

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**Stochastické diskkrétne úlohy optimálneho riadenia  
s ohraničeniami na koncový stav**

**DIZERTAČNÁ PRÁCA**

2013

Mgr. Martin Lauko

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



**Stochastické diskkrétne úlohy optimálneho riadenia  
s ohraničeniami na koncový stav**

**DIZERTAČNÁ PRÁCA**

*Študijný program:* Aplikovaná matematika

*Študijný odbor:* 9.1.9. Aplikovaná matematika

*Pracovisko:* Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

*Školiteľ:* Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Bratislava 2013

Mgr. Martin Lauko

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského  
Mlynská dolina  
842 48 Bratislava

Dizertačná práca je dostupná online na stránke  
<http://davinci.fmph.uniba.sk/~lauko5/>

© 2013 Martin Lauko  
Všetky práva vyhradené.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Mgr. Martin Lauko  
**Študijný program:** aplikovaná matematika (Jednoodborové štúdium, doktorandské III. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** dizertačná  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Stochastické diskkrétne úlohy optimálneho riadenia s ohraničeniami na koncový stav

**Cieľ:** Analyzovať možnosti zavedenia podmienky na koncový stav v diskrétnych stochastických úlohách optimálneho riadenia v súvislosti s metódou dynamického programovania. Získané poznatky aplikovať na zvolené úlohy z oblasti ekonómie alebo financií.

**Školiteľ:** doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

**Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce:**  
bez obmedzenia

**Dátum zadania:** 19.10.2010

**Dátum schválenia:** 19.10.2010

prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.  
garant študijného programu

študent

školiteľ

LAUKO, Martin: *Stochastické diskrétne úlohy optimálneho riadenia s ohraničeniami na koncový stav* [Dizertačná práca]. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava (2013), 114 s.  
Školiteľ: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

## Abstrakt

Dizertačná práca sa zaoberá *diskrétnymi stochastickými úlohami* optimálneho riadenia *s ohraničeniami na koncový stav*. Na rozdiel od deterministických úloh, v stochastických úlohách optimálneho riadenia sa takéto ohraničenia väčšinou nepoužívajú.

Zaoberáme sa možnosťami formulácie ohraničení v stochastických úlohách, najmä podmienkou v tvare strednej hodnoty koncového stavu a ohraničením na minimálnu pravdepodobnosť splnenia podmienky. V oboch prípadoch definujeme množiny prípustných hodnôt riadenia tak, aby sme úlohu mohli riešiť pomocou rovnice dynamického programovania.

Diskutujeme aj alternatívnu možnosť riešenia úloh, kde ohraničenie presunieme do účelovej funkcie vo forme penalizácie. V druhej časti práce ilustrujeme použitie koncových ohraničení na konkrétnych numerických príkladoch.

### Kľúčové slová

stochastické optimálne riadenie, koncová podmienka, podmienka na strednú hodnotu, podmienka na pravdepodobnosť, penalizácia, diskrétna numerická schéma, minimalizácia rizika

**LAUKO, Martin: *Stochastic discrete optimal control problems with terminal state constraints*** [Dissertation Thesis]. Faculty of mathematics, physics and informatics, Comenius University, Bratislava (2013), 114 p.  
Supervisor: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

## Abstract

Dissertation Thesis is focused on *discrete stochastic optimal control problems with terminal state constraints*. In contrast with deterministic problems, these constraints are not commonly used in stochastic optimal control problems.

We concentrate on possibilities for constraint formulation, mainly the expected value terminal state constraint and probabilistic constraint. In both cases we define sets of feasible control values, thus we can solve the problem using dynamic programming equation.

We discuss also alternative way for problem solving, when we move constraint into utility function in a form of penalization. In the second part of Thesis, we illustrate usage of terminal constraints by particular numerical examples.

## Keywords

stochastic optimal control, terminal constraint, expected value constraint, probabilistic constraint, penalization, discrete numeric scheme, risk minimization

# Predhovor

Pomocou úloh optimálneho riadenia môžeme modelovať a riešiť problémy, v ktorých sa opakovanne rozhodujeme – vo viacerých časových etapách volíme vonkajší vstup do systému, tzv. riadenie. Stav systému sa vyvíja podľa diferenčnej rovnice. V úlohách sa môžu vyskytovať aj rôzne ohraničenia na stav a riadenie, tieto však pri riešení pomocou Bellmanovej rovnice dynamického programovania nepredstavujú významnejšiu komplikáciu.

V reálnych problémoch sa často stretávame aj s náhodnými vplyvmi, ako sú napríklad náhodný dopyt zákazníkov alebo vopred neznámy čas trvania výroby. Takéto vplyvy môžeme zohľadniť pomocou *stochastických úloh optimálneho riadenia*.

Stochastické úlohy optimálneho riadenia sa obvykle riešia bez ohraničení na priebežný alebo koncový stav. To však nemusí stačiť na riešenie úloh z praxe. Často v nich potrebujeme uvažovať dodatočnú podmienku napríklad na koncový stav. Nie je však jasné, ako túto podmienku formulovať a akým spôsobom takúto úlohu riešiť. Preto je cieľom tejto práce analyzovať diskrétné stochastické úlohy optimálneho riadenia s ohraničeniami na koncový stav.

V práci sa zaoberáme dvoma typmi ohraničenia – podmienkou v tvare strednej hodnoty a podmienkou na minimálnu pravdepodobnosť. V oboch prípadoch definujeme množiny prípustných hodnôt riadenia tak, aby sme úlohu mohli riešiť pomocou rovnice dynamického programovania. V druhej časti práce ilustrujeme ohraničenia na koncový stav pri numerickom riešení konkrétnych úloh: úlohe predavača red'koviek a úlohe o alokácii prostriedkov v portfóliu.

Na tomto mieste by som sa rád poďakoval všetkým, ktorí mi pomohli pri vzniku a úspešnom dokončení tejto práce. V prvom rade sa chcem poďakovať mojej školiteľke Margaréte Halickej za odborné vedenie, cenné pripomienky a podporu počas písania dizertačnej práce.

Moja vďaka patrí aj Beáте Stehlíkovej, Ľubici Kossaczkej, Danielovi Ševčovičovi a Margaréte Halickej za výbornú spoluprácu pri vedení cvičení pre študentov EFM, čo bola veľmi príjemná súčasť môjho PhD. štúdia. Veľmi pekne ďakujem aj ostatným kolegom z Katedry aplikovanej matematiky a štatistiky za priateľský prístup, motiváciu a podnetné vedecké prostredie, vďaka ktorým bolo moje doktorandské štúdium zaujímavé a strávil som tu skvelé štyri roky.

Na záver sa chcem poďakovať aj mojej rodine a kamarátom, ktorí ma podporovali a inšpirovali počas doktorandského štúdia a pri tvorbe tejto práce. Ďakujem Vám.

Bratislava, apríl 2013

Martin Lauko

# Obsah

<b>Predhovor</b>	<b>1</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>4</b>
1.1 Stochastické úlohy optimálneho riadenia . . . . .	4
1.2 Ohraničenia v deterministickej úlohe . . . . .	7
1.3 Prehľad literatúry . . . . .	8
1.4 Ciele dizertačnej práce . . . . .	12
1.5 Štruktúra práce . . . . .	13
<b>2 Úlohy s ohraničeniami na koncový stav</b>	<b>14</b>
2.1 Podmienka v tvare strednej hodnoty . . . . .	16
2.1.1 Pôvodná definícia prípustných stratégií . . . . .	17
2.1.2 Alternatívna definícia prípustných stratégií . . . . .	18
2.2 Minimálna pravdepodobnosť splnenia podmienky . . . . .	19
2.2.1 Maximalizácia pravdepodobnosti splnenia podmienky . . . . .	20
2.2.2 Prípustné stratégie pri minimálnej pravdepodobnosti . . . . .	21
2.3 Úloha s penalizáciou . . . . .	22
2.3.1 Súvis s pôvodnou úlohou . . . . .	23
2.4 Rovnica dynamického programovania . . . . .	25
2.4.1 Odvodenie pre úlohu so všeobecným ohraničením . . . . .	26
2.4.2 Formulácia a dôkaz vety . . . . .	28
<b>3 Možnosti numerického riešenia</b>	<b>31</b>
3.1 Numerická schéma . . . . .	31
3.2 Diskretizácia úlohy . . . . .	34
<b>4 Úloha predavača red'koviek</b>	<b>37</b>
4.1 Formulácia úlohy optimálneho riadenia . . . . .	37
4.2 Riešenie metódou dynamického programovania . . . . .	39
4.2.1 Numerické riešenie . . . . .	40
4.2.2 Množina prípustných stavov . . . . .	41
4.3 Stochastické programovanie . . . . .	43
4.4 Porovnávanie kvality riešení . . . . .	45
4.5 Prehľad výsledkov . . . . .	46



---

<b>5 Úloha o portfóliu</b>	<b>52</b>
5.1 Formulácia úlohy optimálneho riadenia	52
5.1.1 Účelová funkcia	54
5.1.2 Koncové podmienky	55
5.1.3 Rozdelenie náhodného výnosu	55
5.2 Analytické riešenie	57
5.2.1 Maximalizácia strednej hodnoty	57
5.2.2 Maximalizácia očakávanej užitočnosti	58
5.2.3 Minimalizácia rizika	63
5.2.4 Maximalizácia pravdepodobnosti splnenia podmienky	66
5.3 Numerické riešenie	69
5.3.1 Použité hodnoty parametrov	69
5.3.2 Diskretizácia stavu a riadenia	69
5.4 Úloha bez ohraničení	71
5.4.1 Maximalizácia strednej hodnoty	71
5.4.2 Maximalizácia očakávanej užitočnosti	72
5.5 Podmienka na koncový stav	78
5.5.1 Koncová podmienka v tvare strednej hodnoty	78
5.5.2 Alternatívna formulácia podmienky	83
5.5.3 Minimálna pravdepodobnosť splnenia podmienky	85
5.5.4 Riešenie úlohy na ohraničenej oblasti	87
5.6 Úloha s penalizáciou	92
5.6.1 Maximalizácia užitočnosti	92
5.6.2 Minimalizácia rizika	93
5.7 Simulácie a porovnanie riešení	98
5.7.1 Rozdelenie koncového stavu	99
5.7.2 Riešenie na ohraničenej oblasti	104
5.7.3 Úloha s penalizáciou	106
<b>6 Záver</b>	<b>107</b>
<b>Literatúra</b>	<b>110</b>

---

# Kapitola 1

## Úvod

---

Skôr ako predstavíme konkrétne ciele dizertačnej práce, sformulujeme všeobecnú schému diskretných stochastických úloh optimálneho riadenia. Zároveň uvedieme tie základné poznatky o takýchto úlohách, ktoré budú tvoriť teoretický základ pre našu prácu. V stochastických úlohách optimálneho riadenia je vývoj v čase popísaný stavovou diferenčnou rovnicou, ktorá závisí nielen od vonkajšieho vstupu (riadenia), ale aj od vývoja náhodnej premennej. V podkapitole 1.2 sumarizujeme známe spôsoby riešenia deterministických úloh s ohraňeniami na koncový stav. Následne nadviažeme na prehľad súčasnej literatúry a predstavíme ciele dizertačnej práce.

### 1.1 Stochastické úlohy optimálneho riadenia

Základom pre tento teoretický úvod bola učebnica [29], ktorej autori Brunovský, Halická a Jurča vykladajú teóriu diskretných úloh optimálneho riadenia pomocou mnohých praktických príkladov. Osobitnú kapitolu venovali práve stochastickým úlohám.

#### Úlohy optimálneho riadenia

Úlohy optimálneho riadenia (OR) vo všeobecnosti riešia nasledujúci problém (podľa [29]): Uvažujme systém, ktorého stav číselne popisuje **stavová premenná**. Našou úlohou bude tento systém v priebehu  $k$  etáp „riadiť“, teda voliť vonkajší vstup – **riadenie**.

Aktuálny stav na začiatku  $i$ -tej etapy ( $i \in \mathcal{I} \equiv \{0, \dots, k-1\}$ ) je opísaný stavovou premennou  $x_i$  z množiny stavov  $\mathbb{X}_i$ . Stav systému sa riadi diferenčnou rovnicou  $x_{i+1} = f_i(x_i, u_i)$ , do ktorej vstupuje aktuálny stav  $x_i$  a zvolená hodnota riadenia  $u_i \in \mathbb{U}_i$ , kde  $\mathbb{U}_i$  sú zadané podmnožiny množiny hodnôt riadenia  $\mathbb{U}$ . Našou úlohou je voľbou riadenia maximalizovať, resp. minimalizovať účelovú funkciu v tvare

$$\sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i).$$

Počiatočný stav je spravidla pevne zadaný  $x_0 = a$ , pričom môžeme požadovať, aby koncový stav  $x_k$  patril do cieľovej množiny  $C$ .

Keďže systém pozorujeme a riadime iba v diskretných časových etapách, ide o **úlohu OR s diskretným časom**. Počet etáp  $k$  je pevne zadaný, preto hovoríme o **úlohách s pevným časom**.

Vzhľadom na charakter stavovej premennej môžeme rozlíšiť dva druhy diskretných úloh OR: pokiaľ  $\mathbb{X}_i$  obsahuje len spočítateľne veľa prípustných hodnôt stavu (predstavuje napríklad počty kusov), hovoríme o úlohe **s diskretným stavom**. Pokiaľ však  $x_i$  môže nadobudnúť ľubovoľnú hodnotu z určitého intervalu v  $\mathbb{R}^n$ , stav má teda kontinuálny charakter, ide o úlohu **so spojitým stavom**. Podobne môžeme klasifikovať aj hodnoty riadenia ako **diskrétné** (konečne, resp. spočítateľne veľa prípustných hodnôt  $\mathbb{U}_i$ ), resp. **spojité** (ľubovoľná hodnota z intervalu).

### Stochastické úlohy

Pokiaľ rozšírime úlohu optimálneho riadenia o náhodné vplyvy, dostaneme **stochastickú úlohu**. Tieto náhodné vplyvy reprezentuje **náhodná premenná**  $z_i$ , pričom predpokladáme, že jej rozdelenie  $\mathbb{Z}_i$  je známe a náhodné premenné  $z_i$  sú v jednotlivých časoch  $i \in \mathcal{I}$  od seba nezávislé. Pre jednoduchosť budeme v tejto práci uvažovať iba úlohy, v ktorých má náhodná premenná diskrétné rozdelenie. Predpokladajme tiež, že konkrétnu realizáciu náhodnej premennej  $z_i$  v  $i$ -tej etape sa dozvieme až po stanovení hodnoty riadenia  $u_i$ .

Náhodná premenná môže vystupovať v diferenciálnej rovnici pre  $x_{i+1}$  ako náhodná dodatočná zmena stavu systému, alebo aj v účelovej funkcii  $f_i^0$ . Preto nemôžeme maximalizovať priamo účelovú funkciu závislú od realizácie  $z_i$ , maximalizovať budeme iba **strednú hodnotu účelovej funkcie** cez všetky náhodné premenné  $z_0, \dots, z_{k-1}$ . Dostávame tak úlohu

$$\begin{aligned} \text{maximalizovať} \quad & E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i, z_i) \right] \\ \text{pri ohraničeníach} \quad & x_{i+1} = f_i(x_i, u_i, z_i), \quad i = 0, \dots, k-1, \\ & x_0 = a, \\ & u_i \in \mathbb{U}_i, \quad i = 0, \dots, k-1, \\ & z_i \sim \mathbb{Z}_i, \quad i = 0, \dots, k-1, \end{aligned} \tag{1.1}$$

Na rozdiel od deterministickej úlohy, úloha (1.3) je úlohou bez akýchkoľvek ohraničení na stav  $x_i$ , resp. koncový stav  $x_k$ .

Pod **(programovým) riadením** tejto úlohy rozumieme postupnosť hodnôt riadiacich premenných  $\mathcal{U} = \{u_0, u_1, \dots, u_{k-1}\}$ . Konkrétne realizácie náhodnej premennej  $z_i$  označíme  $\mathcal{Z} = \{z_0, z_1, \dots, z_{k-1}\}$ . Potom **odozvou**  $\mathcal{X}$  na riadenie  $\mathcal{U}$  pri realizácii náhodných premenných  $\mathcal{Z}$  chápeme postupnosť  $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ , kde  $x_0$  je zadané a  $x_i = x_i(\mathcal{U}, \mathcal{Z})$  je riešením stavovej diferenciálnej rovnice (1.1). Predpokladáme pritom, že riadenia spĺňajú  $u_i \in \mathbb{U}_i$  pre všetky  $i \in \mathcal{I}$  a realizácie náhodných premenných  $z_i$  zodpovedajú rozdeleniu  $\mathbb{Z}_i$  pre všetky  $i \in \mathcal{I}$ .

Programové riadenie má zmysel uvažovať, keď chceme vopred zvoliť hodnoty riadenia pre všetky etapy podobne ako v deterministickom prípade. Často však máme možnosť systém priebežne pozorovať a hodnotu riadenia  $u_i$  v  $i$ -tej etape voliť až vtedy, keď už poznáme nový (náhodný) stav systému  $x_i$  a teda volíme  $u_i$  ako funkciu aktuálneho stavu  $u_i = v_i(x_i)$ .

Optimálne riešenie úlohy (1.1) preto hľadáme ako **spätnú väzbu**  $v_i : \mathbb{X}_i \rightarrow \mathbb{U}_i$ , kde  $v_i(x_i)$  je funkcia aktuálneho stavu  $x_i$ . Postupnosť týchto funkcií  $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\}$  potom nazveme

**stratégia.** Stratégia je **prípustná**, ak pre každé  $i$  a  $x_i \in \mathbb{X}_i$  bude  $u_i = v_i(x_i) \in \mathbb{U}_i$ , teda pre ľubovoľný stav  $x_i$  zvolíme hodnotu riadenia spomedzi prípustných hodnôt  $\mathbb{U}_i$ . Množinu všetkých prípustných stratégií označíme  $\mathcal{S}$ .

Pre konkrétnu stratégiu  $\mathcal{V} \in \mathcal{S}$  a danú realizáciu náhodnej veličiny  $\mathcal{Z}$  už môžeme jednoznačne vypočítať hodnotu účelovej funkcie  $J$  úlohy (1.1):

$$J(\mathcal{V}, \mathcal{Z}) := \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, v_i(x_i), z_i), \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \text{kde } x_{i+1} &= f_i(x_i, v_i(x_i), z_i), & i = 0, \dots, k-1, \\ x_0 &= a. \end{aligned}$$

Teraz môžeme definovať stochastickú úlohu optimálneho riadenia nasledovne:

**Definícia 1.1 (Štandardná stochastická úloha)** Nasledujúcu úlohu

$$\begin{aligned} \max_{\mathcal{V} \in \mathcal{S}} \quad & E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, v_i(x_i), z_i) \right] \\ \text{pri podmienkach} \quad & x_{i+1} = f_i(x_i, v_i(x_i), z_i), & i = 0, \dots, k-1, \\ & x_0 = a, \\ & z_i \sim \mathbb{Z}_i, & i = 0, \dots, k-1, \end{aligned} \quad (1.3)$$

maximalizácie v triede  $\mathcal{S}$  prípustných stratégií  $\mathcal{V}$  definovaných ako  $\mathcal{V} = \{v_0, \dots, v_{k-1}\}$ , kde  $v_i(x) \in \mathbb{U}_i$  pre všetky  $i \in \mathcal{I}$  budeme nazývať **štandardná stochastická úloha optimálneho riadenia**. Optimálne riešenie tejto úlohy nazývame **optimálnou stratégiou**.

Keďže  $E$  chápeme ako strednú hodnotu cez postupnosť všetkých náhodných premenných  $\mathbb{Z} = \{z_0, z_1, \dots, z_{k-1}\}$ , pre zjednodušenie ďalšieho zápisu zavedme označenie  $E_{i,j}$  pre  $i \leq j$  ako strednú hodnotu cez náhodné premenné  $z_i, \dots, z_j$ . Pre  $i = j$  zapíšeme len  $E_i$ , resp.  $E_{z_i}$  ako strednú hodnotu cez náhodnú premennú  $z_i$ .

**Definícia 1.2 (Systém úloh)** Pre pevné  $j$ ,  $0 \leq j \leq k-1$  a ľubovoľné  $x \in \mathcal{X}_j$  budeme úlohou  $\mathcal{D}_j(x)$  rozumieť úlohu

$$\begin{aligned} \max \quad & E_{j,k-1} J_j(x, \mathcal{V}_j, \mathcal{Z}_j) := \sum_{i=j}^{k-1} f_i^0(x_i, v_i(x_i), z_i), \\ \text{kde } \quad & x_{i+1} = f_i(x_i, v_i(x_i), z_i), & i = j, \dots, k-1, \\ & x_j = x, \end{aligned} \quad (1.4)$$

pričom použitú stratégiu sme označili  $\mathcal{V}_j = \{v_j, \dots, v_{k-1}\}$  a realizáciu náhodnej premennej  $\mathcal{Z}_j = \{z_j, \dots, z_{k-1}\}$ . Množinu všetkých úloh  $\mathcal{D}_j(x)$  pre  $j = 0, \dots, k-1$  potom nazveme **systém úloh  $\mathcal{D}$** .

**Definícia 1.3 (Hodnotová funkcia pre  $\mathcal{D}$ )** Funkciu  $V_j : \mathbb{X}_j \rightarrow \mathbb{R}$  nazývame hodnotovou funkciou pre systém úloh  $\mathcal{D}_j(x)$ , keď platí

$$V_j(x) = \max_{\mathcal{V}_j} E_{j,k-1} J_j(x, \mathcal{V}_j, \mathcal{Z}_j)$$

pre každé  $x \in \mathbb{X}_j$  a pre pevné  $j$ . Potom postupnosť funkcií  $V = \{V_0, \dots, V_{k-1}\}$  nazývame hodnotovou funkciou pre systém úloh  $\mathcal{D}$ .

Podobne ako v prípade deterministických úloh, aj optimálne riešenie štandardnej stochastickej úlohy možno nájsť pomocou rovnice dynamického programovania (RDP). Dôkaz nasledujúcej vety (za istých technických predpokladov) možno nájsť v [29, Veta 2.7].

**Veta 1.4 (Rovnica dynamického programovania)** *Uvažujme štandardnú úlohu (1.3). Potom  $V = \{V_0, \dots, V_{k-1}\}$  je hodnotová funkcia a  $\hat{V} = \{\hat{v}_0, \dots, \hat{v}_{k-1}\}$  optimálna stratégia práve vtedy, keď  $V_j, \hat{v}_j, j = 0, \dots, k-1$ , spĺňajú pre každé  $j$  a  $x$  rovnicu dynamického programovania:*

$$\begin{aligned} V_j(x) &= \max_{u \in U_i} E_j \left[ f_j^0(x, u, z_j) + V_{j+1}(f_j(x, u, z_j)) \right] \\ &= E_j \left[ f_j^0(x, \hat{v}(x), z_j) + V_{j+1}(f_j(x, \hat{v}(x), z_j)) \right], \\ V_k(x) &= 0, \quad \text{pre každé } x. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Rovnica dynamického programovania z vety 1.4 nám pre úlohu typu (1.3) dáva zároveň konkrétny návod na výpočet riešenia - optimálnej stratégie a hodnotovej funkcie: rekurentne od konca. Týmto spôsobom možno riešiť stochastické úlohy OR aj numericky - pomocou počítača, napr. v programe Matlab. Numerickému riešeniu sa podrobne venujeme v kapitole 3.

## 1.2 Ohraničenia v deterministickej úlohe

Pripomeňme, že rovnica dynamického programovania podľa Vety 1.4 platí iba pre štandardnú stochastickú úlohu (1.3), ktorá však neobsahuje žiadne ohraničenia na priebežný stav  $x_i$ , resp. koncový stav  $x_k$ . V deterministickom prípade, teda v úlohách bez náhodných vplyvov sa však formulujú aj úlohy s rôznymi tvarmi ohraničeniami na stavovú premennú, resp. koncový stav, prípadne aj zmiešané ohraničenia na stav a riadenie. Zahrnutie takýchto ohraničení nepredstavuje žiadne principiálne problémy a aj pre takéto úlohy platí analógia rovnice dynamického programovania.

Na tomto mieste zrekapitulujeme známe výsledky pre deterministické úlohy, ktorých podrobné odvodenie možno nájsť v knihe [29]. Riešenie v tomto prípade hľadáme v tvare programového riadenia, teda ako optimálnu postupnosť hodnôt riadenia  $\mathcal{U} = \{u_0, u_1, \dots, u_{k-1}\}$ , ktoré treba zvoliť v jednotlivých časových etapách.

Ohraničenie na koncový stav typu  $x_k \geq \mu$  môžeme ho chápať ako určité obmedzenie na výber riadenia. Prípustné budú len také postupnosti  $u_i \in \mathbb{U}_i$  pre  $i \in \mathcal{I}$ , ktoré spolu so svojou odozvou spĺňajú koncovú podmienku.

Označme  $\Gamma_i(x_i)$  množinu tých  $u_i \in \mathbb{U}_i$ , ktoré sú prvým členom postupnosti nejakého prípustného riadenia v úlohe  $\mathcal{D}_i(x)$  v čase  $i$  pre daný stav  $x_i$ . V rovnici dynamického programovania sa toto obmedzenie prejaví tak, že namiesto  $\max_{u_i \in \mathbb{U}_i}$  budeme hľadať  $\max_{u_i \in \Gamma_i(x_i)}$ , teda účelovú funkciu v RDP budeme maximalizovať len v triede prípustných hodnôt riadenia.

Technicky môžeme toto obmedzenie realizovať aj voľbou cieľovej množiny  $C$ , keďže požadujeme  $x_k \in C$  ako podmienku prípustnosti. Definujeme

$$C = \{x_k \in \mathbb{X}_k \mid x_k \geq \mu\}$$

a potom zvolíme hodnotovú funkciu  $V_k(x)$  v tvare

$$V_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in C \Leftrightarrow x \geq \mu, \\ -\infty, & \text{inak.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Podobným spôsobom môžeme riešiť aj úlohy s inými tvarmi ohraničenia na koncový stav, stačí vhodne definovať cieľovú množinu  $C$ .

Všimnime si, že v (1.6) sme sa efektívne vysporiadali aj s prípadnou neprípustnosťou riadení: v čase  $i = k-1$  pre pevné  $x_{k-1}$  volíme podľa RDP také  $u_{k-1}$ , aby sme maximalizovali  $f^0 + V_k(x_k)$ , kde  $x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1})$ . Ak pre všetky  $u_{k-1} \in U_{k-1}$  bude  $V_k(x_k) = -\infty$ , tak aj  $V_{k-1}(x_{k-1}) = -\infty$  a teda neprípustnosť konkrétneho stavu  $x_{k-1}$  sa prenesie do času  $i = k-2$ . Naopak, ak pre nejaké  $u_{k-1}$  bude  $V_k(x_k) \neq -\infty$ , tak sa takéto  $u_{k-1}$  môže zvoliť ako optimálne a aj optimálna hodnota  $V_{k-1}(x_{k-1})$  bude určite konečná.

To vedie k tomu, že ak existuje prípustná hodnota riadenia  $u_i \in \Gamma_i(x_i)$  pre každé  $i$  a  $x$ , tak aj optimálna hodnota riadenia získaná RDP bude taká, že jeho odozva  $x_k$  splní  $x_k \in C$ , resp. ekvivalentne  $V_k(x_k) \neq -\infty$ . Tým zabezpečíme, že koncová podmienka bude splnená.

### Funkcia koncového stavu

Popri podmienke na koncový stav budeme uvažovať aj prípadnú funkciu koncového stavu v účelovej funkcii. Deterministickú úlohu môžeme rozšíriť účelovú funkciu o dodatočný člen  $\varphi(x_k)$ :

$$\max_{u_i} \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i) + \varphi(x_k). \quad (1.7)$$

Pri riešení definujeme hodnotovú funkciu  $V_k(x)$  ako

$$V_k(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in C, \\ -\infty, & \text{inak,} \end{cases} \quad (1.8)$$

tým pádom môžeme pomocou RDP úspešne riešiť aj takéto úlohy s funkciou koncového stavu (v tzv. Mayerovom tvare).

## 1.3 Prehľad literatúry

Pri modelovaní reálnych problémov často musíme čeliť náhodným vplyvom – napríklad náhodnému dopytu spotrebiteľov alebo času trvania výroby (podľa [60]). Matematický základ pre takéto rozhodovanie ponúkajú hneď dve oblasti matematiky – *stochastické optimálne riadenie* (SOR) a *stochastické programovanie* (SP).

Stochastické optimálne riadenie sme si už v hrubých rysoch predstavili v predchádzajúcej podkapitole. V týchto úlohách sa kladie dôraz na dynamický vývoj, spravidla vo viacerých etapách. Deterministickým prototypom týchto úloh sú deterministické úlohy optimálneho riadenia. Ako sme už spomenuli vyššie, teória a numerické metódy riešenia sa dajú hladko adaptovať na stochastické úlohy, ak úloha neobsahuje dodatočné ohraničenia na koncový stav.

Na druhej strane stochastické programovanie bolo vyvinuté predovšetkým za účelom riešenia stochastických úloh. Deterministickým prototypom takýchto úloh bolo nelineárne programovanie. V týchto úlohách spravidla nerobia žiadne problémy rozličné typy ohraničení. Ťažkosti však

vznikajú pri pokusoch aplikovať metódy SP na dynamické úlohy. Hoci sa v posledných rokoch rozvíjajú aj tzv. viacstupňové úlohy stochastického programovania, s jednoduchosťou riešenia úloh pomocou optimálneho riadenia sa nedajú porovnať.

Prístupy SOR a SP umožňujú rôznorodé problémy efektívne sformulovať a obsahujú nástroje, ktorými sa dajú riešiť. Ako píše Dupačová v [28], hoci riešia podobné problémy z praxe, vďaka ich nezávislému vývoju a úplne odlišným metódam sú vzájomné porovnania zriedkavé. V ďalšom texte uvádzame prehľad niektorých aplikácií, ktoré vedú na úlohy SOR a SP.

Základnú stochastickú úlohu – problém predavača novín môžeme nájsť v publikáciách stochastického programovania [51], [54], ako aj v optimálnom riadení – predavačka kvetín v [28], resp. predavač reďkoviek v [29]. Úlohu o dopĺňaní bankomatov rieši stochastickým programovaním napr. [20], optimálnym riadením práca [57].

V oblasti financií sa najčastejšie riešia rôzne verzie úlohy na optimalizáciu portfólia, teda maximalizáciu výnosu, užitočnosti, príp. minimalizáciu rizika pri alokovaní prostriedkov. Optimálne riadenie pritom využívajú napríklad články [13], [16], [17], [30], [33], [62], stochastické programovanie [27], [32], [31], [63]. V oblasti financií však môžeme nájsť aj mnohé ďalšie aplikácie stochastického optimálneho riadenia, napr. problém zaistovania portfólia v [11] alebo manažment bankových procesov [43].

Zaujímavá oblasť optimalizácie sú distribučné siete, zväčša riešené pomocou SP ([52], [54], [58]), aplikácie SOR môžeme zasa nájsť v oblasti ekológie ([22], [23]) alebo optimalizácie prevodu energie v plug-in hybridných vozidlách ([14], [42]).

To však bol len veľmi stručný prehľad vybraných aplikácií, v oblasti ekonómie a financií ich môžeme nájsť oveľa viac. Hoci prvé úlohy riešil už Johann Bernoulli v roku 1696 (viď [61]), v dnešnej podobe sa optimálne riadenie vyvinulo až v 20. storočí.

Teória úloh optimálneho riadenia s diskretným časom bola motivovaná hlavne ekonomickými aplikáciami. Tejto oblasti sa venoval americký matematik Richard Bellman, ktorý prišiel s výpočtom optimálneho riadenia pomocou rovnice dynamického programovania a tak svojou monografiou [5] v roku 1957 „naštartoval“ diskretné optimálne riadenie. Nájdeme v nej tiež prvé príklady stochastických úloh (úloha o náhodnej ťažbe zlata). Bellman zdôrazňuje, že pre optimálne rozhodovanie nám stačí informácia obsiahnutá v stavovej premennej.

Bertsekas sa v neskorších publikáciách [6], [7] venuje problematike diskretných aj spojitých úloh optimálneho riadenia podrobnejšie, ich súčasťou sú aj najnovšie vedecké výsledky napr. v oblasti aproximovaného dynamického programovania. Bertsekas je tiež spoluautorom knihy [8], v ktorých sumarizuje problematiku stochastického optimálneho riadenia a podrobne sa venuje teoretickým odvodneniam. Zaujímavou časťou sú problémy s neúplnou informáciou o stave, ktoré sa riešia metódami SOR.

Problematike optimálneho riadenia a osobitne aj stochastického dynamického programovania sa venovali vo svojej knihe [55] aj Stokey a Lucas. Pomocou tzv. rekurzívneho prístupu, čo je obdoba rovnice dynamického programovania, sa zaoberali riešením stochastických úloh so spojitým časom, ktoré boli motivované najmä ekonomickými aplikáciami (napr. modely rastu, manažment skladu, ceny akcií, nezamestnanosť).

### Úlohy optimálneho riadenia s ohraničeniami

Sústredíme sa však teraz na ohraničenia v stochastických úlohách. Ako píše [51], stáva sa, že chceme naraz zohľadniť niekoľko rôznych cieľov a preto niektoré z nich presunieme do ohraničení. Z toho vyplýva potreba riešiť stochastické úlohy s podmienkou na koncovú hodnotu stavu.

V deterministickej úlohe OR pritom nejde o závažnú komplikáciu, vhodným obmedzením množiny prípustných riadení dokážeme zabezpečiť splnenie podmienky (viď kapitola 1.2, resp. [29]). V stochastickom prípade však koncový stav predstavuje náhodnú premennú, preto je zabezpečenie splnenia podmienky komplikovanejšie.

Pri riešení úloh s koncovou podmienkou autori článkov väčšinou volia stochastické programovanie, ako napr. v [33]: vygenerujú strom scenárov a úlohu prevedú na lineárne programovanie, kde zahrnú koncovú podmienku ako ďalšie ohraničenie.

Podľa [16] sa v stochastickom optimálnom riadení (na rozdiel od deterministickeho prípadu) koncové ohraničenia zvyčajne nevyskytujú kvôli neistote ohľadom budúceho vývoja. Táto vedie k nemožnosti zvoliť stratégie, ktoré by zabezpečili splnenie ohraničenia aj v netriviálnych prípadoch. Napriek tomu budeme hľadať možnosti riešenia pre niektoré koncové podmienky.

### Rôzne tvary koncového ohraničenia

Zhrňme si teraz podľa viacerých článkov rôzne tvary ohraničenia na koncový stav (koncovej podmienky) v stochastických úlohách optimálneho riadenia:

1. **Robustná podmienka:**  $x_k \geq \mu$ . Táto musí byť splnená za každých okolností, je to obdoba ohraničenia v deterministickej úlohe. Keďže  $x_k$  je náhodná premenná, splnenie podmienky nemusí byť možné, resp. jej splnenie môže výrazne obmedziť prípustné stratégie a zhoršiť hodnotu účelovej funkcie. Použitie môžeme nájsť v [23], kde sa autori zaoberali aj robustnými riešeniami stochastických úloh OR.
2. **Minimálna pravdepodobnosť splnenia podmienky:**  $P[x_k \geq \mu] \geq \beta$ , pričom minimálnu pravdepodobnosť  $\beta$  si môžeme zvoliť (napr. 90%). Ide o zoslabenie predchádzajúcej podmienky, odpadne tak problém s extrémnymi prípadmi, ktoré majú malú pravdepodobnosť. Úlohy s takýmito podmienkami boli predmetom článku [24].
3. **Podmienka na strednú hodnotu:**  $E[x_k] \geq \mu$ . Táto podmienka bude splnená v priemernom prípade, podobne aj v účelovej funkcii stochastickej úlohy maximalizujeme strednú (priemernú) hodnotu. Tento prípad riešili autori [16] a [23, Definícia 8.13], ktorí zároveň zhodne navrhli rekurentnú formuláciu podmienky v tvare množiny prípustných hodnôt riadenia.

Prvá podmienka – robustná – nie je príliš vhodná pre stochastickú úlohu, keďže výrazne obmedzuje množinu prípustných stratégií a nerešpektuje stochastický charakter úlohy. Z tohto dôvodu sa takýmito podmienkami nebudeme ďalej podrobnejšie zaoberať.

Väčší zmysel dávajú zvyšné podmienky, ktoré náhodnosť úlohy zohľadňujú. Napríklad výhodou podmienky na strednú hodnotu je väčšie množstvo prípustných hodnôt riadenia v porovnaní s robustnou podmienkou. Extrémne prípady s malou pravdepodobnosťou nemajú veľkú váhu.

Čo sa týka podmienky na minimálnu pravdepodobnosť, autori [24] navrhli spôsob hľadania prípustných riadení pomocou špeciálnej úlohy optimálneho riadenia. Týmto spôsobom však



nájde iba riešenie, ktoré maximalizuje pravdepodobnosť splnenia podmienky. Nájdenie optimálneho riadenia spĺňajúceho takúto podmienku ostáva otvorené. Článok [21] tiež uvažuje podmienku na minimálnu pravdepodobnosť, avšak zaoberá sa aproximáciami riešenia.

Medzi oboma podmienkami je pritom úzka súvislosť, ako ukazuje Carpentier v [19], podmienku na minimálnu pravdepodobnosť  $P[x_k \geq \mu] \geq \beta$  môžeme pomocou charakteristickej funkcie  $\Phi(\cdot)$  previesť na ekvivalentnú podmienku na strednú hodnotu  $E[\Phi(x_k)] \geq \beta$ , kde

$$\Phi(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x_k \geq \mu, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Carpentier dopĺňa, že tzv. združenú pravdepodobnostnú podmienku (niekoľko podmienok, ktoré majú byť splnené súčasne s určenou pravdepodobnosťou) môžeme do úlohy OR zahrnúť ako dodatočnú stavovú premennú a stavové ohraničenie.

