pre ktorú platí, že $r_i 0^\infty$ je trojkový zápis čísla $\frac{i}{3^n}$.
- $h : \left[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{2}{3^{n+1}}\right] \rightarrow \left[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{2}{3^{n+1}}\right]$ bude označovať funkciu definovanú predpisom

$$h(x) = \begin{cases} 3x - \frac{6}{3^{n+2}} & \text{ak } x \in \left[\frac{3}{3^{n+2}}, \frac{4}{3^{n+2}}\right], \\ -3x + \frac{18}{3^{n+2}} & \text{ak } x \in \left[\frac{4}{3^{n+2}}, \frac{5}{3^{n+2}}\right], \\ 3x - \frac{12}{3^{n+2}} & \text{ak } x \in \left[\frac{5}{3^{n+2}}, \frac{6}{3^{n+2}}\right] \end{cases} \quad (4.74)$$

(pre $n = 1$ je funkcia h na obrázku v ľavom dolnom rohu na intervale $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$),

Obr. 4.9: Funkcia $\Psi_{1,2,\frac{1}{2},1}$ pre $n = 1$.

- v trojkovej sústave platí, že čísla z intervalu $\left[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{2}{3^{n+1}}\right]$ majú tvar $0^n 1s$, kde s je postupnosť čísel 0,1 a 2,
- pre funkciu h v trojkovej sústave platí
 - ◊ $h(0^n 10s) = 0^n 1s$,
 - ◊ $h(0^n 11s) = 0^n 1\bar{s}$,
 - ◊ $h(0^n 12s) = 0^n 1s$ (ide teda o posunutie s tým rozdielom, že ignorujeme prvých $n + 1$ pozícií),
- pre $i, j \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\}$ a $a, b \in [0, 1]$ bude $\Psi_{i,j,a,b}$ označovať funkciu $\Psi_{i,j,a,b} : \left[\frac{i}{3^n}, \frac{i+1}{3^n}\right] \rightarrow \left[\frac{i}{3^n}, \frac{i+1}{3^n}\right]$ definovanú predpisom

$$\Psi_{i,j,a,b} = \begin{cases} a & \text{ak } x = \frac{i}{3^n}, \\ h\left(x - \frac{i}{3^n}\right) + \frac{j}{3^n} & \text{ak } x \in \left[\frac{3i+1}{3^{n+1}}, \frac{3i+2}{3^{n+1}}\right], \\ b & \text{ak } x = \frac{i+1}{3^n}, \end{cases} \quad (4.75)$$

a na intervaloch $\left[\frac{3i}{3^{n+1}}, \frac{3i+1}{3^{n+1}}\right]$ a $\left[\frac{3i+2}{3^{n+1}}, \frac{3i+3}{3^{n+1}}\right]$ túto funkciu dodefinujeme lineárne.

Napr. pre $n = 1$ je funkcia $\Psi_{1,2,\frac{1}{2},1}$ zobrazená na Obr 4.9.

Pre $i = 0, 1, 2, \dots, 3^n - 1$ definujeme na intervale $\left[\frac{i}{3^n}, \frac{i+1}{3^n}\right]$ funkciu f^* ako $\Psi_{i,j,f\left(\frac{i}{3^N}\right),f\left(\frac{i+1}{3^N}\right)}$, pričom j určíme nasledovným spôsobom:

1. Označme

$$\begin{aligned} m &\equiv \min_{x \in [\frac{i}{3^n}, \frac{i+1}{3^n}]} f(x), \\ M &\equiv \max_{x \in [\frac{i}{3^n}, \frac{i+1}{3^n}]} f(x). \end{aligned}$$

Zjavne platí $M - m < \varepsilon$ (z rovnomernej spojitosti, pretože šírka intervalu je menej ako δ).

2. Ak existuje také j , že $m \leq \frac{j}{3^n} < \frac{j+1}{3^n} \leq M$, potom zvolíme toto j - v takom prípade platí, že $m \leq \Psi_{i,j,f(\frac{i}{3^n}),f(\frac{i+1}{3^n})} \leq M$, a teda $d(f, f^*) < \varepsilon$.
3. Ak také j neexistuje, potom musí existovať také $j \in \{0, 1, \dots, 3^n - 2\}$, že platí $\frac{j}{3^n} \leq m \leq M \leq \frac{j+2}{3^n}$ a zvolíme toto. V takom prípade aj f aj f^* ležia medzi $\frac{j}{3^n}$ a $\frac{j+2}{3^n}$, teda $d(f, f^*) < \frac{j+2}{3^n} - \frac{j}{3^n} = \frac{2}{3^n} < \varepsilon$.

Analogicky definujeme aj funkciu g^* . Takto definované funkcie sú zjavne spojité.

Na intervale $[\frac{3i+1}{3^{n+1}}, \frac{3i+2}{3^{n+1}}]$ ($i = 0, 1, \dots, 3^n - 1$) má funkcia f^* tvar

$$h\left(x - \frac{i}{3^n}\right) + \frac{j_f}{3^n}, \quad (4.76)$$

kde $j_f = j_f(i)$ je nejaké číslo z množiny $\{0, 1, \dots, 3^n - 1\}$. V trojkovej sústave majú čísla z intervalu $[\frac{3i+1}{3^{n+1}}, \frac{3i+2}{3^{n+1}}]$ tvar $r_i 1s$ (lebo $\frac{3i+1}{3^{n+1}} = \frac{i}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$ má tvar $r_i 10^\infty$ a $\frac{3i+2}{3^{n+1}} = \frac{i}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}}$ má tvar $r_i 20^\infty = r_i 12^\infty$), a teda

$$h\left(x - \frac{i}{3^n}\right) + \frac{j_f}{3^n} = h(r_i 1s - r_i 10^\infty) + r_{j_f} 0^\infty = h(0^n 1s) + r_{j_f} 0^\infty. \quad (4.77)$$

Takmer rovnako sa na tomto intervale správa funkcia g^* , tým pádom platí

- $f^*(r_i 10s) = r_{j_f} 1s$,
- $f^*(r_i 11s) = r_{j_f} 1\bar{s}$,
- $f^*(r_i 12s) = r_{j_f} 1s$,
- $g^*(r_i 10s) = r_{j_g} 1s$,
- $g^*(r_i 11s) = r_{j_g} 1\bar{s}$,
- $g^*(r_i 12s) = r_{j_g} 1s$.

