Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Mgr. Martin Lauko

Autoreferát dizertačnej práce

Stochastické diskrétne úlohy optimálneho riadenia s ohraničeniami na koncový stav

na získanie akademického titulu
philosophiæ doctor

v odbore doktorandského štúdia
9.1.9 Aplikovaná matematika

Bratislava 2013

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave

Predkladateľ: Mgr. Martin Lauko
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Školiteľ: Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave

Oponenti:

Obhajoba dizertačnej práce sa koná .... o ....

pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie ....

v študijnom odbore 9.1.9. aplikovaná matematika

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Predseda odborovej komisie
Prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Obsah

Kompletná verzia dizertačnej práce je dostupná na stránke
`http://davinci.fmph.uniba.sk/~lauko5/`

1 Úvod

Pomocou úloh optimálneho riadenia môžeme modelovať a riešiť problémy, v ktorých sa opakovane rozhodujeme – vo viacerých časových etapách volíme vonkajší vstup do systému, tzv. riadenie. Stav systému sa vyvíja podľa diferenčnej rovnice. V úlohách sa môžu vyskytovať aj rôzne ohraničenia na stav a riadenie, tieto však pri riešení pomocou Bellmanovej rovnice dynamického programovania nepredstavujú významnejšiu komplikáciu.

V reálnych problémoch sa často stretávame aj s náhodnými vplyvmi, ako sú napríklad náhodný dopyt zákazníkov alebo vopred neznámy čas trvania výroby. Takéto vplyvy môžeme zohľadniť pomocou ***stochastických úloh optimálneho riadenia***.

Stochastické úlohy optimálneho riadenia sa obvykle riešia bez ohraničení na priebežný alebo koncový stav. To však nemusí stačiť na riešenie úloh z praxe. Často v nich musíme uvažovať dodatočnú podmienku napríklad na koncový stav. Nie je však jasné, ako túto podmienku formulovať a akým spôsobom takúto úlohu riešiť. Preto je cieľom tejto práce analyzovať diskrétne stochastické úlohy optimálneho riadenia s ohraničeniami na koncový stav.

V práci sa zaoberáme dvoma typmi ohraničenia – podmienkou v tvare strednej hodnoty a podmienkou na minimálnu pravdepodobnosť. V oboch prípadoch definujeme množiny prípustných hodnôt riadenia tak, aby sme úlohu mohli riešiť pomocou rovnice dynamického programovania. V druhej časti práce ilustrujeme ohraničenia na koncový stav pri numerickom riešení konkrétnych úloh: úlohe predavača reďkoviek a úlohe o alokácii prostriedkov v portfóliu.

1.1 Stochastické úlohy optimálneho riadenia

Začnime však stručným prehľadom diskrétnych stochastických úloh optimálneho riadenia. Základom pre tento úvod bola učebnica [9] od Brunovského, Halickej a Jurču.

Úlohy optimálneho riadenia (OR) vo všeobecnosti riešia nasledujúci problém: Uvažujme systém, ktorého stav číselne popisuje ***stavová premenná***. Našou úlohou bude tento systém v priebehu k etáp „riadiť“, teda voliť vonkajší vstup – ***riadenie***.

Aktuálny stav na začiatku i-tej etapy ($i = 0, \dots, k-1$) je opísaný stavovou premennou $x_i \in \mathbb{X}_i$. Stav systému sa riadi diferenčnou rovnicou $x_{i+1} = f_i(x_i, u_i)$, do ktorej vstupuje aktuálny stav x_i a zvolená hodnota riadenia $u_i \in \mathbb{U}_i$. Úlohou je voľbou riadenia maximalizovať, resp. minimalizovať účelovú funkciu v tvare

$$\sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i).$$

Počiatočný stav je spravidla pevne zadaný $x_0 = a$, pričom môžeme požadovať, aby koncový stav x_k patril do cieľovej množiny C.

Stochastické úlohy

Rozšírením úlohy optimálneho riadenia o náhodné vplyvy dostaneme ***stochastickú úlohu***. Náhodné vplyvy modelujeme pomocou ***náhodnej premennej*** z_i, pričom predpokladáme známe diskrétne rozdelenie $\mathbb{Z}_i$. Náhodné premenné z_i, z_j, sú pre $i \neq j$ nezávislé. Konkrétnu realizáciu náhodnej premennej z_i v i-tej etape sa dozvieme až po stanovení hodnoty riadenia u_i.

Náhodná premenná môže vystupovať v stavovej diferenčnej rovnici pre x_{i+1} alebo aj v účelovej funkcii f_i^0. Preto budeme maximalizovať ***strednú hodnotu účelovej funkcie*** cez všetky náhodné premenné $\mathbb{Z} = \{z_0, \ldots, z_{k-1}\}$.

Pri voľbe hodnoty riadenia u_i často môžeme využiť aktuálny (náhodný) stav systému x_i. Preto namiesto postupnosti hodnôt riadenia (programového riadenia) budeme riešenie stochastickej úlohy hľadať ako ***spätnú väzbu*** $v_i : \mathbb{X}_i \to \mathbb{U}_i$, kde $v_i(x_i)$ je funkcia aktuálneho stavu x_i. Postupnosť týchto funkcií $\mathcal{V} = \left\{v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}\right\}$ potom nazveme ***stratégia***.

Definícia 1.1 (Štandardná stochastická úloha) *Nasledujúcu úlohu*

$$
\begin{array}{lll}
\max\limits_{\mathcal{V} \in \mathcal{S}} & E\left[\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, v_i(x_i), z_i)\right] & \\
\textit{pri podmienkach} & x_{i+1} = f_i(x_i, v_i(x_i), z_i), & i = 0, \ldots, k-1, \\
 & x_0 = a, & \\
 & z_i \sim \mathbb{Z}_i, & i = 0, \ldots, k-1,
\end{array}
\tag{1}
$$

maximalizácie v triede $\mathcal{S}$ prípustných stratégií $\mathcal{V}$ definovaných ako $\mathcal{V} = \left\{v_0, \ldots, v_{k-1}\right\}$, kde $v_i(x) \in \mathbb{U}_i$ pre všetky $i \in \mathcal{I}$ budeme nazývať ***štandardná stochastická úloha optimálneho riadenia****. Optimálne riešenie tejto úlohy nazývame* ***optimálnou stratégiou****.*

Keďže E chápeme ako strednú hodnotu cez postupnosť všetkých náhodných premenných $\mathbb{Z} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}\}$, pre zjednodušenie ďalšieho zápisu zaveďme označenie $E_{i,j}$ pre $i \leq j$ ako strednú hodnotu cez náhodné premenné $z_i, \ldots, z_j$. Pre $i = j$ zapíšeme len E_i, resp. E_{z_i} ako strednú hodnotu cez náhodnú premennú z_i.