V knihe [23] autori porovnávali nielen robustné a stochastické podmienky, ale aj robustný a stochastický prístupom k riešeniu úloh OR. Robustný prístup pritom znamená požadované splnenie podmienky, resp. maximalizáciu účelovej funkcie bez ohľadu na vývoj náhodnej premennej, teda uvažovaním najhoršieho prípadu. Tento je však príliš prísny, nie je teda prekvapením, že aj maximálna hodnota účelovej funkcie je horšia ako v prípade stochastického prístupu.

Doteraz sme si všímali články venujúce sa úlohám optimálneho riadenia s diskretným časom, zaujímavé aplikácie však môžeme nájsť aj v spojitom prípade. Môžeme nájsť viaceré články využívajúce Hamilton–Jacobi–Bellmanovu rovnicu. V špeciálnych prípadoch úlohu dokonca analyticky riešia, napríklad Bouchard v článku [10] pre úlohu s ohraničeniami na strednú hodnotu aj minimálnu pravdepodobnosť, resp. Yiu [62] s ohraničením na rizikovú mieru Value-at-Risk. Aktuálny článok [12] z roku 2012 od Boucharda a Nutza sa venuje koncovým podmienkam v prípade spojitých úloh OR a formuluje slabý princíp dynamického programovania pre zovšeobecnené ohraničenia.

Téma ohraničení na koncový stav v stochastických úlohách optimálneho riadenia je teda aktuálna a pomerne často diskutovaná, menej však v úlohách s diskretnými časovými etapami. Riešenie stochastických úloh optimálneho riadenia s podmienkou na koncový stav preto zatiaľ nepovažujeme za uspokojivo vyriešené.

### Ohraničenia v stochastickom programovaní

Vráťme sa však ešte k stochastickému programovaniu a uvažovaným ohraničeniam. Aj tu sa môžeme stretnúť s podmienkou na strednú hodnotu (napr. [33], [36], [59]), častejšie však autori formulujú podmienku na minimálnu pravdepodobnosť, teda tzv. pravdepodobnostnú podmienku. To súvisí aj s tým, že podmienku na strednú hodnotu sa dá aj v stochastickom programovaní ekvivalentne vyjadriť v tvare pravdepodobnostnej podmienky (viď napr. [47]).

Pravdepodobnostným podmienkam v stochastickom programovaní sa podrobne venujú knihy [53] a [54], ktoré zároveň sumarizujú problematiku SP. Podobne aj Prékopa vo svojom článku [47] z roku 1973 a v kapitole [46] o pravdepodobnostnom programovaní, kde rozoberá dva typy úloh SP: maximalizáciu pravdepodobnosti splnenia podmienky a maximalizáciu účelovej funkcie s ohraničením na minimálnu pravdepodobnosť. Úlohám so združenou pravdepodobnostnou podmienkou sa zasa venuje Dupačová v aktuálnych článkoch [25] a [26], konkrétne závislosti riešenia od rozdelenia náhodnej premennej.

Autori [51] ukazujú, ako možno ohraničenia na stav a náhodnú premennú previesť na ohraničenia v tvare strednej hodnoty, s ktorými sa dá ďalej pracovať. Podmienky na strednú hodnotu v stochastickom programovaní podrobne rozoberá O'Brien vo svojej dizertácii [41], zameriava sa na možnosť použiť podmienku na strednú hodnotu na riadenie rizika v stochastických úlohách.

V úlohách stochastického programovania môžeme nájsť aj špeciálne ohraničenie na riziko portfólia, napríklad v [26], [59], iný prístup k ohraničeniu CVaR zvolili autori článku [35].

### Úloha s penalizáciou

Ako sme spomenuli, koncové ohraničenie v stochastickej úlohe môžeme podľa [51] chápať ako ďalšie rozhodovacie kritérium – ďalší cieľ, ktorý sa snažíme naplniť. Namiesto koncovej podmienky ho však môžeme zahrnúť priamo do účelovej funkcie, ako dodatočný penalizačný člen s vhodnou váhou. Penalizácia sa započíta v prípade, že podmienka nie je splnená.

Takýto spôsob riešenia stochastickej úlohy OR navrhli napríklad autori článku [14] v úlohe na optimalizáciu energie hybridných vozidiel, neskôr ho používa aj [42]. Iný druh penalizácie, logaritmickej penalizáciu riadenia uvažuje článok [9], kde pomocou penalizácie v účelovej funkcii v tvare  $-\log(u_i)$  zabezpečuje kladné riadenie.

V stochastickom programovaní sa penalizácii venoval Prékopa v [46] a [47], podľa neho je penalizačný člen v účelovej funkcii pri riešení úlohy s pravdepodobnostnou podmienkou povolený, resp. priamo ho počas riešenia pridáva do účelovej funkcie.

## 1.4 Ciele dizertačnej práce

Nadväzujúc na uvedený prehľad súčasného stavu riešenia diskretných úloh optimálneho riadenia s ohraničeniami na koncový stav sme si stanovili hlavné ciele dizertačnej práce:

- ◇ Preskúmať možnosti riešenia stochastických úloh OR s diskretným časom a diskretným rozdelením náhodnej premennej s podmienkou na koncový stav
  - ◇ Zosumarizovať súčasný stav poznatkov ohľadom riešenia stochastických úloh s koncovými podmienkami podmienkou
  - ◇ Analyzovať rôzne druhy koncových podmienok (ohraničenie v tvare strednej hodnoty, minimálna pravdepodobnosť splnenia podmienky)
- ◇ Analyzovať teoretické a numerické problémy vyplývajúce z riešenia týchto úloh a navrhnúť efektívne riešenia
  - ◇ Sformulovať a dokázať rovnicu dynamického programovania pre úlohy s ohraničeniami na koncový stav
  - ◇ Naformulovať rôzne koncové podmienky v tvare prípustných hodnôt riadenia
  - ◇ Preskúmať možnosti numerického riešenia stochastických úloh s rôznymi verziami koncovej podmienky

- ◇ Experimentálne numericky overiť teoretické výsledky a aplikovať navrhnuté numerické metódy na riešenie dvoch prototypov stochastických úloh:
  - ◇ jednoduchší typ úlohy – diskretný charakter stavu a riadenia, rovnomerné rozdelenie náhodnej premennej, lineárna diferenčná rovnica
  - ◇ zložitejší typ úlohy – kontinuálny charakter stavu a riadenia, komplikovanejšie rozdelenie náhodnej premennej, zložitejšia diferenčná rovnica
- ◇ V jednom z prototypov numericky porovnať úspešnosť splnenia koncovej podmienky na riešeniach získaných stochastickým programovaním v porovnaní s riešením optimálneho riadenia a tak overiť, ktorý spôsob je efektívnejší pri riešení úloh s koncovou podmienkou
- ◇ Na záver pomocou numerických simulácií overiť, ktorý zo spôsobov riešenia stochastických úloh s koncovou podmienkou je výhodnejší

### 1.5 Štruktúra práce

Predstavme si teraz stručne obsah tejto práce. V tejto úvodnej kapitole ponúkame teoretické východiská pre riešenie stochastických úloh optimálneho riadenia v podkapitolách 1.1, 1.2. Časť aktuálnej kapitoly 1.3 sa podrobne venuje prehľadu súčasnej literatúry zameranému na ohraničenia na koncový stav v stochastických úlohách OR a v stochastickom programovaní, následne formulujeme konkrétne ciele DP.

Nasleduje kapitola 2, ktorej obsahom je podrobná analýza koncových ohraničení v tvare strednej hodnoty, resp. podmienky na minimálnu pravdepodobnosť. Odvádzame tu množiny prípustných hodnôt riadenia pre jednotlivé podmienky. Osobitnú podkapitolu sme venovali verzii úlohy s penalizáciou, čo je alternatívny spôsob riešenia úloh s koncovou podmienkou. Zároveň sme odvodili tvar rovnice dynamického programovania pre úlohy s koncovým ohraničením.

V druhej časti práce sa venujeme numerickému riešeniu stochastických úloh, kde pomocou experimentov ilustrujeme možnosti riešenia praktických problémov s ohraničením na koncový stav. Najskôr tretia kapitola popisuje použitú numerickú schému. Tú využijeme v kapitole 4 pri riešení diskretnéj úlohy predavača red'koviek s koncovou podmienkou, kde zároveň porovnáваме riešenie získané optimálnym riadením (dynamickým programovaním) a stochastickým programovaním. Pri testovaní volíme rôzne parametre modelu.

Náplňou piatej kapitoly je riešenie zložitejšej úlohy o alokácii prostriedkov v portfóliu, pričom zároveň preskúmame a porovnááme oblasti prípustných riešení pre rôzne formulácie koncovej podmienky. Úspešnosť splnenia koncových podmienok overujeme aj pomocou simulácií.

V závere sumarizujeme dôležité zistenia a výsledky dosiahnuté v tejto dizertačnej práci.

---

## Kapitola 2

### *Úlohy s ohraničeniami na koncový stav*

---

V tejto kapitole podrobne analyzujeme stochastické úlohy optimálneho riadenia s diskretným časom a s diskretným rozdelením náhodnej premennej, v ktorých vystupujú ohraničenia na koncový stav. Tieto ohraničenia budeme skrátene nazývať aj koncové podmienky, príp. koncové ohraničenia.

Ako uvádzame už v časti 1.3, zaujímať sa budeme najmä o dva druhy koncových podmienok, ktoré upresníme v samostatných podkapitolách:

- Podmienka v tvare strednej hodnoty koncového stavu

$$E \left[ x_k \right] \geq \mu. \quad (2.1)$$

- Ohraničenie na minimálnu pravdepodobnosť splnenia podmienky

$$P \left[ x_k \geq \mu \right] \geq \beta. \quad (2.2)$$

Z hľadiska reálneho použitia môžeme obe podmienky považovať za podobné, v oboch prípadoch máme pravdepodobne záujem, aby hodnota koncového stavu dosiahla minimálne hodnotu  $\mu$ . Z matematického hľadiska ich však nemôžeme považovať za ekvivalentné, nie sú ani riešiteľné rovnakým spôsobom. Z tohto dôvodu ich analyzujeme samostatne.

Najskôr sformulujeme definíciu úlohy optimálneho riadenia s ohraničením na koncový stav (2.1), resp. (2.2) a triedu prípustných stratégií  $\mathcal{S}^*$  pre takúto úlohu.

**Definícia 2.1 (Úloha s ohraničením na koncový stav)** Pod pojmom *stochastická úloha s ohraničením na koncový stav* budeme rozumieť úlohu

$$\begin{aligned} \max_{\mathcal{V} \in \mathcal{S}^*} \quad & E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, v_i(x_i), z_i) \right] \\ \text{pri podmienkach} \quad & x_{i+1} = f_i(x_i, v_i(x_i), z_i), \quad i = 0, \dots, k-1, \\ & x_0 = a, \\ & z_i \sim \mathbb{Z}_i, \quad i = 0, \dots, k-1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

pričom trieda **prípustných stratégií**  $\mathcal{S}^*$  označuje množinu postupností funkcií  $\mathcal{V} = \{v_0, \dots, v_{k-1}\}$ , ktoré spĺňajú podmienky

- i.  $v_i(x_i) \in \mathbb{U}_i$  pre všetky  $i \in \mathcal{I}$  a pre všetky  $x_i \in X_i$ , teda hodnoty riadenia patria do množín prípustných hodnôt riadenia  $\mathbb{U}_i$ ,
- ii. odozva  $\mathcal{X}$  na stratégiu  $\mathcal{V}$  spĺňa koncovú podmienku (2.1), resp. (2.2) pre všetky realizácie náhodnej premennej  $\mathbb{Z}_i$ , pre všetky  $i \in \mathcal{I}$ .

Množina  $X_i$  označuje **množinu prípustných stavov** v čase  $i \in \mathcal{I}$ , teda množinu takých stavov  $x_i \in \mathbb{X}_i$ , pre ktoré existuje aspoň prípustná stratégia  $\mathcal{V} \in \mathcal{S}^*$  spĺňajúca  $v_i(x_i) \neq \emptyset$ .

Na základe definície 2.1 môžeme optimálnu stratégiu pre úlohu (2.3) s ohraničením na koncový stav (2.1), resp. (2.2) hľadať v triede prípustných stratégií, ktoré spolu so svojou odozvou spĺňajú koncové ohraničenia. Avšak nie všetky stratégie spĺňajúce podmienku  $v_i(x_i) \in \mathbb{U}_i$  pre všetky  $i \in \mathcal{I}$  budú prípustné.

Preto bude našou snahou bude popísať konkrétne **množiny prípustných hodnôt riadenia** pre úlohu (2.3), ktoré môžu byť použité v prípustných stratégiách. Potom pri riešení úlohy môžeme použiť rovnicu dynamického programovania. Zavedme preto nasledovné označenia:

**Definícia 2.2 (Množina prípustných hodnôt riadenia)** Množinu prípustných hodnôt riadenia v čase  $i$  a pri aktuálnom stave  $x_i$  budeme označovať  $W_i(x_i)$ , pričom požadujeme  $W_i(x_i) \subseteq \mathbb{U}_i$ , teda  $W_i(x_i)$  musí obsahovať iba prípustné hodnoty riadenia.

**Definícia 2.3 (Úloha s ohraničenou množinou prípustných hodnôt riadenia)** Majme zadané množiny prípustných hodnôt riadenia  $W_i(x_i)$  pre všetky  $i \in \mathcal{I}$ ,  $x_i \in \mathbb{X}_i$ . Potom nasledujúcu úlohu

$$\begin{aligned} \max \quad & E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, v_i(x_i), z_i) \right] \\ & x_{i+1} = f_i(x_i, v_i(x_i), z_i), \quad i = 0, \dots, k-1, \\ & x_0 = a, \\ & v_i(x_i) \in W_i(x_i) \subseteq \mathbb{U}_i, \quad i = 0, \dots, k-1, \\ & z_i \sim \mathbb{Z}_i, \quad i = 0, \dots, k-1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

kde maximalizujeme voľbou hodnoty riadenia  $v_i(x_i)$  z množiny prípustných hodnôt riadenia  $W_i(x_i)$  budeme nazývať **úloha s ohraničenou množinou prípustných hodnôt riadenia**.

**Definícia 2.4 (Množina prípustných stavov)** Pre úlohu (2.4) definujeme množinu prípustných stavov  $X_i$  v časovej etape  $i \in \mathcal{I}$  nasledovným vzťahom

$$X_i = \{x \in \mathbb{X}_i \mid W_i(x) \neq \emptyset\}, \quad i = 0, \dots, k-1,$$

teda stav je prípustný, ak preň existuje aspoň jedna prípustná hodnota riadenia.

Poznamenajme, že pre niektoré hodnoty stavu  $x_i \in \mathbb{X}_i$  môže byť množina  $W_i(x_i)$  prázdna, v prípade ak pre dané  $x_i$  neexistuje prípustné riadenie. Takýto stav  $x_i \notin X_i$  nazveme **neprípustný**, resp. ležiaci mimo prípustnej oblasti.

V nasledujúcich podkapitolách sa postupne zaoberáme úlohami s koncovými ohraničeniami (2.1) a (2.2). V podkapitole 2.3 rozoberáme aj alternatívnu možnosť riešenia úlohy s koncovou podmienkou presunutím podmienky do účelovej funkcie vo forme tzv. penalizácie. Ukážeme, že toto je tiež efektívny spôsob riešenia stochastickej úlohy OR s dodatočným ohraničením. Následne odvodzujeme tvar RDP pre úlohu s ohraničeniami.

## 2.1 Podmienka v tvare strednej hodnoty

Oproti deterministickým úlohám optimálneho riadenia je v stochastických úlohách situácia komplikovanejšia, keďže koncová hodnota stavu  $x_k$  závisí nielen od zvoleného riadenia, ale aj od realizácie náhodnej premennej. Koncový stav  $x_k$  je teda tiež náhodná premenná. Z tohto dôvodu je vhodné zadávať ohraničenie koncového stavu v tvare strednej hodnoty (2.1). Na úvod však potrebujeme upresniť, akú strednú hodnotu budeme uvažovať.

Prirodzene by sme mohli uvažovať ohraničenie na strednú hodnotu cez vektor náhodných premenných  $\{z_0, \dots, z_{k-1}\}$ :

$$E_{0, k-1} [x_k] = E [x_k \mid \hat{x}_0] \geq \mu. \quad (2.5)$$

Podľa [16] je však takáto podmienka vhodná iba v prípade, že poznáme len začiatkový bod  $\hat{x}_0$ , teda ak hľadáme riešenie v tvare programového riadenia, resp. v stochastickom programovaní, kde riešenie nereaguje na aktuálny stav.

V prípade dynamického programovania však hodnotu riadenia v čase  $k-1$  volíme v tvare spätnej väzby  $v_{k-1}(x_{k-1})$ , teda až keď poznáme aktuálnu hodnotu stavu  $x_{k-1}$ . Známu hodnotu  $x_{k-1}$  môžeme využiť aj v koncovom ohraničení, preto podľa článku [16] volíme strednú hodnotu iba cez náhodnú premennú  $z_{k-1}$  v tvare

$$E_{k-1} [x_k] = E [x_k \mid x_{k-1}] \geq \mu, \quad \text{pre všetky } x_{k-1} \in X_{k-1}, \quad (2.6)$$

kde  $x_k = f_{k-1}(x_{k-1}, v_{k-1}(x_{k-1}), z_{k-1})$  pre zvolenú stratégiu  $v_{k-1}(\cdot)$ .

Takáto podmienka lepšie zodpovedá štruktúre dynamického programovania. Keďže máme viac informácií (poznáme hodnotu  $x_{k-1}$ ), tak aj stredná hodnota (2.6) dáva presnejší odhad  $x_k$  ako (2.5). Podmienku (2.6) chceme splniť vo všetkých prípadoch, preto musí byť splnená pre všetky prípustné stavy  $x_{k-1} \in X_{k-1}$  a pre všetky realizácie náhodnej premennej  $Z_{k-1}$ .

Spomeňme niektoré výhody koncovej podmienky v tvare strednej hodnoty (2.6). V porovnaní s robustnou podmienkou, príp. ohraničením v deterministickej úlohe, podmienka na strednú hodnotu nemusí byť nutne splnená vo všetkých prípadoch. Napríklad v extrémnych prípadoch

s minimálnou pravdepodobnosťou nemusí byť splnená, stačí ju splniť v „priemernom“ prípade. Tým pádom aj množina prípustných stratégií bude väčšia ako v prípade robustnej podmienky, preto aj hodnota účelovej funkcie pravdepodobne bude lepšia.

Podmienka (2.6) na koncový stav však ovplyvní prípustnosť stratégií. Kým v štandardnej úlohe bez ohraničení (1.3) sme mohli zvoliť ľubovoľnú postupnosť  $\{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\}$  funkcií spĺňajúcich  $v_i(x) \in \mathbb{U}_i$ , v úlohe s dodatočným ohraničením (2.3) to neplatí. V súlade s definíciou 2.1 musíme vylúčiť stratégie, ktoré by nezabezpečili splnenie podmienky (2.6). Kľúčovou otázkou pri riešení úlohy je prevod ohraničenia (2.6) na množiny prípustných hodnôt riadenia  $W_i(x_i)$  v závislosti od časovej etapy  $i$  a od aktuálneho stavu  $x_i$ .

### 2.1.1 Pôvodná definícia prípustných stratégií

V nasledujúcej časti odvodíme podmienky na prípustnosť jednotlivých hodnôt riadenia. Vychádzame pri tom z definície prípustných stratégií podľa článku [16]. Rovnakým spôsobom definovali množinu prípustných stratégií aj Doyen a De Lara vo svojej knihe [23, definícia 8.13]. V tejto dizertácii však túto formuláciu analyzujeme podrobnejšie a poukážeme aj na slabiny tohto prístupu.

Podmienky prípustnosti preto vyjadríme rekurentne od konca. V poslednom časovom kroku  $i = k - 1$  pri pevnom stave systému  $x_{k-1}$  môžeme pri výbere povoliť len také hodnoty riadenia  $u_{k-1} = v_{k-1}(x_{k-1}) \in \mathbb{U}_{k-1}$ , ktoré spĺňajú podmienku (2.6), teda pre ktoré platí

$$E_{k-1} [x_k] = E_{z_{k-1}} [f_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1}, z_{k-1})] \geq \mu$$

pre danú hodnotu stavu  $x_{k-1}$ . Množinu prípustných hodnôt riadenia  $W_{k-1}(x_{k-1})$  potom popíšeme nasledovne:

$$W_{k-1}(x_{k-1}) = \{u_{k-1} \in \mathbb{U}_{k-1} \mid E_{k-1} f_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1}, z_{k-1}) \geq \mu\}.$$

Táto formulácia pritom musí platiť pre všetky hodnoty stavu  $x_{k-1} \in \mathbb{X}_{k-1}$ .

Pokiaľ je pre dané  $x$  množina  $W_{k-1}(x)$  prázdna, teda pre  $x \notin X_{k-1}$ , nemáme na výber žiadne prípustné hodnoty riadenia. Takémuto  $x$  sa musíme vyhnúť už v predchádzajúcom kroku, preto pre  $i < k - 1$  patria do množiny prípustných hodnôt riadenia tie hodnoty, ktoré vedú do množiny prípustných stavov  $X_{i+1}$ :

$$W_i(x) = \{u_i \in \mathbb{U}_i \mid x_{i+1} = f_i(x, u_i, z_i) \in X_{i+1} \text{ pre všetky } z_i\} \quad (2.7)$$

Podmienka  $x_{i+1} \in X_{i+1}$  splnená pre všetky realizácie náhodnej premennej  $z_i \sim \mathbb{Z}_i$  nám zaručí, že zotrváme v oblasti prípustných stavov a budeme môcť pokračovať výberom prípustnej hodnoty riadenia. Tým pádom aj podmienka na koncový stav bude splnená.

Naše odvodenie môžeme sformulovať vo forme vety, v ktorej dokážeme, že odvodené podmienky prípustnosti jednotlivých hodnôt riadenia sú ekvivalentné podmienke (2.6).

**Veta 2.5 (Ekvivalencia podmienok)** V úlohe (2.3) s ohraničením na strednú hodnotu (2.6) bude stratégia  $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\}$  prípustná práve vtedy, keď hodnoty riadenia spĺňajú podmienky

$$\begin{aligned} v_i(x) &\in W_i(x) \quad \text{pre všetky } x \in \mathbb{X}_i, & i = 0, \dots, k-1, \\ W_i(x) &= \{u_i \in \mathbb{U}_i \mid f_i(x, u_i, z_i) \in X_{i+1} \forall z_i\}, & i = 0, \dots, k-2, \\ W_{k-1}(x) &= \{u_{k-1} \in \mathbb{U}_{k-1} \mid E f_{k-1}(x, u_{k-1}, z_{k-1}) \geq \mu\}, \\ X_i &= \{x \in \mathbb{X}_i \mid W_i(x) \neq \emptyset\}, & i = 0, \dots, k-1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dôk a z. Ukážeme oba smery implikácie pre všetky hodnoty riadenia  $v_i(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ .

„ $\Rightarrow$ “ Pre  $v_{k-1}(x_{k-1}) \in \mathbb{U}_{k-1}$  musí platiť v každom stave  $x_{k-1}$  :

$$E_{k-1} [f_{k-1}(x_{k-1}, v_{k-1}(x_{k-1}), z_{k-1})] \geq \mu,$$

teda môžeme zvoliť len takú hodnotu stratégie  $v_{k-1}(x_{k-1})$ , aby bola splnená podmienka na strednú hodnotu  $f_{k-1}$ . Pre pevné  $x_{k-1}$  musí preto platiť

$$v_{k-1}(x_{k-1}) \in \mathbb{U}_{k-1} \cap \{u \mid E_{k-1} f_{k-1}(x_{k-1}, u, z_{k-1}) \geq \mu\} = W_{k-1}(x_{k-1}),$$

čo pre všetky  $v_{k-1}(x_{k-1}) \in W_{k-1}(x_{k-1})$  platí.

Pre každé  $x$  a každé  $i < k-1$  musí byť hodnota  $v_i(x) \in \mathbb{U}_i$  a navyše sa v najbližšom kroku nemôžeme dostať do neprípustného stavu, teda musí platiť  $x_{i+1} \in X_i$  nezávisle od konkrétnej realizácie  $z_i \sim \mathbb{Z}_i$ . Preto pre  $v_i(x)$  musí pre všetky  $z_i$  platiť:

$$f_i(x, v_i(x), z_i) \in X_{i+1},$$

čím sme sa dostali k rekurentnému vzťahu  $W_i(x)$  pre  $i < k-1$  podľa rovnice (2.8).

„ $\Leftarrow$ “ Majme stratégiu  $\mathcal{V}$  spĺňajúcu rovnice (2.8). Keďže  $v_i(x_i) \in W_i(x_i)$  a  $W_i(x_i) \subseteq \mathbb{U}_i$ , tak aj  $v_i(x_i) \in \mathbb{U}_i$  pre každé  $i$  a  $x$ . Zároveň je  $v_{k-1}(x_{k-1})$  také, že pre každé prípustné  $x_{k-1}$  platí

$$E [f_{k-1}(x_{k-1}, v_{k-1}(x_{k-1}), z_{k-1})] \geq \mu.$$

Z definície  $W_i$  sa nemôžeme dostať do neprípustných  $x_i \notin X_i$ , teda ani do  $x_{k-1} \notin X_{k-1}$ . Týmto sme ukázali prípustnosť stratégie  $\mathcal{V}$  v úlohe s podmienkou (2.6) a teda aj ekvivalenciu prípustných stratégií oboch podmienok. ■

**Poznámka 2.6** Keďže podmienky (2.8) charakterizujú prípustné stratégie pre úlohu (2.3), tak môžeme pôvodnú úlohu (1.3) s podmienkou (2.6) nahradiť úlohou (1.3) s podmienkami (2.8).

### 2.1.2 Alternatívna definícia prípustných stratégií

Predchádzajúca charakterizácia prípustných stratégií (2.8) sa zdá byť vyhovujúca v jednoduchých úlohách, kde splnenie koncovej podmienky dokážeme zabezpečiť vhodným výberom stratégie v poslednom kroku  $k-1$ . V zložitejších úlohách, kde musíme správne zvoliť vhodnú stratégiu vo viacerých etapách vyhovovať nemusí, keďže výrazne obmedzuje množinu prípustných riadení, ako diskutujeme v kapitole 5.5.1 a ďalších. Z tohto dôvodu sme navrhli a experimentálne overili aj nasledujúcu alternatívnu definíciu prípustných riadení.



Nemusí byť totiž celkom zrejmé, prečo v rovnici (2.7) pre  $W_i$  vyžadujeme splnenie podmienky pre všetky realizácie náhodnej premennej  $z_i$ . Intuitívne by mohlo stačiť, aby riadenie  $u_i$  splnilo túto podmienku v strednej hodnote, teda oslabenú podmienku

$$E_i [ f_i (x, u_i, z_i) ] \in X_{i+1}, \quad (2.9)$$

teda aby sme sa „priemerne“ dostali do prípustného stavu. Definujme teda alternatívnu množinu prípustných stratégií nasledovne:

**Definícia 2.7 (Alternatívna definícia)** *Nasledujúce podmienky prípustnosti hodnôt riadenia vzhľadom na podmienku (2.6) budeme nazývať „alternatívna definícia“:*

$$\begin{aligned} v_i(x) &\in W_i(x) \quad \text{pre všetky } x \in \mathbb{X}_i, & i = 0, \dots, k-1, \\ W_i(x) &= \{u_i \in \mathbb{U}_i \mid E_i f_i(x, u_i, z_i) \in X_{i+1}\}, & i = 0, \dots, k-2, \\ W_{k-1}(x) &= \{u_{k-1} \in \mathbb{U}_{k-1} \mid E_{k-1} f_{k-1}(x, u_{k-1}, z_{k-1}) \geq \mu\}, \\ X_i &= \{x \in \mathbb{X}_i \mid W_i(x) \neq \emptyset\}, & i = 0, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Z matematického hľadiska alternatívna definícia 2.7 nie je ekvivalentná podmienke (2.6), v reálnej úlohe však môže lepšie zdefinovať množinu vyhovujúcich (prípustných) stratégií než pôvodná množina hodnôt podľa rovnice (2.8). Pôvodná aj alternatívna definícia prípustných hodnôt riadenia sa dajú ekvivalentne použiť pri výpočte optimálneho riadenia pomocou rovnice dynamického programovania.

Nevýhodou tohto prístupu je však fakt, že pre nejakú realizáciu  $z_i$  sa (s nenulovou pravdepodobnosťou) môžeme v ďalšom kroku dostať mimo množiny prípustných stavov  $X_{i+1}$ , teda k neprípustnému riešeniu. S týmto sa treba vysporiadať v konkrétnej úlohe, resp. použiť pôvodne definované množiny prípustných hodnôt riadenia (2.8), kde tento problém nenastáva.

## 2.2 Minimálna pravdepodobnosť splnenia podmienky

V tejto kapitole sa bližšie venujeme úlohe optimálneho riadenia s koncovou podmienkou

$$P [ x_k \geq \mu ] \geq \beta, \quad (2.11)$$

kde  $\beta$  si zvolíme ako minimálnu požadovanú pravdepodobnosť splnenia podmienky  $x_k \geq \mu$ , napr.  $\beta = 90\%$ . V súlade s definíciou 2.1 prípustné budú iba tie stratégie, ktoré spolu so svojou odozvou  $\mathcal{X}$  spĺňajú podmienku (2.11). Pravdepodobnosť v (2.11) chápeme cez vektor náhodných premenných  $\{z_0, \dots, z_{k-1}\}$ .

Takáto podmienka je podobne ako podmienka na strednú hodnotu oslabením robustnej podmienky, keďže nemusí byť splnená vo všetkých prípadoch. Extrémne málo pravdepodobné prípady nemusíme uvažovať. Na druhej strane riešenie môže dávať rozumné a prakticky použiteľné výsledky reálneho problému vo väčšine prípadov. Na druhej strane, riešenie úlohy optimálneho riadenia s takouto podmienkou nie je úplne vyriešené.

Úlohou optimálneho riadenia s podmienkou na minimálnu pravdepodobnosť sa zaoberajú Doyen a De Lara v [24]. Títo však ukazujú iba spôsob, ako možno nájsť riadenie maximalizujúce pravdepodobnosť splnenia podmienky pomocou špeciálnej úlohy optimálneho riadenia.

Týmto prístupom sa zaoberáme v kapitole 2.2.1 a po podrobnejšej analýze v rámci dizertačnej práce navrhujeme spôsob riešenia pomocou špeciálnej definície prípustných stavov a hodnôt riadenia. Naším cieľom je teda naformulovať podmienku (2.11) v tvare podmienky na prípustnosť stratégií, ktorú môžeme použiť pri riešení úlohy pomocou RDP.

### 2.2.1 Maximalizácia pravdepodobnosti splnenia podmienky

Zamerajme sa teraz na maximalizáciu pravdepodobnosti splnenia podmienky  $x_k \geq \mu$ . Týmto spôsobom môžeme okrem iného zistiť pravdepodobnosť splnenia podmienky pred začiatkom procesu, teda či je naša podmienka vôbec splniteľná. Podobný spôsob zvolili autori článku [24]. Naším cieľom je vyriešiť špeciálnu úlohu OR:

$$\max_{\forall u_i} P [x_k \geq \mu] \quad (2.12)$$

Budeme teda hľadať riadenia, ktoré maximalizujú pravdepodobnosť, že  $x_k \geq \mu$ . Keďže  $x_k$  je náhodná premenná, jej splnenie závisí nielen od voľby stratégie, ale aj od náhodného vývoja a ďalších parametrov úlohy. Vo všeobecnosti splnenie podmienky nemožno zaručiť.

V čase  $i = k$  je hodnota  $x_k$  už známa a je teda zrejmé, či podmienka bola alebo nebola splnená. Zvoľme preto funkciu koncového stavu  $\Phi(x_k)$  nasledovne: jej hodnota bude 1, ak je podmienka na koncový stav splnená, resp. 0 v opačnom prípade. Potom budeme maximalizovať nasledovnú funkciu:

$$\Phi(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x_k \geq \mu, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

V čase  $i = k - 1$  a stave  $x_{k-1}$  sa bude voliť také riadenie, ktoré maximalizuje strednú hodnotu výrazu  $\Phi(x_k)$ : táto bude čo najbližšie k 1, čo zároveň znamená, že sa bude maximalizovať pravdepodobnosť splnenia podmienky  $x_k \geq \mu$ . Rovnakým spôsobom sa bude voliť riadenie aj v ostatných časoch, preto riešenie úlohy

$$\max E [\Phi(x_k)] \quad (2.13)$$

bude zároveň riešiť úlohu (2.12). Úloha (2.13) je však štandardnou stochastickou úlohou optimálneho riadenia, môžeme ju teda riešiť rekurzívne pomocou rovnice dynamického programovania:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k(x) &= \Phi(x), \\ \mathcal{P}_i(x) &= \max_{u_i \in U_i} E_i \left[ \mathcal{P}_{i+1}(f_i(x, u_i, z_i)) \right], \quad i = 0, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Hodnotovú funkciu sme označili  $\mathcal{P}_i(\cdot)$ , keďže v tomto špeciálnom prípade vyjadruje pravdepodobnosť splnenia koncovej podmienky  $x_k \geq \mu$ .

Hodnotová funkcia  $\mathcal{P}_i(x_i)$  sa rovná maximálnej strednej hodnote účelovej funkcie v čase  $i$  pri aktuálnom stave  $x_i$ . Účelová funkcia sa rovná 1 v prípade, že koncová podmienka je splnená, resp. 0, ak nie je. Jej stredná (priemerná) hodnota sa teda rovná pravdepodobnosti, že účelová funkcia v dosiahnutej hodnote  $x_k$  bude rovná 1, teda že  $x_k$  splní koncovú podmienku.

Preto  $\mathcal{P}_0(x_0)$  je maximálna pravdepodobnosť splnenia podmienky, pokiaľ vychádzame z počiatočného stavu  $x_0$  v čase  $i = 0$ , pokiaľ volíme optimálne stratégie. Pokiaľ bude  $\mathcal{P}_0(x_0) \geq \beta$ , existuje prípustné riešenie úlohy vzhľadom na špeciálnu podmienku (2.11), v opačnom prípade ležíme mimo oblasti prípustných stavov a teda riešenie pre zadané  $x_0$  a  $\mu$  neexistuje. Konkrétne hodnoty  $\mathcal{P}_i(x)$  môžeme v zadanej úlohe vypočítať pomocou diskkrétnej numerickej schémy, podobne ako pri výpočte samotného riešenia danej úlohy.

### 2.2.2 Prípustné stratégie pri minimálnej pravdepodobnosti

Ako teda môžeme riešiť úlohu s podmienkou (2.11), kde máme určenú minimálnu pravdepodobnosť? Pomocou vopred vypočítaných hodnôt  $\mathcal{P}_i(\cdot)$  môžeme v každom čase  $i$  určiť množinu stavov  $X_i$ , pre ktoré platí podmienka

$$\mathcal{P}_i(x_i) \geq \beta, \quad (2.15)$$

iba tieto stavy budú prípustné. Obdobne môžeme definovať prípustné hodnoty riadenia:

**Definícia 2.8 ( $\beta$ -prípustná oblasť)** *Definujeme množinu prípustných hodnôt riadenia:*

$$\begin{aligned} v_i(x) &\in W_i(x) \quad \text{pre všetky } x \in \mathbb{X}_i, & i = 0, \dots, k-1, \\ W_i(x) &= \{u_i \in \mathbb{U}_i \mid E_i [ \mathcal{P}_{i+1} [ f_i(x, u_i, z_i) ] ] \geq \beta \}, & i = 0, \dots, k-1, \end{aligned} \quad (2.16)$$

a množinu prípustných hodnôt stavu rovnicou:

$$X_i = \{x \in \mathbb{X}_i \mid W_i(x) \neq \emptyset\} = \{x \mid \mathcal{P}_i(x) \geq \beta\}, \quad i = 0, \dots, k-1. \quad (2.17)$$

Takto definované prípustné hodnoty riadenia, resp. stavu budeme nazývať  $\beta$ -prípustné, teda prípustné vzhľadom na podmienku (2.11).

Použitím definície 2.8 môžeme hľadať optimálne stratégie na oblasti splňajúcej podmienku (2.11) použitím rovnice dynamického programovania. Pred samotným výpočtom však musíme vypočítať pravdepodobnosti splnenia podmienky pre jednotlivé stavy podľa rovníc (2.14).

Všimnime si však, že podobne ako pri alternatívnej definícii 2.7 môžeme mať problém s prípustnosťou stavu, teda že pri voľbe prípustnej hodnoty riadenia a určitej realizácii náhodnej premennej môžeme vypadnúť z oblasti prípustných stavov. To musíme zobrať do úvahy pri numerickom riešení úlohy s takouto podmienkou.

Rovnako si môžeme všimnúť, že definíciu  $\beta$ -prípustnej oblasti 2.8 môžeme chápať ako určité zovšeobecnenie alternatívnej definície 2.7. Kým v prípade alternatívnej definície sme brali do úvahy strednú hodnotu, ktorá musela ostať v prípustnej oblasti, v tomto prípade berieme do úvahy strednú hodnotu pravdepodobnosti v ďalšom kroku, ktorá musí byť minimálne  $\beta$ . Vzhľadom na podobnosť definície oblasti môžeme očakávať, že aj riešenia budú podobné - uvidíme na samotných riešeniach konkrétnych úloh.

## 2.3 Úloha s penalizáciou

Doteraz sme sa zaoberali tým, ako môžeme dosiahnuť splnenie koncovej podmienky a zároveň optimalizovať účelovú funkciu. Bez ohľadu na účelovú funkciu však splnenie koncovej podmienky môže byť komplikované vzhľadom na stochastický charakter úlohy. K problému však môžeme pristúpiť aj alternatívne: namiesto koncovej podmienky doplníme do účelovej funkcie penalizačný člen. Ak koncová podmienka nebude splnená, hodnota účelovej funkcie sa zníži.