Potom pre čísla $y = 0^n 10^\infty$ a $x = 0^n 10^{k_1} 2^{k_2} 0^{k_3} 2^{k_4} \dots$ ($\{k_l\}_{l=0}^\infty$ je postupnosť prirodzených čísel s vlastnosťou $\frac{k_1 + \dots + k_l}{k_{l+1}} \searrow 0$) platí, že $F_{xy}(t) = 0$ a $F_{xy}^*(t) = 1$ pre $t \in (0, \frac{1}{3^{n+1}})$, a teda systém je distribučne chaotický (analogicky ako v deterministickom prípade, viď Príklad 1.24). $\square$

4.5 Poznámky k distribučnému chaosu

4.5.1 Iné typy náhodných dynamických systémov

V tejto kapitole sme pracovali iba s náhodným dynamickým systémom generovaným dvomi zobrazeniami. Distribučný chaos ale možno definovať aj pre systémy generované ľubovoľným (aj nespočítateľným) množstvom zobrazení. Takisto nie je problém s Tvrdením 4.3. V prípade zvyšných výsledkov možno dôkazy relatívne jednoducho modifikovať pre prípady systémov generovaných konečným množstvom zobrazení. V prípade, že máme nekonečne veľa zobrazení, tak nemusí nutne platiť, že dané výsledky neplatia, avšak vo viacerých prípadoch nemožno aplikovať uvedené postupy.

4.5.2 Typy distribučného chaosu

Pripomeňme, že v deterministických systémoch existujú tri typy distribučného chaosu

- DC1 - ak $\exists x, y \in X, \exists \delta > 0 : F_{xy}(t) = 0 \ \forall t \in (0, \delta)$ a $F_{xy}^*(t) = 1 \ \forall t > 0$,
- DC2 - ak $\exists x, y \in X, \exists \delta > 0 : F_{xy}(t) < 1 \ \forall t \in (0, \delta)$ a $F_{xy}^*(t) = 1 \ \forall t > 0$,
- DC3 - ak $\exists x, y \in X, \exists 0 < a < b : F_{xy}(t) < F_{xy}^*(t) \ \forall t \in (a, b)$,

pričom pri spojitých zobrazeniach na intervale sú tieto tri typy ekvivalentné. Rovnako môžeme tieto tri typy definovať aj v náhodných dynamických systémoch. Implikácie

$$DC1 \Rightarrow DC2 \Rightarrow DC3 \quad (4.78)$$

triviálne platia aj v takýchto systémoch, avšak minimálne implikácia $DC2 \Rightarrow DC1$ už neplatí. Ako kontrapríklad možno vziať Príklad 4.9. V Tvrdení 4.10 sme totiž ukázali, že pre každé $x, y \in [0, 1]$ platí

$$F_{xy}(t) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P(|x_i - y_i| < t) \geq \left(\frac{1-p}{p} \right)^k \quad (4.79)$$

pre $t \in (3^{-k}, 3^{-k+1}]$, kde $k = 1, 2, \dots$. Pre ľubovoľné $\delta > 0$ preto vieme nájsť také prirodzené číslo k , že $3^{-k} < \delta$, a teda nemôže platiť $F_{xy}(t) = 0$ pre každé $t \in (0, \delta)$. Podmienka pre DC2 je ale zjavne splnená pre $y = 0$ a ľubovoľné $x^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ z Tvrdenia 4.11.

Príklad na systém, ktorý by spĺňal iba podmienku pre DC3 sa nám zatiaľ nepodarilo nájsť.

Poznámka. Ako príklad na systém, v ktorom je aj DC1 možno zobrať Príklad 4.14.

4.5.3 Nechaotický systém z dvoch premiešavajúcich zobrazení

Zatiaľ sa nám nepodarilo nájsť všeobecnejšie podmienky na to, aby bol systém distribučne chaotický. Prirodzená otázka by bola, či chaotickosť zobrazení, ktorými je systém generovaný, nezabezpečí chaotickosť celého náhodného dynamického systému. V časti 4.4 sme ale implicitne ukázali, že z dvoch distribučne chaotických zobrazení možno zostrojiť náhodný dynamický systém, ktorý nie je distribučne chaotický. V nasledujúcom príklade ukážeme, že dokonca ani kombinácia dvoch premiešavajúcich zobrazení nemusí zabezpečiť, že výsledný systém bude distribučne chaotický.

Príklad 4.17. Uvažujme zobrazenia $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definované predpismi

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{ak } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ -\frac{1}{8}x + \frac{33}{32} & \text{ak } x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ \frac{1}{8}x + \frac{29}{32} & \text{ak } x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \\ -4x + 4 & \text{ak } x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right], \end{cases} \quad (4.80)$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x + \frac{15}{32} & \text{ak } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ 4x - \frac{1}{2} & \text{ak } x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right], \\ -4x + \frac{5}{2} & \text{ak } x \in \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right], \\ 4x - \frac{5}{2} & \text{ak } x \in \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right], \\ \frac{1}{8}x + \frac{13}{32} & \text{ak } x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases} \quad (4.81)$$

a náhodný dynamický systém

$$x_{n+1} = \begin{cases} f(x_n) & \text{s pravdepodobnosťou } \frac{1}{2}, \\ g(x_n) & \text{s pravdepodobnosťou } \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.82)$$

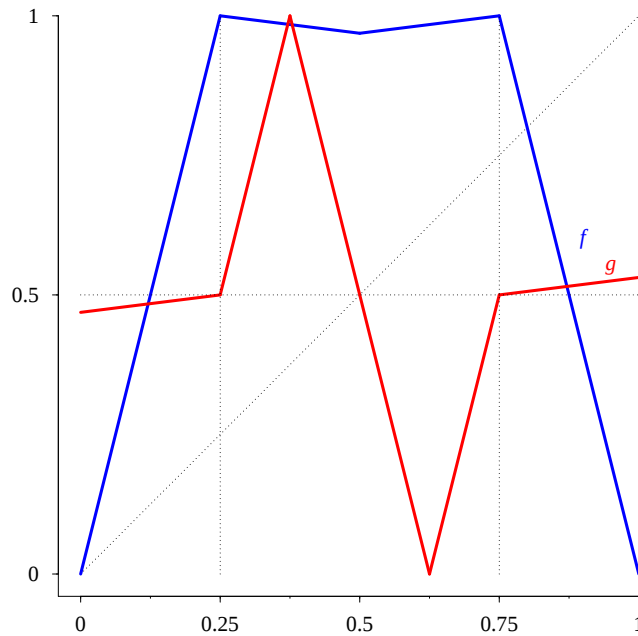
V tomto príklade budeme pracovať s binárnym zápisom čísel z intervalu $[0, 1]$. Ukážeme, že

1. zobrazenie f je premiešavajúce,
2. zobrazenie g je premiešavajúce,
3. náhodný dynamický systém (4.82) nie je distribučne chaotický.

1. Zobrazenie f je premiešavajúce.

Nech s je ľubovoľná postupnosť núl a jednotiek. V binárnej reprezentácii platí

- $f(00s) = s$,

Obr. 4.10: Funkcie f a g z Príkladu 4.17.