Veta 1.2 (Rovnica dynamického programovania) *Uvažujme štandardnú úlohu (1). Potom $V = \left\{V_0, \ldots, V_{k-1}\right\}$ je hodnotová funkcia a $\hat{\mathcal{V}} = \left\{\hat{v}_0, \ldots, \hat{v}_{k-1}\right\}$ optimálna stratégia práve vtedy, keď V_j, $\hat{v}_j$, $j = 0, \ldots, k-1$, spĺňajú pre každé j a x rovnicu dynamického programovania:*

$$
\begin{aligned}
V_j(x) &= \max_{u \in U_i} E_j\left[f_j^0(x, u, z_j) + V_{j+1}(f_j(x, u, z_j))\right] \\
&= E_j\left[f_j^0(x, \hat{v}(x), z_j) + V_{j+1}(f_j(x, \hat{v}(x), z_j))\right], \\
V_k(x) &= 0, \quad \textit{pre každé } x.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Dôkaz Vety 1.2 možno nájsť v [9, Veta 2.7]. Rovnica dynamického programovania pre úlohu bez akýchkoľvek ohraničení (1) dáva zároveň konkrétny návod na výpočet riešenia – optimálnej stratégie a hodnotovej funkcie: rekurentne od konca. Takto môžeme riešiť stochastické úlohy aj numericky.

Poznamenajme, že v deterministickej úlohe optimálneho riadenia nepredstavujú ohraničenia na priebežný stav x_i, resp. koncový stav x_k žiadnu komplikáciu pri riešení. Podobne jednoducho môžeme pomocou rovnice dynamického programovania aj úlohy s funkciou koncového stavu, ktorá sa zahrnie do hodnotovej funkcie $V_k(x)$. Podrobnosti možno nájsť v [9].

1.2 Prehľad literatúry

Pri modelovaní reálnych problémov často musíme čeliť náhodným vplyvom – napríklad náhodnému dopytu spotrebiteľov alebo času trvania výroby. Matematický základ pre takéto rozhodovanie ponúkajú hneď dve oblasti matematiky – ***stochastické optimálne riadenie*** (SOR) a ***stochastické programovanie*** (SP).

Stochastické optimálne riadenie kladie dôraz na dynamický vývoj, spravidla vo viacerých etapách. Teória a numerické metódy riešenia deterministických úloh sa dajú hladko adaptovať aj na stochastické úlohy, pokiaľ úloha neobsahuje dodatočné ohraničenia na koncový stav.

Na druhej strane stochastické programovanie bolo vyvinuté ako rozšírenie nelineárneho programovania kvôli riešeniu stochastických úloh. V týchto úlohách rozličné typy ohraničení nerobia žiadne problémy. Dynamické úlohy je možné riešiť pomocou tzv. viacstupňového stochastického programovania.

Prístupy SOR a SP umožňujú rôznorodé problémy efektívne sformulovať a obsahujú nástroje, ktorými sa dajú riešiť. Ako píše Dupačová v [8], vďaka ich nezávislému vývoju a úplne odlišným metódam sú vzájomné porovnania zriedkavé. V praxi však môžeme nájsť podobné aplikácie.

Napríklad základnú stochastickú úlohu – problém predavača novín môžeme nájsť tak v stochastickom programovaní [15], [17], ako aj v optimálnom riadení – predavačka kvetín v [8], resp. predavač reďkoviek v [9]. Veľa podobných aplikácií môžeme nájsť aj v oblasti ekonómie a financií, napríklad problém optimalizácie portfólia v optimálnom riadení: [5], [11], [18], resp. v stochastickom programovaní [10].

Táto dizertačná práca sa však venuje hlavne optimálnemu riadeniu. Diskrétnym úlohám z oblasti ekonómie sa venoval Richard Bellman v monografii [1] z roku 1957, ktorý navrhol rovnicu dynamického programovania ako metódu riešenia úloh optimálneho riadenia. Neskôr Bertsekas v [2] ponúkol ucelený prehľad problematiky, ktorý zahŕňal aj stochastické optimálne riadenie.

Úlohy optimálneho riadenia s ohraničeniami

Zamerajme sa však na ohraničenia v stochastických úlohách. Ako píše [15], stáva sa, že chceme naraz zohľadniť niekoľko rôznych cieľov a preto niektoré z nich presunieme do ohraničení. Z toho vyplýva potreba riešiť stochastické úlohy s podmienkou na koncovú hodnotu stavu.

V deterministickej úlohe OR pritom nejde o závažnú komplikáciu, vhodným obmedzením množiny prípustných riadení dokážeme zabezpečiť splnenie podmienky (viď [9]). V stochastickom prípade však koncový stav predstavuje náhodnú premennú, preto je zabezpečenie splnenia podmienky komplikovanejšie.

Pri riešení úloh s koncovou podmienkou autori článkov väčšinou volia stochastické programovanie, ako napr. v [11]: vygenerujú strom scenárov a úlohu prevedú na lineárne programovanie, kde zahrnú koncovú podmienku ako ďalšie ohraničenie. V stochastickom optimálnom riadení sa podľa [5] koncové ohraničenia zvyčajne nevyskytujú kvôli neistote ohľadom budúceho vývoja.

Rôzne tvary koncového ohraničenia

Zhrňme si teraz rôzne tvary ohraničenia na koncový stav (koncovej podmienky) v stochastických úlohách optimálneho riadenia:

1. **Robustná podmienka:** $x_k \geq \mu$. Podmienka musí byť splnená za každých okolností, je to obdoba ohraničenia v deterministickej úlohe. Keďže x_k je náhodná premenná, splnenie podmienky nemusí byť možné. Použitie môžeme nájsť v [6] v súvislosti s robustnými riešeniami stochastických úloh OR.