Tento spôsob nám umožňuje hľadať kompromisné riešenia, ktoré vyvážené naplňajú oba ciele – maximalizujú účelovú funkciu a zároveň maximalizujú pravdepodobnosť splnenia podmienky. Voľbou vhodnej veľkosti penalizácie zároveň môžeme dosiahnuť rôzne úrovne kompromisu – podľa toho, či nám viac záleží na maximalizácii účelovej funkcie alebo na splnení podmienky.

Využitie penalizácie pri riešení úloh optimálneho riadenia môžeme nájsť v článkoch [14], [42] alebo [9], tiež v stochastickom programovaní [46], [47], nejde teda o novú myšlienku. Naším cieľom je však porovnať tento spôsob riešenia úloh s úlohami s koncovou podmienkou. Podrobnejšie sa venujeme výhodám penalizácie v porovnaní s klasickými technikami riešenia úloh s podmienkou na strednú hodnotu.

Zadefinujme teraz tento problém konkrétnejšie – penalizačnú funkciu a úlohu s penalizáciou.

**Definícia 2.9 (Penalizačná funkcia)** Funkciu  $\Lambda : \mathbb{X}_i \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  nazveme penalizačná funkcia pre ohraničenie  $x \geq \mu$ , pokiaľ spĺňa tieto podmienky:

- (i)  $\Lambda(x) = 0$  práve vtedy, keď  $x \geq \mu$ ,
- (ii) pre  $x_1 \leq x_2$  platí  $\Lambda(x_1) \geq \Lambda(x_2)$ , teda  $\Lambda$  je nerastúca,
- (iii)  $\Lambda(x) \leq 1$  pre všetky  $x$ , teda  $\Lambda$  je ohraničená.

**Definícia 2.10 (Úloha s penalizáciou)** Úlohou s penalizáciou budeme rozumieť úlohu optimálneho riadenia s účelovou funkciou v tvare:

$$\max E [\varphi(x_k) - \delta \cdot \Lambda(x_k)], \quad (2.18)$$

kde  $\varphi(x_k)$  predstavuje pôvodnú účelovú funkciu,  $\Lambda(x_k)$  označuje penalizačnú funkciu a  $\delta$  váhu penalizačnej funkcie.

Úlohu s penalizáciou teda môžeme vytvoriť z úlohy optimálneho riadenia  $\max \varphi(x_k)$  s ohraničením na koncový stav tým spôsobom, že namiesto koncovej podmienky pridáme do účelovej funkcie dodatočný člen  $\delta \Lambda(x_k)$ , ktorý bude nesplnenie koncovej podmienky penalizovať. Tým pádom budú stavy spĺňajúce koncovú podmienku preferované.

### Príklady penalizačných funkcií

Začnime niekoľkými príkladmi rôznych tvarov penalizačnej funkcie, ktoré budeme používať. Tieto tvary funkcií sú v súlade s definíciou 2.9.

- **Konštantná penalizácia.** Najjednoduchší tvar, penalizácia v prípade nesplnenia podmienky je rovnaká vo všetkých prípadoch, nezáleží na vzdialenosti dosiahnutej hodnoty  $x$  od požadovanej  $\mu$ :

$$\Lambda_1(x) = \begin{cases} 0, & x \geq \mu \\ 1, & \text{inak.} \end{cases} \quad (2.19)$$

- **Lineárna penalizácia.** Závisí od vzdialenosti  $x$  od cieľovej hodnoty  $\mu$ , teda čím bližšie sme k splneniu podmienky, tým menšia penalizácia sa uplatní:

$$\Lambda_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq \mu \\ \frac{\mu - x}{\mu}, & \text{inak.} \end{cases} \quad (2.20)$$

- **Kvadratická penalizácia.** Druhá mocnina zvýrazní veľké odchýlky od splnenia podmienky:

$$\Lambda_3(x) = \begin{cases} 0, & x \geq \mu \\ \left(\frac{\mu - x}{\mu}\right)^2, & \text{inak.} \end{cases} \quad (2.21)$$

- **Lineárno-konštantná penalizácia.** Ide o kombinácia prvých dvoch funkcií, k lineárnej doplníme konštantnú penalizáciu, teda „skok“ v bode  $x = \mu$ :

$$\Lambda_4(x) = \begin{cases} 0, & x \geq \mu \\ \frac{1}{2} + \frac{\mu - x}{2\mu}, & \text{inak.} \end{cases} \quad (2.22)$$

V nasledujúcich častiach pri konkrétnych príkladoch používame najmä konštantnú penalizáciu (2.19), porovnáваме však aj riešenia pre ostatné funkcie.

#### 2.3.1 Súvis s pôvodnou úlohou

Označme (U1) úlohu s podmienkou na strednú hodnotu koncového stavu:

$$\begin{aligned} \max \quad & E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i, z_i) + \varphi(x_k) \right] \\ & x_{i+1} = f_i(x_i, u_i, z_i), u_i \in \mathbb{U}_i, z_i \sim \mathbb{Z}_i, x_0 \text{ dané} \\ \text{pri podmienke} \quad & E [x_k | x_{k-1}] \geq \mu \end{aligned} \quad (U1)$$

a úlohu s penalizáciou s rovnakou účelovou funkciou ako (U2):

$$\begin{aligned} \max \quad & E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i, z_i) + \varphi(x_k) - \delta \Lambda(x_k) \right] \\ & x_{i+1} = f_i(x_i, u_i, z_i), u_i \in \mathbb{U}_i, z_i \sim \mathbb{Z}_i, x_0 \text{ dané.} \end{aligned} \quad (U2)$$

Podrobnejšie porovnajme úlohy (U1) a (U2): hoci majú podobnú účelovú funkciu, rovnakú stavovú rovnicu a ďalšie parametre, z matematického hľadiska nie sú ekvivalentné:

- nemajú rovnakú množinu prípustných riešení, v druhej úlohe totiž nemáme žiadnu koncovú podmienku a tak sú všetky stratégie prípustné,
- optimálne riešenie nemusí byť rovnaké, čo vyplýva z rôznej množiny prípustných riešení a rôznej účelovej funkcie,
- nemajú ani rovnakú optimálnu hodnotu účelovej funkcie, keďže v druhej úlohe je navyše penalizačný člen a tak sa hodnoty vo všeobecnosti nemusia rovnať.

Na druhej strane, pokiaľ ide o riešenie reálneho problému, môžu byť riešenia úloh (U1) a (U2) porovnateľné a obe vyhovujúce. Stratégie, ktoré by nespĺňali podmienku  $x_k \geq \mu$ , totiž v prvej úlohe úplne vyradíme, kým v druhej úlohe pomocou penalizácie výrazne znížime ich šancu stať sa optimálnym riešením. Nakoniec v oboch prípadoch môžeme nakoniec dôjsť k podobnému riešeniu.

Je tu však jeden rozdiel: v prípade úlohy s penalizáciou (U2) nájdeme optimálne riadenie pre všetky možné hodnoty stavu  $x_i$ , teda aj pre neprípustné stavy v úlohe (U1). To je zároveň výhoda riešenia pomocou penalizácie, nemôžeme sa dostať mimo oblasti prípustných stavov a pre ľubovoľný stav máme vypočítané optimálne riadenie.

Zaujímavou otázkou je tiež vzťah medzi úlohou s penalizáciou (U2) a úlohou bez ohraničenia (U0):

$$\max E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i, z_i) + \varphi(x_k) \right] \quad (\text{U0})$$

$$x_{i+1} = f_i(x_i, u_i, z_i), u_i \in \mathbb{U}_i, z_i \sim \mathbb{Z}_i, x_0 \text{ dané.}$$

Označme  $J^*$  optimálnu očakávanú hodnotu účelovej funkcie pôvodnej úlohy (U0), ďalej označme  $A^*$  optimálnu strednú hodnotu účelovej funkcie úlohy

$$\min E [\Lambda(x_k)] \quad (2.23)$$

$$x_{i+1} = f_i(x_i, u_i, z_i), u_i \in \mathbb{U}_i, z_i \sim \mathbb{Z}_i, x_0 \text{ dané.}$$

a  $P_\delta$  očakávanú optimálnu hodnotu úlohy s penalizáciou (U2) s váhou  $\delta$ . Platí

$$\begin{aligned} P_\delta &= \max E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i, z_i) + \varphi(x_k) - \delta \Lambda(x_k) \right] \leq \\ &\leq \max E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i, z_i) + \varphi(x_k) \right] + \max E [-\delta \Lambda(x_k)] = \\ &= \max E [\varphi(x_k)] - \delta \min E [\Lambda(x_k)] = J^* - \delta A^*, \end{aligned}$$

teda  $P_\delta$  môžeme zhora ohraničiť v závislosti od  $\delta$  výrazom

$$P_\delta \leq J^* - \delta A^*. \quad (2.24)$$

Z definície 2.9 máme navyše  $\Lambda(x_k) \leq 1$  pre všetky  $x_k$ , teda aj maximálna hodnota tohto člena bude 1 a tým pádom dostávame dolné ohraničenie

$$J^* - \delta \leq P_\delta. \quad (2.25)$$

Pomocou parametra  $\delta$  sme ohraničili optimálnu hodnotu úlohy s penalizáciou  $P_\delta$ . Z týchto ohraničení vyplýva, že pre  $\delta \rightarrow 0$  sa interval zužuje a tým pádom aj  $P_\delta \rightarrow J^*$ . To však nie je nič prekvapujúce, vzhľadom na fakt, že pre  $\delta = 0$  dostávame pôvodnú úlohu bez ohraničenia (U0). Ak do úlohy pridáme ďalší člen s malou váhou  $\delta$ , ani optimálna hodnota sa veľmi nezmení.

Čo sa týka množiny prípustných riešení, keďže v prípade pôvodnej úlohy (U0) a úlohy s penalizáciou (U2) nemáme žiadne dodatočné obmedzenie prípustnosti stratégií, množiny prípustných stratégií sú rovnaké. Teda aj pri maximalizácii vyberáme optimálne riešenie spomedzi všetkých možných hodnôt riadenia, teda z množiny  $\mathbb{U}_i$ .

Otázkou však zostáva, ako sa pridaním penalizačného člena zmení optimálne riadenie (optimálna stratégia). Tu však nemožno jednoznačne povedať, že pre „malé“  $\delta$  dôjde iba k „malej“ zmene riadenia. Mohli by sme očakávať, že optimálne riadenie bude nejakým priemerom medzi optimálnymi riadeniami pre pôvodnú úlohu (U0) a pre úlohu na minimalizáciu penalizácie (2.23). To však vo všeobecnosti platiť nemusí, možno práve úplne iné riadenie bude maximalizovať účelovú funkciu s penalizáciou.

Rovnako nevieme vo všeobecnosti povedať, ako sa bude vyvíjať optimálne riadenie v prípade zväčšovania parametra  $\delta$ , hoci optimálnu hodnotu účelovej funkcie sme ohraničili. Jedinou možnosťou je priamo vypočítať v konkrétnom prípade optimálne riadenie pomocou RDP, napr. pomocou numerickej schémy.

Na záver ešte poznamenajme, že ak použijeme konštantnú penalizačnú funkciu (2.19) a zvolíme  $f_i^0(x_i, u_i, z_i) \equiv 0$ ,  $\varphi(x_k) \equiv 1$  a  $\delta = 1$ , dostávame presne úlohu (2.13), teda maximalizáciu pravdepodobnosti splnenia koncovej podmienky  $x_k \geq \mu$ . Úloha na minimalizáciu konštantnej penalizácie (2.23) je teda ekvivalentná úlohe na maximalizáciu pravdepodobnosti, keďže sa líšia iba o konštantu.

## 2.4 Rovnica dynamického programovania

V predchádzajúcich podkapitolách sme sa zaoberali podmienkou na koncový stav v tvare strednej hodnoty, resp. minimálnej pravdepodobnosti. V oboch prípadoch sme odvodili množiny prípustných hodnôt riadenia v tvare

$$v_i(x_i) \in W_i(x_i) \subseteq \mathbb{U}_i, \quad i = 0, \dots, k-1, \quad (2.26)$$

teda ako množinu hodnôt riadenia  $W_i(x_i)$ , z ktorej môžeme vybrať pri maximalizácii v časovej etape  $i$  pri aktuálnom stave  $x_i$ .

Zaoberali sme sa aj riešením úlohy s penalizáciou v prípade nesplnenia koncovej podmienky. Vtedy vyberáme spomedzi všetkých možných hodnôt riadenia  $\mathbb{U}_i$ , môžeme teda definovať

$$W_i(x_i) \equiv \mathbb{U}_i, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Navyše Pri riešení však navyše zohľadňujeme dodatočný penalizačný člen - funkciu koncového stavu v účelovej funkcii.

Oba spomenuté prípady úlohy môžeme zhrnúť do spoločnej definície úlohy s všeobecným ohraničením. Vyjdeme pritom z úlohy (2.4), do ktorej kvôli riešeniu úlohy s penalizáciou doplníme funkciu koncového stavu. Následne odvodíme rovnicu dynamického programovania pre túto úlohu, tým pádom ju môžeme použiť vo všetkých prípadoch.

**Definícia 2.11 (Úloha so všeobecným ohraničením)** *Nasledujúcu úlohu optimálneho riadenia budeme označovať úloha so všeobecným ohraničením:*

$$\begin{aligned}
 \text{maximalizovať} \quad & E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, v_i(x_i), z_i) + \varphi(x_k) \right] \\
 \text{pri ohraničeniach} \quad & x_{i+1} = f_i(x_i, v_i(x_i), z_i), \quad i = 0, \dots, k-1, \\
 & x_0 = a, \\
 & v_i(x_i) \in W_i(x_i) \subseteq \mathbb{U}_i, \quad i = 0, \dots, k-1, \\
 & z_i \sim \mathbb{Z}_i, \quad i = 0, \dots, k-1,
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

### 2.4.1 Odvodenie pre úlohu so všeobecným ohraničením

V tejto časti odvodíme a dokážeme rovnicu dynamického programovania pre úlohu s ohraničením (2.27) v zmysle definície 2.11. Množinu prípustných riadení  $W_i(x_i)$  berieme bez ujmy na všeobecnosti, môžeme za ňu dosadiť prípustné riadenia pre daný stav  $x_i$  v čase  $i$  v súlade s vybranou podmienkou. Predpokladáme, že vybranú podmienku vieme sformulovať v tomto tvare. Taktiež funkcia koncového stavu môže byť nulová, resp. rovnajúca sa požadovanej penalizácii.

Podobné tvrdenie je dokázané aj v knihe [6], resp. pre jednoduchšiu úlohu – štandardnú úlohu bez ohraničení (1.3) v knihe [29]. V tejto práci postupujeme podľa [29] podľa odvodenia RDP pre úlohu bez ohraničení.

Začíname potrebnými označeniami a pomocnými tvrdeniami. Analogicky ako v definícii 1.2 označme účelovú funkciu úlohy (2.27) od času  $j$  (tzv. *cost-to-go* funkciu) pre konkrétnu stratégiu  $\mathcal{V}_j$  a realizáciu náhodnej premennej  $\mathcal{Z}_j$  ako  $J_j(x, \mathcal{V}_j, \mathcal{Z}_j)$ :

$$J_j(x, \mathcal{V}_j, \mathcal{Z}_j) = \sum_{i=j}^{k-1} f_i^0(x_i, v_i(x_i), z_i) + \varphi(x_k).$$

Potom môžeme úlohu (2.27) zaradiť medzi úlohy  $\mathcal{W}_j(x)$  do systému úloh  $\mathcal{W}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_j(x) : \quad & \max_{\mathcal{V}_j = \{v_j, \dots, v_{k-1}\}} E_{j, k-1} J_j(x, \mathcal{V}_j, \mathcal{Z}_j) \\
 & x_{i+1} = f_i(x_i, v_i, z_i), \quad i = j, \dots, k-1, \\
 & x_j = x, \\
 & v_i(x_i) \in W_i(x_i), \quad \forall x_i, \quad i = j, \dots, k-1, \\
 & z_i \sim \mathbb{Z}_i, \quad i = j, \dots, k-1.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Kvôli zjednodušeniu ďalších úvah zavedieme jeden technický predpoklad a analogicky k definícii 1.3 definujeme aj hodnotovú funkciu aj pre systém úloh  $\mathcal{W}_j(x)$ .



**Predpoklad 2.12** Pre každé  $j = 0, \dots, k-1$  existuje optimálna stratégia  $\mathcal{V}_j$  pre každú úlohu  $\mathcal{W}_j(x)$ , kde  $x \in \mathbb{X}_j$  (množina prípustných stavov). Teda existuje  $\hat{\mathcal{V}}_j$  také, že

$$\max_{\mathcal{V}_j} E_{j,k-1} J_j(x, \mathcal{V}_j, \mathcal{Z}_j) = E_{j,k-1} J_j(x, \hat{\mathcal{V}}_j, \mathcal{Z}_j)$$

pre každé  $x \in \mathbb{X}_j$ .

**Definícia 2.13 (Hodnotová funkcia pre  $\mathcal{W}$ )** Funkciu  $V_j : \mathbb{X}_j \rightarrow \mathbb{R}$  nazývame hodnotovou funkciou pre systém úloh  $\mathcal{W}_j(x)$ , keď platí

$$V_j(x) = \max_{\mathcal{V}_j} E_{j,k-1} J_j(x, \mathcal{V}_j, \mathcal{Z}_j)$$

pre každé  $x \in \mathbb{X}_j$  a pre pevné  $j$ . Potom postupnosť funkcií  $V = \{V_0, \dots, V_{k-1}\}$  nazývame hodnotovou funkciou pre systém úloh  $\mathcal{W}$ .

Kvôli dôkazu RDP pre úlohu s ohraničeniami (2.27) dokážeme dve pomocné tvrdenia. Tvrdenia aj dôkazy sú modifikáciami analogických tvrdení pre úlohu bez ohraničení z knihy [29].

**Tvrdenie 2.14** Označme  $\mathcal{V}_j = \{v_j, \mathcal{V}_{j+1}\}$  prípustnú stratégiu pre  $\mathcal{W}_j(x_j)$  a definujeme

$$I_j(x_j, \mathcal{V}_j) = E_{j,k-1} [J_j(x_j, \mathcal{V}_j, \mathcal{Z}_j)].$$

Potom platí

$$I_j(x_j, \mathcal{V}_j) = E_j [f_j^0(x_j, v_j(x_j), z_j) + I_{j+1}(f_j(x_j, v_j(x_j), z_j), \mathcal{V}_{j+1})]. \quad (2.29)$$

D ô k a z. Označíme  $x_{j+1} = f_j(x_j, v_j(x_j), z_j)$  a upravujeme výraz  $I_j(x_j, \mathcal{V}_j)$ :

$$I_j(x_j, \mathcal{V}_j) = E_{j,k-1} [J_j(x_j, \mathcal{V}_j, \mathcal{Z}_j)] \quad (2.30)$$

$$= E_j E_{j+1,k-1} [f_j^0(x_j, v_j(x_j), z_j) + J_{j+1}(x_{j+1}, \mathcal{V}_{j+1}, \mathcal{Z}_{j+1})] \quad (2.31)$$

$$= E_j [f_j^0(x_j, v_j(x_j), z_j) + E_{j+1,k-1} J_{j+1}(x_{j+1}, \mathcal{V}_{j+1}, \mathcal{Z}_{j+1})] \quad (2.32)$$

$$= E_j [f_j^0(x_j, v_j(x_j), z_j) + I_{j+1}(f_j(x_j, v_j(x_j), z_j), \mathcal{V}_{j+1})] \quad (2.33)$$

Rovnosť (2.31) vyplýva z rozpísania strednej hodnoty viacrozmernej náhodnej premennej na vnorené stredné hodnoty, nasledujúca (2.32) využíva fakt, že  $f_j^0$  nezávisí od  $z_{j+1}, \dots, z_{k-1}$ . V poslednom riadku sme len prepísali označenie  $I_{j+1}$ , čím je tvrdenie dokázané. ■

**Veta 2.15 (Princíp optimality)** Pre každé  $j = 0, \dots, k-1$  platí: Nech  $\mathcal{V}_j = \{v_j, \mathcal{V}_{j+1}\}$  je optimálna stratégia pre úlohu  $\mathcal{W}_j(x_j)$  a  $\hat{x}_{j+1} = f_j(x_j, v_j(x_j), \hat{z}_j)$  pre ľubovoľne zvolenú realizáciu  $\hat{z}_j \sim \mathbb{Z}_j$ . Potom  $\mathcal{V}_{j+1}$  je optimálna stratégia pre úlohu  $\mathcal{W}_{j+1}(\hat{x}_{j+1})$ .

D ô k a z. Ukážeme, že ak by veta neplatila pre nejaké  $j$ , dôjdeme k sporu. Predpokladajme teda, že pre nejaké  $j$ ,  $x_j$  a  $\hat{z}_j$  veta neplatí. Potom existuje taká optimálna stratégia  $\hat{\mathcal{V}}_j = \{\hat{v}_j, \hat{\mathcal{V}}_{j+1}\}$  pre úlohu  $\mathcal{W}_j(x_j)$  taká, že  $\hat{\mathcal{V}}_{j+1}$  nie je optimálnym riešením úlohy  $\mathcal{W}_{j+1}(\hat{x}_{j+1})$ , pričom  $\hat{x}_{j+1} = f_j(x_j, \hat{v}_j(x_j), \hat{z}_j)$  pre dané  $\hat{z}_j$ .

Označme  $\bar{V}_{j+1}$  optimálnu stratégiu pre úlohu  $\mathcal{W}_{j+1}(\hat{x}_{j+1})$ , táto existuje podľa predpokladu 2.12. Pre optimálnu stratégiu  $\bar{V}_{j+1}$  musí  $\forall z_j \sim \mathbb{Z}_j$  platiť:

$$\begin{aligned} I_{j+1}(x_{j+1}, \bar{V}_{j+1}) &\geq I_{j+1}(x_{j+1}, \hat{V}_{j+1}), \\ x_{j+1} &= f_j(x_j, \hat{v}_j(x_j), z_j). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Zároveň aspoň pre nejaké  $\hat{z}_j$ ,  $\hat{x}_{j+1} = f_j(x_j, \hat{v}_j(x_j), \hat{z}_j)$  musí platiť ostrá nerovnosť

$$I_{j+1}(\hat{x}_{j+1}, \bar{V}_{j+1}) > I_{j+1}(\hat{x}_{j+1}, \hat{V}_{j+1}), \quad (2.35)$$

pretože stratégia  $\hat{V}_{j+1}$  **nie je** optimálna pre úlohu  $\mathcal{W}_{j+1}(\hat{x}_{j+1})$ .

Skonstruujme teraz nové riadenie

$$\bar{V}_j = (\hat{v}_j, \bar{V}_{j+1}),$$

označme  $x_{j+1} = f_j(x_j, \hat{v}_j(x_j), z_j)$  a počítajme:

$$\begin{aligned} I_j(x_j, \bar{V}_j) &= E_j [f_j^0(x_j, \hat{v}_j(x_j), z_j) + I_{j+1}(x_{j+1}, \bar{V}_{j+1})] \\ &> E_j [f_j^0(x_j, \hat{v}_j(x_j), z_j) + I_{j+1}(x_{j+1}, \hat{V}_{j+1})] = I_j(x_j, \hat{V}_j). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ostrá nerovnosť v (2.36) vyplýva z neostrej nerovnosti (2.34) pre všetky  $z_j \in \mathbb{Z}_j$  a ostrej (2.35) minimálne pre  $\hat{z}_j$ . Keďže  $\mathbb{Z}_j$  je diskrétna náhodná premenná, každá hodnota sa nado- búa s kladnou pravdepodobnosťou a preto sa ostrá nerovnosť prenesie (nasčíta) aj do strednej hodnoty  $E_{z_j}$ .

Nerovnosť  $I_j(x_j, \bar{V}_j) > I_j(x_j, \hat{V}_j)$  je však v spore s tým, že  $\hat{V}_j$  je optimálnym riešením úlohy  $\mathcal{W}_j(x_j)$ . Preto platí pôvodné tvrdenie. ■

Teraz už môžeme prejsť priamo k formulácii a dôkazu rovnice dynamického programovania pre úlohu s ohraňeniami (2.27). Dôkaz je len miernou modifikáciou dôkazu [29, Dôkaz Vety 2.7]. Využijeme v ňom pomocné tvrdenie a princíp optimality.

### 2.4.2 Formulácia a dôkaz vety

**Veta 2.16 (RDP pre úlohu s ohraňením)** *Majme úlohu (2.27) splňajúcu predpoklad 2.12. Potom  $V = \{V_0, \dots, V_{k-1}\}$  je hodnotová funkcia a  $\hat{V} = \{\hat{v}_0, \dots, \hat{v}_{k-1}\}$  optimálna stratégia práve vtedy, keď  $V_j, \hat{v}_j, j = 0, \dots, k-1$ , splňajú pre každé  $j$  a  $x$  rovnicu dynamického programovania:*

$$\begin{aligned} V_j(x) &= \max_{v_j(x) \in W_j(x)} E_j [f_j^0(x, v_j(x), z_j) + V_{j+1}(f_j(x, v_j(x), z_j))] \\ &= E_j [f_j^0(x, \hat{v}_j(x), z_j) + V_{j+1}(f_j(x, \hat{v}_j(x), z_j))], \\ V_k(x) &= \varphi(x), \quad \text{pre každé } x. \end{aligned} \quad (2.37)$$

D ô k a z. Ukážeme platnosť implikácie v oboch smeroch.

„ $\Rightarrow$ “ Začneme prvou rovnosťou - priamo z definície  $V$  vyplýva

$$\begin{aligned} V_{k-1}(x) &= \max_{v_{k-1}} E_{k-1} J_{k-1}(x, v_{k-1}, Z_{k-1}) \\ &= \max_{v_{k-1}(x) \in W_{k-1}(x)} E_{k-1} [f_{k-1}^0(x, v_{k-1}(x), z_{k-1}) + \varphi(f_{k-1}(x, v_{k-1}(x), z_{k-1}))], \end{aligned} \quad (2.38)$$

keďže  $\mathcal{V}_{k-1} = \{v_{k-1}\}$  a pre dané  $x$  možno hodnotu funkcie  $v_{k-1}(x)$  zvoliť spomedzi všetkých prípustných hodnôt riadenia pre dané  $x$ , teda v oboch prípadoch maximalizujeme cez množinu  $W_{k-1}(x)$ .

Pre  $j = 0, \dots, k-2$  dostávame:

$$\begin{aligned}
 V_j(x) &\stackrel{1}{=} \max_{\mathcal{V}_j} E_{j,k-1} J_j(x, \mathcal{V}_j, \mathcal{Z}_j) \stackrel{2}{=} \max_{\mathcal{V}_j} I_j(x, \mathcal{V}_j) \\
 &\stackrel{3}{=} \max_{\mathcal{V}_j} E_j [f_j^0(x, v_j(x), z_j) + I_{j+1}(f_j(x, v_j(x), z_j), \mathcal{V}_{j+1})] \\
 &\stackrel{4}{=} \max_{v_j(x) \in W_j(x)} \max_{\mathcal{V}_{j+1}} E_j [f_j^0(x, v_j(x), z_j) + I_{j+1}(f_j(x, v_j(x), z_j), \mathcal{V}_{j+1})] \\
 &\stackrel{5}{=} \max_{v_j(x) \in W_j(x)} \max_{\mathcal{V}_{j+1}} [E_j f_j^0(x, v_j(x), z_j) + E_j I_{j+1}(f_j(x, v_j(x), z_j), \mathcal{V}_{j+1})] \\
 &\stackrel{6}{=} \max_{v_j(x) \in W_j(x)} [E_j f_j^0(x, v_j(x), z_j) + \max_{\mathcal{V}_{j+1}} E_j I_{j+1}(f_j(x, v_j(x), z_j), \mathcal{V}_{j+1})] \\
 &\stackrel{7}{=} \max_{v_j(x) \in W_j(x)} [E_j f_j^0(x, v_j(x), z_j) + E_j \max_{\mathcal{V}_{j+1}} I_{j+1}(f_j(x, v_j(x), z_j), \mathcal{V}_{j+1})] \\
 &\stackrel{8}{=} \max_{v_j(x) \in W_j(x)} E_j [f_j^0(x, v_j(x), z_j) + \max_{\mathcal{V}_{j+1}} I_{j+1}(f_j(x, v_j(x), z_j), \mathcal{V}_{j+1})] \\
 &\stackrel{9}{=} \max_{v_j(x) \in W_j(x)} E_j [f_j^0(x, v_j(x), z_j) + V_{j+1}(f_j(x, v_j(x), z_j))]
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Zdôvodnime jednotlivé kroky: 1 - definícia 2.13 funkcie  $V_j$ , 2 a 3 - rozpísali sme podľa lemy 2.14, pričom  $\mathcal{V}_j = \{v_j, \dots, v_{k-1}\}$ , 4 - prepísali sme po zložkách maximum cez  $\mathcal{V}_j = \{v_j, \mathcal{V}_{j+1}\}$ , 5 - aditívna vlastnosť strednej hodnoty, 6 - prvý sčítanec nezávisí od  $\mathcal{V}_{j+1}$ , 7 - platí podľa [29, str. 104], 8 - vybrali sme  $E_j$  pred zátvorku, 9 - opäť z definície  $V_j$  a lemy. Tým sme dokázali prvú rovnosť.

Druhá rovnosť v (2.37) je dôsledkom princípu optimality a tvrdenia 2.14:

$$\begin{aligned}
 V_j(x) &= \max_{\mathcal{V}_j} E_{j,k-1} J_j(x, \mathcal{V}_j, \mathcal{Z}_j) = \max_{\mathcal{V}_j} I_j(x, \mathcal{V}_j) = I_j(x, \hat{\mathcal{V}}_j) \\
 &= E_j [f_j^0(x, \hat{v}_j(x), z_j) + I_{j+1}(f_j(x, \hat{v}_j(x), z_j), \hat{\mathcal{V}}_{j+1})] \\
 &= E_j [f_j^0(x, \hat{v}_j(x), z_j) + V_{j+1}(f_j(x, \hat{v}_j(x), z_j))].
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Prvá časť tvrdenia (implikácia „ $\Rightarrow$ “) je týmto dokázaná.

„ $\Leftarrow$ “ Opačný smer dokážeme pomocou indukcie. Začnime pre  $i = k-1$ : ak  $V_{k-1}$  a  $\hat{v}_{k-1}$  spĺňajú (2.37), tak platí

$$\begin{aligned}
 V_{k-1}(x) &= \max_{v(x) \in W_{k-1}(x)} E_{k-1} [f_{k-1}^0(x, v(x), z_{k-1}) + \varphi(f_{k-1}(x, v(x), z_{k-1}))] \\
 &= E_{k-1} [f_{k-1}^0(x, \hat{v}_{k-1}(x), z_{k-1}) + \varphi(f_{k-1}(x, \hat{v}_{k-1}(x), z_{k-1}))] \\
 &= \max_{\mathcal{V}_{k-1}} E_{k-1} J_{k-1}(x, \mathcal{V}_{k-1}, \mathcal{Z}_{k-1}) = E_{k-1} J_{k-1}(x, \hat{\mathcal{V}}_{k-1}, \mathcal{Z}_{k-1}),
 \end{aligned}$$

pričom sme dosadili  $V_k(x) = \varphi(x)$ . Výpočet dokazuje, že  $\hat{v}_{k-1}(x)$  je optimálna spätná väzba a  $V_{k-1}$  jej hodnotová funkcia. Tým je prvý krok indukcie ukončený.

Teraz predpokladajme, že veta platí pre  $i = j+1, \dots, k-1$ . Chceme dokázať, že platí aj pre  $i = j, \dots, k-1$ . Majme funkcie  $V_j, V_{j+1}, \dots, V_k$ , ktoré vyhovujú rovnici 2.37 a  $x \in \mathbb{X}_j$ . Podľa

indukčného predpokladu sú  $V_{j+1}, \dots, V_k$  hodnotové funkcie pre príslušné úlohy. Dokážme sporom, že aj  $V_j$  je hodnotovou funkciou. Predpokladajme, že  $V_j$  nie je maximálna hodnota účelovej funkcie pre  $\mathcal{W}_j(x)$ . Teda musí existovať taká stratégia  $\bar{v}_j$ , že platí

$$E_{j,k-1} J_j(x, \bar{v}_j, \mathcal{Z}_j) > V_j(x). \quad (2.41)$$

Potom však

$$\begin{aligned} V_j(x) &< E_{j,k-1} J_j(x, \bar{v}_j, \mathcal{Z}_j) = I_j(x, \bar{v}_j) \\ &= E_j [f_j^0(x, \bar{v}_j(x), z_j) + I_{j+1}(f_j(x, \bar{v}_j(x), z_j), \bar{v}_{j+1})] \\ &\leq E_j [f_j^0(x, \bar{v}_j(x), z_j) + V_{j+1}(f_j(x, \bar{v}_j(x), z_j))] \\ &\leq \max_{v_j(x) \in \mathcal{W}_j(x)} E_j [f_j^0(x, v_j(x), z_j) + V_{j+1}(f_j(x, v_j(x), z_j))], \end{aligned} \quad (2.42)$$

pričom prvá neostrá nerovnosť vyplýva z indukčného predpokladu - keďže  $V_{j+1}$  je hodnotová funkcia,  $I_{j+1} \leq V_{j+1}$  pre akúkoľvek stratégiu. Posledná nerovnosť je v spore s tým, že  $V_j, V_{j+1}, \dots$  spĺňali RDP. Preto  $V_j$  je hodnotová funkcia.

Nech teraz aj funkcie  $\hat{v}_j, \hat{v}_{j+1}, \dots, \hat{v}_{k-1}$  spĺňajú RDP. Podľa indukčného predpokladu je  $\hat{v}_{j+1} = \{\hat{v}_{j+1}, \dots, \hat{v}_{k-1}\}$  optimálnou stratégiou. Chceme dokázať, že aj  $\hat{v}_j = \{\hat{v}_j, \hat{v}_{j+1}\}$  je optimálnou stratégiou. Platí

$$\begin{aligned} I_j(x, \hat{v}_j) &= E_j [f_j^0(x, \hat{v}_j(x), z_j) + I_{j+1}(f_j(x, \hat{v}_j(x), z_j), \hat{v}_{j+1})] \\ &= E_j [f_j^0(x, \hat{v}_j(x), z_j) + V_{j+1}(f_j(x, \hat{v}_j(x), z_j))] = V_j(x), \end{aligned} \quad (2.43)$$

kde sme využili najprv tvrdenie 2.14, potom fakt, že  $\hat{v}_{j+1}$  je optimálna stratégia a  $V_{j+1}$  je hodnotová funkcia a nakoniec, že  $\hat{v}_j$  spĺňa RDP. Pretože  $V_j$  je hodnotová funkcia, tak (2.43) dokazuje optimalitu stratégie  $\hat{v}_j$ . Dôkaz je hotový. ■

---

# Kapitola 3

## *Možnosti numerického riešenia*

---

V druhej časti dizertačnej práce sa budeme venovať numerickým príkladom, na ktorých chceme ilustrovať a analyzovať možnosti riešenia stochastických úloh s koncovými podmienkami. Keďže analytické riešenie takýchto úloh nie je vo všeobecnosti možné, riešime ich numericky pomocou schémy založenej na RDP. Stručný popis tejto schémy je preto náplňou tejto kapitoly.

Pre podrobnejšiu analýzu však potrebujeme pracovať s konkrétne zadefinovaným problémom, aby sme mohli získané riešenie porovnať s očakávaniami, resp. overiť, či optimálne riešenie naozaj vyhovuje a je prakticky použiteľné pre reálny problém. Preto v dvoch ďalších kapitolách zadefinujeme a vyriešime dva vybrané problémy stochastického optimálneho riadenia.

Prvý problém bude jednoduchší, pôjde o úlohu s diskretným charakterom stavu a jednoduchším rozdelením náhodnej premennej, konkrétne úlohu predavača red'koviek upravenú podľa [29]. Pri riešení tejto úlohy priamo využijeme numerickú schému.

V druhej úlohe už budeme uvažovať kontinuálny charakter stavu a zložitejšie rozdelenie náhodnej premennej, pôjde o alokáciu prostriedkov v portfóliu počas sporenia, teda jednoduchšiu verziu úlohy riešenej napríklad v [32]. V tomto prípade musíme pred riešením zaviesť vhodnú diskretizáciu, ktorej sa podrobnejšie venujeme v podkapitole 3.2. V oboch úlohách sa zameriame na koncové podmienky a úspešnosť ich splnenia overíme aj simuláciami.

### 3.1 Numerická schéma

Úlohu v tvare (2.27) s ohraničenou množinou prípustných hodnôt riadenia  $W_i(x_i)$  budeme riešiť pomocou diskretnej numerickej schémy založenej na rovnici dynamického programovania (RDP), ktorú sme dokázali vo vete 2.16. Pri návrhu numerickej schémy sme vychádzali z algoritmu podľa knihy [29, Príklad 2.18].

Pri riešení úlohy budeme pracovať s nasledujúcimi parametrami úlohy:

- počet časových etáp  $k$ :

$$i \in \mathcal{I} = \{0, 1, \dots, k-1\}$$

- množina hodnôt stavu:

$$\mathbb{X}_i = \{x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^M\}$$

- množina hodnôt riadenia:

$$\mathbb{U}_i = \{u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^N\}$$

- možné realizácie náhodnej premennej  $z_i^P \sim \mathbb{Z}_i$ :

$$z_i^P \in \{z_i^1, z_i^2, \dots, z_i^P\}$$

Pri riešení postupujeme podľa RDP, teda v cykle od poslednej časovej etapy. Pre  $k$  časových etáp a pre  $M$  hodnôt stavu  $x$  postupne vypočítame strednú hodnotu cez náhodnú premennú  $z_i$  súčtu aktuálneho a budúceho zisku pre jednotlivých  $N$  hodnôt riadenia  $u$ , tieto zisky porovnáme a vyberieme z nich najväčší, čím získame optimálnu hodnotu riadenia  $u$  (hodnotu odozvovej funkcie  $v_i(x) = u$ ), resp. hodnotovú funkciu  $V_i(x)$  ako hodnotu najlepšieho zisku. Algoritmus je uvedený na obrázku 3.1.