- $f(01s) = 11111\bar{s}$,
- $f(10s) = 11111s$,
- $f(11s) = \bar{s}$.

Toto zobrazenie je podobné posunutiu postupnosti, pretože

- $00s \rightarrow s$ (posunutie o dve pozície),
- $01s \rightarrow 11111\bar{s} \rightarrow 000s \rightarrow 0s$ (posunutie o jednu pozíciu),
- $10s \rightarrow 11111s \rightarrow 000\bar{s} \rightarrow 0\bar{s}$ (posunutie o jednu pozíciu),
- $11s \rightarrow \bar{s}$ (posunutie o dve pozície).

Lema 4.18. Pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ a ľubovoľné $x \in [0, 1]$ existuje také prirodzené číslo n , že $f^n(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = [0, 1]$ (a teda f je premiešavajúce - viď Príklad 1.24).

Dôkaz. Nech $y \in [0, 1]$ je ľubovoľné a nech binárny zápis tohoto čísla je s_1 . Ukážeme, že v ε okolí bodu x existuje bod x^* taký, že $f^n(x^*) = y$. Bod x^* vieme v binárnom zápise skonštruovať takým spôsobom, že prvých k pozícií bude rovnakých ako v binárnom zápise x (k volíme tak, aby bolo zabezpečené, že x^* bude v ε okolí bodu x). Zvyšok binárneho zápisu potom doplníme podľa situácie jednou z postupností $s_1, \bar{s}_1, 0s_1, 0\bar{s}_1, 1s_1, 1\bar{s}_1$. Napríklad ak $x = \frac{13}{32} = 011010000\dots$ a $\varepsilon = \frac{1}{32}$, potom x^*

skonštruujeme tak, že k postupnosti 01101 pridáme $1\bar{s}_1$, (t.j. $x^* = 011011\bar{s}$), pretože

$$\begin{aligned} 011011\bar{s}_1 &\rightarrow 111110100s_1 \rightarrow 0001011\bar{s}_1 \rightarrow 01011\bar{s}_1 \rightarrow 1111100s_1 \rightarrow \\ &\rightarrow 000011\bar{s}_1 \rightarrow 0011\bar{s}_1 \rightarrow 11\bar{s}_1 \rightarrow s_1. \end{aligned}$$

V tomto prípade máme teda $n = 8$ (a to závisí iba od x a ε). Takúto konštrukciu vieme urobiť pre ľubovoľné $y \in [0, 1]$, a teda nutne $f^n(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = [0, 1]$. $\square$

2. Zobrazenie g je premiešavajúce.

V binárnom zápise pre toto zobrazenie platí

- $g(00s) = 01111s$,
- $g(010s) = 1s$,
- $g(011s) = 1\bar{s}$,
- $g(100s) = 0\bar{s}$,
- $g(101s) = 0s$,
- $g(11s) = 10000s$.

Opäť je to podobné posunutiu, pretože

- $00s \rightarrow 01111s \rightarrow 100\bar{s} \rightarrow 0s$ (posunutie o jednu pozíciu),
- $11s \rightarrow 10000s \rightarrow 011\bar{s} \rightarrow 1s$ (posunutie o jednu pozíciu),
- zvyšné situácie sú priamo posunutie o dve pozície.

Rovnakým spôsobom ako v prípade zobrazenia f sa ukáže, že toto stačí na to, aby zobrazenie g bolo premiešavajúce.

3. Náhodný dynamický systém (4.82) nie je distribučne chaotický.

Ukážeme, že pre ľubovoľné $x, y \in [0, 1]$ a pre ľubovoľné $t > 0$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|x_n - y_n| < t) = 1, \quad (4.83)$$

čo je postačujúca podmienka pre nulovú mieru chaosu.

Nech je dané ľubovoľné pevné $x, y \in [0, 1]$, $t > 0$ a $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že existuje také $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre každé $n \geq n_0$ platí $P(|x_n - y_n| \geq t) < \varepsilon$ (z toho už vyplýva limita (4.83)).

Označme $U_n = U(x_n, y_n)$ - pripomeňme, že $U(x_n, y_n)$ označuje poslednú pozíciu v binárnom zápise, na ktorej sa ešte x_n a y_n nelíši (pri nejednoznačnosti binárnych zápisov volíme také, aby $U(x_n, y_n)$ bolo maximálne možné). Zvoľme $k \in \mathbb{N}$ také, aby $(U_n \geq k)$ implikovalo $|x_n - y_n| < t$ (to vieme, pretože, $(U_n \geq l) \Rightarrow |x_n - y_n| \leq 2^{-l}$).

Lema 4.19. *Existuje také prirodzené číslo m , že*

$$P(U_{n+i} < k \text{ pre nejaké prirodzené číslo } i | U_n \geq m + k) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.84)$$

pre ľubovoľné prirodzené číslo n .

Táto lema hovorí, že ak sú body x_n a y_n už dostatočne blízko (v binárnom zápise majú spoločných prvých $m + k$ pozícií), potom pravdepodobnosť, že ich vzdialenosť bude ešte niekedy väčšia ako t je menej ako $\frac{\varepsilon}{2}$.

Dôkaz. Ak $U_n \geq 2$, potom platí, že

$$U_{n+1} = \begin{cases} U_n + 3 & \text{s pravdepodobnosťou } \frac{1}{2}, \\ U_n - 2 & \text{s pravdepodobnosťou } \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.85)$$

To je ale analogické s náhodnou prechádzkou z Tvrdenia 2.9 a podľa tohto tvrdenia také prirodzené číslo m existuje. $\square$

Lema 4.20. *Existuje také $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre každé $n \geq n_0$ platí*

$$P(U_i \geq m + k \text{ pre nejaké } i \in \{0, 1, \dots, n\}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.86)$$

Dôkaz. Pravdepodobnosť (4.86) s rastúcim n zjavne narastá, takže stačí nájsť jedno také n_0 . Pre $i = 0, 1, \dots$ označme $\mathcal{S}_i$ najmenšiu σ -algebru generovanú náhodným vektorom $(U_0, U_1, \dots, U_i)$. Položme $K \equiv \lceil \frac{m+k}{3} \rceil$.

Idea dôkazu je nasledovná - pre ľubovoľný „aktuálny“ stav a ľubovoľnú „minulosť“ (t.j. ľubovoľné $U_i, U_{i-1}, \dots, U_0$) ukážeme, že po nejakom pevnom čase $(K + 3)$ bude U_{i+K+3} aspoň $m + k$ s nenulovou pravdepodobnosťou. Táto pravdepodobnosť bude navyše zdola ohraničená nejakým kladným číslom. Potom ukážeme, že to už stačí na dokázanie tvrdenia - zjednodušene povedané, ak nejaká udalosť „pravidelne“ môže nastať, tak po dostatočne dlhom čase skoro iste niekedy nastane.