2. **Minimálna pravdepodobnosť splnenia podmienky:** $P\left[x_k \geq \mu\right] \geq \beta$, pričom β si môžeme zvoliť (napr. 90 %). Ide o zoslabenie predchádzajúcej podmienky, odpadne tak problém s extrémnymi prípadmi, ktoré majú malú pravdepodobnosť. Úlohy s takýmito podmienkami boli predmetom článku [7].

3. **Podmienka na strednú hodnotu:** $E\left[x_k\right] \geq \mu$. Táto podmienka bude splnená v priemernom prípade, podobne aj v účelovej funkcii stochastickej úlohy maximalizujeme strednú (priemernú) hodnotu. Tento prípad riešili autori [5] a [6], ktorí zhodne navrhli rekurentnú formuláciu podmienky v tvare množiny prípustných hodnôt riadenia.

Robustná podmienka nie je príliš vhodná pre stochastickú úlohu, pretože výrazne obmedzuje množinu prípustných stratégií. Z tohto dôvodu sa budeme venovať zvyšným dvom podmienkam, ktoré náhodnosť v úlohe zohľadňujú.

Zaujímavé aplikácie koncových podmienok možno nájsť aj v spojitom prípade, napríklad [18] rieši úlohu s ohraničením na rizikovú mieru Value-at-Risk pomocou

Hamilton–Jacobi–Bellmanovej rovnice. Čo sa týka koncových podmienok v stochastickom programovaní, aj tu sa môžeme stretnúť s podmienkou na strednú hodnotu (napr. [11]), prípadne pravdepodobnostnými podmienkami [13], [16] a [17].

Téma ohraničení na koncový stav v diskrétnych stochastických úlohách optimálneho riadenia je teda aktuálna a pomerne často diskutovaná, nepovažujeme ju však za uspokojivo vyriešenú.

Úloha s penalizáciou

Ako sme spomenuli, koncové ohraničenie v stochastickej úlohe môžeme podľa [15] chápať ako ďalšie rozhodovacie kritérium – ďalší cieľ, ktorý sa snažíme naplniť. Namiesto koncovej podmienky ho však môžeme zahrnúť priamo do účelovej funkcie, ako dodatočnú penalizácia, ktorá sa započíta, ak podmienka nie je splnená.

Takýto spôsob riešenia stochastickej úlohy optimálneho riadenia navrhol [4] v úlohe optimalizácie energie hybridných vozidiel, logaritmickú penalizáciu uvažuje [3]. Penalizáciu spomína aj Prékopa v [13] v stochastickom programovaní.

2 Ciele dizertačnej práce

Hlavné ciele dizertačnej práce sme si stanovili vzhľadom na súčasný stav riešenia diskrétnych stochastických úloh optimálneho riadenia s koncovými ohraničeniami.

- ◇ Preskúmať možnosti riešenia diskrétnych stochastických úloh optimálneho riadenia s konečným diskrétnym rozdelením náhodnej premennej a s ohraničením na koncový stav a ***odpovedať na kľúčové otázky***:
  - ◇ Ako môžeme sformulovať ohraničenia na koncový stav v stochastickej úlohe? Aké typy ohraničení môžeme teda používať?
  - ◇ Akým spôsobom môžeme úlohy s takýmito ohraničeniami riešiť?
- ◇ Analyzovať teoretické a numerické problémy vyplývajúce z riešenia týchto úloh a navrhnúť efektívne riešenia
  - ◇ Sformulovať a dokázať rovnicu dynamického programovania pre úlohy s ohraničeniami na koncový stav
  - ◇ Naformulovať rôzne koncové podmienky (podmienka na strednú hodnotu, minimálna pravdepodobnosť splenia podmienky) v tvare množiny prípustných hodnôt riadenia
  - ◇ Preskúmať možnosti numerického riešenia stochastických úloh s rôznymi verziami koncovej podmienky
- ◇ Experimentálne numericky overiť teoretické výsledky a aplikovať navrhnuté numerické metódy na riešenie dvoch prototypov stochastických úloh:
  - ◇ jednoduchší typ úlohy – diskrétny charakter stavu a riadenia, rovnomerné rozdelenie náhodnej premennej, lineárna diferenčná rovnica
  - ◇ zložitejší typ úlohy – kontinuálny charakter stavu a riadenia, komplikovanejšie rozdelenie náhodnej premennej, zložitejšia diferenčná rovnica
- ◇ V jednom z prototypov numericky porovnať úspešnosť splnenia koncovej podmienky na riešeniach získaných stochastickým programovaním v porovnaní s riešením optimálneho riadenia a tak overiť, ktorý spôsob je efektívnejší pri riešení úloh s koncovou podmienkou
- ◇ Na záver pomocou numerických simulácií overiť, ktorý zo spôsobov riešenia stochastických úloh s koncovou podmienkou je výhodnejší

3 Dosiahnuté výsledky

Na základe prehľadu rôznych koncových ohraničení v stochastických úlohách optimálneho riadenia sme analyzovali dva základné typy:

1. podmienku na strednú hodnotu koncového stavu

$$E_{k-1}\left[x_k\right] = E\left[x_k \,|\, x_{k-1}\right] \geq \mu, \quad \text{pre všetky } x_{k-1} \in X_{k-1}, \tag{3}$$

2. minimálnu pravdepodobnosť splnenia koncovej podmienky

$$P\left[\, x_k \geq \mu \,\right] \geq \beta. \tag{4}$$

V úlohe bez ohraničení (1) sú ***prípustné stratégie*** všetky postupnosti $\{v_i(x)\}_{i=0}^{k-1}$, pre ktoré platí $v_i(x) \in \mathbb{U}_i$ pre $i \in \mathcal{I}$. Pokiaľ však pridáme ohraničenie (3) alebo (4), prípustné budú len také stratégie, ktoré spolu so svojou odozvou spĺňajú koncové ohraničenie. Našim cieľom bolo preformulovať obe podmienky na množinu prípustných hodnôt riadenia, medzi ktorými môžeme maximalizovať pri riešení pomocou špeciálnej rovnice dynamického programovania.