Výpočtová zložitosť uvedeného algoritmu je  $O(kMNP)$ , teda počet operácií lineárne závisí od počtu časových etáp  $k$ , počtu hodnôt stavu  $M$ , počtu hodnôt riadenia  $N$  a počtu realizácií náhodnej premennej  $P$ . Konkrétny počet hodnôt stavu, resp. riadenia volíme v závislosti od úlohy, ktorú riešime.

Numerické riešenie sme implementovali v programe `Matlab` verzia R2011b. Úvod do tohto prostredia ponúka kniha [4], v ktorej možno nájsť aj aplikácie v oblasti optimálneho riadenia a diferenciálnych rovníc. Výpočty sme realizovali na počítači s dvojjadrovým procesorom Intel 1.5 GHz so 4 GB pamäte RAM.

### Výpočet prípustných hodnôt riadenia

Popisovaný algoritmus založený na RDP vyžaduje, aby sme mali k dispozícii množinu prípustných riadení  $W_i(x)$  už pred výpočtom optimálneho riadenia v čase  $i$  pre stav  $x$ . Tento predpoklad numerickej schémy však nie je obmedzujúci, ako sme ukázali v predchádzajúcej kapitole, jednotlivé koncové podmienky vieme takto formulovať a numericky určiť konkrétne množiny hodnôt. Potom môžeme neprípustné hodnoty riadenia vynechať a pri maximalizácii vziať do úvahy iba riadenia spĺňajúce požadovanú koncovú podmienku (či už v tvare strednej hodnoty alebo ako podmienku na minimálnu pravdepodobnosť).

Máme dve možnosti, kedy vypočítať množinu prípustných riadení: buď vypočítame množiny prípustných riadení  $W_i(x)$  pre všetky  $i, x$  vopred, napríklad pomocou obdobnej numerickej schémy (to je výhodné v prípade podmienky na minimálnu pravdepodobnosť, kde počítame hodnotovú funkciu špeciálnej úlohy), alebo priamo počas výpočtu optimálneho riadenia, kde v čase  $i$  pre aktuálny stav  $x$  overíme, či je konkrétna hodnota riadenia  $u$  prípustná. V oboch prípadoch tak budeme hľadať maximum iba medzi prípustnými riadeniami, čím zabezpečíme splnenie koncovkej podmienky.

## Schéma numerického riešenia pomocou RDP

```

inicializácia;
for  $x = x^1, x^2, \dots, x^{MAX}$  do
  | výpočet  $V_k(x) = \varphi(x)$ ; // výpočet funkcie koncového stavu,  $i = k$ 
end
for  $i = k - 1, \dots, 0$  do
  // cyklus pre časové etapy
  for  $x = x^1, x^2, \dots, x^M$  do
    // jednotlivé hodnoty stavu
    výpočet prípustných hodnôt riadenia  $W_i(x)$  podľa koncovej podmienky;
    for  $u = u^1, u^2, \dots, u^N$  do
      // cyklus pre možné hodnoty riadenia
      if  $u \notin W_i(x)$  then
        |  $u$  neprípustné, pokračuj ďalšou hodnotou;
      end
      for  $z = z^1, z^2, \dots, z^P$  do
        // cyklus pre realizácie náhodnej premennej
        výpočet aktuálnej účelovej funkcie  $f_i^0(x, u, z)$ ;
        výpočet budúceho stavu  $x_{i+1} = f_i(x, u, z)$ ;
        načítanie hodnotovej funkcie  $V_{i+1}(x_{i+1})$ ;
        uloženie hodnoty  $f_i^0 + V_{i+1}(x_{i+1})$  pre aktuálne  $z$ 
      end
      výpočet strednej hodnoty  $f_i^0 + V_{i+1}(x_{i+1})$  cez všetky  $z$ ;
      uložíme pre  $u$  strednú hodnotu  $f_i^0 + V_{i+1}(x_{i+1})$ ;
    end
    nájdeme  $u$  s najlepšou strednou hodnotou  $f_i^0 + V_{i+1}(x_{i+1})$ ;
    uložíme  $v_i(x) = u$  ako najlepšie riadenie a hodnotovú funkciu do  $V_i(x)$ ;
  end
end
end

```

**Výsledok:** Optimálne riadenie  $v_i(x)$ , hodnotová funkcia  $V_i(x)$  pre všetky  $i, x$

Obr. 3.1: Diskrétna numerická schéma založená na RDP

### 3.2 Diskretizácia úlohy

Pokiaľ sú stav alebo riadenie prirodzene diskkrétne veličiny (vyjadrujú napríklad počet kusov), hodnotovú funkciu stačí vypočítať iba v jednotlivých diskkrétnych hodnotách stavu (napr. celočíselných), rovnako stavová diferenčná rovnica bude viesť na niektorú diskkrétne hodnotu. Aj pri maximalizácii budeme hľadať optimálne riešenie iba v diskkrétnej množine prípustných hodnôt stavu. Úlohu teda môžeme úspešne riešiť pomocou diskkrétny numerickú schému.

Ak však majú stav či riadenie kontinuálny charakter, čo znamená, že môžu nadobúdať ľubovoľnú hodnotu z nejakého intervalu, situácia je komplikovanejšia. Pri numerickom riešení môžeme pracovať iba s diskkrétnymi hodnotami veličín, teda samostatnými hodnotami z diskkrétnych množín.

Namiesto spojitého intervalu pre stav či riadenie budeme preto uvažovať ich diskretizáciu – konečnú diskkrétne sieť bodov, pričom hodnoty funkcií budeme vyčíslňovať iba v týchto mrežových bodoch. Namiesto analytických funkcií definovaných na  $\mathbb{R}$  tak bude našim riešením iba niekoľko nezávislých hodnôt týchto funkcií v jednotlivých bodoch siete. Hustejšou sieťou diskkrétnych bodov môžeme získať presnejšiu aproximáciu riešenia.

Keďže uvažujeme formuláciu úlohy s diskkrétnym časovým krokom, modifikácia časovej premennej už nie je potrebná, stačí numericky riešiť úlohu pre jednotlivé časové etapy. Diskretizácia stavu a riadenia je však nevyhnutná pre numerické riešenie úlohy pomocou RDP, podobným spôsobom sa diskretizuje napr. aj v metóde konečných diferencií podľa [56, Kapitola 10.1].

#### Riadiaca premenná $u_i$

Začnime riadiacou premennou  $u_i$ . Predpokladajme, že má kontinuálny charakter a vzhľadom na formuláciu úlohy môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu z intervalu  $[u_i^{\text{MIN}}, u_i^{\text{MAX}}]$ . Uvažujme výber  $N$  bodov z tohto intervalu, pričom

$$u_i^{\text{MIN}} = u_i^1 < u_i^2 < \dots < u_i^n < \dots < u_i^{N-1} < u_i^N = u_i^{\text{MAX}},$$

najvhodnejšie je uvažovať rovnomerné rozostupy bodov:

$$u_i^n = u_i^{\text{MIN}} + \frac{u_i^{\text{MAX}} - u_i^{\text{MIN}}}{N - 1} (n - 1), \quad (3.1)$$

kde  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Pri riešení úlohy pomocou RDP vypočítame účelovú funkciu iba vybrané diskkrétne hodnoty riadenia, pričom aj maximum budeme hľadať iba medzi nimi. Ide teda o numerickú aproximáciu, nie o presné analytické riešenie. Pokiaľ zvolíme menšie rozostupy bodov, riešenie bude presnejšie, teda aj optimálne riadenie bude „jemnejšie“ s plynulejšími prechodmi medzi jednotlivými hodnotami.

Poznamenajme, že kvôli rýchlosti výpočtu nemusíme voliť  $N$  príliš veľké; približný tvar riešenia sa ukáže už pre  $N = 10$  hodnôt, záleží však od konkrétnej úlohy a ohraničení riadiacej premennej. Všímať si musíme krok riadenia  $d$ , pričom

$$d = \frac{u_i^{\text{MAX}} - u_i^{\text{MIN}}}{N - 1},$$



teda rozdiel dvoch vedľajších diskretných hodnôt, ktorý nemôže byť príliš veľký.

Vzhľadom na výpočtovú zložitosť algoritmu, čas výpočtu rastie lineárne so zvoleným počtom bodov  $N$  (čím väčší počet hodnôt  $u_i$  zvolíme, tým väčší počet ich treba vzájomne porovnať, čo výpočet predlžuje). V prípade záujmu o veľmi presné riešenie (napr. pre reálnu aplikáciu) môžeme počet hodnôt patrične zvýšiť, napr. na  $N = 100$  alebo  $N = 1\,000$ .

### Stavová premenná $x_i$

Pokiaľ má aktuálny stav  $x_i$  kontinuálny charakter, tiež ho musíme diskretizovať. Ak máme v konkrétnej úlohe pevné zadané ohraničenia na stav v tvare

$$x_i \in [x_i^{\text{MIN}}, x_i^{\text{MAX}}],$$

situácia je jednoduchšia. V opačnom prípade musíme pre konkrétnu úlohu zvoliť dolnú a hornú hranicu pre  $x_i$ , podľa možností tak, aby tieto dodatočné ohraničenia neovplyvnili riešenie úlohy. Následne môžeme vybrať  $M$  diskretných hodnôt, pričom očakávame:

$$x_i^{\text{MIN}} = x_i^1 < x_i^2 < \dots < x_i^{M-1} < x_i^M = x_i^{\text{MAX}},$$

opäť môžeme použiť ekvidištancné rozostupy

$$x_i^m = x_i^{\text{MIN}} + \frac{x_i^{\text{MAX}} - x_i^{\text{MIN}}}{M - 1} (m - 1), \quad \text{pre } m = 1, 2, \dots, M.$$

Podobne ako v prípade riadenia, aj v prípade stavovej premennej môžeme uvažovať o potrebnom počte diskretných bodov  $M$ . Aj tu platí, že väčší počet bodov znamená presnejší tvar riešenia, na druhej strane aj lineárny nárast trvania výpočtu. Podľa našich skúseností však postačuje zvoliť taký počet bodov, aby priestorový krok v prípade stavovej premennej bol rádovo  $1/100$  z uvažovanej počiatočnej hodnoty  $x_0$ .

### Interpolácia hodnotovej funkcie

Keďže hodnotovú funkciu  $V_{i+1}$  počítame iba v niektorých diskretných bodoch, môže sa stať, že pri ďalšom potrebujeme hodnotu, ktorú nemáme k dispozícii. V takom prípade môžeme zaokrúhľovať hodnotu stavu na najbližšiu diskretnú hodnotu alebo hodnotovú funkciu interpolovať. V druhom prípade budú výsledky pravdepodobne presnejšie, preto uvažujeme nasledujúcu interpoláciu.

Pri výpočte optimálnej hodnoty riadenia v danom čase  $i$  a stave  $x_i$  potrebujeme zohľadniť nasledujúcu hodnotovú funkciu  $V_{i+1}$  v bode  $x_{i+1}$  pre možné realizácie náhodnej premennej  $z_i$ . Túto však máme vypočítanú iba v diskretných bodoch  $x^1, x^2, \dots, x^M$ . Bod  $x_{i+1}$  vo všeobecnosti nie je tabelovaný.

Za predpokladu  $x^{\text{MIN}} < x_{i+1} < x^{\text{MAX}}$  nájdeme taký index  $m$ , že platí

$$x^m < x_{i+1} < x^{m+1},$$

teda hľadaný bod  $x_{i+1}$  leží medzi diskretnými bodmi, v ktorých hodnotovú funkciu  $V_{i+1}$  poznáme. Potom môžeme  $V_{i+1}(x_{i+1})$  nahradiť lineárnou interpoláciou nasledovne:

$$V_{i+1}(x_{i+1}) \approx \frac{x_{i+1} - x^m}{x^{m+1} - x^m} \cdot V_{i+1}(x^m) + \frac{x^{m+1} - x_{i+1}}{x^{m+1} - x^m} \cdot V_{i+1}(x^{m+1})$$

O niečo komplikovanejší je výpočet hodnotovej funkcie na pravom okraji, teda pre  $x_{i+1} > x^{\text{MAX}}$ . V poslednej časovej perióde  $i = k - 1$  môžeme priamo dosadiť do analytického vyjadrenia účelovej funkcie  $\varphi(x_k)$ . V ostatných periódach úlohu riešime iba pre  $x \in [x^{\text{MIN}}; x^{\text{MAX}}]$  a tak najbližšia známa hodnota k  $V_{i+1}(x_{i+1})$  je  $V_{i+1}(x^{\text{MAX}})$ .

Máme dve možnosti ako postupovať: buď použijeme hodnotu poslednú známu v bode  $x^{\text{MAX}}$ , teda položíme

$$V_{i+1}(x_{i+1}) = V_{i+1}(x^{\text{MAX}}), \quad \text{pre všetky } x_{i+1} > x^{\text{MAX}}, \quad (3.2)$$

alebo môžeme hodnotu v  $x_{i+1}$  extrapolovať, napr. pomocou lineárnej funkcie:

$$V_{i+1}(x_{i+1}) \approx V_{i+1}(x^{\text{MAX}}) + \frac{x_{i+1} - x^{\text{MAX}}}{x^{\text{MAX}} - x^{\text{MAX}-1}} \cdot (V_{i+1}(x^{\text{MAX}}) - V_{i+1}(x^{\text{MAX}-1})). \quad (3.3)$$

Ktorý spôsob bude vhodnejší pritom závisí od tvaru účelovej funkcie. Pokiaľ je hodnotová funkcia blízka lineárnej funkcii, lineárna extrapolácia bude dávať dobré výsledky. Naopak, pokiaľ pre  $x \rightarrow x^{\text{MAX}}$  je  $V'_{i+1}(x) \searrow 0$ , teda hodnotová funkcia je na pravom okraji takmer konštantná (napr. v prípade konkávnej hodnotovej funkcie), je výhodnejšie použiť (3.2). Ak však budeme uvažovať nepresnú extrapoláciu, optimálne riadenie na pravom okraji intervalu nemusí byť vypočítané presne, môže byť totiž zaťažené numerickou chybou uvažovanej extrapolácie.

---

## Kapitola 4

### Úloha predavača red'koviek

---

Pre numerické experimenty sme si ako diskretnú úlohu vybrali *úlohu predavača red'koviek* – ide o úlohu s jednoduchou štruktúrou, diskretnou povahou stavu a riadenia (celočíselné počty kusov), lineárnou stavovou rovnicou a rovnomerne rozdelenou náhodnou premenou.

Táto úloha je motivovaná knihou [29], ide však o špeciálnu verziu klasického problému predavača novín, tzv. *newsvendor problem*, ktorý môžeme nájsť napríklad v skriptách [15, str. 31], tiež ako motivačnú úlohu v publikáciách venujúcich sa stochastickému programovaniu [51], [53], [54], resp. ako problém kvetinárky podľa článku [28]. Vo všetkých verziách úlohy je cieľom predajcu maximalizovať svoj zisk, pričom dopyt po tovare je náhodný a tovar, ktorý nepredá, mu spôsobuje dodatočné náklady.

Môžeme spomenúť aj zložitejšiu verziu problému: úlohu o dopĺňaní hotovosti do bankomatov. Dopyt po peniazoch je opäť náhodný, banka však má evidenciu doterajších výberov a tak môže odhadnúť budúci dopyt. Stochastickú úlohu možno riešiť stochastickým programovaním, ako Castro v [20], alebo aj cez stochastické optimálne riadenie, viď napr. Šimko v [57].

V tejto kapitole použijeme rovnicu dynamického programovania (2.37) na úlohu s koncovým ohraničením. Zároveň preskúmame oblasť prípustných stavov. Riešenie získané optimálnym riadením navyše porovnáme so stochastickým programovaním. V podkapitole 4.5 uvádzame numerické výsledky a porovnanie prostredníctvom Monte-Carlo simulácií.

#### 4.1 Formulácia úlohy optimálneho riadenia

Do úlohy predavača red'koviek podľa knihy [29] sme doplnili ohraničenie na koncový stav v tvare strednej hodnoty (2.6), čím sme ju prispôbili pre potreby numerického príkladu. Keďže stav aj riadenie majú v tejto úlohe diskretnú povahu, nemusíme sa zaoberať ich diskretizáciou.

Ďalšou výhodou uvedenej úlohy je fakt, že náhodná premenná (dopyt) má rovnomerné rozdelenie. Uvažujme teda nasledujúcu formuláciu problému:

**Príklad 4.1 (Úloha predavača red'koviek)**

Predavač chce maximalizovať svoj zisk z predaja red'koviek počas plánovacieho obdobia dlhého  $k$  dní. Každé ráno  $i$ -teho dňa nakúpi u dodávateľa  $u_i$  red'koviek ( $0 \leq u_i \leq u_i^{MAX}$ ) za nákupnú cenu  $n$  za zväzok, ktoré potom počas dňa predáva za cenu  $p_i$ . Dopyt po red'kovkách  $z_i$  je náhodný, pričom  $z_i$  nadobúda hodnoty z rovnomerného rozdelenia  $\mathbb{Z}_i$ . Red'kovky, ktoré daný deň nepredá, môže predávať aj ďalší deň, avšak vznikne mu tým strata  $s$  za každý zväzok (táto strata predstavuje napr. náklady na skladovanie).

Predpokladajme, že predavač začína s prázdny sklado ( $x_0 = 0$ ). Posledný deň chce mať na sklade v priemere aspoň  $\mu$  red'koviek, keďže má kontrakt s veľkoodberateľom. Ten  $k$ -ty deň odkúpi všetky zostávajúce red'kovky za zostatkovú hodnotu  $h$ , pričom požaduje, aby ich bolo priemerne aspoň  $\mu$ .

Voľbou rôznych parametrov môžeme riešiť rôzne verzie tejto úlohy. V autonómnej verzii úlohy zvolíme konštantnú predajnú cenu  $p_i \equiv p$ , tiež dopyt  $z_i \in \mathbb{Z}_i \equiv \mathbb{Z}$  bude rovnako rozdelený počas celého plánovacieho obdobia. V neautonómnej verzii sa bude predajná cena, resp. dopyt v priebehu obdobia meniť.

**Stochastické optimálne riadenie**

Sformulujme teda úlohu predavača red'koviek v tvare stochastickej úlohy optimálneho riadenia. Stavovú premennú – aktuálny počet zväzkov red'koviek ráno  $i$ -teho dňa označíme  $x_i$ , hodnotu riadenia, teda nákup u dodávateľa pre daný deň bude  $u_i = v_i(x_i)$  v tvare odozvovej funkcie, pričom povolené hodnoty nákupu musia byť z množiny  $\mathbb{U}_i = \{0, 1, \dots, u_i^{MAX}\}$ .

Počas  $i$ -teho dňa bude obchodník ponúkať celkovo  $x_i + u_i$  red'koviek. Dopyt daného dňa označíme  $z_i$ . Ak bude dopyt väčší ako ponuka, obchodník predá všetky red'kovky. V opačnom prípade obchodníkovi nejaké red'kovky ostanú na sklade (tento počet označíme  $x_{i+1}$ ). Počet red'koviek na sklade počas dňa sa teda bude vyvíjať podľa stavovej diferencnej rovnice:

$$x_{i+1} = f_i(x_i, u_i, z_i) = \max(x_i + u_i - z_i; 0). \tag{4.1}$$

Predpokladáme, že všetky náhodné premenné, teda dopyty v rôznych dňoch sú nezávislé a neuspokojený dopyt z jedného dňa sa neprenáša do ďalšieho.

Účelová funkcia – maximalizácia zisku predavača red'koviek bude vyjadrená nasledovne:

$$f_i^0(x_i, u_i, z_i) = \underbrace{p_i \min(x_i + u_i; z_i)}_{\text{predaj}} - \underbrace{nu_i}_{\text{nákup}} - \underbrace{sx_i}_{\text{straty}}. \tag{4.2}$$

Navyše budeme uvažovať aj odpredaj red'koviek zostávajúcich na konci obdobia ( $h$  za zväzok), teda funkciu koncového stavu  $\varphi(x) = hx$ .

Do úlohy doplníme aj požadované koncové ohraničenie – počet red'koviek zostávajúcich na konci musí byť (v strednej hodnote) minimálne  $\mu$ , musí teda spĺňať podmienku

$$E_{k-1} [x_k] \geq \mu. \tag{4.3}$$

Na základe predchádzajúcich úvah môžeme sformulovať úlohu predavača red'koviek v tvare stratégií nasledovne:

$$\begin{aligned}
 \max_{\nu=\{v_0, \dots, v_{k-1}\}} E & \left[ \sum_{i=0}^{k-1} p_i \min(x_i + v_i(x_i); z_i) - n v_i(x_i) - s x_i + h x_k \right] \\
 x_{i+1} &= \max(x_i + v_i(x_i) - z_i; 0), & i = 0, \dots, k-1, \\
 x_0 &= 0, \\
 v_i(x_i) &\in \mathbb{U}_i \equiv \{0, 1, \dots, u_i^{\text{MAX}}\}, & i = 0, \dots, k-1, \\
 z_i &\sim \mathbb{Z}_i - \text{Rovnomerné rozdelenie}, & i = 0, \dots, k-1, \\
 E_{k-1} &\left[ \max(x_{k-1} + v_{k-1}(x_{k-1}) - z_{k-1}; 0) \right] \geq \mu.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

## 4.2 Riešenie metódou dynamického programovania

Sformulovanú úlohu optimálneho riadenia (4.4) budeme riešiť pomocou rovnice dynamického programovania (RDP). Využijeme pri tom Vetu 2.16, ktorá dáva návod na výpočet hodnotovej funkcie „od konca“. Postupne budeme pre jednotlivé časové etapy  $i = k-1, k-2, \dots, 0$  hľadať hodnotovú funkciu  $V_i(x)$  tak, aby platili vzťahy

$$\begin{aligned}
 V_i(x) &= \max_{v_i(x) \in W_i(x)} E_i \left[ f_i^0(x, v_i(x), z_i) + V_{i+1}(f_i(x, v_i(x), z_i)) \right], \\
 V_k(x) &= \varphi(x) = h x,
 \end{aligned}$$

pričom konkrétne v našej úlohe majú funkcie  $f_i^0, f_i$  tvar

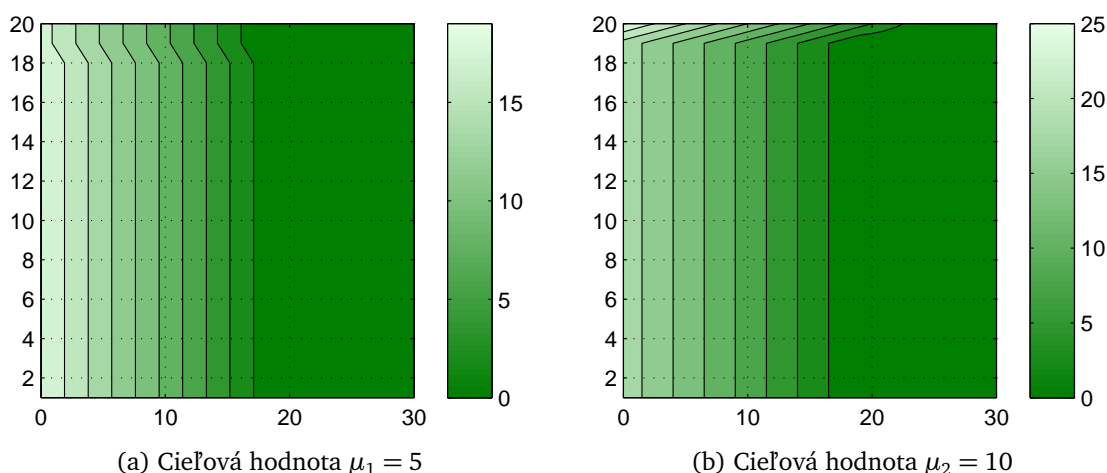
$$\begin{aligned}
 f_i^0(x_i, v(x_i), z_i) &= p_i \min(x_i + v_i(x_i); z_i) - n v_i(x_i) - s x_i, & i = 0, \dots, k-1, \\
 f_i(x_i, v(x_i), z_i) &= \min(\max(x_i + v_i(x_i) - z_i; 0); x^{\text{MAX}}), & i = 0, \dots, k-1.
 \end{aligned}$$

Kvôli numerickému riešeniu sme upravili stavovú rovnicu pre  $f_i$  pridaním maximálnej hodnoty  $x^{\text{MAX}}$ , čo je ekvivalentné použitiu konštantnej extrapolácie (3.2) opísanej v predchádzajúcej kapitole. Hodnotu  $x^{\text{MAX}}$  zvolíme dostatočne veľkú, aby neovplyvnila riešenie, zároveň však takú, aby množina dosiahnuteľných stavov  $\mathbb{X} = \{0, 1, \dots, x^{\text{MAX}}\}$  nebola zbytočne veľká.

Pri numerickom riešení pomocou RDP budeme používať množiny prípustných hodnôt riadenia  $W_i(x_i)$  pre  $x_i \in X_i$ . Tieto množiny sú určené podmienkou na strednú hodnotu koncového stavu, v nadväznosti na kapitolu 2 ich zvolíme v tvare (2.8), resp. v alternatívnom tvare (2.10).

Nájsť hodnotu  $V_i(x)$  pre danú etapu  $i = 0, \dots, k-1$  znamená pre každé  $x$  z množiny prípustných stavov  $X_i \subset \mathbb{X}$  nájsť optimálnu hodnotu stratégie  $v_i(x)$ , ktorá maximalizuje účelovú funkciu. Postupným preskúmaním všetkých prípustných hodnôt riadenia z množiny  $W_i(x)$  nájdeme optimálnu hodnotu stratégie, pričom najvyššiu dosiahnutú hodnotu  $V_i(x)$  a prislúchajúcu stratégiu  $v_i(x)$  priebežne ukladáme.

Očakávanú strednú hodnotu účelovej funkcie potom obsahuje hodnotová funkcia v bode  $x_0$ , teda  $V_0(x_0)$ . Podrobný popis numerickej schémy sa nachádza na obr. 3.1 v kapitole 3.1. Pri numerickom riešení využívame program Matlab.



Obr. 4.1: Optimálna stratégia  $v_i(x)$  autonómnej úlohy v závislosti od cieľovej hodnoty  $\mu$ . Na vodorovnej osi je hodnota stavu  $x$  (počet red'koviek na sklade), na zvislej časová etapa  $i$ . Farba znázorňuje hodnotu stratégie  $v_i(x)$  (tmavšia farba znamená menší nákup)

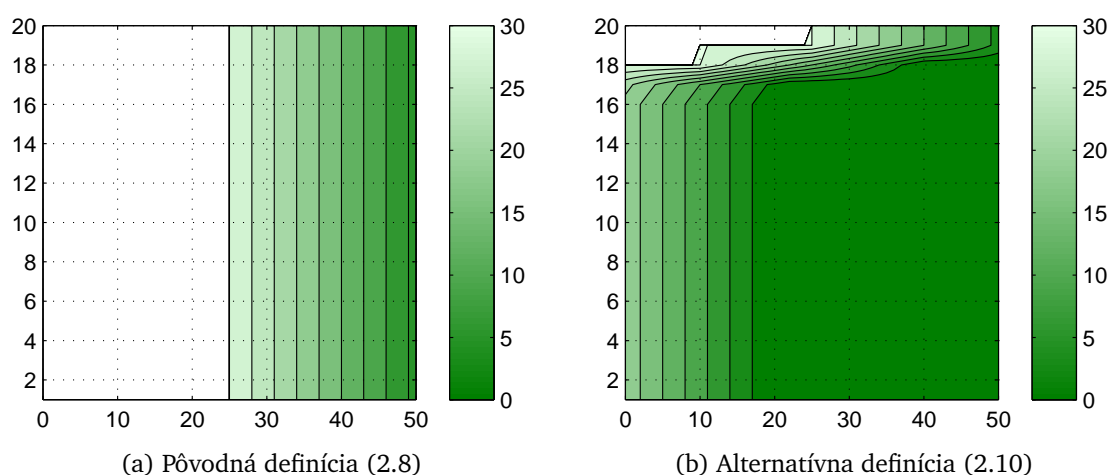
#### 4.2.1 Numerické riešenie

Vypočítajme najskôr riešenie autonómnej verzie úlohy pomocou diskkrétnej numerickej schémy pre rôzne hodnoty parametra  $\mu$ , teda minimálnej požadovanej strednej hodnoty koncového stavu. Použijeme pritom nasledujúce hodnoty parametrov:

- plánovacie obdobie  $k = 20$  dní,
- ohraňenie riadenia  $u^{\text{MAX}} = 30$  – maximálny denný nákup od dodávateľa,
- ohraňenie stavu  $x^{\text{MAX}} = 100$  – maximálny počet red'koviek na sklade,
- náhodný dopyt  $z_i \sim \mathbb{Z}_i \equiv \mathbb{Z}$  – diskkrétne rovnomerné rozdelenie na 0 až 30,
- pravdepodobnosť realizácií  $z_i \in \{0, 1, \dots, 30\}$  je  $P[\mathbb{Z}_i = z_i] = \frac{1}{31}$ ,
- predajná cena  $p_i = 0,9$ , nákupná cena  $p = 0,5$ , strata ak nepredá  $s = 0,25$ ,
- predaj na konci za  $h = 0$  (pre zjednodušenie),
- požadovaná koncová hodnota  $\mu$  – budeme postupne upravovať.

Začnime voľbou parametra  $\mu_1 = 5$  a  $\mu_2 = 10$  pre podmienku (4.3). Ide o relatívne malé hodnoty, ani vplyv na prípustnosť by nemal byť veľký. Výsledky numerického riešenia sme znázornili na obrázku 4.1. Na vodorovnej osi sa nachádzajú jednotlivé hodnoty stavu (počty red'koviek na sklade), pričom na grafe sme znázornili iba stavy menšie ako 30. Na zvislej osi sa nachádzajú jednotlivé časové etapy. Konkrétnu hodnotu stratégie  $v_i(x)$  pre dané  $i$  a  $x$  určuje farba na grafe, tmavšia farba označuje menšiu hodnotu riadenia (nákup menšieho počtu kusov).

Ako môžeme vidieť na obrázkoch, v koncovej etape je nákup nižší pri voľbe  $\mu_1 = 5$ , resp. vyšší pri voľbe  $\mu_2$  v porovnaní s nákupmi v predchádzajúcich etapách. Tieto sú až po 18-tu etapu konštantné, keďže ide o autonómnu verziu úlohy. Splnenie podmienky sa zabezpečí pri



Obr. 4.2: Optimálna stratégia  $v_i(x)$  pri cieľovej hodnote  $\mu_3 = 40$   
 Biela oblasť označuje neprípustné hodnoty stavu  $x \notin X_i$

poslednom rozhodovaní v etape  $i = k - 1$ . V tomto prípade sú v súlade s očakávaním všetky stavy prípustné.

Na grafoch si zároveň môžeme všimnúť, že stratégie sú lineárne: zvýšenie stavu o 1 znamená zvýšenie optimálnej hodnoty riadenia o 1. Táto vlastnosť optimálnej stratégie súvisí s tvarom úlohy, keďže stavová rovnica je lineárna.

Zvoľme si však požadovanú koncovú hodnotu  $\mu_3 = 40$ . Splnenie tohto ohraničenia nedá zabezpečiť v poslednej etape, keďže maximálny nákup je  $u^{\text{MAX}} = 30$  a priemerný dopyt je  $\bar{z}_i = 15$ . Tým pádom je nevyhnutné odkladať si reďkovky už niekoľko etáp pred koncom.

Numerické riešenie sme znázornili na obrázku 4.2 pre prípad pôvodnej (2.8) aj alternatívnej definície (2.10) množiny prípustných hodnôt riadenia. Biela oblasť na grafoch označuje neprípustné stavy  $x \notin X_i$ , v týchto neexistuje žiadna prípustná hodnota riadenia, nemôže teda existovať ani optimálna stratégia pre dané  $x$ .

Môžeme si všimnúť, že kým v prípade (2.8) úloha pre  $x_0 = 0$  nemá prípustné riešenie, pre (2.10) riešenie má a toto riešenie je okrem niekoľkých etáp pred koncom rovnaké ako v prvom prípade pre  $\mu_1 = 5$ . Otázkou je, ktoré z týchto riešení je správne, resp. viac v súlade s intuíciou.

Ako sme uviedli, očakávame, že predavač niekoľko dní pred koncom plánovacieho obdobia uskutoční väčšie nákupy a zostávajúce reďkovky si odloží na posledný deň, aby splnil koncovú podmienku. Zrejme mu to zvýši náklady, avšak splnenie podmienky (4.3) je nevyhnutné. Intuitívne by teda prípustné riešenie úlohy malo existovať. Pravdepodobnosť, že by dopyt dosahoval niekoľko dní maximálne hodnoty a teda predavač si nemohol odložiť žiadne reďkovky na posledný deň je príliš malá.

#### 4.2.2 Množina prípustných stavov

Pozrime sa teda na množinu prípustných stavov a množinu prípustných hodnôt riadenia podrobnejšie – analyticky. Pre zjednodušenie ďalšieho zápisu si označme funkciu  $G_i(a)$ :

$$G_i(a) = E_i [\max(a - z_i; 0)] \quad (4.5)$$

Keďže poznáme rozdelenie  $z_i \sim \mathbb{Z}$ , môžeme odvodiť

$$G_i(a) = \begin{cases} a - E_i[z_i] = a - 15, & \text{pre } a \geq z_i^{\text{MAX}} = 30, \\ \frac{1}{31} \sum_{z_i=0}^a a - z_i = \frac{1}{31} \cdot \frac{a(a+1)}{2}, & \text{inak.} \end{cases} \quad (4.6)$$

Vyjadrieme teraz analyticky množiny prípustných stavov, resp. hodnôt riadenia pre v závislosti od hodnoty parametra  $\mu$ , teda minimálnej požadovanej strednej hodnoty koncového stavu. Rozoberieme prípady  $\mu_1 = 5$  a  $\mu_3 = 40$ . Pre ďalšie hodnoty parametra  $\mu$  možno množiny prípustných stavov odvodiť analogicky.

### Prípady $\mu_1 = 5$

Ovďme najskôr množinu prípustných hodnôt riadenia a množinu prípustných stavov v jednoduchšom prípade pre  $\mu_1 = 5$ . Vzhľadom na parametre úlohy má množina hodnôt riadenia tvar  $\mathbb{U} = \{0, 1, \dots, 30\}$ . Dosadíme do (2.8) pre  $i = k - 1$ :

$$\begin{aligned} W_{k-1}(x) &= \{u \in \mathbb{U} \mid E_{k-1}[\max(x + u - z_{k-1}; 0)] \geq \mu_1 = 5\} = \\ &= \{u \in \mathbb{U} \mid G_{k-1}(x + u) \geq 5\} = \{u \in \mathbb{U} \mid x + u \geq 18\}. \end{aligned}$$

Posledná rovnosť vyplýva z toho, že  $G_{k-1}(a) \geq 5$  pre  $a \geq 18$ . Ako môžeme vidieť, aj pre najmenšie  $x = 0$  máme k dispozícii niekoľko prípustných hodnôt riadenia ( $18 \leq u \leq 30$ ). Preto  $X_{k-1} = \mathbb{X}$ , všetky stavy sú prípustné.

Pre  $i < k - 1$  sú prípustné také hodnoty riadenia, ktoré vedú do prípustného stavu. Keďže však všetky stavy sú prípustné ( $X_{k-1} = \mathbb{X}$ ), prípustné budú všetky hodnoty riadenia a všetky stavy, teda  $X_i = \mathbb{X}$  pre všetky  $i = 0, \dots, k - 1$ .

V prípade alternatívnej definície (2.10) dôjdeme v tomto prípade k rovnakému výsledku. Pre malé hodnoty  $\mu \leq 15$  nie je medzi oboma formuláciami rozdiel. To sú tie hodnoty  $\mu$ , kedy je možné zabezpečiť splnenie podmienky (4.3) v poslednej etape. V najhoršom – hraničnom prípade  $\mu = 15$  dostaneme podmienku  $x + u \geq 30$ , teda aj vtedy sú všetky stavy prípustné. Naše odvodenie je v súlade s numerickým riešením na obrázku (4.1).

### Prípady $\mu_3 = 40$ – pôvodná definícia

Situácia pre  $\mu > 15$  je komplikovanejšia. Dosadíme teda  $\mu_3 = 40$  do pôvodného predpisu (2.8):

$$\begin{aligned} W_{k-1}(x) &= \{u \in \mathbb{U} \mid E_{k-1}[\max(x + u - z_{k-1}; 0)] \geq \mu_3 = 40\} = \\ &= \{u \in \mathbb{U} \mid G_{k-1}(x + u) \geq 40\} = \{u \in \mathbb{U} \mid x + u \geq 55\}. \end{aligned}$$

Posledná rovnosť opäť vyplýva z prepisu funkcie  $G$ :  $G_{k-1}(a) \geq 40 \Leftrightarrow a \geq 55$ . Keďže však pre všetky  $u \in \mathbb{U}$  platí  $u \leq u_{k-1}^{\text{MAX}} = 30$ , tak pre niektoré  $x$  bude  $W_{k-1}(x)$  prázdna množina, potom dané  $x$  ani nebude prípustné. Platí:  $X_{k-1} = \{x \in \mathbb{X} \mid x \geq 25\}$ .

Pre  $i = k - 2$  dostávame

$$\begin{aligned} W_i(x) &= \{u \in \mathbb{U} \mid \max(x + u - z_i^s; 0) \in X_{i+1} \text{ pre všetky } z_i^s \in \mathbb{Z}_i\} = \\ &= \{u \in \mathbb{U} \mid x + u - z_i^{\text{MAX}} \geq 25\} = \{u \in \mathbb{U} \mid x + u \geq 55\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$



pretože  $z_i^{\text{MAX}} = 30$ . Rovnica (4.7) pritom platí rovnako pre všetky  $i < k - 1$ , preto aj

$$X_i = X_{k-1} = \{x \in \mathbb{X} \mid x \geq 25\}$$

pre všetky  $i < k - 1$ . Z toho vyplýva, že ani počiatočný stav  $x_0 = 0$  nebude prístupný. Analytický výsledok, ktorý sme odvodili, zodpovedá numerickému riešeniu na obr. 4.2a, kde stavy  $x < 25$  nie sú prípustné.