Pre ľubovoľné $i \in \{0, 1, \dots\}$ a ľubovoľné $A \in \mathcal{S}_i$ (ľubovoľnú udalosť týkajúcu sa náhodných premenných $U_0, \dots, U_i$) platí

$$P(U_{i+K} \geq m + k | (U_i \geq 2) \cap A) \geq \frac{1}{2^K} > 0, \quad (4.87)$$

pretože ak x_i a y_i začínajú dvojicou

- 00, tak stačí postupne K -krát aplikovať funkcie $g, f, g, f, \dots$ (pri každom kroku počet spoločných cifier narastie o 3)

$$00 \dots \xrightarrow{g} 01111 \dots \xrightarrow{f} 11111000 \dots \xrightarrow{g} \dots, \quad (4.88)$$

- 01, tak stačí postupne K -krát aplikovať funkcie $f, g, f, g, \dots$

$$01 \dots \xrightarrow{f} 11111 \dots \xrightarrow{g} 10000111 \dots \xrightarrow{f} \dots, \quad (4.89)$$

- 10 - analogicky ako 01,
- 11 - analogicky ako 00.

Ďalej ukážeme, že pre $i = 0, 1, \dots$ a ľubovoľné $A \in \mathcal{S}_i$ je

$$P(U_{i+3} \geq 2|A) \geq \frac{1}{2^3} > 0. \quad (4.90)$$

Ak sú prvé dve pozície binárneho zápisu čísel x_i a y_i

- rovnaké, tak stačí zopakovať trikrát postup z (4.88) alebo (4.89),
- 01 a 10, tak stačí aplikovať funkcie f, g, f

$$\begin{array}{ccccccc} 01 \dots & \xrightarrow{f} & 11 \dots & \xrightarrow{g} & 10 \dots & \xrightarrow{f} & 11 \dots \\ 10 \dots & & 11 \dots & & 10 \dots & & 11 \dots \end{array}$$

- 00 a 11, tak funkcie g, f, g

$$\begin{array}{ccccccc} 00 \dots & \xrightarrow{g} & 01 \dots & \xrightarrow{f} & 11 \dots & \xrightarrow{g} & 10 \dots \\ 11 \dots & & 10 \dots & & 11 \dots & & 10 \dots \end{array}$$

- 00/11 a 01/10, tak najprv zvolíme funkciu g - z 00/11 dostaneme 01111/10000, z 01/10 môžeme dostať ľubovoľný začiatok, ale po dvoch ďalších krokoch sa vieme vždy dopracovať k dvom rovnakým prvým pozíciám

$$\begin{array}{ccccccc} 01/10 \dots & \xrightarrow{g} & 01111/10000 & \xrightarrow{g} & 10/01 & \xrightarrow{f} & 11 \dots \\ 00/11 \dots & & 00 \dots & & 01 \dots & & 11 \dots \\ & \xrightarrow{g} & 01111/10000 & \xrightarrow{f} & 11 \dots & \xrightarrow{g} & 10 \dots \\ & & 01 \dots & & 11 \dots & & 10 \dots \\ & \xrightarrow{g} & 01111/10000 & \xrightarrow{f} & 11 \dots & \xrightarrow{g} & 10 \dots \\ & & 10 \dots & & 11 \dots & & 10 \dots \\ & \xrightarrow{g} & 01111/10000 & \xrightarrow{g} & 10/01 & \xrightarrow{f} & 11 \dots \\ & & 11 \dots & & 10 \dots & & 11 \dots \end{array}$$

Z (4.87) a (4.90) potom pre $i = 0, 1, \dots$ a $A \in \mathcal{S}_i$ máme

$$\begin{aligned} P(U_{i+K+3} \geq k+m|A) &\geq P((U_{i+K+3} \geq k+m) \cap (U_{i+3} \geq 2)|A) = \\ &= P(U_{i+K+3} \geq k+m|(U_{i+3} \geq 2) \cap A) \cdot P(U_{i+3} \geq 2|A) \geq \\ &\geq \frac{1}{2^K} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^{K+3}}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Zvoľme prirodzené číslo l tak, aby platilo

$$\left(1 - \frac{1}{2^{K+3}}\right)^l < \frac{\varepsilon}{2}$$

a pre prehľadnosť ďalej zavedme nasledujúce označenia:

- $D_i \equiv (U_i < k + m)$ pre $i = 0, 1, \dots$,
- $E_j \equiv D_{(K+3)} \cap D_{2(K+3)} \cap \dots \cap D_{j(K+3)} = E_{j-1} \cap D_{j(K+3)}$ pre $j = 1, 2, \dots, l$.

Pre tieto náhodné udalosti zjavne platí

- $D_i \in \mathcal{S}_i$, $i = 0, 1, \dots$,
- $E_j \in \mathcal{S}_{j(K+3)}$, $j = 0, 1, \dots, l$,
- $P(D_{j(K+3)}|E_{j-1}) < 1 - \frac{1}{2^{K+3}}$, $j = 2, \dots, l$ (z (4.91)).

Pre $n_0 \equiv l(K+3)$ potom máme

$$\begin{aligned} P(U_i \geq m + k \text{ pre nejaké } i \in \{0, 1, \dots, n_0\}) &= \\ &= 1 - P(U_i < m + k \text{ pre všetky } i \in \{0, 1, \dots, n_0\}) = 1 - P(D_0 \cap D_1 \cap \dots \cap D_{l(K+3)}) \geq \\ &\geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

pretože

$$\begin{aligned} P(D_0 \cap D_1 \cap \dots \cap D_{l(K+3)}) &= P(E_{l-1} \cap D_{l(K+3)}) = P(D_{l(K+3)}|E_{l-1}) \cdot P(E_{l-1}) = \\ &= P(D_{l(K+3)}|E_{l-1}) \cdot P(D_{(l-1)(K+3)}|E_{l-2}) \cdot P(E_{l-2}) = \\ &= P(D_{l(K+3)}|E_{l-1}) \cdot \dots \cdot P(D_{2(K+3)}|E_1) \cdot P(E_1) = \\ &= P(D_{l(K+3)}|E_{l-1}) \cdot \dots \cdot P(D_{2(K+3)}|E_1) \cdot P(D_{(K+3)}) \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{2^{K+3}}\right)^l < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