3.1 Podmienka v tvare strednej hodnoty

Pri podmienke na strednú hodnotu (3) sme vychádzali z formulácie prípustných hodnôt riadenia $W_i(x)$, resp. stavu X_i podľa článku [5] a knihy [6]:

$$\begin{aligned} W_i(x) &= \{u_i \in \mathbb{U}_i \,|\, f_i\left(x, u_i, z_i\right) \in X_{i+1} \text{ pre všetky } z_i^s \sim \mathbb{Z}_i\}, & i = 0, \ldots, k-2, \\ W_{k-1}(x) &= \{u_{k-1} \in \mathbb{U}_{k-1} \,|\, E f_{k-1}\left(x, u_{k-1}, z_{k-1}\right) \geq \mu\}, & \\ X_i &= \{x \in \mathbb{X}_i \,|\, W_i(x) \neq \emptyset\}, & i = 0, \ldots, k-1. \end{aligned} \tag{5}$$

Túto sme porovnávali s alternatívnou definíciou, v ktorej sme pre $i < k-1$ použili oslabenú podmienku na strednú hodnotu E_i (namiesto všetkých $z_i^s \sim \mathbb{Z}_i$):

$$\begin{aligned} W_i(x) &= \{u_i \in U_i \,|\, \mathbf{E_i} f_i\left(x, v_i(x), z_i\right) \in X_{i+1}\}, & i = 0, \ldots, k-2, \\ W_{k-1}(x) &= \{u_{k-1} \in \mathbb{U}_{k-1} \mid E_{k-1} f_{k-1}\left(x, u_{k-1}, z_{k-1}\right) \geq \mu\}, & \\ X_i &= \{x \in \mathbb{X}_i \mid W_i(x) \neq \emptyset\} & i = 0, \ldots, k-1. \end{aligned} \tag{6}$$

Ukázali sme, že obe verzie majú svoje nevýhody: buď je to priveľmi obmedzená množina prípustných stratégií a stavov v (5), alebo vysoká pravdepodobnosť vypadnutia z prípustného stavu aj pri voľbe prípustnej hodnoty riadenia v (6). Pri numerickom riešení konkrétnych úloh sme zároveň tieto množiny prípustných hodnôt riadenia a prípustných stavov graficky znázornili, aby sme poukázali na rozdiely.

3.2 Podmienka na minimálnu pravdepodobnosť

Uvažovali sme podmienku na minimálnu pravdepodobnosť v tvare (4). Pravdepodobnosť splnenia podmienky $x_k \geq \mu$ sme pritom rozumeli vzhľadom na vektor náhodných premenných $\mathbb{Z} = \{z_0, z_1, \dots, z_{k-1}\}$.

Doyen a De Lara v [7] riešili iba problém maximalizácie pravdepodobnosti splnenia podmienky na priebežný, resp. koncový stav. My sme však v rámci dizertačnej práce navrhli, ako môžeme pomocou špeciálnej rovnice dynamického programovania (7) najskôr vypočítať prípustnú oblasť v závislosti od požadovanej pravdepodobnosti β a následne maximalizovať zvolenú účelovú funkciu na oblasti, kde platí $\mathcal{P}_i(x_i) \geq \beta$.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}_k(x) & = & \Phi(x), \\ \mathcal{P}_i(x) & = & \max\limits_{u_i \in \mathbb{U}_i} E_i \left[\mathcal{P}_{i+1}\big(f_i(x, u_i, z_i)\big) \right], \quad i = 0, \ldots, k-1, \\ \text{kde} & & \Phi(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x_k \geq \mu, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \end{array} . \tag{7}$$

Množiny prípustných hodnôt riadenia $W_i(x)$ a prípustných stavov X_i spĺňajúcich podmienku (4) sme definovali nasledovne:

$$\begin{array}{rcll} W_i(x) & = & \{ u_i \in \mathbb{U}_i \mid E_i \left[\mathcal{P}_{i+1} \left[f_i\left(x, u_i, z_i\right)\right] \right] \geq \beta \}, & i = 0, \ldots, k-1, \\ X_i & = & \{ x \mid \mathcal{P}_i(x) \geq \beta \}, & i = 0, \ldots, k-1. \end{array} \tag{8}$$

3.3 Úloha s penalizáciou

Zaoberali sme sa tiež alternatívnym spôsobom riešenia úlohy s ohraničením na koncový stav: začlenením ohraničenia do účelovej funkcie:

$$\max E \left[\varphi(x_k) - \delta \cdot \Lambda(x_k) \right], \tag{9}$$

kde prvý člen $\varphi(x_k)$ predstavuje pôvodnú účelovú funkciu a druhý tzv. ***penalizáciu***, teda $\Lambda(x_k)$ penalizačnú funkciu a δ jej váhu.

Uvažovali sme napríklad konštantnú penalizáciu

$$\Lambda_1(x) = \begin{cases} 0, & x \geq \mu \\ 1, & \text{inak.} \end{cases} \tag{10}$$

V práci sme ukázali, že ide o efektívny spôsob riešenia úlohy s ohraničením, výhodou je najmä fakt, že všetky stratégie a všetky stavy považujeme za prípustné. Na rozdiel od riešenia úlohy s podmienkou na koncový stav v úlohe s penalizáciou nehrozí neprípustnosť, aktuálny stav nemôže vypadnúť z prípustnej oblasti.