#### Prípád $\mu_3 = 40$ – alternatívna definícia

Dosaďme  $\mu_3 = 40$  do alternatívnej definície (2.10). Množiny  $W_{k-1}(x)$ ,  $X_{k-1}$  zostávajú rovnaké ako v predošlom prípade. Avšak pre  $i = k - 2$  nastáva zmena:

$$\begin{aligned} W_{k-2}(x) &= \{u \in \mathbb{U} \mid E_{k-2} [\max(x + u - z_{k-2}; 0)] \in X_{k-1}\} = \\ &= \{u \in \mathbb{U} \mid G_{k-2}(x + u) \geq 25\} = \{u \in \mathbb{U} \mid x + u \geq 40\}, \\ X_{k-2} &= \{x \in \mathbb{X} \mid x \geq 10\}, \end{aligned}$$

teda  $X_{k-2}$  obsahuje aj stavy, ktoré  $X_{k-1}$  neobsahovala. Pre  $i = k - 3$  dostávame:

$$\begin{aligned} W_{k-3}(x) &= \{u \in \mathbb{U} \mid G_{k-3}(x + u) \geq 10\} = \{u \in \mathbb{U} \mid x + u \geq 25\}, \\ X_{k-3} &= \{x \in \mathbb{X}\}, \end{aligned}$$

V čase  $i = k - 3$  sú už prípustné všetky hodnoty stavu  $\mathbb{X}$ , rovnako to bude aj pre  $i < k - 3$ . Tieto výsledky sú opäť v súlade s numerickým riešením na obr. 4.2b.

#### Zhrnutie

Analytickým odvodením sme potvrdili, že v prípade úlohy predavača red'koviek s podmienkou (4.3) pre  $\mu > 15$  pôvodná definícia (2.8) zlyháva a v rozpore s intuíciou vedie k neprípustnosti celej úlohy, teda neexistencii prípustného riešenia. V tomto prípade sa ako vhodnejšia ukázala alternatívna definícia (2.10), ktorá pripúšťa prípustné riešenia a umožňuje túto úlohu vyriešiť.

Rizikom alternatívnej definície je však dosiahnutie neprípustného stavu: táto situácia nastane, ak bude v posledných 2 etapách veľký dopyt zákazníkov. Z tohto dôvodu budeme pri ďalších numerických výpočtoch a porovnávaní so stochastickým programovaním voliť  $\mu \leq 15$ , vďaka čomu môžeme použiť pôvodnú definíciu a prípadným problémom s neprípustnosťou sa vyhneme.

### 4.3 Stochastické programovanie

Zadaný problém – úlohu predavača red'koviek vyriešime aj použitím stochastického programovania s cieľom porovnať získané výsledky. V podstate chceme zistiť, aký je prínos riešenia získaného stochastickým optimálnym riadením, teda o koľko v priemere zvýši predavačov zisk použitie optimálnej stratégie.

V stochastickom programovaní máme dve možnosti – buď zostaviť úlohu ako viacstupňovú (pre  $k$  dní plánovacieho obdobia potrebujeme  $(k + 1)$ -stupňovú úlohu) alebo vygenerovať náhodné scenáre a previesť problém na úlohu lineárneho programovania. Keďže úlohu budeme riešiť na dlhšom horizonte  $k = 20$  dní, zvolili sme druhú možnosť.

Hlavná myšlienka tohto prístupu je jednoduchá: v prvom kroku vygenerujeme  $N$  náhodných scenárov, ktoré predstavujú konkrétne realizácie náhodných premenných  $z_i \sim \mathbb{Z}_i$ . V druhom kroku potom riešime úlohu lineárneho programovania – maximalizácia celkového zisku zo všetkých  $N$  scenárov pri použití spoločného programového riadenia  $\mathcal{U} = \{u_0, u_1, \dots, u_{k-1}\}$ .

Pri zostavovaní úlohy lineárneho programovania pritom musíme pamätať na rôzne druhy ohraničení, podobne ako pri formulácii v tvare úlohy OR. Patria sem ohraničenia v tvare rovností (napr. podmienka kontinuity stavu na sklade) aj nerovností (najviac možno predat' toľko výrobkov, koľko sa nachádza na sklade a i.).

### Generovanie náhodných scenárov

Prvým krokom nášho riešenia je vygenerovanie  $N$  náhodných scenárov. Označme náhodný dopyt v  $i$ -tom dni  $j$ -teho scenára ako  $z_i^j$ . Potom pri generovaní budeme náhodne vyberať  $z_i^j$  z množiny možných hodnôt dopytu  $\mathbb{Z}_i$ . Pri generovaní rovnomerného rozdelenia dopytu použijeme základnú Matlabovskú funkciu `rand()`.

Otázkou je, koľko scenárov je vhodné vygenerovať napr. pre  $k = 20$  dňové obdobie. Pri veľmi malom počte scenárov bude nájdené riešenie (programové riadenie) vhodné len pre tieto konkrétne prípady. Pri vyššom počte scenárov sa viac prejaví zákon veľkých čísel a náhodný charakter úlohy, nájdené riadenie tak bude lepšie reflektovať „priemerný“ prípad.

Na druhej strane, čím vyšší počet scenárov, tým väčší je rozmer úlohy LP, ktorú budeme riešiť. Okrem počtu premenných, ktorých je rádovo  $2Nk$ , výrazne rastie aj množstvo ohraničení (pre každý scenár máme  $k$  rovníc a  $7k$  nerovníc).

Napr. pri  $k = 20$  dňoch a len  $N = 2$  scenároch bude počet premenných 100, pri  $N = 100$  scenároch bude už 4020. Vzhľadom na výpočtové a pamäťové kapacity budeme preto používať rádovo desiatky scenárov (cca 40-70). Aj tento počet scenárov už zabezpečí celkom dobré výsledky, ako uvádzame medzi konkrétnymi výsledkami v podkapitole 4.5.

### Formulácia úlohy lineárneho programovania

Sformulujme teraz úlohu lineárneho programovania, v ktorej budeme hľadať optimálne hodnoty programového riadenia na  $N$  náhodných scenároch, ktoré predstavujú konkrétnu (deterministickú) realizáciu náhodného dopytu. Použijeme tieto označenia:

$i$  – index pre číslo dňa,  $i \in I := \{0, \dots, k-1\}$ ,

$j$  – index pre číslo scenára,  $j \in J := \{1, \dots, N\}$ ,

$u_i$  – objednávka v  $i$ -tom dni (programové riadenie), pre  $\forall i \in I$ ,

$x_i^j$  – stav na sklade v  $i$ -tom dni  $j$ -teho scenára, pre  $\forall i \in I, \forall j \in J$ ,

$z_i^j$  – náhodný dopyt v  $i$ -tom dni  $j$ -teho scenára, pre  $\forall i \in I, \forall j \in J$ ,

$y_i^j$  – skutočne predané množstvo v  $i$ -tom dni  $j$ -teho scenára, pre  $\forall i \in I, \forall j \in J$ .

Rozmery jednotlivých premenných budú  $u \in \mathbb{R}^k$ ,  $x \in \mathbb{R}^{N \times (k+1)}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{N \times k}$ .

Budeme uvažovať nasledujúce ohraňovania a účelovú funkciu pre úlohu LP:

- Rovnice pre vývoj na sklade a počiatočný stav (kontinuita stavu)

$$\begin{aligned} x_{i+1}^j &= x_i^j + u_i - y_i^j, & \forall i \in I, \forall j \in J, \\ x_0^j &= 0, & \forall j \in J. \end{aligned} \quad (4.8)$$

- Obmedzenia pre aktuálny stav a riadenie

$$\begin{aligned} x_i^j \in X_i &\Leftrightarrow 0 \leq x_i^j \leq x^{\text{MAX}}, & \forall i \in I, \forall j \in J, \\ u_i \in U_i &\Leftrightarrow 0 \leq u_i \leq \max_{u_i \in U_i} u_i, & \forall i \in I. \end{aligned} \quad (4.9)$$

- Obmedzenia predaného množstva (podľa dopytu a stavu na sklade)

$$\begin{aligned} 0 \leq y_i^j &\leq z_i^j, & \forall i \in I, \forall j \in J, \\ y_i^j &\leq x_i^j + u_i, & \forall i \in I, \forall j \in J. \end{aligned} \quad (4.10)$$

- Podmienka na strednú hodnotu koncového stavu  $E_{k-1} [x_k^j] \geq \mu$  v tvare súčtu

$$\sum_{j \in J} x_k^j \geq \mu N. \quad (4.11)$$

- Účelová funkcia zahŕňa príjem z predaja, náklady na nákup, skladovanie a výnos z odpredaja ostávajúcich kusov; má tvar

$$\max_{u, x, y} \left[ \frac{1}{N} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_i y_i^j - \sum_{i \in I} n u_i - \frac{1}{N} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} s x_i^j + \frac{1}{N} \sum_{j \in J} h x_k^j \right]. \quad (4.12)$$

Teda úloha lineárneho programovania, ktorou budeme hľadať optimálne riadenie pre náhodné scenáre, pozostáva z účelovej funkcie (4.12) a ohraňoví (4.8) – (4.11). Úlohu budeme riešiť pomocou zabudovanej funkcie `linprog()` programu Matlab.

Poznamenajme ešte, že v prípade riešenia úlohy LP nemáme zaručené, že optimálne riešenie bude celočíselné (hoci povaha úloha to predpokladá). Úloha obmedzuje iba maximálnu a minimálnu hodnotu riadenia ohraňovím (4.9). Pre zjednodušenie však budeme ďalej pracovať s nájdeným riešením, keďže najbližšie celočíselné riešenie by zrejme malo ešte nižšiu hodnotu účelovej funkcie.

## 4.4 Porovnávanie kvality riešení

Riešenia získané dynamickým a stochastickým programovaním nemajú rovnaký tvar. V prípade dynamického programovania má riešenie tvar stratégie, teda postupnosti odozvových funkcií  $\{v_i(x)\}_{i=0}^{k-1}$ , ktorá určuje, aké má byť optimálne riadenie pre každú kombináciu časovej etapy  $i$  a stavu  $x$ . Oproti tomu riešením stochastického programovania je programové riadenie

$$\mathcal{U} = \{u_0, u_1, \dots, u_{k-1}\},$$

teda konkrétna postupnosť hodnôt riadenia, ktoré sú optimálne na zvolenej množine náhodných scenárov. Takéto riešenia nie je možné priamo porovnať.

V oboch prípadoch riešenie zahŕňa aj očakávanú (priemernú) hodnotu účelovej funkcie (hodnota  $V_0(x_0)$  v OR, resp. dosiahnutá hodnota účelovej funkcie úlohy LP). Ani tieto sa však nedajú priamo porovnávať, keďže v OR je to stredná hodnota cez všetky náhodné premenné  $z_i$  a v prípade SP iba cez vygenerované scenáre (nejakej podmnožine všetkých scenárov, čo môže byť výhodnejšie).

Preto sme sa rozhodli získané riešenia porovnávať pomocou Monte-Carlo simulácií, teda priamo v reálnej situácii: vygenerujeme nový náhodný scenár dopytu a porovnáme výsledok oboch metód: celkový zisk pri použití programového riadenia získaného stochastickým programovaním a stratégie získanej optimálnym riadením. Vypočítať výsledný zisk pri danom dopyte a riadení (stratégii) na základe stavovej rovnice je pritom jednoduchá úloha, môžeme teda porovnanie opakovať aj na veľkom počte rôznych náhodných scenárov (napr. rádovo 1000 opakovaní pre jedno nastavenie parametrov).

Obe metódy budeme porovnávať na širokej množine parametrov úlohy, napr. autonómna alebo neautonómna cena, resp. dopyt, ale aj rôzne hodnoty parametra  $\mu$  (očakávaná koncová hodnota). Pri porovnávaní sa zameriame na nasledujúce ukazovatele:

- očakávaná hodnota zisku a hodnota koncového stavu  $x_k$  každej z metód (vyplývajúca z výpočtu OR, LP),
- dosiahnutá priemerná, resp. aj minimálna a maximálna hodnota zisku oboch metód,
- v koľkých percentách prípadov má OR väčší zisk (OR je úspešnejšie),
- reálna hodnota riešenia získaného optimálnym riadením (rozdiel medzi priemernými hodnotami zisku oboch metód),
- skutočne dosiahnutá stredná hodnota koncového stavu  $x_k$  (overíme splnenie koncovej podmienky).

## 4.5 Prehľad výsledkov

Začnime jednoduchými príkladmi. Pre pevné hodnoty parametrov vypočítame riešenie optimálnym riadením (OR) aj stochastickým programovaním (SP). Treba poznamenať, že kým v OR je riešenie pre pevné hodnoty parametrov vždy rovnaké (vypočítame rovnaký tvar odozvočných funkcií aj očakávanú hodnotu zisku), v prípade SP to tak byť nemusí. Konkrétne výsledky – programové riadenie aj očakávaný zisk závisia od náhodne vygenerovanej sady scenárov.

Následne už pri porovnávaní počas simulácií vygenerujeme nové náhodné scenáre – testovacie scenáre, na ktoré necháme vypočítané riešenia reagovať a pomocou stavovej rovnice a účelovej funkcie úlohy (4.4) dopočítame výsledný zisk. V tomto prípade sa dosiahnutý (priemerný) zisk OR aj SP mení každým behom programu.

Tieto vlastnosti ukážeme na dvoch príkladoch s rôznymi hodnotami parametrov v tabuľkách 4.1 a 4.2. Riešenie SP sme počítali trikrát (výpočty 1, 2, 3), pričom každé vypočítané riešenie sme dvakrát porovnávali s riešením OR na náhodnej sade 1000 scenárov (A, B).

#### 4.5. PREHLAD VÝSLEDKOV

Príklad 1 Výpočet	Očak. zisk		Priem. zisk		Min. zisk		Max. zisk		Rozdiel		Úspešnosť OR
	SP	OR	SP	OR	SP	OR	SP	OR	abs.	rel.	
1A	56,1	63,6	53,4	64,2	-44,7	18,6	76,1	109,4	10,8	20,2%	87,8%
1B	56,1	63,6	52,4	63,5	-79,7	9,4	76,6	103,4	11,1	21,1%	87,1%
2A	59,4	63,6	49,0	62,9	-121,1	15,8	79,5	117,0	13,9	28,4%	91,8%
2B	59,4	63,6	49,0	63,1	-92,3	23,8	79,2	109,4	14,1	28,7%	90,4%
3A	54,6	63,6	52,6	63,5	-75,0	12,2	74,8	104,6	10,9	20,8%	88,1%
3B	54,6	63,6	52,8	63,8	-67,4	19,4	74,6	102,6	11,0	20,9%	89,4%
Priemer	56,7	63,6	51,5	63,5	-80,0	16,5	76,8	107,7	12,0	23,3%	89,1%

Tabuľka 4.1: Príklad 1, hodnoty parametrov sú  $k = 20$ ,  $p = 0.7$ ,  $n = 0.4$ ,  
 $s = 0.1$ ,  $h = 0$ ,  $\mu = 10$ ,  $N = 50$  scenárov.

Príklad 2 Výpočet	Očak. zisk		Priem. zisk		Min. zisk		Max. zisk		Rozdiel		Úspešnosť OR
	SP	OR	SP	OR	SP	OR	SP	OR	abs.	rel.	
1A	70,8	78,1	64,6	78,3	-69,3	23,6	92,5	126,8	13,7	21,2%	90,3%
1B	70,8	78,1	64,8	78,4	-136,8	3,1	92,4	127,4	13,6	21,0%	87,5%
2A	66,0	78,1	64,7	78,9	-67,3	18,5	85,4	125,3	14,2	21,9%	89,6%
2B	66,0	78,1	64,4	78,3	-41,6	16,1	86,6	132,5	13,9	21,6%	89,8%
3A	70,1	78,1	64,4	78,6	-153,3	20,6	90,2	134,6	14,3	22,2%	89,9%
3B	70,1	78,1	64,0	78,0	-129,9	14,3	90,4	128,6	14,0	21,9%	89,3%
Priemer	69,0	78,1	64,5	78,4	-99,7	16,0	89,6	129,2	14,0	21,6%	89,4%

Tabuľka 4.2: Príklad 2, hodnoty parametrov sú  $k = 20$ ,  $p = 0.9$ ,  $n = 0.5$ ,  
 $s = 0.2$ ,  $h = 0.2$ ,  $\mu = 5$ ,  $N = 50$  scenárov.

Popíšme podrobnejšie stĺpce tabuliek 4.1 a 4.2:

- **Očakávaný zisk** obsahuje očakávanú hodnotu zisku vypočítanú priamo pri riešení úlohy metódou SP, OR
- **Priemerný zisk** predstavuje skutočne dosiahnutý priemerný zisk na náhodne vygenerovanej sade scenárov
- **Minimálny a maximálny zisk** sú opäť skutočne dosiahnuté hodnoty pre konkrétne scenáre, uvádzame ich na ukážku, v akom rozsahu sa dosiahnutý zisk pohybuje
- **Rozdiel** počítame ako rozdiel medzi priemerným ziskom oboch metód, v podstate predstavuje hodnotu riešenia OR (o túto sumu má OR vyšší zisk oproti SP)
- **Úspešnosť OR** hovorí, v koľkých percentách testovacích prípadov bol zisk dosiahnutý OR metódou vyšší

V oboch príkladoch sa ukázalo ako výhodnejšie použiť OR riešenie, ktoré dosahovalo vyšší zisk priemerne v 89% percentách všetkých náhodných scenárov. Priemerný zisk v OR bol oproti SP vyšší oproti o 21–23%. Tento výsledok však nie je úplne prekvapujúci, keďže v podstate porovnávame programové riadenie a optimálnu stratégiu. Výpočet netrval dlho, metódou OR trval 10 sekúnd a v prípade použitia SP 7–20 sekúnd v závislosti od počtu scenárov.

#### 4.5. PREHLAD VÝSLEDKOV

Príklad 1 Výpočet	Očakávané $x_k$		Priemerné $x_k$	
	SP	OR	SP	OR
1A	10,00	10,48	10,06	9,98
1B	10,00	10,48	10,11	10,48
2A	10,00	10,48	14,35	10,39
2B	10,00	10,48	14,10	10,25
3A	10,00	10,48	9,89	10,75
3B	10,00	10,48	9,89	10,60

Príklad 2 Výpočet	Očakávané $x_k$		Priemerné $x_k$	
	SP	OR	SP	OR
1A	6,47	5,52	6,14	6,61
1B	6,47	5,52	6,11	6,60
2A	5,50	5,52	4,30	6,55
2B	5,50	5,52	4,38	6,61
3A	5,00	5,52	5,69	6,58
3B	5,00	5,52	5,78	6,63

a) Príklad 1:  $\mu = 10$

b) Príklad 2:  $\mu = 5$

Tabuľka 4.3: Príklady 1 a 2 – očakávané a skutočne dosiahnuté stredné hodnoty  $x_k$ .

Overme ešte splnenie podmienky na strednú hodnotu. V tabuľke 4.3 uvádzame vypočítané očakávané a skutočne dosiahnuté priemerné hodnoty koncového stavu  $x_k$ . V prípade SP bola očakávaná hodnota väčšinou presne  $\mu = 10$  v prvom príklade, resp.  $\mu = 5$  v druhom (čo sa dosahovalo aj neceločíselnou hodnotou riadenia v poslednej perióde). V optimálnom riadení sa volili len celočíselné (povolené) hodnoty riadenia, preto aj stredná hodnota  $x_k$  bola o niečo vyššia ako požadovaná hodnota  $\mu$ .

V skutočnosti však na testovacej sade scenárov riešenie SP nedosiahlo splnenie požadovaného ohraničenia v 4/12 prípadov (33%), OR iba v jedinom prípade (8,3%). Zrejme to súvisí s tým, že je riadenie v tvare spätnej väzby adresnejšie reaguje na prípadnú nízku hodnotu stavu.

#### Počet scenárov

Zaujímalo nás, ako závisí kvalita riešenia (úspešnosť) stochastického programovania od počtu scenárov, ktoré sme použili v úlohe lineárneho programovania. Zvolili sme preto pevné parametre úlohy a do tabuľky 4.4 vypočítali pre rôzne počty scenárov očakávaný a dosiahnutý zisk, ako aj rozdiel ziskov a úspešnosť OR. Riešenie sme počítali pre 10 až 100 scenárov, keďže úlohu s väčším počtom scenárov sa nám nepodarilo vypočítať (kvôli pamäťovému obmedzeniu počítača, na ktorom sme realizovali numerické výpočty).

Z výsledkov môžeme vyvodiť záver, že vyšší počet scenárov má v priemere pozitívny vplyv na úspešnosť SP riadenia, avšak často má väčší vplyv samotné náhodné generovanie scenárov. Pri počte scenárov 40 a viac má OR stále o 20–21% vyšší zisk ako SP, úspešnosť OR sa pohybuje v priemere od 90% do 84 %, pri 20, resp. 100 scenároch. Pre zaujímavosť v tabuľke uvádzame aj čas trvania jednotlivých výpočtov, čo je tiež dôležitý ukazovateľ. Ako vidieť, s rastom počtu scenárov rýchlo rastie aj čas trvania výpočtu. Na základe tohto porovnania sme ďalej uvažovali priemerne 50 scenárov ako určitý kompromis medzi rýchlosťou výpočtu a presnosťou riešenia.

#### Neautonómna cena

Porovnajme teraz obe metódy OR a SP na neautonómnej verzii úlohy (4.4). V tomto prípade bude potrebné v jednotlivých časových etapách voliť iné hodnoty riadenia, očakávame teda, že úspešnosť OR bude ešte väčšia ako v prípade autonómnej úlohy. Pre jednoduchosť ponechávame rovnice v pôvodnom tvare, meniť budeme predajnú cenu  $p_i$  v jednotlivých časových etapách  $i$ .

#### 4.5. PREHLAD VÝSLEDKOV

Počet scenárov	Očak. zisk		Priem. zisk		Rozdiel		Úspešnosť	Čas výpočtu (min) : s
	SP	OR	SP	OR	abs.	rel.	OR	
10	64,2	76,4	57,2	76,0	18,8	32,9%	94,5%	1,4
20	67,5	76,4	60,1	75,4	15,4	25,6%	88,6%	2,1
30	70,0	76,4	61,8	76,3	14,6	23,6%	89,7%	4,5
40	65,9	76,4	62,2	75,3	13,1	21,0%	88,9%	6,7
50	64,7	76,4	63,5	76,3	12,8	20,2%	86,4%	16,3
60	67,1	76,4	62,5	76,1	13,7	21,9%	89,2%	37,5
70	65,1	76,4	62,9	75,9	13,0	20,7%	84,5%	1:00,1
80	58,2	76,4	55,4	76,4	21,0	37,8%	91,2%	2:19,5
90	66,9	76,4	62,1	75,5	13,4	21,6%	84,8%	2:52,7
100	67,0	76,4	62,5	75,0	12,5	19,9%	84,2%	4:06,8
<i>Priemer</i>	65,7	76,4	61,0	75,8	14,8	24,5%	88,2%	

Tabuľka 4.4: Príklad 3: zmena počtu scenárov  $N$

Hodnoty parametrov:  $k = 20$ ,  $p = 0.8$ ,  $n = 0.4$ ,  $s = 0.2$ ,  $h = 0$ ,  $\mu = 10$

Priemerná cena $\bar{p}$	Vývoj ceny	Počet scenárov	Očak. zisk		Priem. zisk		Rozdiel		Úspešnosť
			SP	OR	SP	OR	abs.	rel.	OR
0,75	lomená f.	30	48,4	49,1	39,7	50,4	10,7	26,9%	85,7%
0,80	lomená f.	30	61,3	71,8	61,0	73,0	12,0	19,7%	89,6%
0,71	kvadratická f.	30	33,9	37,3	30,3	37,8	7,6	24,9%	87,2%
0,72	kvadratická f.	50	35,6	39,5	34,5	40,3	5,8	16,7%	84,1%
0,77	náhodné ceny	70	55,5	62,5	54,9	62,8	7,9	14,4%	83,4%
<i>Priemer</i>								20,5%	86,0%

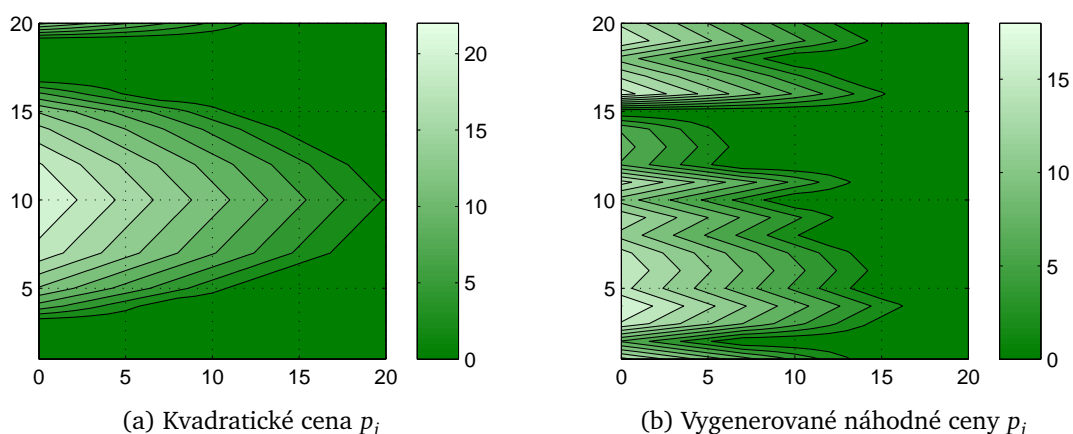
Tabuľka 4.5: Príklad 4: neautonómna úloha so zmenou ceny

Hodnoty parametrov:  $k = 20$ ,  $n = 0.5$ ,  $s = 0.15$ ,  $h = 0.3$ ,  $\mu = 0$

Dopyt	Priemerný dopyt $\bar{z}_i$	Počet scenárov	Očak. zisk		Priem. zisk		Rozdiel		Úspešnosť
			SP	OR	SP	OR	abs.	rel.	OR
víkendový	7	40	38,6	40,4	36,6	41,0	4,4	12,1%	83,7%
víkendový	7	70	37,9	40,4	36,8	41,2	4,4	12,0%	85,6%
max v strede	10,5	40	67,0	68,4	64,6	69,3	4,7	7,2%	83,8%
max v strede	10,5	70	65,9	68,4	64,7	68,9	4,1	6,4%	83,0%
<i>Priemer</i>								9,4%	84,0%

Tabuľka 4.6: Príklad 5: neautonómna úloha so zmenou dopytu

Hodnoty parametrov:  $k = 20$ ,  $n = 0.9$ ,  $n = 0.5$ ,  $s = 0.25$ ,  $h = 0$ ,  $\mu = 3$

Obr. 4.3: Optimálna stratégia  $v_i(x)$  v prípade neautonómnej ceny

Na vodorovnej osi je hodnota stavu  $x$  (počet reďkoviek na sklade), na zvislej časová etapa  $i$

Uvažujme takúto postupnosť neautonómnych cien:

- **lomenú funkciu**, v prvej polovici plánovacieho obdobia lineárne cena rastie a potom klesá,
- **kvadratickú funkciu**, cena je tvaru  $ax^2$  s najvyššou hodnotou v strede časového intervalu,
- **náhodné ceny**, ktoré sme vopred vygenerovali a pri riešení potom použili ako pevné, tieto ceny zdanlivo náhodne kolísali počas plánovacieho obdobia.

Výsledky pre tieto neautonómne ceny uvádzame v tabuľke 4.5, pre lepšiu predstavu navyše uvádzame aj priemernú cenu  $\bar{p}$  počas celého obdobia. Opäť môžeme byť spokojní s výsledkami, keďže hodnota rozdielu medzi riešeniami bola priemerne 20% v prospech OR, pričom OR dosiahlo lepší zisk v 86% testovacích scenároch.

Na ukážku sme optimálnu stratégiu vypočítanú pomocou optimálneho riadenia zobrazili aj graficky na obr. 4.3: môžeme vidieť, že optimálne hodnoty nákupu zodpovedajú očakávanej cene: pokiaľ je najväčšia v strede časového intervalu, najväčšie nákupy sa realizujú v tomto čase, v prípade náhodne vygenerovaných cien optimálne nákupy v jednotlivých etapách kolíšu.

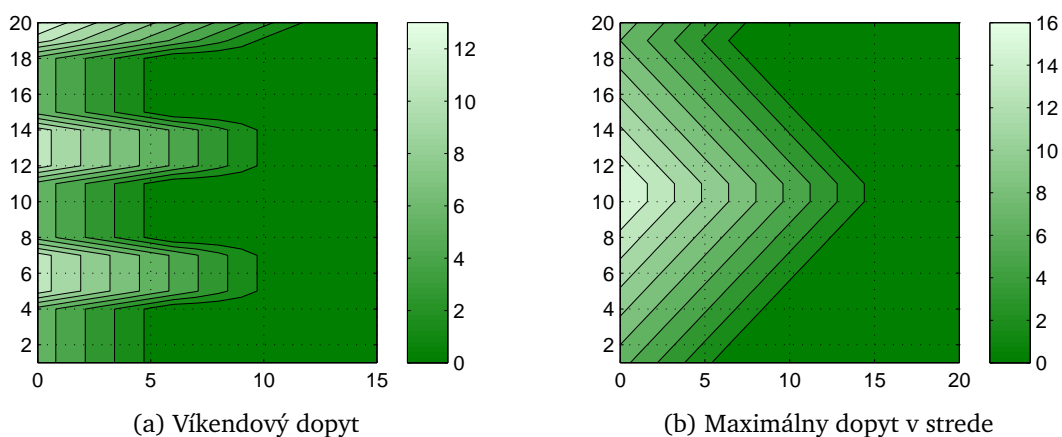
### Zmena dopytu

Neautonómnou úlohu dostaneme aj v prípade, že nastavíme rôzny dopyt v jednotlivých dňoch. Predpokladajme teda, že sa bude meniť - zvolme si dva druhy dopytu:

- **víkendový dopyt**, ktorý sa strieda - prvé štyri dni týždňa je dopyt 0 až 10 zväzkov a ostatné tri dni (piatok-nedeľa) má hodnotu 5 až 15 zväzkov,
- **najväčší v strede**, ktorý dosahuje najväčšiu hodnotu dopytu 10–20 v strede časového intervalu, pričom prvú polovicu času dopyt rastie a potom klesá.

Aj v tomto prípade sme optimálnu stratégiu vypočítanú pomocou dynamického programovania zobrazili na obrázku 4.4. V tomto prípade sa v dňoch, kedy je vyšší dopyt (cez víkend, resp. v strede plánovacieho obdobia), zvyšuje počet objednaných reďkoviek – hodnota riadenia  $v_i(x)$ .





Obr. 4.4: Optimálna stratégia  $v_i(x)$  ako riešenie úlohy optimálneho riadenia pri zmene dopytu. Na vodorovnej osi je hodnota stavu  $x$  (počet reďkoviek na sklade), na zvislej časová etapa  $i$ .

Pre každý dopyt sme vypočítali SP riešenie použitím 40 aj 70 scenárov, výsledky však boli takmer rovnaké, ako uvádzame v tabuľke 4.6. Optimálne riadenie dosiahlo lepší výsledok v 84%, priemerná hodnota riešenia bola 6–12 percent.

### Záverečné zhrnutie

V tejto kapitole sme sa venovali riešeniu úlohy predavača reďkoviek (4.4) s ohraničením na koncový stav v tvare strednej hodnoty (4.3). Úlohu sme riešili stochastickým optimálnym riadením a pomocou stochastického programovania.

V podkapitole 4.2.2 sme sa podrobne venovali množinám prípustných hodnôt riadenia, resp. prípustných stavov v závislosti od požadovanej hodnoty koncového stavu – parametra  $\mu$ . Pritom sme porovnali pôvodnú, resp. alternatívnu definíciu množiny  $W_i(x)$  a ukázali sme, že v prípade tejto úlohy je výhodnejšie použiť alternatívnu definíciu (2.10).

V aktuálnej podkapitole sme uskutočnili veľký počet numerických Monte-Carlo simulácií, v ktorých sme na náhodných testovacích scenároch porovnávali riešenia získané optimálnym riadením (metódou dynamického programovania) a pomocou scenárov v stochastickom programovaní.

Výsledok je pomerne jednoznačný v prospech OR: táto metóda dosiahla vyšší zisk v 80–90% náhodných scenárov, pričom prínos riešenia OR predstavoval priemerne 20%. Potvrdilo sa teda, že optimálna stratégia má pred programovým riadením značný náskok.

---

# Kapitola 5

## *Úloha o portfóliu*

---

Hlavnú náplň tejto kapitoly tvorí úloha o alokácii prostriedkov v portfóliu s koncovými ohraničeniami. Hoci ide o úlohu s diskretným časom, je komplikovanejšia, keďže stav aj riadenie majú v tejto úlohe kontinuálny charakter, čo pri numerickom riešení vyžaduje vhodnú diskretizáciu. Navyše aj náhodný výnos fondu môže byť spojité - opäť musíme zvoliť vhodnú diskretnú aproximáciu.

Úloha o portfóliu je zaujímavá, jej rôzne verzie a formulácie sú predmetom mnohých článkov, autori ich riešia pomocou stochastického programovania alebo optimálneho riadenia. Dôchodkové sporenie a výber fondu napríklad v [32], [33] alebo [27], rebalancovanie portfólií [53], rôzne rozšírenia modelu na optimalizáciu portfólia [13], [17], [18], [30]. Koncovou podmienkou v tvare strednej hodnoty v úlohe o optimalizácii portfólia sa zaoberali autori článku [16], optimalizácia portfólia pri ohraničení na rizikovú mieru Value-at-Risk v [62].

V tejto kapitole sa najskôr sa venujeme rôznym verziám úlohy o portfóliu a možnostiam riešenia týchto úloh s rôznymi koncovými podmienkami. Následne ich riešime numericky pomocou schémy založenej na RDP, ktorá je opísaná v kapitole 3.1. Získané riešenia a ich úspešnosť pri splnení podmienky overujeme prostredníctvom numerických simulácií. Našou snahou je odhaliť zákonitosti, ktoré platia všeobecne pre diskretné stochastické úlohy s koncovou podmienkou.

### 5.1 Formulácia úlohy optimálneho riadenia

Začnime však formuláciou úlohy: uvažujme problém sporiteľa, ktorý má možnosť pri investícii rozdeliť svoje prostriedky do dvoch rôznych aktív:

1. **bezrizikový fond**, tvorený napríklad štátnymi dlhopismi,
2. **rizikový fond**, tvorený prevažne akciami.

Predpokladajme, že výnos bezrizikového fondu je pevný a vopred známy, zatiaľčo výnos rizikového fondu je náhodný, pričom však poznáme rozdelenie výnosov rizikového fondu. Stredná hodnota výnosu rizikového fondu je však väčšia ako v prípade bezrizikového (v opačnom prípade by nemalo zmysel riešiť úlohu).

Predpokladáme, že sporiteľ na začiatku investuje počiatočnú sumu  $a > 0$ . Uvažujme dlhodobý investičný horizont  $k$  rokov (napríklad  $k = 10$  alebo  $k = 40$  rokov), pričom investor sa vždy na začiatku roka môže rozhodnúť, akú časť svojich prostriedkov investuje do rizikového fondu.

Cieľom investora je dosiahnuť čo najvyššiu hodnotu prostriedkov na konci sporenia pri minimálnom riziku. Úlohou je určiť optimálny podiel prostriedkov v rizikovom fonde v jednotlivých rokoch. Uvažovať budeme rôzne verzie tejto úlohy odlišujúce sa účelovou funkciou a koncovou podmienkou s cieľom odhaliť niektoré zákonitosti.

Sformulujme teraz tento problém v tvare úlohy stochastického optimálneho riadenia. Použijeme pritom nasledovné označenia:

$i$  – poradové číslo časovej etapy,  $i \in \mathcal{I} \equiv \{0, \dots, k-1\}$ ,

$x_i$  – majetok investora na začiatku  $i$ -teho roku,  $x_0 = a$  zadaný počiatočný vklad,

$u_i$  – podiel prostriedkov v rizikovom fonde v  $i$ -tom roku,  $u_i \in \mathbb{U}_i \equiv [0, 1]$

$r_i$  – výnos bezrizikového fondu v  $i$ -tom roku, vopred známy,

$z_i$  – náhodný výnos rizikového fondu v  $i$ -tom roku, rozdelenie  $z_i \sim \mathbb{Z}_i$  je známe.

Keďže cieľom investora je maximalizovať hodnotu prostriedkov na konci sporenia, resp. počas sporenia minimalizovať riziko, budeme uvažovať maximalizáciu funkcie koncového stavu  $\varphi(x_k)$ . Nasleduje výsledná formulácia úlohy:

$$\begin{aligned} \max \quad & E \left[ \varphi(x_k) \right] \\ & x_{i+1} = x_i \left[ 1 + u_i z_i + (1 - u_i) r_i \right], \quad i = 0, \dots, k-1, \\ & x_i \in \mathbb{X}_i = [0, \infty), \quad i = 0, \dots, k, \\ & x_0 = a > 0, \\ & u_i \in W_i(x_i) \subseteq \mathbb{U}_i = [0, 1], \quad i = 0, \dots, k-1, \\ & z_i \sim \mathbb{Z}_i, \quad i = 0, \dots, k-1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Pri formulácii úlohy (5.1) sme hodnotu riadenia označili  $u_i$ , riadenie však budeme hľadať v obvyklom tvare spätnej väzby  $u_i \equiv v_i(x_i)$ , teda v závislosti od času  $i$  a aktuálneho stavu  $x_i$ . Označenie  $u_i$  sme použili iba pre zjednodušenie zápisu v ďalších častiach kapitoly.