□

Z týchto dvoch liem potom máme, že pre ľubovoľné $n \geq n_0$ (n_0 z predchádzajúcej lemy) máme

$$\begin{aligned} P(|x_n - y_n| \geq t) &\leq P(U_n < k) = \\ &= P((U_n < k) \wedge (U_i \geq m + k \text{ pre nejaké } i \in \{0, 1, \dots, n\})) + \\ &+ P((U_n < k) \wedge (U_i < m + k \text{ pre všetky } i \in \{0, 1, \dots, n\})) \leq \\ &\leq P(U_n < k | U_i \geq m + k \text{ pre nejaké } i \in \{0, 1, \dots, n\}) + \\ &+ P(U_i < m + k \text{ pre všetky } i \in \{0, 1, \dots, n\}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Kapitola 5

Topologická entropia

Pojem topologickej entropie pre náhodné dynamické systémy je už relatívne starý - venovala sa jej už napr. kniha [21] z roku 1986. V tejto krátkej kapitole zameriame na niektoré výsledky, ktoré sme v literatúre nenašli. Pre jednoduchosť budeme opäť pracovať iba so systémom

$$x_{n+1} = \begin{cases} f(x_n) & \text{s pravdepodobnosťou } p, \\ g(x_n) & \text{s pravdepodobnosťou } 1 - p, \end{cases} \quad (5.1)$$

kde f a g sú spojité funkcie na nejakom uzavretom intervale I , avšak uvedené výsledky možno aplikovať na ľubovoľný náhodný dynamický systém.

Na úvod tejto kapitoly ukážeme ako možno definovať topologickú entropiu v systéme 5.1 (budeme postupovať podľa [21]).

Pripomeňme, že písmenom Ω označujeme množinu $\{f, g\}^\infty$, teda množinu všetkých možných postupností funkcií f a g . Písmenom σ budeme označovať posunutie na tejto množine, formálne $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$,

$$\sigma(\omega) = \sigma((\omega_1, \omega_2, \dots)) = (\omega_2, \omega_3, \dots), \quad (5.2)$$

kde $\omega_i \in \{f, g\}$, $i = 1, 2, \dots$

Uvažujme nejaké otvorené pokrytie $\mathcal{A}$ intervalu I . Pripomeňme, že $N(\mathcal{A})$ označuje počet množín v konečnom podpokrytí pokrytia $\mathcal{A}$ s najmenšou možnou kardinalitou a $H(\mathcal{A}) \equiv \log N(\mathcal{A})$. Pre $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$ a prirodzené číslo n budeme symbolom $\mathcal{A}^{\omega, n}$ označovať pokrytie

$$\mathcal{A}^{\omega, n} = \mathcal{A} \vee \omega_1^{-1}(\mathcal{A}) \vee (\omega_2 \circ \omega_1)^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee (\omega_{n-1} \circ \dots \circ \omega_1)^{-1}(\mathcal{A}). \quad (5.3)$$

Lema 5.1. *Pre otvorené pokrytia $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ intervalu I platí $H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq H(\mathcal{A}) + H(\mathcal{B})$.*

Lema 5.2. *Pre otvorené pokrytie $\mathcal{A}$ a spojité funkciu $\varphi : I \rightarrow I$ platí*

$$H(\varphi^{-1}(\mathcal{A})) \leq H(\mathcal{A}). \quad (5.4)$$

Veta 5.3. *Nech T je mieru zachováavajúca transformácia na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a nech $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ je postupnosť takých integrovateľných funkcií z Ω do $\mathbb{R}$, že platí $\psi_{n+m}(\omega) \leq \psi_n(\omega) + \psi_m(T^n(\omega))$. Potom skoro všade existuje limita*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_n(\omega)}{n} \equiv \psi(\omega). \quad (5.5)$$

Ak navyše T je ergodická transformácia, potom $\psi(\omega)$ je konštanta.

Lemy 5.1 a 5.2 možno nájsť napr. v [21], Veta 5.3 („Kingman’s subadditive ergodic theorem”) je z [23]. Postup dôkazu nasledujúcej vety je prebratý z [21].

Veta 5.4. *Nech $\mathcal{A}$ je otvorené pokrytie intervalu I . Potom pre skoro všetky $\omega \in \Omega$ existuje (a je rovnaká) limita*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{A}^{\omega, n}), \quad (5.6)$$

budeme ju označovať $h(f, g; \mathcal{A})$.

Dôkaz. Nech $\psi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia daná predpisom $\psi_n(\omega) = H(\mathcal{A}^{\omega, n})$, $n = 1, 2, \dots$. Platí

$$\begin{aligned} \psi_{n+m}(\omega) &= H(\mathcal{A} \vee \omega_1^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee (\omega_{n-1} \circ \dots \circ \omega_1)^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \\ &\quad \dots \vee (\omega_{n+m-1} \circ \dots \circ \omega_1)^{-1}(\mathcal{A})) \leq \\ &\quad (\text{Lema 5.1}) \\ &\leq \psi_n(\omega) + H((\omega_n \circ \dots \circ \omega_1)^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \\ &\quad \dots \vee (\omega_{n+m-1} \circ \dots \circ \omega_1)^{-1}(\mathcal{A})) \leq \\ &\quad (\text{Lema 5.2 pre } \varphi = \omega_n \circ \dots \circ \omega_1) \\ &\leq \psi_n(\omega) + H(\mathcal{A} \vee \omega_{n+1}^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee (\omega_{n+m-1} \circ \dots \circ \omega_{n+1})^{-1}(\mathcal{A})) = \\ &= \psi_n(\omega) + H(\mathcal{A}^{\sigma^n(\omega), m}) = \psi_n(\omega) + \psi_m(\sigma^n(\omega)). \end{aligned}$$

Posunutie σ je triviálne ergodická a mieru zachováavajúca transformácia na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (pripomínáme, že $\mathcal{F}$ je cylindrická σ -algebra a P je súčinová pravdepodobnosť). Navyše v prípade iba dvoch zobrazení je $\psi_n(\omega)$ zjavne integrovateľná pre každé $n \in \mathbb{N}$ a pre každé $\omega \in \Omega$ (je to stredná hodnota diskkrétnej náhodnej premennej s konečným nosičom). Sú teda splnené všetky predpoklady Vety 5.3, a teda skoro všade existuje limita (5.6) a je konštantná (lebo σ je ergodická transformácia). $\square$

Topologickú entropiu $h(f, g)$ takéhoto systému potom definujeme ako

$$\sup\{h(f, g; \mathcal{A}), \mathcal{A} \text{ je otvorené pokrytie } I\}. \quad (5.7)$$

Zjavne skoro všade v Ω platí aj

$$h(f, g) = \sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{A}^{\omega, n}), \mathcal{A} \text{ je otvorené pokrytie } I \right\}, \quad (5.8)$$

t.j. topologická entropia je rovnaká pre skoro všetky neautonómne systémy generované zobrazeniami f a g (ktoré sú dané konkrétnym ω) a je rovná číslu $h(f, g)$. Tento úzky súvis s neautonómnymi systémami možno využiť v nasledovných výsledkoch.