3.4 Rovnica dynamického programovania

Pre stochastickú úlohu optimálneho riadenia so všeobecným ohraničením v tvare

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximalizovať} & E\left[\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, v_i(x_i), z_i) + \varphi(x_k)\right] & \\
\text{pri ohraničeniach} & x_{i+1} = f_i(x_i, v_i(x_i), z_i), & i = 0, \dots, k-1, \\
& x_0 = a, & \\
& v_i(x_i) \in W_i(x_i) \subseteq \mathbb{U}_i, & i = 0, \dots, k-1, \\
& z_i \sim \mathbb{Z}_i, & i = 0, \dots, k-1,
\end{array}
\tag{11}
$$

sme sformulovali a dokázali ***rovnicu dynamického programovania*** – Vetu (3.1):

Veta 3.1 (RDP pre úlohu s ohraničením) *Majme úlohu (11) spĺňajúcu technické predpoklady. Potom $V = \{V_0, \dots, V_{k-1}\}$ je hodnotová funkcia a $\hat{\mathcal{V}} = \{\hat{v}_0, \dots, \hat{v}_{k-1}\}$ optimálna stratégia práve vtedy, keď V_j, $\hat{v}_j$, $j = 0, \dots, k-1$, spĺňajú pre každé j a x rovnicu dynamického programovania:*

$$
\begin{aligned}
V_j(x) &= \max_{v_j(x) \in W_j(x)} E_j\left[f_j^0(x, v_j(x), z_j) + V_{j+1}(f_j(x, v_j(x), z_j))\right] \\
&= E_j\left[f_j^0(x, \hat{v}_j(x), z_j) + V_{j+1}(f_j(x, \hat{v}_j(x), z_j))\right], \\
V_k(x) &= \varphi(x), \quad \textit{pre každé } x.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Na základe tohto výsledku sme mohli riešiť úlohy s rôznymi ohraničeniami na koncový stav, resp. úlohu s penalizáciou, či už analyticky alebo numericky. Využili sme pri tom odvodené ohraničenia v tvare množiny prípustných hodnôt riadenia, medzi ktorými sme hľadali optimálne hodnoty riadenia pre optimálnu stratégiu.

4 Numerické riešenie úloh

Druhá časť dizertačnej práce sa venuje numerickému riešeniu úloh, na ktorých sme ilustrovali riešenie úloh s koncovými podmienkami. Pri riešení využívame diskrétnu numerickú schému (obr. 1) založenú na rovnici dynamického programovania. Predpokladáme, že máme k dispozícii množiny prípustných hodnôt riadenia $W_i(x_i)$ zodpovedajúce koncovej podmienke. Tieto buď vypočítame vopred alebo počas riešenia v cykle pre jednotlivé hodnoty stavu.

Výpočtová zložitosť je $O(kMNP)$, teda počet operácií lineárne závisí od zvolených parametrov úlohy: počtu časových etáp k, počtu diskrétnych hodnôt stavu M, počtu diskrétnych hodnôt riadenia N a počtu rôznych realizácií diskrétnej náhodnej premennej P. Numerickú schému sme implementovali v `Matlab`-e.

4.1 Úloha predavača reďkoviek

Prvá úloha bola motivovaná knihou [9], pričom sme do nej doplnili ohraničenie na koncový stav v tvare strednej hodnoty (3):

Úloha 4.1 (Úloha predavača reďkoviek)
Predavač chce maximalizovať svoj zisk z predaja reďkoviek počas $\boldsymbol{k}$ *dní. Každé ráno* $\boldsymbol{i}$*-teho dňa nakúpi u dodávateľa* $\boldsymbol{u}_i$ *kusov reďkoviek za nákupnú cenu* $\boldsymbol{n}$ *za zväzok, ktoré počas dňa predáva za cenu* $\boldsymbol{p}_i$*. Dopyt po reďkovkách* $\boldsymbol{z}_i$ *je náhodný, ale rovnomerne rozdelený. Nepredané reďkovky môže predávať aj ďalší deň so stratou* $\boldsymbol{s}$ *za zväzok (skladovanie).*

Predavač začína s prázdnym skladom ($x_0 = 0$)*. Posledný deň chce mať na sklade v priemere aspoň* $\boldsymbol{\mu}$ *reďkoviek, keďže má kontrakt s veľkoodberateľom. Ten* $\boldsymbol{k}$*-ty deň odkúpi zostávajúce reďkovky, pričom požaduje, aby ich bolo priemerne aspoň* $\boldsymbol{\mu}$*.*

Je to diskrétna stochastická úloha optimálneho riadenia. Pri numerickom riešení sme použili rovnicu dynamického programovania. Podrobnejšie sme sa venovali množinám prípustných stavov, ktoré sú rôzne v prípade pôvodnej (5), resp. alternatívnej definície (6). Ukázali sme, že v tejto úlohe je výhodnejšia alternatívna definícia.

Na obrázku 2 sme zobrazili numerické riešenie úlohy. V prvom prípade ide o neautonómnu verziu so zmenou ceny, v druhom prípade o úlohu s podmienkou $\mu = 40$, kedy pôvodná definícia vedie k neprípustnosti, alternatívna (6) však dáva výsledky.

Túto úlohu sme zároveň riešili aj pomocou ***stochastického programovania*** (SP), pomocou úlohy lineárneho programovania na vygenerovanej sade náhodných scenárov. Následne sme pomocou simulácií porovnávali výsledky SP s optimálnym riadením (OR). Lepšie výsledky dosiahlo OR, to však nie je veľkým prekvapením. Stochastické optimálne riadenie totiž rieši úlohy v tvare stratégie, ktorá reaguje na aktuálny stav, zatiaľčo riešením SP je programové riadenie.

Schéma numerického riešenia pomocou RDP

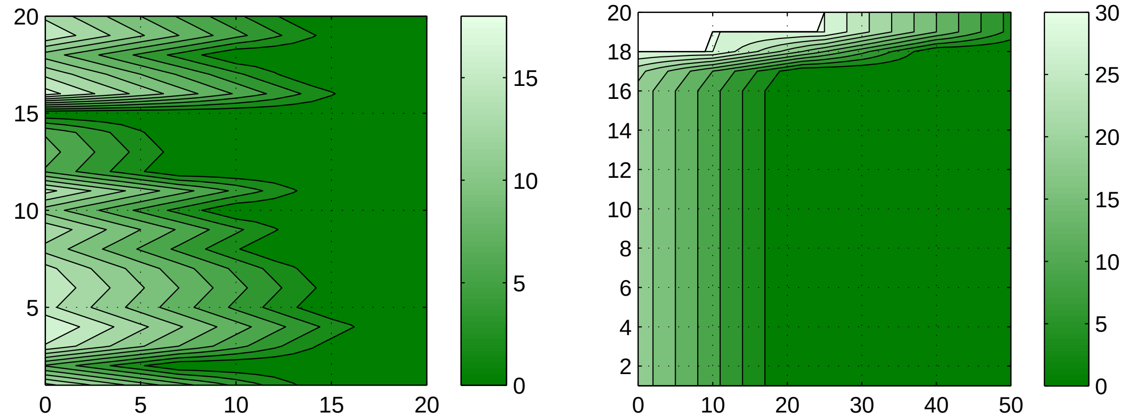
inicializácia;