Ohraničenie  $u_i \in W_i(x_i)$  pokrýva podmienky na strednú hodnotu koncového stavu (2.6), resp. minimálnu pravdepodobnosť (2.11) v súlade s definíciami z kapitoly 2. Použitá podmienka bude upresnená pri konkrétnej úlohe. V prípade úlohy bez ohraničení položíme

$$W_i(x_i) \equiv \mathbb{U}_i = [0, 1], \quad \forall x_i \in \mathbb{X}_i, \forall i \in \mathcal{I},$$

teda všetky hodnoty riadenia z  $\mathbb{U}_i$  považujeme za prípustné.

### 5.1.1 Účelová funkcia

Cieľom investora v úlohe o alokácii zdrojov v portfóliu je dosiahnuť zároveň maximálny výnos aj minimálne riziko. Podľa toho, ktorému z týchto cieľov bude prikladať väčšiu váhu, môžeme uvažovať rozličné verzie tejto úlohy – rôzne účelové funkcie spoločne s rôznymi koncovými podmienkami.

Týmto rôznymi verziami sa budeme podrobne zaoberať v ďalších častiach tejto práce. Niektoré z nich už boli diskutované v rôznych prácach, my sa však zameriame hlavne na možnosti riešenia týchto úloh optimálneho riadenia s koncovými podmienkami.

a) **Maximalizovať strednú hodnotu** dosiahnutého koncového výnosu, teda

$$\max E [x_k]. \quad (5.2)$$

V tomto prípade neuvažujeme koncové podmienky, nezohľadňujeme teda riziko vyplývajúce z investície. Ide o jednoduchú verziu úlohy, chceme overiť numerickú schému porovnaním s analytickým riešením. V ďalšej časti ukážeme, že optimálne riešenie tejto úlohy bude investovať všetky prostriedky do rizikového fondu, keďže ten ponúka vyšší očakávaný výnos.

b) **Maximalizovať užitočnosť** plynúcu z nasporenej sumy

$$\max E [U(x_k)], \quad (5.3)$$

kde  $U(\cdot)$  predstavuje funkciu užitočnosti investora (táto je rastúca, konkávna), ktorá zohľadňuje jeho rizikové preferencie, keďže nárast úžitku pri veľkých sumách môže byť malý a tak investor radšej zvolí bezrizikový fond, resp. menší podiel rizika. Úlohu môžeme uvažovať s koncovou podmienkou alebo bez nej. Podobnými problémami pre rôzne funkcie užitočnosti sa zaoberali napríklad [32], [38], [40].

c) **Minimalizovať riziko** spojené so sporením

$$\min E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \varrho_i [x_i] \right], \quad (5.4)$$

pričom  $\varrho_i(\cdot)$  je vhodná riziková miera, napríklad podmienená hodnota rizika - *Conditional Value-at-Risk* (CVaR). V tomto prípade musíme zahrnúť koncovú podmienku na minimálnu nasporenú sumu (či už v tvare strednej hodnoty alebo ako minimálnu pravdepodobnosť), v opačnom prípade bude riešením čisto konzervatívne investovanie. Minimalizáciou rizika pri voľbe portfólia sa zaoberali práce [31], [33], [35].

d) **Maximalizovať pravdepodobnosť** dosiahnutia požadovanej koncovej sumy

$$\max P [x_k \geq \mu], \quad (5.5)$$

teda taká voľba riadenia, aby sme na konci dosiahli požadovanú cieľovú sumu  $\mu$  s istotou, resp. s maximálnou pravdepodobnosťou. Podobnú úlohu riešili autori článku [24], tí sa však zameriavali na aplikácie v ekológii.

### 5.1.2 Koncové podmienky

Okrem účelovej funkcie musíme pred riešením zvoliť vhodnú koncovú podmienku. Obvykle máme záujem, aby sme na konci sporenia dosiahli minimálne sumu  $\mu$ , takže môžeme uvažovať obe verzie koncovej podmienky:

- podmienku v tvare strednej hodnoty

$$E [x_k | x_{k-1}] \geq \mu, \quad (5.6)$$

- podmienku na minimálnu pravdepodobnosť

$$P [x_k \geq \mu] \geq \beta. \quad (5.7)$$

Keďže tieto dodatočné ohraničenia musia byť splnené, účelovú funkciu maximalizujeme iba v triede prípustných stratégií, teda tých, ktoré spolu so svojou odozvou spĺňajú ohraničenia. Definíciám množín prípustných hodnôt riadenia sa podrobne venujeme v kapitole 2.

Podmienky (5.6) a (5.7) ako požiadavku na koncovú hodnotu majetku uvažujeme v úlohe na minimalizáciu rizika (5.4), čím zabezpečíme nenulové optimálne riadenie. Pri maximalizácii užitočnosti (5.3) nemusíme nevyhnutne použiť koncovú podmienku, jej zaradením však zvýšime pravdepodobnosť dosiahnutia minimálnej sumy  $\mu$ . V ďalšom texte sa zaoberáme aj tvarom oblasti prípustných stavov a riadení pri koncových podmienkach (5.6) a (5.7).

V úlohe na maximalizáciu strednej hodnoty (5.2) môžeme uvažovať podmienku ako maximálnu mieru rizika, táto však nie je v uvažovanom tvare, čo by skomplikovalo výpočet. Na druhej strane, aj v takejto úlohe môžeme obmedziť množinu prípustných hodnôt riadenia  $W_i(x_i)$  pre jednotlivé časy  $i$  a stavy  $x_i$  a následne maximalizovať iba v triede prípustných stratégií.

Úloha (5.5) na maximalizáciu pravdepodobnosti priamo súvisí s podmienkou (5.7), keďže ju potrebujeme vyriešiť, aby sme určili prípustné množiny hodnôt riadenia.

### 5.1.3 Rozdelenie náhodného výnosu

Zamerajme sa teraz na náhodný výnos rizikového fondu, keďže pri riešení úlohy musíme upresniť jeho rozdelenie  $\mathbb{Z}_i$ , ktoré musí byť známe. Od rozdelenia náhodného výnosu závisí aj konkrétny tvar riešenia, jeho zmenou dostávame rôzne verzie úlohy. Pri riešení totiž nevyužívame iba strednú hodnotu náhodnej premennej, ale priamo strednú hodnotu budúcich ziskov/strát pre jednotlivé realizácie, teda celé rozdelenie  $\mathbb{Z}_i$ .

Kvôli obmedzeniam numerického riešenia budeme predpokladať, že rozdelenie  $\mathbb{Z}_i$  je diskrétne a má len konečne veľa hodnôt. Všimnime si, že stredná hodnota náhodného výnosu  $\bar{z}_i$  musí byť väčšia ako výnos bezrizikového fondu  $r_i$ . V opačnom prípade si v danej perióde  $i$  racionálny investor nevyberie rizikový fond.

Nasleduje prehľad vybraných možností, ako môžeme zvoliť rozdelenie náhodného výnosu rizikového fondu, pričom niektoré z nich použijeme pri riešení úlohy o portfóliu. Pri uvádzaní príkladov predpokladáme, že bezriziková úroková miera je na úrovni  $r_i = 2\%$  p.a.

- Alternatívne rozdelenie**  $\mathbb{Z}_i \sim Alt(p)$  – náhodný výnos môže byť napríklad 5% s pravdepodobnosťou  $p = 50\%$  a 0% v ostatných prípadoch. Ide o najjednoduchší prípad vhodný pre analytický výpočet.

- b) **Diskrétné rovnomerné rozdelenie** – nadobúda určené hodnoty s rovnakou pravdepodobnosťou, napríklad od  $-5\%$  do  $+10\%$ . Väčšia škála hodnôt znamená lepší model.
- c) **Vlastné diskrétné rozdelenie** – zvolíme si  $S$  rôznych hodnôt  $z_i^1, z_i^2, \dots, z_i^S$ , ktoré sa budú dosahovať s pravdepodobnosťami  $p^1, \dots, p^S$ , pričom musí platiť

$$\sum_{s=1}^S p^s = 1.$$

Môžeme si zvoliť rozdelenie, ktoré bude lepšie modelovať realitu. Napríklad:

hodnota	0%	2%	6,5%	$E(z_i)$
pravdepodobnosť	0,5	0,25	0,25	2,125%

- d) **Normálne rozdelenie** – so strednou hodnotou  $\bar{z}_i$  a disperziou  $\sigma^2$ . Toto rozdelenie je spojité, takže nespĺňa naše predpoklady, na druhej strane najlepšie modeluje náhodné výnosy akcií, resp. akciových fondov.

Pri numerickom riešení diskkrétnej úlohy optimálneho riadenia počítame strednú hodnotu budúcej hodnoty hodnotovej funkcie ako sumu jednotlivých realizácií (viď kapitola 3.1). V prípade spojitého rozdelenia by sme museli počítat strednú hodnotu ako integrál, čo vyžaduje vhodnú numerickú aproximáciu, teda výsledok tiež nebude analyticky presný a ide o približné riešenie. Tento prístup je použitý v práci [32].

- e) **Aproximácia normálneho rozdelenia** – uvažujme vlastné diskrétné rozdelenie, pričom pravdepodobnosti definujeme podľa normálneho rozdelenia. Takéto rozdelenie kombinuje výhody diskrétného rozdelenia (vhodné pre numerickú schému) aj spojitého normálneho rozdelenia (dobré modelovanie výnosov). Rozdelenie  $\mathbb{Z}_i$  ako aproximáciu normálneho rozdelenia vygenerujeme nasledovne:

Zvolíme možné hodnoty náhodného výnosu  $z_i^1, z_i^2, \dots, z_i^S$  tak, aby platilo

$$-100\% \leq z_i^1 < z_i^2 < \dots < z_i^S \leq 100\%,$$

jednotlivé hodnoty môžeme vybrať rovnomerne, príp. hustejšie okolo zvolenej strednej hodnoty  $\bar{z}_i$ . Pri voľbe  $S \approx 300$  môžeme mať dieliky po 1%, resp. 0.5% pre  $\bar{z}_i \pm 50\%$ .

Pravdepodobnosti jednotlivých hodnôt vypočítame z distribučnej funkcie normálneho rozdelenia  $F(\cdot)$  so strednou hodnotou  $\bar{z}_i$  a disperziou  $\sigma^2$  podľa vzťahu:

$$P[Z_i = z_i^s] = \frac{F(z_i^{s+1}) - F(z_i^{s-1})}{2},$$

pre  $m = 2, \dots, S - 1$ , v krajných bodoch potom

$$P[Z_i = z_i^1] = \frac{F(z_i^1) + F(z_i^2)}{2}, \quad P[Z_i = z_i^S] = 1 - \frac{F(z_i^{S-1}) + F(z_i^S)}{2}.$$

Predpokladáme teda, že  $z_i \sim \mathbb{Z}_i$  nadobúda iba hodnoty od  $-100\%$  po  $+100\%$ : hodnoty mimo tohto intervalu majú veľmi malú pravdepodobnosť a vzhľadom na ich interpretáciu (výnos akciového fondu) ani nemajú zmysel.

## 5.2 Analytické riešenie

Naformulovaná úloha (5.1) o alokácii prostriedkov v portfóliu nie je vo všeobecnosti analyticky riešiteľná. Závaži to od voľby účelovej funkcie, koncových podmienok a rozdelenia náhodného výnosu rizikového fondu. Napriek tomu možno v špeciálnych prípadoch odvodiť základné vlastnosti riešenia aj analyticky, čomu sa venujeme v tejto časti.

### 5.2.1 Maximalizácia strednej hodnoty

Ako sme už skôr poznamenali, optimálnym riešením úlohy na maximalizáciu strednej hodnotu nasporenej sumy (5.2) je investovať všetky prostriedky do rizikového fondu, pretože má vyšší očakávaný výnos. Dokážme toto tvrdenie.

**Veta 5.1** Úloha o portfóliu (5.1) s účelovou funkciou

$$\max E[x_k] \quad (5.2)$$

bez ohraňení, teda pre  $u_i \in \mathbb{U}_i = [0, 1]$ , má optimálne riešenie v tvare

$$\hat{u}_i \equiv v_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } \bar{z}_i - r_i > 0, \\ \text{neurčené}, & \text{ak } \bar{z}_i - r_i = 0, \\ 0, & \text{ak } \bar{z}_i - r_i < 0, \end{cases} \quad (5.8)$$

pre všetky hodnoty stavu  $x \in \mathbb{X}_i$  a pre časové etapy  $i \in \mathcal{I}$ . Neurčeným riadením pritom rozumieme ľubovoľnú hodnotu riadenia  $u_i \in \mathbb{U}_i = [0, 1]$ .

Dôkaz. Indukciou dokážeme, že hodnotová funkcia danej úlohy bude mať tvar  $V_j(x) = c_j x$  pre  $j = k, k-1, \dots, 0$  a pre každé  $x \in \mathbb{X}_j$ .

1° Pre  $j = k$  bude  $V_k(x) = x$  (funkcia koncového stavu),  $c_k = 1$  a teda tvrdenie platí.

2° Predpokladajme teraz, že  $V_{j+1}(x) = c_{j+1}x$ , ukážeme, že potom aj  $V_j(x) = c_j x$ . Podľa rovnice dynamického programovania (RDP) platí:

$$\begin{aligned} V_j(x) &= \max_{u_j \in \mathbb{U}_j} E \left[ V_{j+1}(f_j(x, u_j, z_j)) \right] = \\ &= \max_{u_j \in \mathbb{U}_j} E \left[ c_{j+1}x(1 + u_j z_j + (1 - u_j)r_j) \right] = \\ &= c_{j+1}x \cdot \max_{u_j \in \mathbb{U}_j} E \left[ 1 + u_j z_j + (1 - u_j)r_j \right] = \\ &= c_{j+1}x \cdot \max_{u_j \in \mathbb{U}_j} \left( 1 + u_j E[z_j] + (1 - u_j)r_j \right) = \\ &= c_{j+1}x \cdot \left( 1 + r_j + \max_{u_j \in \mathbb{U}_j(x)} u_j(\bar{z}_j - r_j) \right) = \\ &= c_{j+1}x \cdot \left( 1 + \max\{r_j, \bar{z}_j\} \right) = c_j x \end{aligned} \quad (5.9)$$

Pričom pre hodnotu konštanty  $c_j$  platí

$$c_j = c_{j+1} \left( 1 + \max\{r_j, \bar{z}_j\} \right). \quad (5.10)$$

Pri úpravách sme viackrát využili linearitu strednej hodnoty. V rovnici (5.9) sa maximalizuje lineárna funkcia, riešenie musí byť v krajnom bode, preto platí

$$\hat{u}_j \equiv v_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } \bar{z}_j - r_j > 0, \\ \text{neurčené}, & \text{ak } \bar{z}_j - r_j = 0, \\ 0, & \text{ak } \bar{z}_j - r_j < 0, \end{cases}$$

čím sme dokázali rovnicu (5.8). Za predpokladu, že stredná hodnota výnosu rizikového fondu  $\bar{z}_j$  je väčšia ako výnos bezrizikového fondu  $r_j$ , čo je intuitívne očakávame, teda  $\bar{z}_j > r_j$  a nastáva prvý prípad  $\hat{u}_j = 1$ . V niektorej etape však tento predpoklad nemusí byť splnený. Ak by nebol splnený vo všetkých etapách, úloha nemá zmysel.

Tým sme ukázali, že  $V_j(x) = c_j x$ , kde  $c_j$  spĺňa rekurentný vzťah (5.10) s  $c_k = 1$ , pričom  $v_j(x) = 1$ , ak  $\bar{z}_j > r_j$ , resp.  $v_j(x) = 0$  v opačnom prípade pre všetky  $j = k - 1, \dots, 0$ . Teda v prípade, že maximalizujeme strednú hodnotu koncového stavu, vyberáme si fond s najvyšším očakávaným výnosom. ■

**Poznámka 5.2** Tvrdenie môžeme analogicky dokázať aj v prípade, že do diferenčnej rovnice doplníme dodatočný člen  $a_i$ , ktorý predstavuje dodatočné príspevky počas sporenia:

$$x_{i+1} = x_i [1 + u_i z_i + (1 - u_i) r_i] + a_i, \quad i = 0, \dots, k - 1 \quad (5.11)$$

Vtedy bude mať hodnotová funkcia tvar  $V_j(x) = c_j x + d_j$ , kde  $d_j = c_{j+1} a_j + b_{j+1}$ ,  $d_k = 0$ . Optimálne riadenie bude rovnako  $\hat{u}_j = v_j(x) = 1$  za predpokladu  $\bar{z}_j > r_j$ .

Na základe dokázanej vety 5.1 môžeme vypočítané numerické riešenie porovnať s analytickým riešením a overiť tak správnosť výpočtu pomocou numerickej schémy, čomu sa venujeme v kapitole 5.4.1.

### 5.2.2 Maximalizácia očakávanej užitočnosti

V tejto časti sa podrobnejšie zameriame na úlohu (5.1) s účelovou funkciou maximalizácia strednej hodnoty užitočnosti koncového stavu

$$\max E [U(x_k)] . \quad (5.3)$$

Podľa [34] možno rozhodovanie sa medzi náhodnými výnosmi s neistým výsledkom zredukovať na maximalizáciu očakávanej užitočnosti. Týmto problémom sa zaoberali napríklad [32], [38], [39] a [40], našim cieľom je bližšie preskúmať vplyv koncových podmienok na riešenie tejto verzie úlohy. Definujme podľa [32] funkciou užitočnosti:

**Definícia 5.3 (Funkcia užitočnosti)** Funkciu  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme **funkcia užitočnosti**, pokiaľ spĺňa nasledujúce vlastnosti pre  $x > 0$ :

- i.  $U(x)$  je rastúca:  $U'(x) > 0$ , teda „viac je vždy lepšie“, hraničná užitočnosť je kladná,
- ii.  $U(x)$  je konkávna:  $U''(x) < 0$ , čo znamená, že hraničná užitočnosť sa znižuje.



V ďalšom texte budeme uvažovať tieto tvary funkcie užitočnosti:

- **Exponenciálna funkcia užitočnosti**

$$U(x) = 1 - e^{-cx}, \quad (5.12)$$

kde parameter  $c \in \mathbb{R}^+$  predstavuje koeficient absolútnej averzie k riziku, ktorý je nezávislý od hodnoty majetku  $x$  (podľa [32]). Pripočítaním konštantného člena 1 zabezpečíme, že hodnota funkcie užitočnosti bude medzi 0 a 1.

- **Mocninová funkcia užitočnosti**

$$U(x) = \frac{x^{1-p}}{1-p}, \quad (5.13)$$

pričom parameter  $p$  vyjadruje koeficient relatívnej averzie k riziku, obvykle sa volí z intervalu  $[1, 11]$ . Táto funkcia sa nazýva tiež CRRA funkcia užitočnosti.

Zamerajme sa teraz na vlastnosti hodnotovej funkcie v úlohe (5.1) pri maximalizácii očakávanej užitočnosti (5.3).

**Veta 5.4 (Konkávnosť hodnotovej funkcie)** *Majme úlohu (5.1) s účelovou funkciou (5.3). Predpokladajme, že pre všetky  $x^1 < x^2$  a všetky  $j \in \mathcal{I}$  pre množiny prípustných hodnôt riadenia platí  $W_j(x^1) \subseteq W_j(x^2)$ . Potom je hodnotová funkcia  $V_j(x)$  rastúca, konkávna funkcia pre každé  $j \in \mathcal{I}$ .*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme pomocou indukcie. Myšlienka vychádza z dôkazu podobného tvrdenia v článku [17].

1° Pre  $j = k$  platí  $V_k(x) = U(x)$ . Keďže funkcia užitočnosti  $U(x)$  je podľa definície 5.3 rastúca a konkávna, platí to aj pre  $V_k(x)$ .

2° Predpokladajme, že  $V_{j+1}$  je rastúca a konkávna. Označme

$$G_j(x_j, u) = E_j \left[ V_{j+1} \left( x_j (1 + uz_j + (1-u)r_j) \right) \right],$$

potom podľa RDP

$$V_j(x_j) = \max_{u \in W_j(x_j)} G_j(x_j, u)$$

**Rastúcosť.** Majme  $x_j^1 < x_j^2$ . Potom platí

$$\begin{aligned} G_j(x_j^1, u) &= E_j \left[ V_{j+1} \left( x_j^1 (1 + uz_j + (1-u)r_j) \right) \right] < \\ &< E_j \left[ V_{j+1} \left( x_j^2 (1 + uz_j + (1-u)r_j) \right) \right] = G_j(x_j^2, u), \end{aligned}$$

teda  $G_j(x_j^1, u) < G_j(x_j^2, u)$ , pretože  $V_{j+1}$  je rastúca.

Potom aj

$$V_j(x_j^1) = \max_{u \in W_j(x_j^1)} G_j(x_j^1, u) < \max_{u \in W_j(x_j^1)} G_j(x_j^2, u) \leq \max_{u \in W_j(x_j^2)} G_j(x_j^2, u) = V_j(x_j^2)$$

Druhá nerovnosť vyplýva z predpokladu  $W_j(x_j^1) \subseteq W_j(x_j^2)$ . Tým sme dokázali, že platí  $V_j(x_j^1) < V_j(x_j^2)$ , teda že hodnotová funkcia  $V_j$  je rastúca.

**Konkávnosť.** Majme teraz dva prípustné stavy  $x_j^1, x_j^2 \in X_j$  a definujme  $x_j^\alpha = \alpha x_j^1 + (1 - \alpha)x_j^2$  pre ľubovoľné  $\alpha \in (0, 1)$ . Stav  $x_j^\alpha$  leží medzi  $x_j^1$  a  $x_j^2$ , z predpokladu vety je teda tiež prípustný. Označme  $u^1$  ako optimálne riadenie pre  $x_j^1$ ,  $u^2$  ako optimálne pre  $x_j^2$  a definujme  $u^\alpha$  vzťahom:

$$u^\alpha = \frac{\alpha x_j^1 u^1 + (1 - \alpha)x_j^2 u^2}{x_j^\alpha}$$

Počítajme:

$$\begin{aligned} G_j(x_j^\alpha, u^\alpha) &= E_j \left[ V_{j+1} \left( x_j^\alpha (1 + u^\alpha z_j + (1 - u^\alpha)r_j) \right) \right] = \\ &= E_j \left[ V_{j+1} \left( x_j^\alpha + x_j^\alpha u^\alpha z_j + (x_j^\alpha - x_j^\alpha u^\alpha)r_j \right) \right] = \\ &= E_j \left[ V_{j+1} \left( \alpha \left( x_j^1 + x_j^1 u^1 z_j + (x_j^1 - x_j^1 u^1)r_j \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - \alpha) \left( x_j^2 + x_j^2 u^2 z_j + (x_j^2 - x_j^2 u^2)r_j \right) \right) \right] \geq \\ &\geq \alpha E_j \left[ V_{j+1} \left( x_j^1 + x_j^1 u^1 z_j + (x_j^1 - x_j^1 u^1)r_j \right) \right] \\ &\quad + (1 - \alpha) E_j \left[ V_{j+1} \left( x_j^2 + x_j^2 u^2 z_j + (x_j^2 - x_j^2 u^2)r_j \right) \right] = \\ &= \alpha G_j(x_j^1, u^1) + (1 - \alpha) G_j(x_j^2, u^2). \end{aligned}$$

Využili sme definície  $x_j^\alpha, u^\alpha$ , konkávnosť  $V_{j+1}$  a linearitu strednej hodnoty. Použitím odvodenej nerovnosti dostávame:

$$\begin{aligned} V_j(x_j^\alpha) &= \max_{u \in W_j(x_j^\alpha)} G_j(x_j^\alpha, u) \geq G_j(x_j^\alpha, u^\alpha) \geq \\ &\geq \alpha G_j(x_j^1, u^1) + (1 - \alpha) G_j(x_j^2, u^2) = \alpha V_j(x_j^1) + (1 - \alpha) V_j(x_j^2) \end{aligned}$$

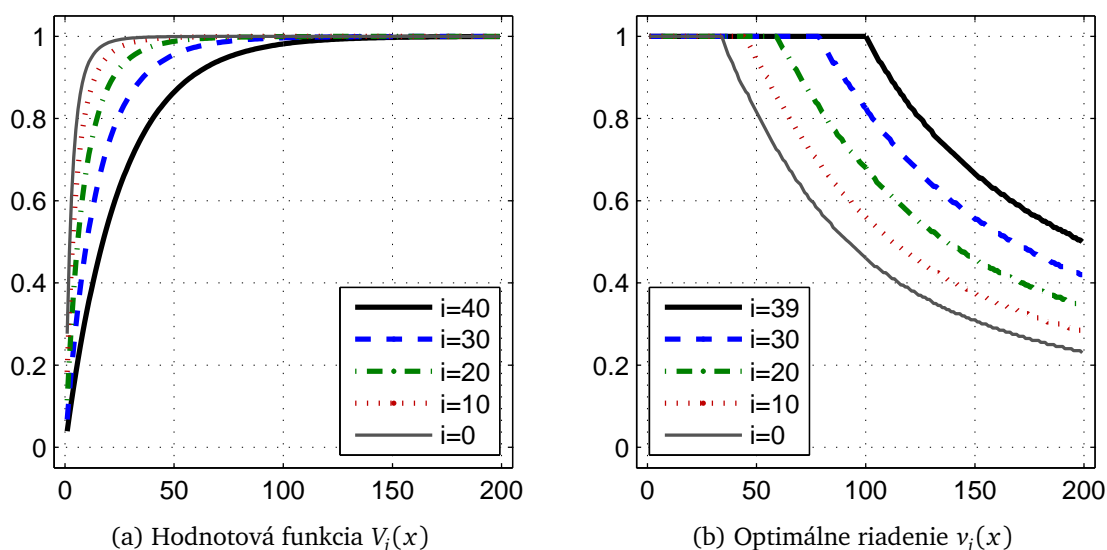
Prvá nerovnosť platí z dôvodu, že  $u^\alpha$  nemusí byť optimálnym riešením pre stav  $x_j^\alpha$ . Tým sme dokázali, že  $V_j$  je konkávna. ■

Uvedená veta platí aj pre úlohu bez ohraničení, keďže v tom prípade je  $W_j(x) \equiv \mathbb{U}_j$ , teda množina prípustných hodnôt riadenia je rovnaká pre všetky  $x \in \mathbb{X}_j$ . Tvar hodnotovej funkcie ilustrujeme na obr. 5.1a vo vybraných časoch pre exponenciálnu funkciu užitočnosti. Ako môžeme vidieť, v čase  $i = k = 40$  je hodnotová funkcia rovná funkcii užitočnosti. V ďalších časových etapách je hodnotová funkcia taktiež rastúca a konkávna.

V prípade úlohy s koncovou podmienkou (2.6), resp. (2.11) môžeme z definícií množín prípustných hodnôt riadenia odvodiť, že pre  $x^1 < x^2$  bude  $W_j(x^1) \subseteq W_j(x^2)$ , teda pre väčšiu hodnotu stavu  $x^2$  máme k dispozícii aspoň takú množinu hodnôt riadenia ako pre  $x^1$ , tým pádom predpoklad vety 5.4 bude splnený.

### Riadenie v závislosti od stavu $x$

Zaujímala nás tiež otázka závislosti optimálnej spätnej väzby  $v_i(x)$  od aktuálnej hodnoty stavu  $x$ . Keďže konkávna funkcia užitočnosti zohľadňuje investorovu averziu k riziku, tak aj riadenie by malo byť určitým kompromisom medzi maximalizáciou výnosu (investíciou do rizikového fondu) a minimalizáciou rizika (bezrizikový fond).



Obr. 5.1: Maximalizácia exponenciálnej užitočnosti – numerické riešenie vo vybraných etapách ako ilustrácia tvaru hodnotovej funkcie  $V_i(x)$  a optimálneho riadenia  $v_i(x)$

Uvažujme napríklad exponenciálnu funkciu užitočnosti (5.12). V konkrétnom prípade môžeme numericky vypočítať optimálne riadenie a hodnotovú funkciu. Tieto sme zobrazili v niekoľkých časových etapách na obr. 5.1, pričom sme uvažovali počet periód  $k = 40$ .

Ako môžeme vidieť na obr. 5.1b, v tomto konkrétnom prípade je optimálna spätná väzba v závislosti od aktuálneho stavu nerastúca. Na časti intervalu je spätná väzba konštantná – to je v prípade, že maximum sa nadobúda mimo množiny prípustných riadení, optimálne riadenie teda leží na okraji intervalu, resp. klesajúca, teda podiel v rizikovom fonde sa postupne znižuje s rastúcou hodnotou majetku.

Takýto tvar optimálneho riadenia však platí len v tomto konkrétnom prípade, nie všeobecne. Napríklad pre mocninovú funkciu užitočnosti (5.13) je situácia odlišná - optimálna spätná väzba od aktuálneho stavu  $x$  nezávisí. Tomuto prípadu sa podrobnejšie venujeme v ďalšej časti.

### Mocninová funkcia užitočnosti

V špeciálnom prípade – pre mocninovú funkciu užitočnosti (5.13) sa dá v úlohe so spojitým časom pomocou Hamilton-Jacobi-Belmanovej rovnice odvodiť, že riešenie nezávisí od času ani od nasporenej sumy. Riadenie bude teda konštantné a bude závisieť iba od parametrov úlohy, najmä rizikovej averzie investora. Podrobnejšie napr. v prácach [38] alebo [39].

Podobné tvrdenie môžeme odvodiť aj v prípade úlohy s diskretným časom, kde pre určitú triedu funkcií užitočnosti a pre všeobecnejšiu úlohu môžeme dokázať, že optimálna spätná väzba nezávisí od  $x$ .

**Veta 5.5** Uvažujme nasledujúcu všeobecnejšiu úlohu:

$$\begin{aligned} \max \quad & E \left[ U(x_k) \right] \\ & x_{i+1} = x_i \cdot g(u_i, z_i), \quad i = 0, \dots, k-1, \\ & x_0 = a > 0, \\ & u_i \in \mathbb{U}_i, \quad i = 0, \dots, k-1, \\ & z_i \sim \mathbb{Z}_i, \quad i = 0, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Nech funkcia užitočnosti  $U(x)$  je splňa pre všetky  $c > 0$

$$U(cx) = U(c)U(x)D, \quad (5.15)$$

potom pre každé  $i \in \mathcal{I}$  platí

$$V_i(x) = U(x)g_i^*D^{k-i}, \quad (5.16)$$

pričom  $g_i^*$  je dané rekurentným vzťahom

$$\begin{aligned} g_i^* &= g_{i+1}^* \cdot \max_{u \in \mathbb{U}} E_i \left[ U(g(u, z_i)) \right], \\ g_k^* &= 1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Navyše optimálna spätná väzba nezávisí od  $x$ , teda

$$v_i(x) \equiv u_i \in \arg \max_{u \in \mathbb{U}} E_i \left[ U(g(u, z_i)) \right], \quad (5.18)$$

D ô k a z. Tvrdenie dokážeme indukciou od konca pre  $i = k, k-1, \dots, 0$ .

1° Pre  $i = k$  bude  $V_k(x) = U(x)$ , tvrdenie teda platí.

2° Nech (5.16) platí pre  $V_{i+1}$ . Ukážeme, čo platí pre  $V_i$ :

$$\begin{aligned} V_i(x) &= \max_{u \in \mathbb{U}} E_i \left[ V_{i+1}(xg(u, z_i)) \right] \\ &= \max_{u \in \mathbb{U}} E_i \left[ U(xg(u, z_i))g_{i+1}^*D^{k-i-1} \right] \\ &= \max_{u \in \mathbb{U}} E_i \left[ U(x)g_{i+1}^*D^{k-i} \cdot g(u, z_i) \right] \\ &= U(x)g_{i+1}^*D^{k-i} \cdot \max_{u \in \mathbb{U}} E_i \left[ g(u, z_i) \right] = U(x)g_i^*D^{k-i} \end{aligned}$$

Využili sme platnosť vety pre  $V_{i+1}$  a predpoklad (5.15). Pritom  $g_i^*$  splňa rekurentný vzťah (5.17) a pre optimálnu spätnú väzbu musí platíť

$$v_i(x) \in \arg \max_{u \in \mathbb{U}} E_i \left[ U(g(u, z_i)) \right],$$

teda  $v_i(x) \equiv u_i$  nezávisí od  $x$ . Tým je tvrdenie dokázané. ■

**Dôsledok 5.6** Keďže mocninová funkcia užitočnosti (5.13) splňa predpoklad (5.15) a úloha (5.1) splňa predpoklady vety 5.5, optimálna spätná väzba  $v_i(x)$  v tejto úlohe nezávisí od aktuálneho stavu  $x$ . Pre autonómnú verziu úlohy (5.1), teda pre rovnaké množiny riadení  $\mathbb{U}_i \equiv \mathbb{U}_i$ , rovnaké rozdelenia  $\mathbb{Z}_i \equiv \mathbb{Z}$  a konštantné úroky  $r_i \equiv r$ , navyše bude optimálna spätná väzba  $v_i(x) \equiv \hat{u}$  konštantná vo všetkých časových etapách  $i$  nezávisle od aktuálnej hodnoty stavu  $x$ .

### 5.2.3 Minimalizácia rizika

V úlohe na minimalizáciu rizika portfólia potrebujeme riziko vhodným spôsobom ohodnotiť. Vlastnosti rizikových mier nie sú ťažiskom tejto práce, preto uvádzame len stručný prehľad nevyhnutných definícií a našich poznámok. Podrobný výklad o meraní rizika s príkladmi a vysvetleniami možno nájsť napríklad v knihe [44]. Začneme definíciou rizikovej miery ako funkcie, ktorá náhodnej premennej priradí číselnú hodnotu (podľa [37]).

**Definícia 5.7 (Riziková miera)** Označme  $\mathcal{G}$  je množinu všetkých náhodných premenných definovaných na pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ . Zobrazenie  $\varrho : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  nazývame **riziková miera**.

Rizikovou mierou je napríklad aj štandardná odchýlka ([31]). Vhodné sú tie miery, ktoré riziko primerane kvantifikujú. Sú to **koherentné** rizikové miery, ich vlastnosti popisujú [1] a [3]. V súčasnej praxi sa používajú najmä miery **Value-at-Risk (VaR)** a **Conditional Value-at-Risk (CVaR)**. Value-at-Risk pri optimalizácii portfólia používa napríklad článok [62], ktorý hľadá riešenie analyticky. My však použijeme druhú mieru CVaR, pretože spĺňa podmienky koherentnej miery rizika, má teda lepšie vlastnosti ako VaR. Definujme teda vzťahy na výpočet CVaR pre funkciu výnosov (podľa [32]).

**Definícia 5.8 (Conditional Value-at-Risk)** Nech  $Y$  je spojitá náhodná premenná s distribučnou funkciou  $F$ . Podmienenú hodnotu rizika (Conditional Value-at-Risk) náhodnej premennej  $Y$  na hladine významnosti  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  definujeme vzťahom

$$CVaR_{\alpha}(Y) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} F^{-1}(u) du, \quad (5.19)$$

odchýlku podmienenej hodnoty rizika (Conditional Value-at-Risk Deviation) ako

$$CVaRD_{\alpha}(Y) = E(Y) - CVaR_{\alpha}(Y). \quad (5.20)$$

Z definície vyplýva, že CVaR predstavuje priemernú hodnotu výnosu v  $100\alpha$  percentách najhorších prípadov, resp. priemer z  $\alpha 100\%$  najväčších strát [1]. Preto sa CVaR v literatúre označuje aj **Average Value-at-Risk** alebo **Expected shortfall**.

Miera CVaRD vyjadruje samotné riziko očistené o strednú hodnotu náhodnej premennej a nadobúda len nezáporné hodnoty (dôkaz viď [44, 2.2.3]). Na minimalizáciu rizika v úlohe o optimalizácii portfólia je preto najvhodnejšia miera CVaRD, používali ju aj práce [31, 32].

#### Diskrétna náhodná premenná

Definícia 5.8 uvádza výpočet CVaR pomocou distribučnej funkcie pre spojitú náhodnú premennú. Pri numerickom riešení však uvažujeme diskretnú náhodnú premennú, takže potrebujeme CVaR vypočítať aj v diskretnom prípade. Môžeme použiť úlohu lineárneho programovania navrhnutú v [48], avšak CVaR ako priemernú hodnotu výnosu v spodnom  $\alpha$ -kvantile rozdelenia môžeme vypočítať v prípade diskretnéj náhodnej premennej vypočítať aj priamo.

Vychádzali sme pritom z výpočtu výberového CVaR zo súboru realizácií v [2] a výpočtu CVaR v prípade diskretného rozdelenia v [45], tieto sme upravili pre naše diskretné rozdelenie s určenými pravdepodobnosťami.

**Definícia 5.9 (CVaR pre diskretnú náhodnú premennú)** *Majme diskretnú náhodnú premennú  $Y$ , ktorá nadobúda hodnoty  $Y^1, \dots, Y^S$  s pravdepodobnosťami  $p^1, \dots, p^S$ , pričom nadobúdané hodnoty sú usporiadané nasledovne:  $Y^1 < \dots < Y^S$ . Nech  $S^*$  je najväčší index, pre ktorý platí*

$$\sum_{s=1}^{S^*} p^s \leq \alpha, \quad (5.21)$$

potom CVaR vypočítame ako

$$CVaR_\alpha(Y) = \frac{\sum_{s=1}^{S^*} p^s Y^s}{\sum_{s=1}^{S^*} p^s}. \quad (5.22)$$

### Dynamické programovanie

Zatiaľ sme definovali mieru CVaR iba pre samostatnú náhodnú premennú. Takýmto spôsobom možno minimalizovať riziko napríklad pri stromovej reprezentácii v stochastickom programovaní, ako napr. [33], máme totiž k dispozícii pravdepodobnosti dosiahnutia jednotlivých koncových vrcholov.