Veta 5.5. *Nech f a g majú rovnakú striktnú p -podkovu (t.j. existujú po dvoch disjunktné, uzavreté intervaly $J_1, J_2, \dots, J_p$, že $J_1 \cup \dots \cup J_p \subseteq f(J_i)$ pre každé $i = 1, 2, \dots, p$ a rovnako $J_1 \cup \dots \cup J_p \subseteq g(J_i)$ pre každé $i = 1, 2, \dots, p$). Potom $h(f, g) \geq \log p$.*

Dôkaz. Konkrétne $\omega \in \Omega$ nám definuje neautonómny systém generovaný funkciami, ktoré majú rovnakú striktnú p -podkovu. Každý taký systém má ale topologickú entropiu aspoň $\log p$ (viď [25]), a teda aj $h(f, g) \geq \log p$. $\square$

Veta 5.6. *Nech funkcie f a g sú monotónne na I . Potom $h(f, g) = 0$.*

Dôkaz. Ľubovoľný neautonómny systém daný prvkom $\omega \in \Omega$ má nulovú topologickú entropiu (viď [25]), teda aj $h(f, g) = 0$. $\square$

Podobne ako v deterministických systémoch, aj v náhodných dynamických systémoch sa vieme k topologickej entropii dostať pomocou separovaných množín a sietí. Označme d_n^ω metriku na I definovanú predpisom

$$d_n^\omega(x, y) \equiv \max_{k=0, \dots, n-1} |x_k(\omega) - y_k(\omega)|. \quad (5.9)$$

Nech $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ a $\omega \in \Omega$. Množinu E budeme nazývať (n, ε, ω) -separovanou, ak pre ľubovoľné dva rôzne body $x, y \in E$ platí $d_n^\omega(x, y) > \varepsilon$. Symbolom $sep(n, \varepsilon, \omega)$ budeme označovať kardinalitu najväčšej nožnej (n, ε, ω) -separovanej množiny. Množinu F budeme nazývať (n, ε, ω) -sieť, ak pre ľubovoľné $x \in I$ existuje také $y \in F$, že $d_n^\omega(x, y) \leq \varepsilon$. Symbolom $span(n, \varepsilon, \omega)$ budeme označovať kardinalitu najmenšej nožnej (n, ε, ω) -sieť.

Veta 5.7. *Skoro všade v Ω platí*

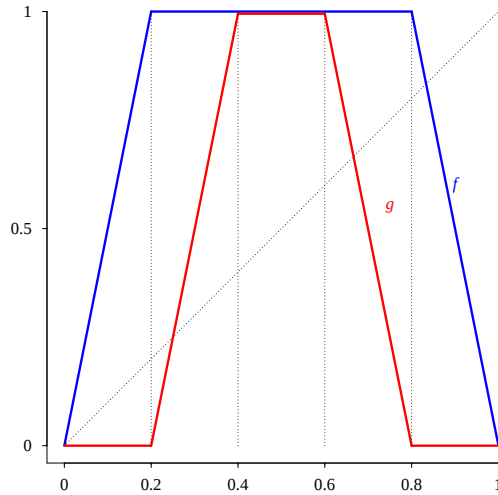
$$\begin{aligned} h(f, g) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log sep(n, \varepsilon, \omega), \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log sep(n, \varepsilon, \omega), \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log span(n, \varepsilon, \omega), \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log span(n, \varepsilon, \omega). \end{aligned}$$

Dôkaz možno nájsť v [21].

Veta 5.8. *Nech funkcie f a g sú Lipschitzovsky spojité, t.j. existujú také čísla λ_1 a λ_2 , že pre ľubovoľné $x, y \in I$ platí*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \lambda_1 |x - y|, \\ |g(x) - g(y)| &\leq \lambda_2 |x - y|. \end{aligned}$$

Označme $\lambda \equiv \max(\lambda_1, \lambda_2)$. Potom $h(f, g) \leq \log \lambda$.

Obr. 5.1: Funkcie f a g z Príkladu 5.9.

Dôkaz. Nech $\varepsilon > 0$ a n je prirodzené číslo. Pre ľubovoľné $\omega \in \Omega$ možno zopakovať postup dôkazu Tvrdenia 1.20. Každý neautonómny systém daný prvkom ω má teda topologickú entropiu nanajvýš $\log \lambda$, teda aj $h(f, g) \leq \log \lambda$. $\square$

V deterministických systémoch je kladná topologická entropia ekvivalentná s distribučným chaosom. V nasledujúcom príklade ukážeme, že v prípade náhodných dynamických systémov táto ekvivalencia neplatí.

Príklad 5.9. Uvažujme funkcie $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definované predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{5}], \\ 1 & \text{ak } x \in (\frac{1}{5}, \frac{4}{5}], \\ -5x + 5 & \text{ak } x \in (\frac{4}{5}, 1], \end{cases} \quad (5.10)$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{5}], \\ 5x - 1 & \text{ak } x \in (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}], \\ 1 & \text{ak } x \in (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}], \\ -5x + 4 & \text{ak } x \in (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}], \\ 0 & \text{ak } x \in (\frac{4}{5}, 1]. \end{cases} \quad (5.11)$$

$J_1 = [0, \frac{2}{5}]$ a $J_2 = [\frac{3}{5}, 1]$ je zjavne spoločná striktná podkova, čiže topologická entropia systému (5.1) je aspoň $\log 2$. Zároveň ale zjavne $x_n(\omega) \rightarrow 0$ skoro iste pre ľubovoľné x , takže miera chaosu je podľa Vety 4.7 nulová. Kladná topologická entropia teda neimplikuje distribučný chaos. Opačnú implikáciu sa nám zatiaľ nepodarilo dokázať ani vyvrátiť.

Na záver tejto kapitoly uvedieme dva príklady systémov, v ktorých vieme topologickú entropiu vypočítať.