for $x = x^1, x^2, \ldots,$ **do**
  výpočet $V_k(x) = \varphi(x)$; `// výpočet funkcie koncového stavu,` $i = k$
end

for $i = k-1, \ldots, 0$ **do**
  `// cyklus pre časové etapy`
  for $x = x^1, x^2, \ldots, x^M$ **do**
    `// jednotlivé hodnoty stavu`
    výpočet prípustných hodnôt riadenia $W_i(x)$ podľa koncovej podmienky;
    for $u = u^1, u^2, \ldots, u^N$ **do**
      `// cyklus pre možné hodnoty riadenia`
      if $u \notin W_i(x)$ **then**
        u neprípustné, pokračuj ďalšou hodnotou u;
      end
      for $z = z^1, z^2, \ldots, z^P$ **do**
        `// cyklus pre realizácie náhodnej premennej`
        výpočet aktuálnej účelovej funkcie $f_i^0(x,u,z)$;
        výpočet budúceho stavu $x_{i+1} = f_i(x,u,z)$;
        načítanie hodnotovej funkcie $V_{i+1}(x_{i+1})$;
        uloženie hodnoty $f_i^0 + V_{i+1}(x_{i+1})$ pre aktuálne z
      end
      výpočet strednej hodnoty $f_i^0 + V_{i+1}(x_{i+1})$ cez všetky z;
      uložíme pre u strednú hodnotu $f_i^0 + V_{i+1}(x_{i+1})$;
    end
    nájdeme u s najlepšou strednou hodnotou $f_i^0 + V_{i+1}(x_{i+1})$;
    uložíme $v_i(x) = u$ ako najlepšie riadenie a hodnotovú funkciu do $V_i(x)$;
  end
end

Výsledok: Optimálne riadenie $v_i(x)$, hodnotová funkcia $V_i(x)$ pre všetky i, x

Obr. 1: Diskrétna numerická schéma založená na rovnici dynamického programovania



(a) Riešenie pre neautonómnu cenu: vygenerované náhodné ceny p_i

(b) Riešenie pre cieľovú hodnotu $\mu = 40$ s alternatívnou definíciou (6)

Obr. 2: Úloha predavača reďkoviek: numerické riešenie – optimálna stratégia $v_i(x)$
Na vodorovnej osi je stav x (počet reďkoviek na sklade), na zvislej časová etapa i

4.2 Úloha o alokácii prostriedkov v portfóliu

Piata kapitola dizertačnej práce sa venuje úlohe o alokácii prostriedkov v portfóliu. Námet sme získali z problému dôchodkového sporenia v [10]:

Úloha 4.2 (Úloha o alokácii prostriedkov v portfóliu)
Sporiteľ môže svoje prostriedky rozdeliť do dvoch aktív:

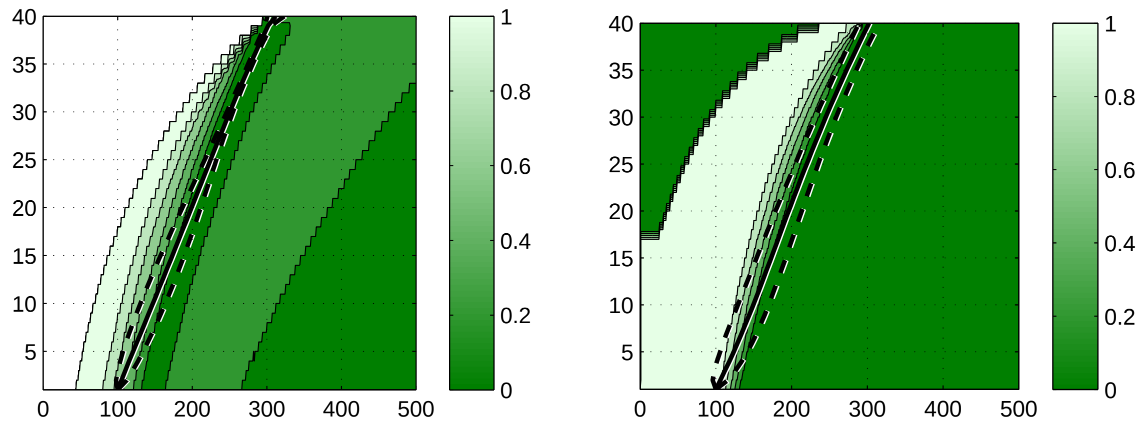
- ◇ ***bezrizikový fond*** *s vopred známym výnosom* $\boldsymbol{r_i}$*,*
- ◇ ***rizikový fond*** *tvorený napr. akciami, výnos tohto fondu* $\boldsymbol{z_i}$ *je náhodný, má však známe rozdelenie.*

Uvažujme dlhodobý investičný horizont $\boldsymbol{k} = 40$ *rokov. Sporiteľ na začiatku investuje sumu* $\boldsymbol{a}$*, pričom sa vždy na začiatku roka môže rozhodnúť, akú časť svojich prostriedkov investuje do rizikového fondu.*

Cieľom investora je dosiahnuť čo najvyššiu hodnotu prostriedkov na konci sporenia pri minimálnom riziku. Úlohou je určiť optimálny podiel prostriedkov v rizikovom fonde $\boldsymbol{u_i} \in [0, 1]$ *v jednotlivých rokoch sporenia.*

Kedže stav aj riadenie môžu nadobúdať ľubovoľnú hodnotu z určitého intervalu, pri riešení pomocou rovnice dynamického programovania sme ich museli diskretizovať – nahradiť vybranou množinou diskrétnych hodnôt. Ako náhodnú premennú sme zvolili diskrétnu aproximáciu normálneho rozdelenia.