V prípade optimálneho riadenia je situácia komplikovanejšia. Riešením úlohy pomocou Bellmanovej rovnice dynamického programovania postupujeme od konca, v každom stave poznáme podmienené pravdepodobnosti dosiahnutia nasledujúcich stavov, nie však pravdepodobnosť dosiahnutia aktuálneho stavu. Preto úloha

$$\min_u E [ CVaRD_\alpha(x_k | x_{k-1}) ] \quad (5.23)$$

neminimalizuje riziko počas celého procesu, ale iba v poslednej perióde. To bude minimálne pri voľbe  $u_{k-1} = 0$ , hodnota účelovej funkcie bude tým pádom tiež 0, voľba ostatných riadení už nemá vplyv na hodnotu účelovej funkcie.

Problém merania rizika dynamickom programovaní bol predmetom článkov [49], [50]. Preto podľa [44] zavádzame nasledujúcu viacperiódovú mieru CVaR, ktorá nám umožní minimalizovať riziko dynamicky vo všetkých periódach.

**Definícia 5.10 (Viacperiódový Conditional Value-at-Risk)** *Majme integrovateľný stochastický proces  $Y = (Y_1, \dots, Y_T)$ . Pre danú postupnosť konštánt  $c = (c_1, \dots, c_T)$ , hladín  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_T)$  a filtráciu  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_T)$  definujme viacperiódovú podmienenú hodnotu rizika (CVaR) ako*

$$CVaR_{\alpha,c}(Y; \mathcal{F}) = \sum_{t=1}^T c_t E [ CVaR_{\alpha_t}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) ] \quad (5.24)$$

a viacperiódovú odchýlku (CVaRD) ako

$$CVaRD_{\alpha,c}(Y; \mathcal{F}) = \sum_{t=1}^T c_t E [ CVaRD_{\alpha_t}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) ]. \quad (5.25)$$

### Analytické riešenie úlohy bez ohraničení

Začnime najjednoduchším prípadom, teda minimalizáciou CVaRD v úlohe (5.1) bez ohraničení s nasledovnou účelovou funkciou:

$$\min E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} c_i \cdot CVaRD_{\alpha}(x_{i+1} | x_i) \right] \quad (5.26)$$

Uvažujme pritom konštantné váhy  $c_j \equiv 1$ . V danom čase  $j$  a stave  $x_j$  môžeme voliť riadenia  $u_j \in \mathbb{U}_j \equiv [0, 1]$ . Naším cieľom bude minimalizovať výraz  $CVaRD_{\alpha_j}(x_{j+1} | x_j)$ . Prepíšme však stavovú diferenčnú rovnicu úlohy (5.1) na tvar:

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= x_j + x_j u_j z_j + x_j (1 - u_j) r_j, \\ x_{j+1} &= x_j u_j z_j + \underbrace{x_j + x_j (1 - u_j) r_j}_{\text{nenáhodné}}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

kde druhý a tretí člen sú nenáhodné konštanty, nezávisia totiž od realizácie  $z_j$ . Riziková miera CVaRD je invariantná na posun o konštantu (dôkaz v [44]), na jej veľkosť teda vplýva iba prvý člen výrazu (5.27).

Zároveň je podľa [44, časť 2.2.3] riziková miera CVaR kladne homogénna, teda pre náhodnú premennú  $Y$  platí

$$CVaR_{\alpha}(\lambda Y) = \lambda CVaR_{\alpha}(Y), \quad \lambda \geq 0. \quad (5.28)$$

Potom z definície 5.8, linearity strednej hodnoty a (5.28) pre  $\lambda \geq 0$  vyplýva

$$\begin{aligned} CVaRD_{\alpha}(\lambda Y) &= E(\lambda Y) - CVaR_{\alpha}(\lambda Y) = \lambda E(Y) - \lambda CVaR_{\alpha}(Y) \\ \Rightarrow CVaRD_{\alpha}(\lambda Y) &= \lambda (E(Y) - CVaR_{\alpha}(Y)) = \lambda CVaRD_{\alpha}(Y) \end{aligned} \quad (5.29)$$

teda aj CVaRD je kladne homogénna. Preto pre  $u_j \geq 0$

$$CVaRD_{\alpha}(x_{j+1}) = CVaRD_{\alpha}(x_j u_j z_j) = u_j CVaRD_{\alpha}(x_j z_j). \quad (5.30)$$

Teda pre  $u_j \rightarrow 0$  aj  $CVaRD_{\alpha}(x_{j+1}) \rightarrow 0$ . CVaRD totiž nadobúda len nezáporné hodnoty, minimum sa dosiahne pre  $u_j = 0$ . Minimalizácia CVaRD je teda ekvivalentná minimalizácii  $u_j$ , optimálne riešenie úlohy bez ohraničení je  $u_j = 0$  pre  $\forall j \in \mathcal{I}$ , je teda optimálne investovať všetky prostriedky do bezrizikového fondu.

### Analytické riešenie úlohy s ohraňčeniami

Uvažujme teraz minimalizáciu rizika portfólia v jednotlivých periódach (5.25) v úlohe (5.1) aj s koncovou podmienkou, teda nasledujúcu úlohu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovať} \quad & E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} c_i \cdot CVaRD_{\alpha}(x_{i+1} | x_i) \right] \\ \text{za podmienok} \quad & x_{i+1} = x_i [1 + u_i z_i + (1 - u_i) r_i], \quad i = 0, \dots, k-1, \\ & x_i \in \mathbb{X}_i = [0, \infty), \quad i = 0, \dots, k, \\ & x_0 = a > 0, \\ & u_i \in W_i(x_i) \subseteq \mathbb{U}_i = [0, 1], \quad \forall x_i \in \mathbb{X}_i, \quad i = 0, \dots, k-1, \\ & z_i \sim \mathbb{Z}_i, \quad i = 0, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (5.31)$$

pričom množinu prípustných hodnôt riadenia volíme v súlade s koncovou podmienkou v tvare strednej hodnoty (2.6), resp. podmienky na minimálnu pravdepodobnosť (2.11).

V tomto prípade je riešenie trochu zložitejšie, rozoberme si však jednotlivé prípady, ktoré môžu nastať:

- a) **Prípustná oblasť.** Pokiaľ je  $x_i$  také, že s istotou splníme koncovú podmienku, riadenie  $u_j = 0$  je prípustné a zároveň optimálne (argument je rovnaký ako v prípade úlohy bez ohraničení).
- b) **Mimo prípustnej oblasti.** Pokiaľ pri stave  $x_i$  nemáme istotu splnenia podmienky, máme však množinu prípustných riadení  $W_i(x_i) \subseteq [0, 1]$ , z ktorej  $u_i$  vyberáme, tak
  - ak neuvažujeme stratu z ďalších období, tak riešením zrejme bude  $u_i = \min W_i(x_i)$ , teda optimálne riešenie závisí od definície množiny prípustných riadení,
  - ak uvažujeme aj ďalšie periód,  $u_i$  budeme voliť čo najmenšie, aby sme minimalizovali aktuálnu aj budúcu stratu. Konkrétne optimálne riadenie nevieme v tomto prípade určiť analyticky, závisí od formulácie a parametrov problému.

Uvedené vlastnosti optimálneho riešenia úlohy overíme v ďalších podkapitolách aj numerickými výpočtami.

#### 5.2.4 Maximalizácia pravdepodobnosti splnenia podmienky

Pokiaľ chceme riešiť úlohu s podmienkou na strednú hodnotu koncového stavu, zaujíma nás aj otázka, či je vôbec táto podmienka splniteľná, alebo inak - aká je šanca, že táto podmienka bude úspešne splnená. V prípade podmienky  $E[x_k] \geq \mu$  v úlohe (5.1) totiž úspešnosť nemusí závisieť len od zvolenej stratégie, ale aj náhodného výnosu fondu. Preskúmajme teda, aká je pravdepodobnosť, že koncový stav splní  $x_k \geq \mu$ .

V kapitole 2.2.1 sme sa podrobne venovali maximalizácii pravdepodobnosti splnenia koncovej podmienky  $x_k \geq \mu$ , teda otázke, aké riadenie treba voliť, aby sme túto podmienku dosiahli s maximálnou pravdepodobnosťou. Podobne ako [24] sme ukázali, že musíme riešiť úlohu optimálneho riadenia (5.1) so špeciálnou účelovou funkciou

$$\max E[\Phi(x_k)] \quad (5.32)$$

$$\text{kde } \Phi(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x_k \geq \mu, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Hodnotová funkcia tejto úlohy sa zároveň rovná pravdepodobnosti splnenia podmienky definovanej predpisom (2.14), teda  $V_i(x) = \mathcal{P}_i(x)$ .

Riešiť úlohu na maximalizáciu pravdepodobnosti analyticky je pomerne komplikované, ukážeme však dve zaujímavé vlastnosti. Prvú vo forme vety o oblasti, na ktorej je 100% istota splnenia koncovej podmienky, druhú poznámku o riadení mimo tejto oblasti.

**Veta 5.11 (Oblasť istoty splnenia podmienky)** V úlohe (5.1) s účelovou funkciou (5.32) pre  $j = 0, \dots, k$  definujme oblasť istoty splnenia koncovej podmienky  $x_k \geq \mu$  ako množinu stavov

$$\mathfrak{X}_j = \left\{ x_j \mid x_j \geq \bar{x}_j = \frac{\mu}{\prod_{i=j}^{k-1} (1 + r_i)} \right\}. \quad (5.33)$$



Potom pre všetky  $x_j \in \mathfrak{X}_j$  bude hodnotová funkcia rovná  $V_j(x_j) = 1$ , čo znamená istotu splnenia koncovej podmienky  $x_k \geq \mu$ . Zároveň optimálna spätná väzba pre  $x_j$  bude  $v_j(x_j) \equiv 0$ , teda investícia všetkých prostriedkov do bezrizikového fondu.

Dôk a z. Ukážme, že na množine  $\mathfrak{X}_j$  máme pre  $j \in \mathcal{I}$  istotu splnenia koncovej podmienky. Tvrdenie dokážeme pomocou indukcie.

1° V čase  $j = k$  je podmienka s istotou splnená pre všetky  $x_k \geq \mu$ . V tom prípade  $V_k(x_k) = 1$ ,  $\bar{x}_k = \mu$  a teda pre množinu  $\mathfrak{X}_k$  tvrdenie platí.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky  $x_{j+1} \in \mathfrak{X}_{j+1}$ . V čase  $j$  budú prípustné všetky  $x_j$ , pre ktoré platí, že  $x_{j+1} \in \mathfrak{X}_{j+1}$ , teda

$$x_{j+1} = x_j (1 + u_j z_j + (1 - u_j) r_j) \geq \bar{x}_{j+1} \quad (5.34)$$

Hoci  $z_j$  je náhodná premenná, voľbou  $u_j = 0$  ju eliminujeme a tak dostávame podmienku na  $x_j$ , aby sa nachádzalo v oblasti istoty splnenia podmienky.

$$x_j(1 + r_j) \geq \bar{x}_{j+1} = \frac{\mu}{\prod_{i=j+1}^{k-1} (1 + r_i)}$$

$$x_j \geq \frac{\bar{x}_{j+1}}{1 + r_j} = \frac{\mu}{(1 + r_j) \cdot \prod_{i=j+1}^{k-1} (1 + r_i)} = \frac{\mu}{\prod_{i=j}^{k-1} (1 + r_i)} \equiv \bar{x}_j \quad (5.35)$$

V prípade  $x_j \geq \bar{x}_j$  bude zároveň

$$V_j(x_j) = \max_{u_j} E_j [V_{j+1}(x_{j+1})] = 1,$$

pretože väčšiu hodnotu ako 1 nie je možné dosiahnuť (z funkcie koncového stavu) a pre  $u_j = 0$  dostávame  $V_{j+1}(x_{j+1}) = 1$ , čiže  $u_j = 0$  je aj optimálne riadenie.

Tým sme dokázali, že množina stavov  $\mathfrak{X}_j$ , v ktorých máme istotu splnenia koncovej podmienky voľbou riadenia  $u_j = 0$ , má tvar (5.33) pre všetky  $j = 0, 1, \dots, k$ . ■

V prípade autonómnej verzie úlohy (5.32), teda pre konštantné  $r_j \equiv r$  môžeme upraviť rekurentný vzťah (5.35) a dostávame:

$$\bar{x}_j = \frac{\mu}{\prod_{i=j}^{k-1} (1 + r)} = \frac{\mu}{(1 + r)^{k-j}}. \quad (5.36)$$

Tým sme dokázali nasledujúci dôsledok:

**Dôsledok 5.12 (Autonómna úloha)** V autonómnej verzii úlohy (5.1) s účelovou funkciou (5.32), teda pre  $r_j \equiv r$  konštantné pre všetky  $j \in \mathcal{I}$ , bude mať oblasť istoty splnenia koncovej podmienky podľa vety 5.11 pre  $j = 0, \dots, k$  nasledujúci tvar

$$\mathfrak{X}_j = \left\{ x_j \mid x_j \geq \bar{x}_j = \frac{\mu}{(1 + r)^{k-j}} \right\}.$$

Ukázali sme, že pre dostatočne veľké  $x_j$  stačí voliť  $u_j = 0$ , čím dosiahneme istotu splnenia koncovej podmienky v tvare strednej hodnoty (2.6), resp. podmienky na minimálnu pravdepodobnosť (2.6). Aké však bude optimálne riadenie mimo tejto oblasti? Intuitívne predpokladáme, že našim cieľom bude zväčšiť  $x_j$  tak, aby sme sa dostali do oblasti istoty, resp. aspoň čo najbližšie k nej. Keďže rizikový fond má vyšší očakávaný výnos ako bezrizikový, tak voľbou  $u_j = 1$  sa môžeme k cieľovej oblasti najviac priblížiť. Samozrejme, v tesnej blízkosti cieľovej oblasti budeme voliť riadenie medzi 0 a 1, aby sme limitovali možnosť veľkej straty v rizikovom fonde. Tento intuitívny profil riešenia sa objaví aj v rámci numerických výsledkov.

## 5.3 Numerické riešenie

V tejto časti uvádzame niekoľko poznámok ohľadom numerického riešenia úlohy (5.1). Pri riešení budeme používať numerickú schému založenú na rovnici dynamického programovania (RDP), ktorá je podrobne popísaná v časti 3.1. Najskôr uvedieme základné hodnoty parametrov. Keďže ide o úlohu, v ktorej majú stav a riadenie kontinuálny charakter, v druhej časti tejto kapitoly sa venujeme konkrétnym poznámkam ohľadom diskretizácie týchto veličín.

### 5.3.1 Použité hodnoty parametrov

Pri numerickom riešení úlohy o portfóliu v nasledujúcich kapitolách používame ako počiatočné nastavenie tieto hodnoty parametrov. Na prípadné zmeny pri výpočtoch upozorňujeme v texte.

- Počet periód  $k = 40$  rokov - dlhšie obdobie, aby sme ukázali výhody OR,
- Počiatočný vklad investora  $x_0 = 100$  peňažných jednotiek,
- Bezriziková úroková miera -  $r_i = 2\%$  ročne ,
- Stavová premenná: ohraničenia  $x^{\text{MIN}} = 0$ ,  $x^{\text{MAX}} = 500$  až  $2000$ , diskretizácia  $M = 500$  až  $2000$  hodnôt (podľa  $x^{\text{MAX}}$ ),
- Riadenie:  $N = 10$ , resp.  $N = 20$  diskretných hodnôt z intervalu  $\mathbb{U}_i \equiv [0, 1]$ ,
- Náhodný výnos rizikového fondu: aproximácia normálneho rozdelenia (popísaná v časti 5.1.3), stredná hodnota  $\bar{z}_i = 6\%$ , disperzia  $\sigma = 0.1$ , používame  $S = 300$  diskretných hodnôt od  $-1$  po  $+1$

### 5.3.2 Diskretizácia stavu a riadenia

V úlohe o portfóliu majú stav aj riadenie kontinuálny charakter, môžu teda nadobúdať ľubovoľné hodnoty z intervalu v  $\mathbb{R}$ . Z tohto dôvodu musíme uvažovať vhodnú diskretizáciu týchto veličín. Chceme, aby získané numerické riešenie dobre aproximovalo skutočné riešenie zadanej úlohy. Diskretizáciu podrobne popisujeme v časti 3.2, na tomto mieste uvádzame drobné upresnenia.

Čo sa týka riadenia, tam je situácia pomerne jednoznačná. Hodnoty riadenia sú ohraničené, musí platiť  $u_i \in \mathbb{U}_i \equiv [0, 1]$ . Stačí teda zvoliť  $N$  diskretných hodnôt riadenia v tvare (3.1) pre  $u^{\text{MIN}} = 0$  a  $u^{\text{MAX}} = 1$ .

### Ohraničenia stavovej premennej

Zamerajme sa teraz na vhodné ohraničenia stavovej premennej  $x^{\text{MIN}}$  a  $x^{\text{MAX}}$ . Tieto nemáme v úlohe (5.1) stanovené, pri numerickom riešení ich však musíme zvoliť. Vhodná voľba závisí nielen od diferenčnej rovnice, ale aj od parametrov úlohy – očakávaných výnosov rizikového a bezrizikového fondu, doby sporenia a voľby účelovej funkcie. Dolné ohraničenie môžeme určiť  $x^{\text{MIN}} = 0$ , čo je prirodzená hranica, pretože pod túto sumu počas sporenia klesnúť nemôžeme.

Komplikovanejšia je voľba horného ohraničenia  $x^{\text{MAX}}$ : ak ho zvolíme príliš vysoké, numerický výpočet sa neúmerne predĺži, resp. pokiaľ zvolíme  $x^{\text{MAX}}$  vysoké, napr.  $x^{\text{MAX}} = 2000$ , ale počet

hodnotu stavu  $M$  ponecháme napr.  $M = 500$ , krok stavu bude  $x^{\text{MAX}}/M = 4$  a presnosť výpočtu sa zníži. Naopak príliš nízke horné ohraničenie zase môže mať vplyv na výsledné riešenie.

Všimnime si, že ak už máme dostatočne veľkú sumu, do ukončenia sporenia sa dostaneme nad  $x^{\text{MAX}}$  investíciou do bezrizikového fondu. V tom prípade nemá zmysel uvažovať o investícii do rizikového fondu, keďže  $x^{\text{MAX}}$  je najväčšia suma, na ktorú sa (v zmysle diskretizácie úlohy) môžeme dostať.

Napríklad ak zvolíme parametre  $k = 40$  rokov a výnos bezrizikového fondu bude  $r_i = 2\%$  ročne, tak na maximálnu hodnotu  $x^{\text{MAX}} = 1000$  sa dostaneme bezrizikovými investíciami už zo sumy  $x_0 = 453$ . Tým pádom od sumy cca 450 už tvar riešenia ovplyvňuje stanovená horná hranica. Pri hranici  $x^{\text{MAX}} = 2000$  bude riešenie vyzerat' inak. Samozrejme, toto závisí aj od účelovej funkcie, napríklad v prípade minimalizácie rizika môže riešenie vyzerat' rovnako (keďže tam volíme bezrizikovú investíciu už od nižšej sumy). Pri stanovovaní ohraničení musíme tieto fakty brať do úvahy.

Pri počiatočnej sume  $x_0 = a$ , priemerných výnosoch bezrizikového fondu 2%, rizikového 6% a horizonte  $k = 40$  rokov môžeme zvoliť napríklad hranice výpočtu  $x^{\text{MIN}} = 0$  a  $x^{\text{MAX}} = 10a$ . Pritom však pre nás zaujímavé hodnoty  $x_i$  budú napríklad z intervalu  $[0, 5a; 4a]$ , tieto budú spoľahlivo vypočítané. Na záver môžeme zhrnúť, že ak nechceme, aby horné ohraničenie  $x^{\text{MAX}}$  ovplyvňovalo tvar riešenia, musíme ho zvoliť dostatočne veľké, resp. zohľadniť voľbu účelovej funkcie a ďalších parametrov.

### Neekvidišančné rozostupy stavovej premennej $x_i$

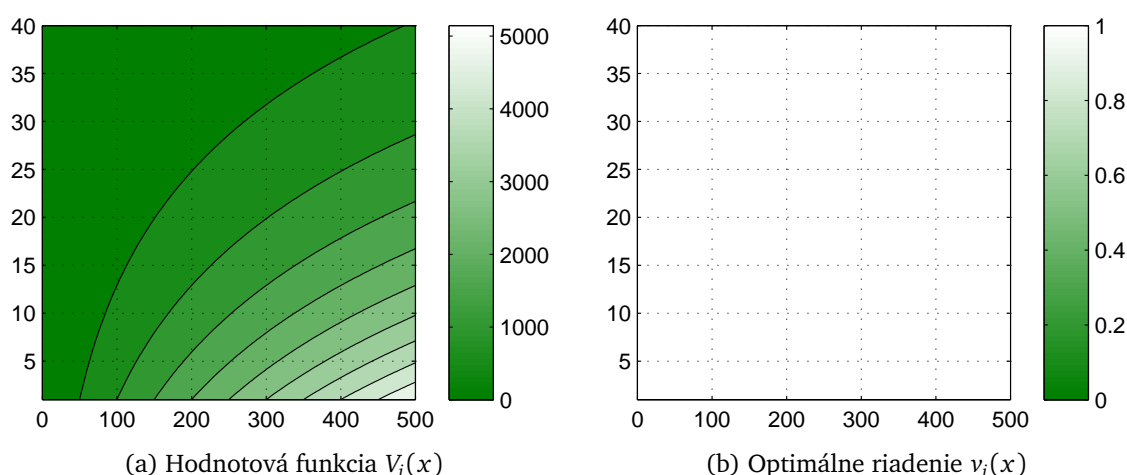
Zaujímavá môže byť otázka, či je skutočne výhodné zvoliť pre stavovú premennú  $x_i$  rovnomerné rozostupy. Hodnota investícií rastie exponenciálne a tak môže byť lepšie zvoliť menšie rozostupy v okolí sumy počiatočného vkladu  $a$  a väčšie rozostupy pre veľmi veľké sumy v blízkosti  $x^{\text{MAX}}$ . Navyše výnosy sú relatívne, preto pri vyššej sume dochádza k väčším zmenám.

Takéto nerovnomerné rozostupy sme skúsili implementovať aj numericky. Výsledky v tomto prípade však neboli lepšie, naopak, pri zaokrúhľovaní a interpolovaní vznikali väčšie numerické chyby, následkom čoho bolo riešenie numericky nestabilné (vznikali veľké oscilácie v hodnote optimálneho riadenia medzi diskretnými stavmi, hoci sa dá očakávať, že optimálne riadenie sa bude meniť plynule). Preto sme pri numerických výpočtoch používali ekvidišančné rozostupy stavovej premennej.

### Extrapolácia hodnotovej funkcie

Ohľadom extrapolácie sme uviedli, že to, ktorý spôsob je vhodnejší, závisí od tvaru účelovej funkcie. Napríklad v prípade maximalizácie strednej hodnoty koncového stavu je hodnotová funkcia lineárna, takže extrapolácia lineárnou funkciou (3.3) je veľmi dobrá aproximácia.

V prípade maximalizácie užitočnosti je výhodnejšie použiť poslednú vypočítanú hodnotu (3.2), keďže hodnotová funkcia je konkávna, preto lineárna aproximácia nebude presná. Ne-presná extrapolácia však môže spôsobiť, že numericky vypočítané riešenie bude v pravej polo-vici intervalu napríklad konzervatívnejšie ako správne riešenie, vznikne teda numerická chyba. Správna voľba horného ohraničenia  $x^{\text{MAX}}$  je preto dôležitá.



Obr. 5.2: Maximalizácia strednej hodnoty koncového stavu - optimálne je investovať všetky prostriedky do rizikového fondu s väčším výnosom,  $v_i(x) \equiv 1$

## 5.4 Úloha bez ohraničení

Táto podkapitola je venovaná prezentácii numerických riešení úlohy (5.1) bez ohraničení, kde pre množiny prípustných hodnôt riadenia platí  $W_i(x_i) \equiv \mathbb{U}_i = [0, 1]$  pre všetky  $i \in \mathcal{I}$ ,  $x_i \in \mathbb{X}_i$ .

Ide o maximalizáciu strednej hodnoty koncového stavu (5.2) a maximalizáciu očakávanej užitočnosti (5.3). Zároveň ukážeme niektoré vlastnosti riešenia a ich senzitivitu na zmenu parametrov. Pri riešení použijeme základné hodnoty parametrov, ktoré sú popísané v časti 5.3.1.

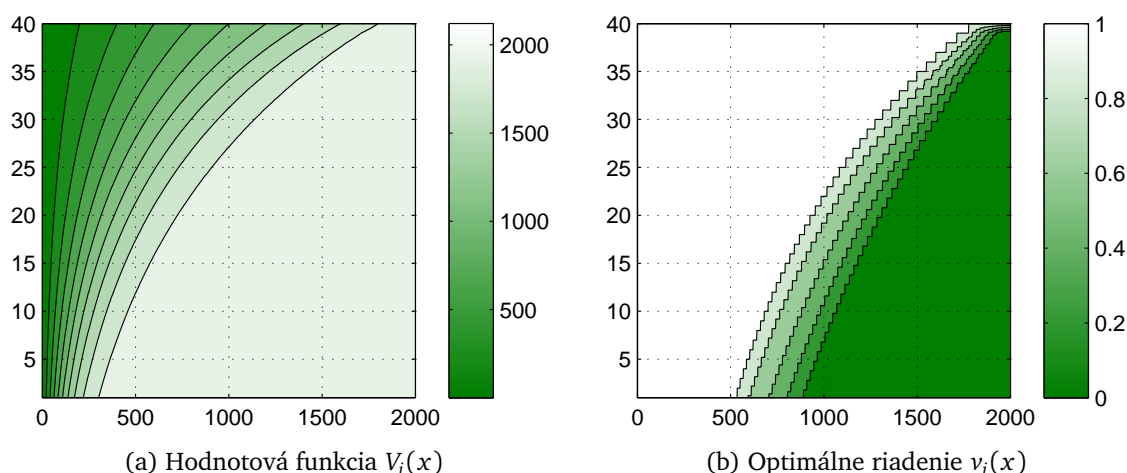
### 5.4.1 Maximalizácia strednej hodnoty

Naším cieľom je ukázať základný tvar riešenia úlohy o portfóliu (5.1). Začneme najjednoduchším prípadom - maximalizáciou strednej hodnoty koncového stavu (5.2). Pre túto úlohu sme analyticky odvodili aj presné riešenie, podľa Vety 5.1 je riešením  $u_i \equiv 1$ , teda všetky prostriedky investujeme do fondu, ktorý ponúka vyšší očakávaný výnos - rizikového.

Pri numerickom riešení však tento teoretický poznatok nebudeme využívať. Naším cieľom je porovnať získané numerické riešenie s presným riešením a zistiť, ako nastavenia parametrov ovplyvňujú presnosť výsledného riešenia. Neskôr budeme numericky riešiť aj úlohy, ktorých analytické riešenie nepoznáme, potrebujeme preto overiť presnosť numerickej schémy.

Riešenie úlohy sme znázornili na obrázku 5.2. Na x-ovej osy sú hodnoty stavu (aktuálna hodnota majetku investora), y-ová os je časová perióda  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ . V prípade hodnotovej funkcie (na obrázku vľavo) pre danú časovú periódu  $i$  zobrazujeme  $V_i(x_i)$ , teda budúce zisky v časovom období  $i$  až  $k$ . Hodnotu  $V_0(100)$ , teda maximálnu očakávanú hodnotu budúceho výnosu môžeme prečítať v spodnej časti grafu.

Farbou znázorňujeme číselnú hodnotu optimálneho riadenia, resp. hodnotovej funkcie - tmavšia farba znamená menšiu číselnú hodnotu, biela farba najvyššiu hodnotu. V prípade riadenia (optimálnej spätnej väzby) biela farba označuje 1, teda 100% prostriedkov investovaných do rizikového fondu. Graf optimálneho riadenia môžeme vidieť na obr. 5.2b. Vypočítané numerické riešenie sa v tomto prípade zhoduje s teoretickým odvodením a je identicky rovné  $u_i \equiv 1$ .



Obr. 5.3: Maximalizácia koncového stavu s extrapoláciou pomocou  $V_{i+1}(x^{\text{MAX}})$ , v tomto prípade dochádza k nepresnému výpočtu na pravej strane intervalu

Pri výpočte sme použili ohraničenia  $x^{\text{MIN}} = 0, x^{\text{MAX}} = 500$  a vzhľadom na tvar hodnotovej funkcie sme ju extrapolovali lineárne podľa rovnice (3.3). Aby sme overili vplyv nesprávnej extrapolácie na výsledný tvar riešenia, numerické riešenie vypočítame aj pre extrapoláciu (3.2).

#### Ohraničenie stavovej premennej

Na obrázku 5.3 sme znázornili numerické riešenie s ohraničeniami  $x^{\text{MIN}} = 0, x^{\text{MAX}} = 2000$ , pričom podľa (3.2) použijeme hodnotu  $V_{i+1}(x^{\text{MAX}})$  pre všetky  $x > x^{\text{MAX}}$ . V tomto prípade sa numerické riešenie nezhoduje s teoretickým presným riešením, ako môžeme vidieť na obr. 5.3b, pre  $x$  väčšie ako určitá hraničná hodnota (rastúca s rastúcim časom  $i$ ) je riadenie menšie ako 1, resp. priamo nulové (iba konzervatívny fond).

Keďže hodnotová funkcia sa na pravom okraji už nezväčšuje vplyvom extrapolácie konštantou (3.2), viac sa oplatí konzervatívne riadenie, s ktorým s istotou dosiahneme maximálny prípustný stav, teda rovnako dobrý výsledok ako rizikovým riadením. Túto vlastnosť môžeme pozorovať na tvare tmavozelenej oblasti v pravej časti grafu spätnej väzby  $v_i(x)$ .

Horné ohraničenie  $x^{\text{MAX}}$  sa prejavuje aj na obrázku 5.3a, keďže maximálna dosahovaná hodnota hodnotovej funkcie je približne 2000 (hoci reálne by mala byť väčšia) a dosiahne sa už pre približne  $x_0 \approx 350$ . Pri numerickom riešení ďalších úloh musíme preto zvoliť vhodné ohraničenia a extrapoláciu, resp. nepresné hodnoty riadenia (viď pravú časť intervalu na obr. 5.3b) vo výslednom riešení neuvažovať.

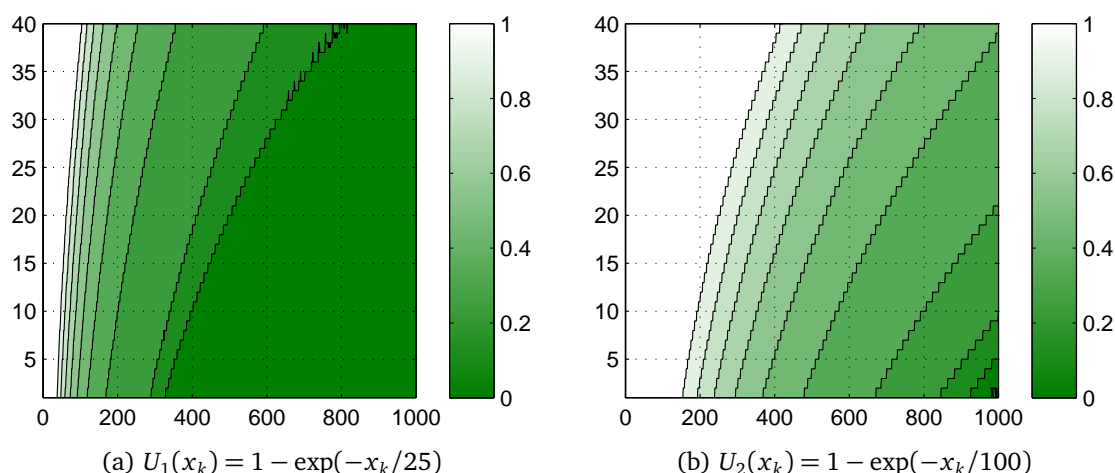
#### 5.4.2 Maximalizácia očakávanej užitočnosti

V tejto časti sa zaoberáme úlohou na maximalizáciu očakávanej užitočnosti koncového stavu. Pri numerických výpočtoch budeme používať exponenciálnu funkciu užitočnosti v tvare

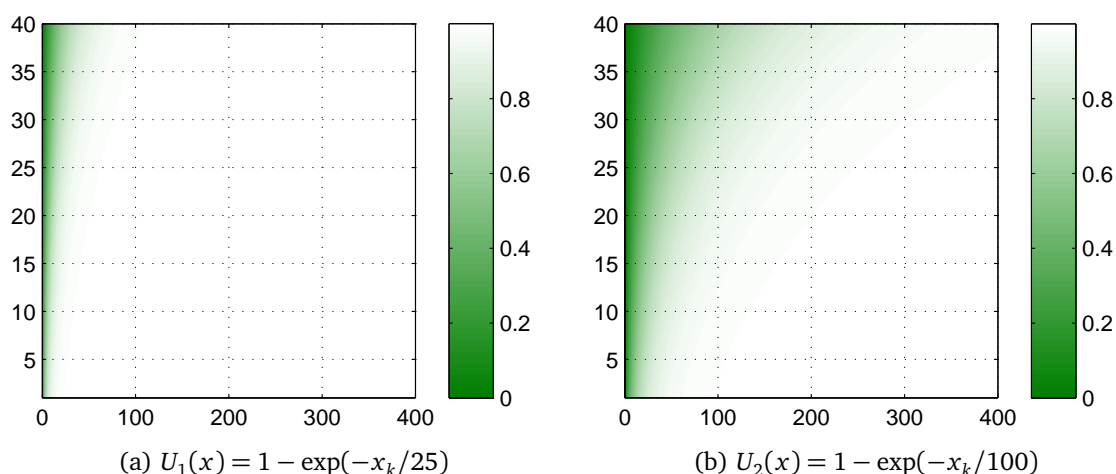
$$U(x) = 1 - \exp(-ax),$$

pričom koeficient  $a > 0$  vyjadruje investorovu averziu k riziku. Čím väčšia je hodnota  $a$ , tým väčší podiel investor optimálne dá do bezrizikového fondu.

## 5.4. ÚLOHA BEZ OHRANIČENÍ



Obr. 5.4: Optimálne riadenie  $v_i(x)$  pre maximalizáciu očakávanej užitočnosti, rôzne koeficienty

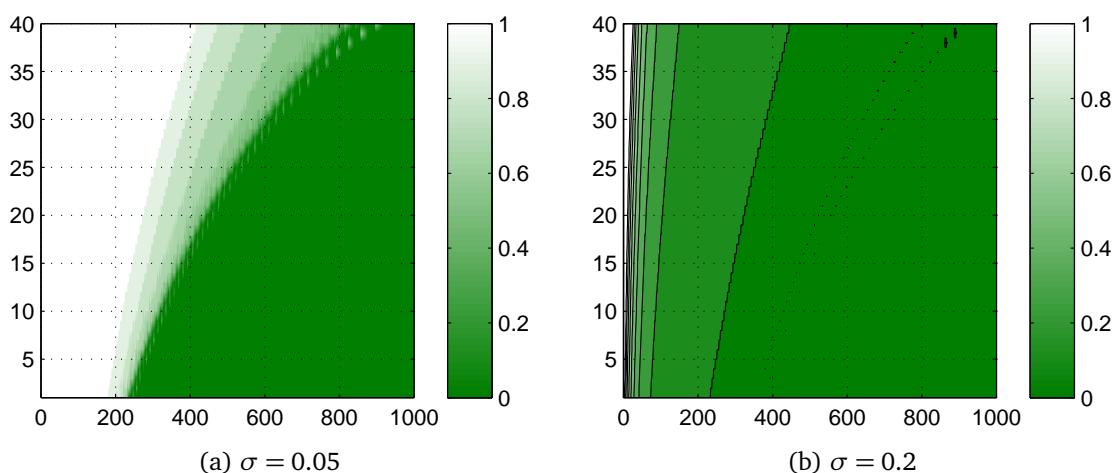


Obr. 5.5: Hodnotová funkcia  $V_i(x)$  pre maximalizáciu očakávanej užitočnosti, rôzne koeficienty, nadobúda hodnoty užitočnosti  $U(x)$  z intervalu  $(0, 1)$

V tomto prípade sme teoreticky odvodili, že hodnotová funkcia je konkávna podľa Vety 5.4, tieto poznatky sme však pri numerickom riešení nevyužívali (s výnimkou voľby extrapolácie). Konkrétny tvar optimálneho riadenia sme teoreticky neodvodili.

Na obrázku 5.4 uvádzame tvar optimálneho riadenia pre rôzne koeficienty  $a_1 = 1/25$  a  $a_2 = 1/100$ . Tmavozelená opäť zodpovedá konzervatívnejšiemu riadeniu, teda bezrizikovej investícii, kým svetlá a biela investícii do rizikového fondu. V súlade s očakávaním je v druhom prípade pri rovnakom stave vyšší podiel rizikového fondu, vidieť to aj na veľkosti oblasti so 100% podielom rizikového fondu (biela oblasť vľavo), v druhom prípade je podstatne väčšia, pretože koeficient rizikovej averzie  $a_2$  je menší ako  $a_1$ .

Na ďalšom obrázku 5.5 sme znázornili hodnotové funkcie v oboch prípadoch, tieto súvisia s tvarom optimálneho riadenia: zelená farba predstavuje menšiu hodnotu funkcie  $V_i(x)$ , čo vedie k voľbe rizikovejšieho riadenia, aby sa hodnotová funkcia dostala bližšie k maximálnej hodnote 1. Naopak biela plocha znamená vysokú hodnotu hodnotovej funkcie, jej ďalšie zvý-

Obr. 5.6: Vplyv  $\sigma$  náhodného výnosu na optimálne riadenie  $v_i(x)$ 

šenie je možné iba príliš rizikovým investovaním, preto optimálne bude udržať túto hodnotu bezrizikovou alebo menej rizikovou investíciou.