Príklad 5.10. Uvažujme funkcie $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dané predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{ak } x < \frac{1}{3}, \\ -3x + 2 & \text{ak } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 3x - 2 & \text{ak } x > \frac{2}{3}. \end{cases} \quad (5.12)$$

a $g(x) = x$. Pripomeňme, že podľa Lemy 1.25 pre funkciu f platí

$$3^{\frac{n-m}{m}(m-1)} \leq \text{sep}(n, \varepsilon, f) \leq 3^{n+2m} + 1, \quad (5.13)$$

kde m, n sú prirodzené čísla a $\varepsilon = 3^{-m}$. V systéme (5.1) zjavne platí

$$\begin{aligned} \text{sep}(1, \varepsilon, \omega) &= \text{sep}(1, \varepsilon, f), \\ \text{sep}(2, \varepsilon, \omega) &= \begin{cases} \text{sep}(1, \varepsilon, f) & \text{ak } \omega_1 = g, \\ \text{sep}(2, \varepsilon, f) & \text{ak } \omega_1 = f, \end{cases} \\ \text{sep}(3, \varepsilon, \omega) &= \begin{cases} \text{sep}(1, \varepsilon, f) & \text{ak } \omega_1 = g \text{ a } \omega_2 = g, \\ \text{sep}(2, \varepsilon, f) & \text{ak } \omega_1 = f \text{ a } \omega_2 = g \text{ alebo } \omega_1 = g \text{ a } \omega_2 = f, \\ \text{sep}(3, \varepsilon, f) & \text{ak } \omega_1 = f \text{ a } \omega_2 = f, \end{cases} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Analogicky

$$\text{sep}(n, \varepsilon, \omega) = \text{sep}(X_{n-1}(\omega) + 1, \varepsilon, f), \quad (5.14)$$

kde $X_{n-1}(\omega)$ je počet výskytov funkcie f v prvých $n-1$ členoch ω (rovnako ako v 4.17), čo má zjavne binomické rozdelenie s parametrami $n-1$ a p . Platí teda

$$\begin{aligned} 3^{(X_{n-1}(\omega)+1-m)\frac{m-1}{m}} &\leq \text{sep}(n, \varepsilon, \omega) \leq 3^{X_{n-1}(\omega)+1+2m} + 1, \\ \frac{1}{n}(X_{n-1}(\omega) + 1 - m)\frac{m-1}{m} \log 3 &\leq \frac{1}{n} \log \text{sep}(n, \varepsilon, \omega) \leq \frac{1}{n}((X_{n-1}(\omega) + 1 + 2m) \log 3 + 1) \end{aligned}$$

(v druhej nerovnosti sme využili nerovnosť $\log(x+1) \leq \log x + 1$ pre $x \geq 1$). Podľa zákona veľkých čísel ale $\frac{X_{n-1}}{n}$ konverguje skoro všade k hodnote p takže pre $n \rightarrow \infty$ a $m \rightarrow \infty$ dostávame $h(f, g) = p \log 3$, čo je v tejto situácii výsledok, ktorý sa dá očakávať.

Príklad 5.11. Uvažujme funkcie $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, kde f je rovnaká ako v predchádzajúcom príklade a $g(x) = \frac{1}{3}x$ (ide teda o rovnaký systém ako v Príklade 4.9). Pripomeňme, že $f(g(x)) = x$ a g je kontraktívna, takže platí

- ak $\omega_{n-1} = g$, potom metrika d_n^ω je totožná s d_{n-1}^ω , $n = 2, 3, \dots$,
- ak $\omega_{n-1} = f$ a $\omega_{n-2} = g$, potom $d_n^\omega = d_{n-1}^\omega = d_{n-2}^\omega$, $n = 3, 4, \dots$

Máme teda

$$\begin{aligned}
 sep(1, \varepsilon, \omega) &= sep(1, \varepsilon, f), \\
 sep(2, \varepsilon, \omega) &= \begin{cases} sep(1, \varepsilon, f) & \text{ak } \omega_1 = g, \\ sep(2, \varepsilon, f) & \text{ak } \omega_1 = f, \end{cases} \\
 sep(3, \varepsilon, \omega) &= \begin{cases} sep(1, \varepsilon, f) & \text{ak } \omega_1 = g \text{ a } \omega_2 = g \text{ alebo } \omega_1 = g \text{ a } \omega_2 = f, \\ sep(2, \varepsilon, f) & \text{ak } \omega_1 = f \text{ a } \omega_2 = g \\ sep(3, \varepsilon, f) & \text{ak } \omega_1 = f \text{ a } \omega_2 = f, \end{cases} \\
 sep(4, \varepsilon, \omega) &= \begin{cases} sep(1, \varepsilon, f) & (g, g, g), (g, f, g), (g, g, f), \\ sep(2, \varepsilon, f) & (f, g, f), (f, g, g), (g, f, f), \\ sep(3, \varepsilon, f) & (f, f, g), \\ sep(4, \varepsilon, f) & (f, f, f), \end{cases} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Dá sa vidieť, že táto situácia je analogická maximu náhodnej prechádzky po $n - 1$ krokoch, konkrétne

$$sep(n, \varepsilon, \omega) = sep(M_{n-1}(\omega) + 1, \varepsilon, f), \quad (5.15)$$

kde $M_{n-1}(\omega) = \max\{0, Y_1(\omega), Y_1(\omega) + Y_2(\omega), \dots, Y_1(\omega) + \dots + Y_{n-1}(\omega)\}$,

$$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ak } \omega_i = f, \\ -1 & \text{ak } \omega_i = g, \end{cases} \quad (5.16)$$

$i = 1, \dots, n - 1$. Avšak $\frac{M_{n-1}}{n}$ podľa Tvrdenia 2.6 skoro všade konverguje k hodnote $2p - 1$ (ak $p > \frac{1}{2}$), resp. 0 (ak $p \leq \frac{1}{2}$). Analogicky ako v predchádzajúcom príklade teda máme

$$h(f, g) = \begin{cases} 0 & \text{ak } p \leq \frac{1}{2}, \\ (2p - 1) \log 3 & \text{ak } p > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (5.17)$$

Záver

Náhodné dynamické systémy môžu vznikať v súvislosti s diskretnými dynamickými systémami rôznymi spôsobmi. V tejto práci sme sa zúžili na systémy generované zobrazeniami intervalu do seba a zvážili sme dve možnosti - jednou je náhodný výber funkcie vytvárajúcej diskretný dynamický systém a druhou je vplyv malých náhodných perturbácií systému. V oboch prípadoch sa na dané systémy možno pozeráť ako na Markovov proces s diskretným časom.

Výsledky v Kapitole 3 sa týkajú špeciálnej triedy zobrazení (Alleeho zobrazenia) používanej na modelovanie vývoja populácií v biológii. Jedným z cieľov pri študovaní takýchto modelov je zistiť, či populácia v dlhodobom horizonte prežije, alebo vyhynie. Výsledky, ktoré uvádzame, opisujú situácie, kedy si náhodné dynamické systémy zachovávajú podobný charakter ako pôvodné nenáhodné systémy (pri rastúcich zobrazeniach), ako aj prípady, kedy sa ich charakter podstatne zmení.