Pri riešení sme uvažovali rôzne verzie úlohy (maximalizácia očakávanej užitočnosti, minimalizácia rizika) s rôznymi koncovými podmienkami (na strednú hodnotu aj minimálnu pravdepodobnosť), aby sme odhalili zákonitosti platné pre úlohy s ohraničeniami na koncový stav.



(a) Maximalizácia užitočnosti
na prípustnej oblasti $\beta = 70\,\%$

(b) Minimalizácia rizika
s penalizáciou $\delta = 2\,000$

Obr. 3: Úloha o alokácii prostriedkov v portfóliu: numerické riešenie a simulácia
Optimálna stratégia $v_i(x)$ a v popredí priemerná hodnota stavu počas simulácie.
Prerušovaná čiara označuje +/- štandardnú odchýlku priemerného stavu

V prípade podmienky na strednú hodnotu (3) sme analyticky popísali ***množiny prípustných hodnôt riadenia*** a množiny prípustných stavov. Ukázalo sa, že pôvodná formulácia (5) neumožňuje problém reálne riešiť, pretože väčšina hodnôt stavu nie je prípustná. Lepšie výsledky sme dosiahli pomocou alternatívnej formulácie (6), aj tu sa však vyskytli problémy pri numerickej implementácii, ako ich popisujeme v práci.

Taktiež sme sa zaoberali úlohou s podmienkou na minimálnu pravdepodobnosť (4) a podrobne aj úlohou na minimalizáciu rizika s penalizáciou v tvare:

$$\min E\left[\sum_{i=0}^{k-1} CVaRD_\alpha(x_{i+1}\,|\,x_i) + \delta\cdot\Lambda(x_k)\right] \tag{13}$$

Numerické riešenia týchto dvoch úloh sme znázornili na obrázku 3.

V záverečnej podkapitole 5.7 sme realizovali porovnanie riešení rôznych verzií úlohy prostredníctvom Monte-Carlo simulácii. Porovnávali sme riešenie úlohy bez ohraničení, riešenia úlohy s koncovou podmienkou v tvare strednej hodnoty, resp. podmienky na minimálnu pravdepodobnosť, ako aj riešenie úlohu s penalizáciou s rôznymi tvarmi penalizácie.

Úspešnosť splnenia koncovej podmienky v jednotlivých prípadoch pritom závisela od konkrétnych parametrov. Porovnateľnú úspešnosť sa nám podarilo dosiahnuť v prípade použitia penalizácie, ako v prípade riešenia úlohy na ohraničenej prípustnej oblasti. Pripomeňme však, že v prípade riešenia úlohy na ohraničenej oblasti hrozí vypadnutie z oblasti, ktoré vyžaduje prehodnotenie cieľovej hodnoty majetku. Preto považujeme úlohu s penalizáciou za lepšiu metódu riešenia.

5 Záver

Hlavné prínosy dizertačnej práce sú

- ♢ Ukázali sme, ***akým spôsobom môžeme formulovať*** v stochastických diskrétnych úlohách optimálneho riadenia s diskrétnym konečným rozdelením náhodnej premennej ***ohraničenia na koncový stav*** v tvare strednej hodnoty koncového stavu, resp. podmienky na minimálnu pravdepodobnosť
- ♢ Podrobne sme preskúmali ***možnosti riešenia úloh*** s rôznymi koncovými ohraničeniami prostredníctvom rovnice dynamického programovania
  - ◇ ***Podmienka v tvare strednej hodnoty***: ukázali sme dva alternatívne spôsoby prevodu podmienky na množinu prípustných hodnôt riadenia
  - ◇ ***Podmienka na minimálnu pravdepodobnosť***: navrhli sme množiny prípustných hodnôt riadenia spĺňajúce podmienku s parametrom β
  - ◇ Analyzovali sme aj alternatívnu možnosť riešenia stochastických úloh s ohraničením ***pomocou penalizácie***, čím sa vyhneme neprípustnosti
  - ◇ Odvodili a dokázali sme ***rovnicu dynamického programovania*** pre úlohu so všeobecným ohraničením
- ♢ Preskúmali sme možnosti ***numerického riešenia*** úloh a navrhli sme diskrétnu numerickú schému riešenia úloh založenú na rovnici dynamického programovania, ktorú môžeme použiť aj pri riešení úloh s ohraničením
- ♢ Numericky sme vyriešili ***dva základné prototypy*** stochastických úloh s koncovou podmienkou a tieto riešenia preverili prostredníctvom Monte-Carlo simulácií
  - ◇ ***Úloha predavača reďkoviek***: na jednoduchšej úlohe sme overili použitie numerickej schémy pri riešení úlohy s koncovým ohraničením a porovnali obe definície množiny prípustných hodnôt riadenia. Zároveň sme riešenie OR porovnali s riešením stochastického programovania
  - ◇ ***Úloha o portfóliu***: porovnávali sme možnosti riešenia úloh s ohraničenou množinou prípustných stavov vzhľadom na podmienku na strednú hodnotu, resp. minimálnu pravdepodobnosť, s riešením pomocou úlohy s penalizáciou. Ukázali sme, že v prípade penalizácie nevzniká neprípustnosť
- ♢ Celkovo môžeme zhrnúť, že sme ***úspešne splnili*** všetky ciele stanovené v tejto dizertačnej práci

Literatúra

[1] Bellman, R. (1957): *Dynamic programming*, Princeton University Press.

[2] Bertsekas, D. P. (2005, 2007): *Dynamic Programming and Optimal Control, Volume I & II*, Third Edition, Athena Scientific.

[3] Bonnans, J. F., Silva, F. J. (2012): *Error estimates for the logarithmic barrier method in stochastic...*, Systems & Control Letters, Vol. 61, No. 1, 143–147.

[4] Brahma, A., Guezennec, Y., Rizzoni, G. (2000): *Optimal energy management in series hybrid electric vehicles*, American Control Conference, Vol. 1, No. 6, 60–64.

[5] Brunovský, P., Halická, M., Kilianová, S. (2012): *Stochastic Dynamic Programming for Problems with Expected Value Constraint*, Working paper, FMFI, Bratislava.

[6] De Lara, M., Doyen, L. (2008): *Sustainable management of natural resources: mathematical models and methods*, Springer.