V Kapitole 4 sme zaviedli mieru chaosu pre náhodný dynamický systém. Vyšli sme zo známej definície miery distribučného chaosu a študovali ho v prípade, keď v každom čase náhodne vyberáme z dvojprvkovej množiny funkcií. Dokázali sme niektoré postačujúce podmienky pre nulovú mieru chaosu, uviedli sme príklady systémov, v ktorých chaos nastáva a vypočítali sme mieru chaosu takýchto systémov. Ďalej sme ukázali, že chaotickosť zobrazení, ktorými systém generujeme, nemá vo všeobecnosti vplyv na chaotickosť výsledného náhodného dynamického systému - vieme totiž skonštruovať nechaotický systém z dvoch chaotických zobrazení a naopak, chaotický systém z dvoch nechaotických zobrazení. Nakoniec sme ukázali, že distribučný chaos je v istom zmysle nestabilný.

V Kapitole 5 sme sa zaoberali topologickou entropiou v náhodných dynamických systémoch, využívali sme pri tom najmä výsledky pre neautonómne systémy. Uviedli sme dva príklady systémov, v ktorých je topologická entropia kladná a vieme ju vypočítať. Napokon sme ukázali, že - na rozdiel od deterministických systémov - kladná topologická entropia neimplikuje distribučný chaos.

Témy, ktorými sme sa v tejto práci zaoberali rozhodne nie sú vyčerpané. Medzi otvorené otázky, ktorými by sa mohol zaoberať ďalší výskum, možno zaradiť nasledovné.

1. Vieme nájsť relatívne všeobecné podmienky na prítomnosť distribučného chaosu v náhodnom dynamickom systéme?
2. Existuje náhodný dynamický systém typu DC3, ktorý nie je typu DC2?
3. Implikuje distribučný chaos v náhodnom dynamickom systéme kladnú topologickú entropiu?

Literatúra

- [1] Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H.: Topological Entropy, *Trans. Amer. Math. Soc.* 114(2) (1965), pp. 309–319.
- [2] Allee W.C.: Studies in animal aggregations: mass protection against colloidal silver among goldfishes, *J. Exp. Zool.* 61 (1932), pp. 185–207.
- [3] Arnold L.: *Random Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [4] Asmussen M. A.: Density-dependent selection II. The Allee effect, *Am. Nat.* 114 (1979), pp. 796–809.
- [5] Bahabadi A. Z.: On chaos for iterated function systems, *Asian-Eur. J. Math.* 11 (2018), pp. 1850054.
- [6] Barnsley M. F., Demko S.: Iterated function systems and the global construction of fractals, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* 399 (1985), pp. 243–275.
- [7] Barnsley M. F., Elton J. H., Hardin D. P.: Recurrent Iterated Function Systems, *Constr. Approx.* 5 (1989), pp. 3–31.
- [8] Bhattacharya R., Majumdar M.: *Random Dynamical Systems: Theory and Application*, Cambridge University Press (2007).
- [9] L.S. Block and W. A. Coppel, *Dynamics in One Dimension*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1513, Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [10] Boukal D.S., Berec L.: Single-species models of the Allee effect: extinction boundaries, sex ratios and mate encounters, *J. theor. Biol.* 218 (2002), pp. 375–394.
- [11] Bowen R.: Entropy of Group Endomorphisms and Homogeneous Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 153 (1971), pp. 401–414.
- [12] Braverman E.: Random perturbation of difference equations with Allee effect: switch of stability properties, *Future Directions in Difference Equations* (2011), pp. 51–60.

- [13] Brin M., Stuck G.: *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press (2002).
- [14] Diaconis P., Freedman D.: Iterated Random Functions, *SIAM Rev.* 41(1) (1999), pp. 45–76.
- [15] Feller W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applicaton*, Wiley (1966).
- [16] Ghane F. H., Rezaali E., Saleh M., Sarizadeh A.: Sensitivity of iterated function systems, *J. Math. Anal. Appl.* 496(2) (2019) pp 493–503.
- [17] Hedlund G. A.: The dynamics of geodesic flows, *Bull. Amer. Math. Soc.* 45(4) (1939), pp. 241–260.
- [18] Hoppensteadt F. C.: *Mathematical Methods of Population Biology*, Cambridge University Press (1982).
- [19] Hutchinson J. E.: Fractals and self similarity *Indiana Univ. Math. J.* (1981), pp. 713–747.
- [20] Janková K., Smítal J.: Maps with random perturbations are generically not chaotic, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 5(5) (1995), pp. 1375–1378.
- [21] Kifer Y.: *Ergodic Theory of Random Transformation*, Birkhäuser, Boston (1986).
- [22] Kifer Y.: *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Birkhäuser, Boston (1988).
- [23] Kingman J. F. C.: Subadditive Ergodic Theory, *Ann. Probab.* 1(6) (1973) pp. 883–909.
- [24] Kolyada S., Snoha Ľ.: Some aspects of topological transitivity - a survey, *Grazer Math. Ber., Bericht 334* (1997), pp. 3–35.
- [25] Kolyada S., Snoha Ľ.: Topological entropy of nonautonomous dynamical systems, *Random Comput. Dynam.* 4 (1996), pp. 205–233.
- [26] Kováč J., Janková K.: Distributional chaos in random dynamical systems, *J. Difference Equ. Appl.* (2019), v tlači, dostupné online na <https://doi.org/10.1080/10236198.2019.1581182>.
- [27] Kováč J., Janková K.: Random Dynamical Dystems Generated by Two Allee Maps, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 27(8) (2017) pp. 1750117.
- [28] Li T. Y., Yorke J. A.: Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly* 82(10) (1975) pp. 985–992.

- [29] Luís R., Elaydi S., Oliveira H.: Non-autonomous periodic systems with Allee effects, *J. Difference Equ. Appl.* 16(10) (2010), pp. 1179-1196.
- [30] Ruelle, D.: Small Random Perturbations of Dynamical Systems and the Definition of Attractors, *Commun. Math. Phys.* 82 (1981), pp. 137-151.
- [31] Ruelle S.: *Chaos on the interval*, American Mathematical Society (2017).
- [32] Schweizer B., Sklar A., Smítal J.: Distributional (and other) chaos and its measurement, *Real Anal. Exchange* (1999) pp. 495–524.
- [33] Schweizer B., Smítal J.: Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval, *Trans. Amer. Math. Soc.* 344(2) (1994) pp. 737–754.
- [34] Smítal, J.: *On Functions and Functional Equations*, Adam Hilger, Bristol, UK (1998).
- [35] Stenflo Ö.: A survey of average contractive iterated function systems, *J. Difference Equ. Appl.* 18(8) (2012) pp. 1355–1380.
- [36] Strogatz S.H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Addison Wesley (1994).
- [37] Swishchuk A., Islam S.: *Random Dynamical Systems in Finance*, Chapman and Hall/CRC, New York (2013).