[7] Doyen, L., De Lara, M. (2010): *Stochastic viability and dynamic programming*, Systems & Control Letters, Vol. 59, No. 10, 629–634.

[8] Dupačová, J., Sladký, K. (2002): *Comparison of Multistage Stochastic Programs with Recourse and Stochastic Dynamic Programs with Discrete Time*, ZAMM 82, 753–765.

[9] Halická, M., Brunovský, P., Jurča, P. (2009): *Optimálne riadenie - Viacetapové rozhodovacie procesy v ekonómii a financiách*, Epos, Bratislava.

[10] Kilianová, S. (2008): *Stochastic dynamic optimization models for pension planning*, Dissertation Thesis, FMFI UK Bratislava.

[11] Kilianová, S., Pflug, G. C. (2009): *Optimal pension fund management under multi-period risk minimization*, Annals of Operations Research, Vol. 166, No. 1, 261–270.

[12] Pflug, G. Ch. *et al.* (2007): *Modeling, Measuring and Managing Risk*, World Scientic.

[13] Prékopa, A. (2003): *Probabilistic programming*, kapitola 5 v knihe A. Ruszczyński, A. Shapiro (editori): *Handbooks in OR & MS*, Vol. 10, 267–351.

[14] Ruszczyński, A. (2010): *Risk-averse dynamic programming for Markov decision processes*, Math. Program., Ser. B, Vol. 125, 235–261.

[15] Ruszczyński, A., Shapiro, A. (2003): *Stochastic Programming Models*, kapitola 1 v knihe A. Ruszczyński, A. Shapiro (editori): *Handbooks in OR & MS*, Vol. 10, 267–351.

[16] Shapiro, A., Dentcheva, D., Ruszczynsski, A. (2009): *Lectures on stochastic programming: modeling an theory*, MPS-SIAM.

[17] Shapiro, A., Philpott, A. (2007): *A tutorial on stochastic programming*, Manuscript.

[18] Yiu, K. F. C. (2004): *Optimal portfolios under a value-at-risk constraint*, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 28, No. 7, 1317–1334.

Zoznam publikácií

Publikácie autora

- ◇ LAUKO, M. (2011): *Loan repayments model for PPP superhighways*, Zborník z EAPG Workshopu 2011, Katedra hospodárskej politiky Ekonomickej univerzity, ISBN 978-80-225-3280-8, 1–10.
  AFD – Publikované príspevky na domácich vedeckých konferenciách

- ◇ LAUKO, M. (50%), ŠEVČOVIČ, D. (2010): *Comparison of numerical and analytical approximations of the early exercise boundary of american put options*, ANZIAM Journal, ISSN 1446-1811, Vol. 51, No. 4, 430–448.
  ADC – Vedecké práce v zahraničných karentovaných časopisoch

  Ohlasy (2):

  - ◇ BYUN, S. J. (2011): *A survey on the optimal exercise boundary of American options*, Trends in Mathematics – New Series, Vol. 13, No. 1, 2011, s. 61–66.
  - ◇ KANDILAROV, J. D., VALKOV, R. L. (2011): *A numerical approach for the American call option pricing model*, Numerical Methods and Applications: Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6046, Springer Berlin, s. 453–460.

Prezentácie na konferenciách

Výsledky boli ústne prezentované na konferenciách

- ◇ INTERNATIONAL STUDENT CONFERENCE ON APPLIED MATHEMATICS AND INFORMATICS ISCAMI 2013: Malenovice, Česká republika, máj 2013
- ◇ PRVÝ ČESKO-SLOVENSKÝ WORKSHOP MLADÝCH EKONÓMOV V BELUŠSKÝCH SLATINÁCH: Belušské Slatiny, jún 2012
- ◇ LETNÁ ŠKOLA PYTAGORAS: Hronec, júl 2011
- ◇ EAPG WORKSHOP 2011: Belušské Slatiny, jún 2011
- ◇ INTERNATIONAL STUDENT CONFERENCE ON APPLIED MATHEMATICS AND INFORMATICS ISCAMI 2010: Bratislava, máj 2010

Zoznam riešených grantov

- ◇ GRANT UK Č. UK/157/2012 (2012): *Stochastické optimálne riadenie s koncovou podmienkou*, riešiteľ.
- ◇ GRANT VEGA 1/2429/12 (2012–2013):, spoluriešiteľ.

Stochastic discrete optimal control problems with terminal state constraints

The focus of the Dissertation Thesis is on the ***terminal state constraints*** in discrete stochastic optimal control problems. In the deterministic problems, different types of state constraints can be easily formulated and solved using Bellman's dynamic programming equation. In contrast, additional constraints are not commonly used in the stochastic optimal control problems.

Firstly, we concentrate on ***constraint formulation***. Therefore we discuss two main possibilities for constraint formulation:

◇ Expected value terminal constraint

$$E_{k-1}\left[x_k\right] = E\left[x_k \,|\, x_{k-1}\right] \geq \mu, \tag{14}$$

◇ Probabilistic constraint

$$P\left[\, x_k \geq \mu \,\right] \geq \beta. \tag{15}$$

In both cases, we define ***sets of feasible control values***, thus we can solve the problem using derived dynamic programming equation. Additionally, we compare two definitions for feasible set for expected value constraint.

Furthermore, we discuss an ***alternative way*** for solving constrained problems. We can see the constraint as an additional objective we want to achieve, hence we move constraint into objective function as a penalization term. In case target value is not reached, i.e. $x_k < \mu$, special penalization term decreases the objective value thus such strategy is not preferred.

In the second part of Thesis, we present ***numerical results*** for particular problems to illustrate usage of terminal constraints in the stochastic optimal control. We can briefly summarize our observations:

◇ ***Problem of radish dealer***: we checked numerical scheme in discrete case for problems with terminal constraint. Moreover, we have done comparison between optimal control and stochastic program using Monte-Carlo simulations.

◇ ***Portfolio optimization problem***: we discussed expected utility maximization and risk minimization with terminal constraint and we compared constrained problems and problems with penalization to find out that infeasible state might occur in constrained problems.

In conclusion, we deeply investigated formulation of constraints in case of stochastic problems and we suggested a solution using special dynamic programming equation, that can be used for numerical and analytical calculation as well.