Poznamenajme, že problém s extrapolovaním hodnotovej funkcie v tomto prípade nevzniká, resp. nie je viditeľný. Keďže hodnotová funkcia sa už pre  $x \approx x^{\text{MAX}}$  príliš nemení, ako aproximáciu môžeme použiť poslednú vypočítanú hodnotu  $V_{i+1}(x^{\text{MAX}})$ . Zrejme ešte presnejšie by bolo extrapolovať hodnotovú funkciu ako konkávnú funkciu, na tvare riadenia sa to však neprejavuje.

### Analýza citlivosti

Okrem samotného riešenia nás zaujímal aj vplyv jednotlivých parametrov na tvar riešenia. Pri porovnaníach používame funkciu užitočnosti s koeficientom  $a_1 = 1/25$ .

Porovnajme najskôr tvar riešenia v závislosti od disperzie náhodného výnosu  $\sigma$ . Väčšia hodnota  $\sigma$  znamená väčší rozptyl náhodných výnosov, teda aj väčšie riziko. Hodnota riadenia v prípade  $\sigma = 0.1$  bola znázornená na obrázku 5.4a, menšia hodnota  $\sigma = 0.05$  a väčšia hodnota  $\sigma = 0.2$  sú na obrázku 5.6. Ako môžeme vidieť na obrázkoch, väčšia disperzia očakávateľne vedie k väčšiemu podielu bezrizikového fondu a vice versa.

Ďalšou zaujímavou otázkou je tvar riešenia vzhľadom na rozdelenie náhodnej premennej. Pri porovnaní na obrázku 5.7 sme použili

(a) **Vlastné diskkrétne rozdelenie** podľa tabuľky

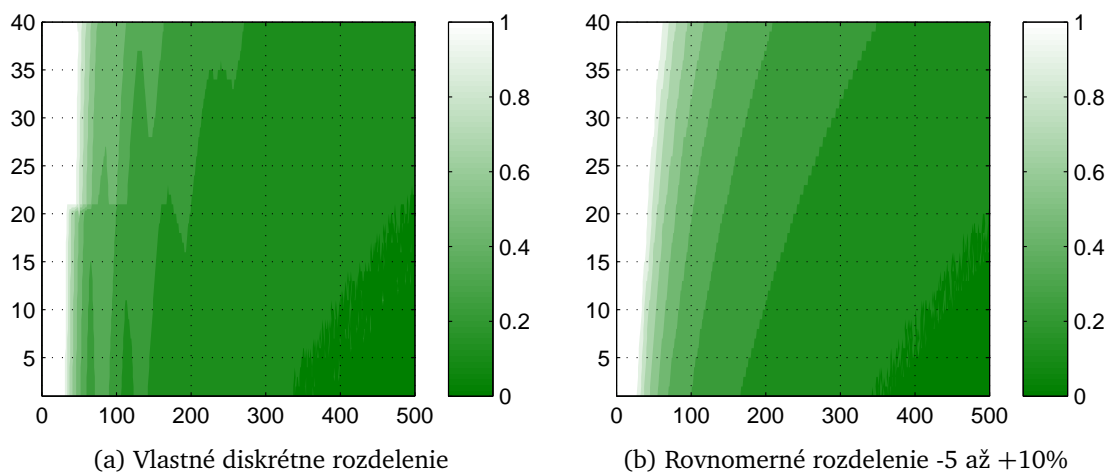
hodnota	0%	2%	6,5%	$E(z_i)$
pravdepodobnosť	0,5	0,25	0,25	2,125%

(b) **Diskkrétne rovnomerné rozdelenie** na intervale -5 až +10%, každá diskrétna hodnota má rovnakú pravdepodobnosť  $p = 0,0625$ .

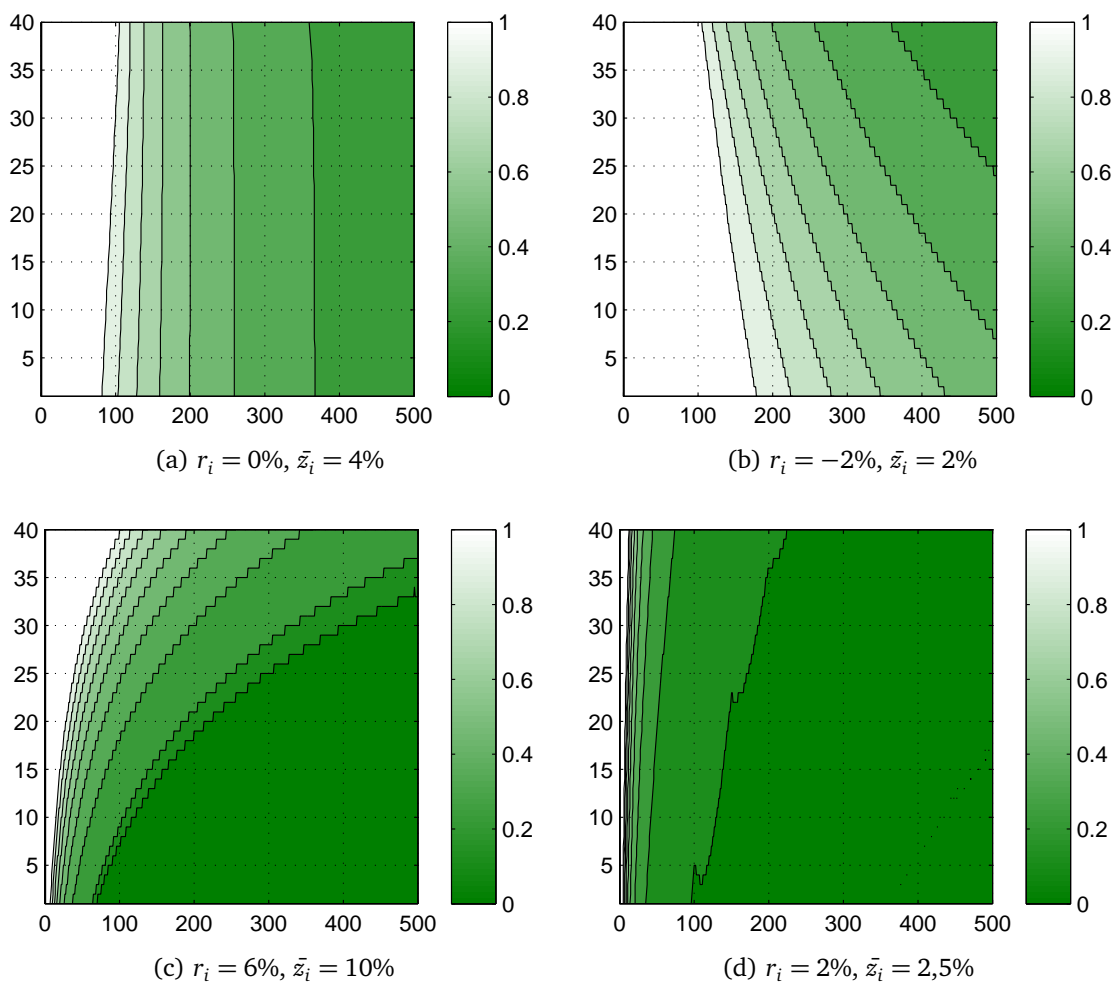
V prvom prípade je rozdelenie nesymetrické, tým pádom aj na tvare oblastí s rovnakým podielom rizikového fondu môžeme vidieť „zúbky“. V druhom prípade sú hranice oblastí skôr hladké - toto súvisí aj s tým, že hodnotová funkcia má tendenciu vyhladzovať sa, najmä kvôli tomu, že



## 5.4. ÚLOHA BEZ OHRANIČENÍ



Obr. 5.7: Optimálne riadenie  $v_i(x)$  v závislosti od rozdelenia náhodného výnosu



Obr. 5.8: Optimálne riadenie  $v_i(x)$  pri zmene úrokových sadzieb

pri výpočte hodnotovej funkcie v jednom bode berieme do úvahy hodnoty funkcie v približne 300 bodoch predchádzajúcej časovej iterácie.

Preskúmame ešte závislosť riešenia od úrokových sadziieb. Na obrázku 5.8 postupne skúmame bezrizikovú úrokovú sadzbu  $r_i = 0\%$ ,  $r_i = -2\%$  (to môžeme chápať ako reálny úrok po zohľadnení inflácie), a  $r_i = 6\%$ , pričom však očakávaný náhodný výnos je vždy o 4% vyšší, teda rozdiel v sadzbách je rovnaký. V týchto prípadoch dochádza k zmene sklonu hranice oblasti s rovnakým riadením, konkrétne pre  $r_i = 0\%$  sú tieto hranice zvislé, pre  $r_i = -2\%$  mierne klesajúce, kvôli zápornému znamienku. Tieto oblasti sú zároveň oblasťami s rovnakou hladinou hodnotovej funkcie, tým pádom sklon hranice zároveň vyjadruje rozširovanie sa danej oblasti pri bezrizikovom výnose. V prípade  $r_i = 6\%$  je sklon kladný, hraničná hodnota v bezrizikovom fonde rýchlo rastie.

Čo sa stane v prípade, ak zmenšíme rozdiel medzi bezrizikovým výnosom a strednou hodnotou náhodného výnosu? Môžeme očakávať, že rizikový fond stratí svoju výhodu (výrazne vyšší očakávaný výnos), tým pádom optimálnym riešením bude konzervatívnejšia investícia, ako môžeme vidieť na obrázku 5.8d. Navyše pri menšom rozdiel v sadzbách môže dojsť k numerickým chybám napr. pri zaokrúhľovaní a teda tvar riadenia môže byť menej hladký, čo môžeme pozorovať aj na grafe.

### Mocninová funkcia užitočnosti

V nadväznosti na Vetu 5.5 ešte uvedieme krátku poznámku o riešení úlohy s mocninovou funkciou užitočnosti v tvare:

$$U(x) = \frac{x^{1-p}}{1-p} \quad (5.37)$$

V prípade takejto funkcie užitočnosti je koeficient relatívnej averzie k riziku  $p$  konštantný (podrobnejšie v [32]), tým pádom optimálna spätná väzba  $v_i(x_i)$  nezávisí na aktuálnom množstve peňazí  $x_i$ , závisí iba od parametra  $p$ .

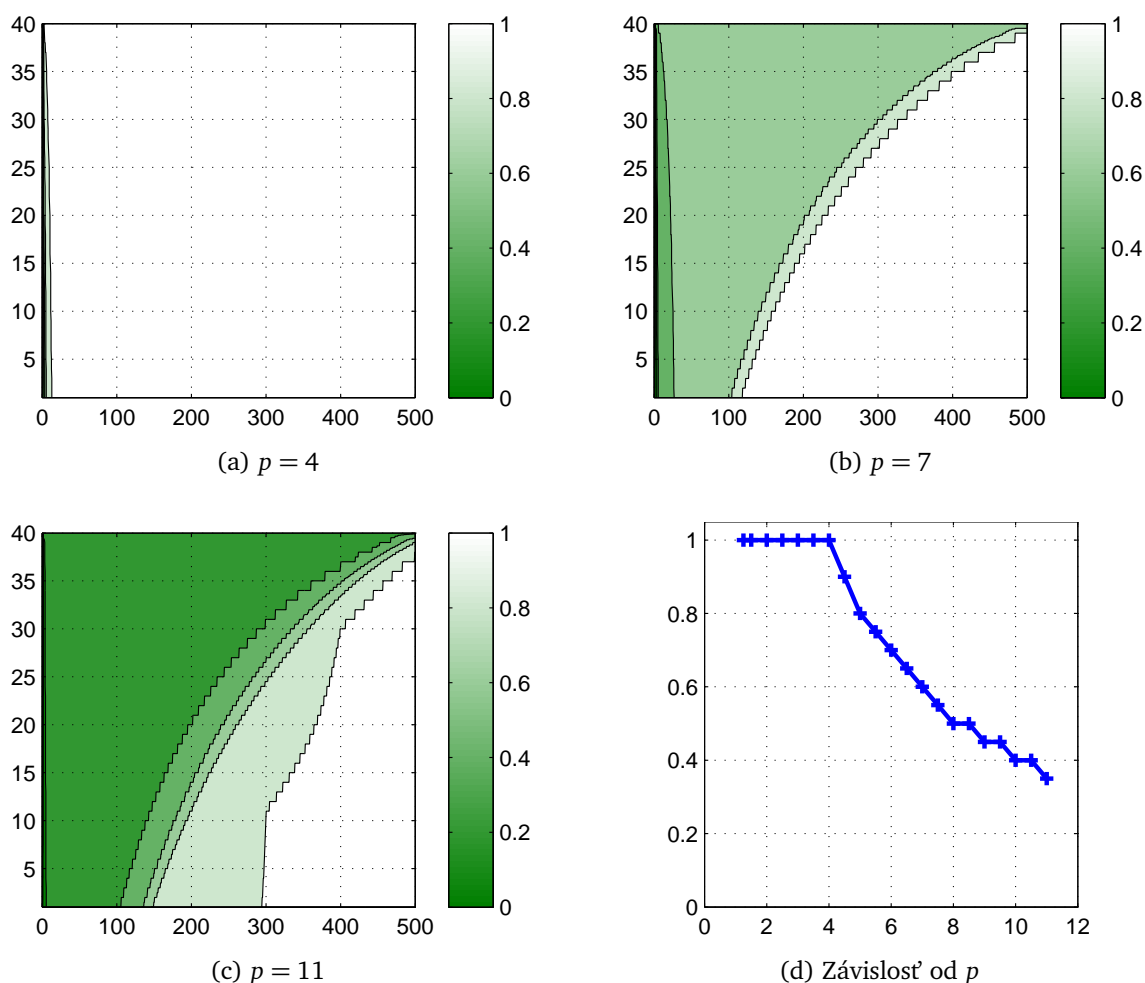
Túto skutočnosť sme chceli overiť aj numericky. Bez použitia dodatočných informácií sme použili numerickú schému na výpočet optimálneho riadenia v úlohe s účelovou funkciou (5.37) pre rôzne hodnoty parametra  $p$ . Výsledky sme znázornili na obrázku 5.9. Zobrazili sme vypočítané optimálne riadenie pre vybrané hodnoty parametra  $p$ , resp. aj závislosť (konštantného) riadenia od parametra  $p$  na obr. 5.9d.

Na obrázkoch 5.9b a 5.9c si môžeme všimnúť numerickú nepresnosť v pravej časti intervalu (rizikové riadenie pre veľké  $x_i$ ), táto súvisí s nepresnou lineárnou extrapoláciou hodnotovej funkcie. Pre numericky presné riešenie môžeme buď riešiť úlohu na väčšom intervale, z ktorého použijeme len časť, resp. presnejšiu extrapoláciu hodnotovej funkcie mimo intervalu riešenia úlohy. Alternatívne môžeme navrhnúť špeciálnu numerickú schému na riešenie tohto typu úlohy, v ktorej v súlade s teóriou očakávame konštantné riadenie.

### Zhrnutie

Pokúsme sa na záver zhrnúť naše pozorovania. Keďže maximalizácia očakávanej užitočnosti zohľadňuje aj riziko, tak zväčšenie rizika v úlohe (napr. zväčšenie disperzie náhodného výnosu alebo zníženie výnosu rizikového fondu) bude viesť k zníženiu podielu prostriedkov v rizikovom

## 5.4. ÚLOHA BEZ OHRANIČENÍ



Obr. 5.9: Optimálne riadenie v prípade mocninatej funkcie užitočnosti v závislosti od rizikovej averzie investora  $p$

fonde. Na druhej strane napríklad zmenšením volatility náhodného výnosu prideme k opačnému výsledku, teda zvýšeniu podielu rizikového fondu.

V súlade s očakávaním na hodnotu riadenia úmerne vplyva aj riziková averzia investora, teda parameter funkcie užitočnosti. Zväčšením averzie k riziku sa zmenší podiel rizikového fondu v optimálnom riadení a naopak.

Pre exponenciálnu funkciu užitočnosti navyše platí, že čím väčšiu sumu máme nasporenú, tým viac preferujeme istotu a teda tým menší podiel prostriedkov investujeme do rizikového fondu. Tento fakt súvisí s tým, že hraničný úžitok z dodatočnej jednotky kapitálu sa znižuje. K podobnému záveru v úlohe na výber dôchodkového fondu prišla Kilianová v [32].

Neplatí to však vždy, napríklad mocninová funkcia užitočnosti túto vlastnosť nemá a optimálnym riešením je v súlade s teóriou konštantné riadenie, podobne ako odvodili [38], [40] v spojitom prípade.

## 5.5 Podmienka na koncový stav

V prechádzajúcej podkapitole sme sa zaoberali verziami úlohy bez koncovej podmienky, teraz sa zameriame na úlohy s ohraničeniami na koncový stav. Ako sme spomenuli už v 2. kapitole, podmienku na strednú hodnotu koncového stavu (2.6) môžeme nahradiť ekvivalentnou podmienkou na prípustné hodnoty stavu (2.8). Teda v jednotlivých časových etapách  $i$  a stavoch  $x_i$  definujeme množinu prípustných hodnôt stavu  $W_i(x)$ , pričom optimálne riadenie budeme hľadať iba na tejto množine.

V tejto časti sa zaoberáme konkrétnym tvarom týchto množín a možnosťami riešenia úlohy (5.1) na prípustných množinách.

### 5.5.1 Koncová podmienka v tvare strednej hodnoty

Naším cieľom teraz bude riešiť úlohu (5.1) s podmienkou (2.6) v tvare strednej hodnoty koncového stavu:

$$E_{k-1} [x_k | x_{k-1}] \geq \mu.$$

Nadviažeme na článok [16], ktorého autori množinu prípustných hodnôt riadenia pre túto podmienku definovali rekurzívne: pre  $i = k - 1$

$$\begin{aligned} W_{k-1}(x) &= \{u_{k-1} \in \mathbb{U}_{k-1} \mid E_{k-1} f_{k-1}(x, u_{k-1}, z_{k-1}) \geq \mu\}, \\ X_{k-1} &= \{x \in \mathbb{X}_{k-1} \mid W_{k-1}(x) \neq \emptyset\} \end{aligned} \quad (5.38)$$

a pre  $i < k - 1$ :

$$\begin{aligned} W_i(x) &= \{u_i \in \mathbb{U}_i \mid f_i(x, u_i, z_i^s) \in X_{i+1} \text{ pre všetky } z_i^s\}, \\ X_i &= \{x \in \mathbb{X}_i \mid W_i(x) \neq \emptyset\}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

V tejto práci však túto podmienku analyzujeme podrobnejšie, v časti 2.1.1 sme sa venovali odvodu rekurentných vzťahov (5.38) a (5.39), teraz sa zameriavame na problémy v konkrétnej úlohe (5.1). Množinu prípustných hodnôt riadenia vyjadríme analyticky a potom aj graficky znázorníme.

#### Analytické vyjadrenie

Dosadením parametrov konkrétnej úlohy (napr. úlohy o portfóliu) do vzťahov (2.8) môžeme dostať analytické vyjadrenie množín  $W_i(x)$ . Zamerajme sa najskôr na množiny prípustných stavov  $X_i$ , teda stavov  $x_i$ , pre ktoré existuje nejaká prípustná hodnota riadenia  $u$ , teda  $W_i(x_i)$  je neprázdna. Pre  $k - 1$  dostávame:

$$\begin{aligned} X_{k-1} &= \{x \in \mathbb{X}_{k-1} \mid W_{k-1}(x) \neq \emptyset\} = \{x \in \mathbb{X}_{k-1} \mid \exists u \in \mathbb{U}_{k-1} \mid u \in W_{k-1}(x)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{X}_{k-1} \mid \exists u \mid E_{k-1} f_{k-1}(x, u, z_{k-1}) \geq \mu\} = \\ &= \{x \in \mathbb{X}_{k-1} \mid \exists u \mid E_{k-1} [x(1 + uz_{k-1} + (1-u)r_{k-1})] \geq \mu\} = \\ &= \{x \in \mathbb{X}_{k-1} \mid \exists u \mid x(1 + u\bar{z}_{k-1} + (1-u)r_{k-1}) \geq \mu\} \end{aligned} \quad (5.40)$$

pričom sme označili  $E[z_i] = \bar{z}_i$ .

Hodnota stavu  $x \in \mathbb{X}_{k-1}$  bude prípustná, pokiaľ existuje hodnota riadenia  $u \in \mathbb{U}_{k-1}$  spĺňajúca

$$x \geq \frac{\mu}{1 + u\bar{z}_{k-1} + (1-u)r_{k-1}} = \frac{\mu}{1 + u(\bar{z}_{k-1} - r_{k-1}) + r_{k-1}}, \quad (5.41)$$

pričom na pravej strane máme za predpokladu  $\bar{z}_{k-1} \neq r_{k-1}$  monotónnu funkciu  $u$ . Keďže hľadáme dolné ohraňenie pre  $x$ , musíme overiť krajné prípady  $u \in \{0, 1\}$ :

$$x \geq \min \left\{ \frac{\mu}{1 + r_{k-1}}, \frac{\mu}{1 + \bar{z}_{k-1}} \right\}$$

Za predpokladu, že rizikový fond má vyšší očakávaný výnos ( $\bar{z}_{k-1} \geq r_{k-1}$ ), použijeme druhú nerovnosť, preto

$$X_{k-1} = \left\{ x \in \mathbb{X}_{k-1} \mid x \geq x_{k-1}^{\text{MIN}} = \frac{\mu}{1 + \bar{z}_{k-1}} \right\},$$

pričom najmenšiu prípustnú hodnotu stavu sme označili  $x_{k-1}^{\text{MIN}}$ .

Pre  $i = k-2, \dots, 0$  vyjadríme množinu prípustných stavov  $X_i$  pomocou rekurentného vzťahu. Predpokladajme, že platí

$$X_{i+1} = \{x \mid x \geq x_{i+1}^{\text{MIN}}\}.$$

Potom pre  $X_i$  dostávame

$$\begin{aligned} X_i &= \{x \in \mathbb{X}_i \mid W_i(x) \neq \emptyset\} = \{x \mid \exists u \mid f_{k-1}(x, u, z_{k-1}^s) \in X_{i+1} \forall z_i^s\} = \\ &= \{x \mid \exists u \mid x(1 + uz_i^s + (1-u)r_i) \geq x_{i+1}^{\text{MIN}} \forall z_i^s\}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Úpravou (5.42) dostávame dolné ohraňenie pre  $x \in X_i$ , ktoré musí byť splnené pre všetky realizácie  $z_i^s$  náhodnej premennej  $z_i \sim \mathbb{Z}_i$ :

$$x \geq \frac{x_{i+1}^{\text{MIN}}}{1 + u(z_i^s - r_i) + r_i} \quad (5.43)$$

Maximum pravej strany (5.43) sa dosiahne pre minimálnu hodnotu  $z_i^s$ . Keďže  $z_i \sim \mathbb{Z}_i$  má aproximáciu normálneho rozdelenia, pre všetky možné realizácie  $z_i^s$  platí  $-1 \leq z_i^s \leq 1$ . Hoci sa krajné hodnoty dosahujú len s malými pravdepodobnosťami, musíme ich uvažovať. Označme  $z_i^1$  najmenšiu možnú realizáciu  $\mathbb{Z}_i$ , potom stačí uvažovať ohraňenie

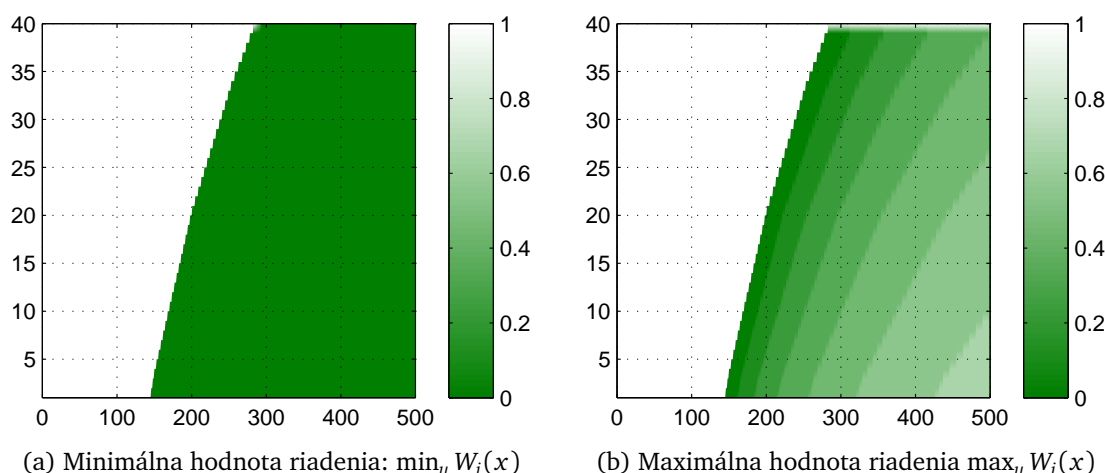
$$x \geq \frac{x_{i+1}^{\text{MIN}}}{1 + u(z_i^1 - r_i) + r_i}, \quad (5.44)$$

ktoré je opäť monotónnou funkciou  $u$ , pričom jeho koeficient  $(z_i^1 - r_i)$  bude záporný. Preverme teda krajné prípady: pre  $u = 0$  sa náhodná premenná eliminuje, čím dostávame ohraňenie

$$x \geq \frac{x_{i+1}^{\text{MIN}}}{1 + r_i},$$

pre  $u = 1$  potom

$$x \geq \frac{x_{i+1}^{\text{MIN}}}{1 + z_i^1},$$



Obr. 5.10: Prípustné hodnoty riadenia vzhľadom na podmienku  $E[x_k|x_{k-1}] \geq \mu$ . Biela oblasť vľavo označuje neprípustné stavy (v nich neexistuje prípustné riadenie)

čo pre  $z_i^1 \rightarrow -1$  pôjde do  $+\infty$ . To znamená, že hodnota riadenia  $u = 1$  nebude prípustná v žiadnom stave  $x < +\infty$ .

Stav  $x$  je prípustný vtedy, keď je množina prípustných hodnôt stavu  $W_i(x)$  neprázdna, teda existuje aspoň jedna prípustná hodnota riadenia  $u$ . Pokiaľ teda  $u = 0$  patrí do  $W_i(x)$ , stav  $x$  je prípustný. Množinu prípustných stavov teda môžeme zapísať:

$$X_i = \left\{ x \in \mathbb{X}_i \mid x \geq x_i^{\text{MIN}} = \frac{x_{i+1}^{\text{MIN}}}{1 + r_i} \right\}.$$

Všimnime si však, že v (5.44) sa pre väčšie  $u$  vplyvom záporného koeficientu zmenší menovateľ, teda zväčší pravá strana – dolné ohraničenie  $x$ . To znamená, že väčšie hodnoty riadenia  $u \gg 0$  („rizikovejšie“) budú prípustné iba pre hodnoty stavu  $x \gg x_i^{\text{MIN}}$ . Napríklad  $u = 0,25$  je prípustné riadenie iba pre

$$x \geq \frac{x_{i+1}^{\text{MIN}}}{1 + 0,25z_i^1 + 0,75r_i} \approx \frac{4}{3} \cdot \frac{x_{i+1}^{\text{MIN}}}{1 + r_i}.$$

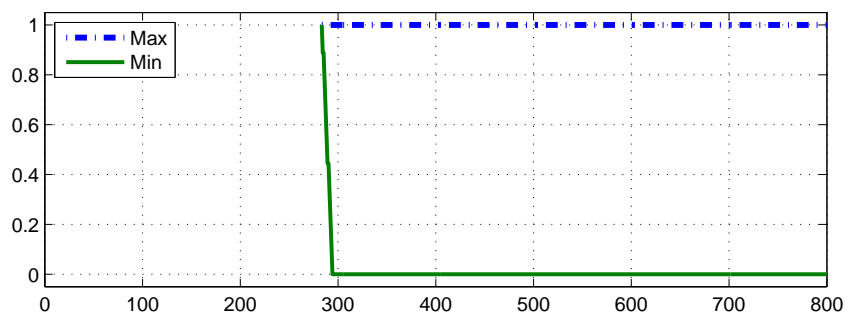
### Grafické znázornenie

Pri zobrazovaní oblasti budeme uvažovať počiatočný vklad  $x_0 = 100$ , cieľovú hodnotu  $\mu = 300$ , ostatné parametre sú uvedené v časti 5.3.1.

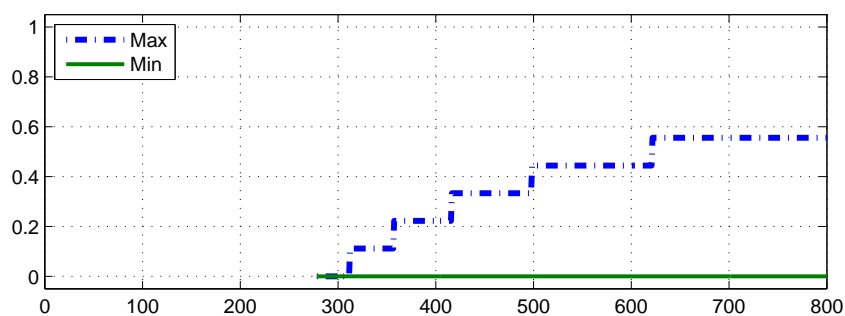
Prípustné stratégie pre našu úlohu vzhľadom na podmienku (2.6) sú znázornené na obrázku 5.10. V jednotlivých časoch a stavoch sme zobrazili na obrázku vľavo minimálnu a vpravo maximálnu hodnotu riadenia (pre lepšiu prehľadnosť na obrázku znázorňujeme iba  $N = 11$  diskretných hodnôt riadenia). V niektorých stavoch neexistuje prípustné riadenie, tieto sú na obrázkoch znázornené bielou farbou. Pre lepšiu prehľadnosť sme minimálnu a maximálnu prípustnú hodnotu riadenia zobrazili aj v niekoľkých časových rezoch na obrázku 5.11.

Poznamenajme, že množiny minimálnych prípustných riadení sú zároveň množinami prípustných hodnôt stavu, keďže stav je prípustný, ak existuje aspoň jedna hodnota riadenia v danom stave  $x_i$  a v čase  $i$ .

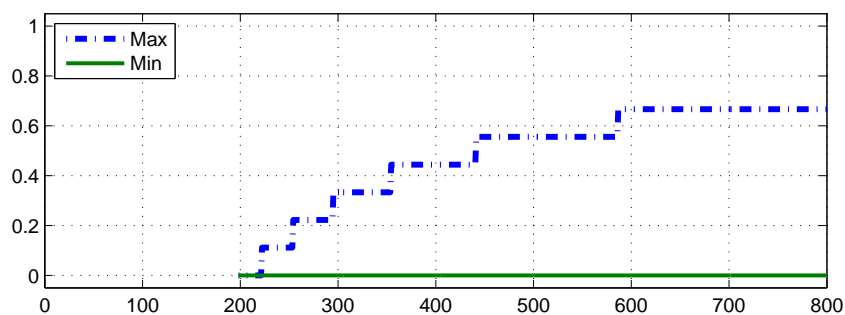
5.5. PODMIENKA NA KONCOVÝ STAV



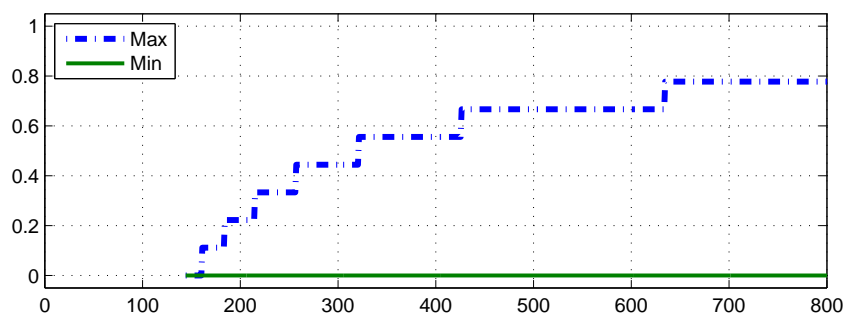
(a)  $t = 39 = k - 1$ , posledná etapa



(b)  $t = 38$ , predposledná etapa



(c)  $t = 19$



(d)  $t = 0$ , prvá etapa

Obr. 5.11: Množina prípustných hodnôt riadenia podľa (2.8) vo vybraných časových etapách

Všimnime si minimálnu hodnotu riadenia v čase  $i = k - 1$  v závislosti od stavu  $x$ :

- pre  $x < \frac{\mu}{1+z_i} \approx 283$ : daný stav nie je prípustný, pretože žiadnou voľbou riadenia nie je možné dosiahnuť  $E[x_k] \geq \mu$ ,
- pre  $\frac{\mu}{1+z_i} \leq x < \frac{\mu}{1+r_i} \approx 294$ : postupne sa znižuje, keďže ide o minimálnu hodnotu riadenia, ktorá zaručí splnenie podmienky  $E[x_k] \geq \mu$ ,
- pre  $\frac{\mu}{1+r_i} \leq x$ : minimálna hodnota riadenia je 0, pretože aj týmto riadením sa dosiahne  $E[x_k] \geq \mu$ .

Maximálna hodnota riadenia je pre  $x \geq \frac{\mu}{1+z_i}$  rovná 1, podmienka na strednú hodnotu bude v týchto prípadoch splnená. Tieto podmienky sú intuitívne správne, keďže sú nevyhnutné pre splnenie koncovkej podmienky.

Iná je však množina prípustných hodnôt riadenia v čase  $i = k - 2$ : stav  $x$  je prípustný, ak  $x \geq \frac{\mu}{(1+r)^2} \approx 288$ , kde konzervatívne riadenie  $u_i = 0$  zabezpečí splnenie koncovkej podmienky. Zaujímavá je však maximálna hodnota riadenia, táto je pre malé  $x$  nulová a postupne sa zväčšuje až s rastúcim  $x$  a to tak, aby ani pri maximálnej novej strate (teda pre  $z_i = -100\%$ , hoci táto má takmer nulovú pravdepodobnosť) nevypadli z prípustnej oblasti. Toto je v súlade s definíciou, že  $x_{i+1}$  musí byť prípustné pre **všetky** náhodné výnosy  $z_i$ .

Analogická je situácia v ostatných časoch  $i < k - 2$ . Minimálna hodnota prípustného stavu  $x^{\text{MIN}}$  sa s klesajúcim  $i$  (rastúcim časom do expirácie) znižuje podľa vzťahu

$$x_i^{\text{MIN}} = \frac{\mu}{(1+r)^{k-i}}, \quad (5.45)$$

čo súvisí s uvažovanou úrokovou mierou  $r_i = 2\%$ . Všimnime si, že voľba riadenia  $u_i = 0$  (konzervatívny fond) nám už pre minimálne  $x_i \geq x_i^{\text{MIN}}$  zaručí splnenie podmienky  $x_k \geq \mu$ .

Maximálna hodnota riadenia je opäť také, že pre  $x_i \approx x_i^{\text{MIN}}$  môžeme zvoliť iba  $u_i = 0$ , až pre väčšie  $x_i$  môžeme voliť  $u_i = 0,1$ , resp.  $u_i = 0,2$ , teda ak je  $x_i$  prípustné, tak aj  $x_{i+1}$  ostáva v prípustnej oblasti.

Minimálne prípustné riadenia, resp. prípustné stavy sme zobrazili aj pre prípad iných úrokových sadzieb  $r_i = 0\%$ , resp.  $r_i = -2\%$  na obrázku 5.12. Aj v týchto prípadoch sa minimálna hodnota prípustného stavu riadi vzťahom (5.45).

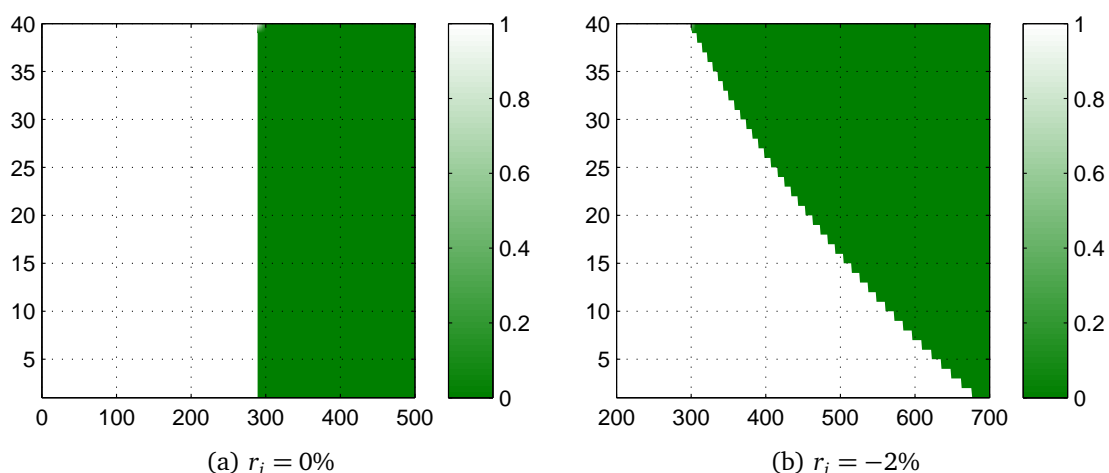
## Diskusia

Nevýhodou týchto prípustných riadení je fakt, že riziková investícia je možná iba v prípade, že sme už dosiahli veľmi vysokú hodnotu majetku  $x_i$ , teda v situácii, keď sa riziková investícia už „neoplatí“ - napríklad môžeme uviesť optimálne riešenie pre maximalizáciu užitočnosti, kde volíme rizikové riadenie pre malú hodnotu majetku a konzervatívnejšie pre väčšiu hodnotu majetku.

Otázkou však zostáva, čo s bodmi, ktoré ležia mimo oblasti prípustných stavov. Napr.  $x_0 = 100$  leží mimo oblasti, v ktorej existuje nejaká prípustná stratégia. Tým pádom úloha nie je riešiteľná - neexistuje prípustné riadenie.

To však nie je v súlade s intuíciou. Predsa voľbou riadení  $u_i = 0,5$  máme očakávaný výnos 4% ročne, po  $k = 40$  rokoch budeme mať priemerne  $x_k = 480$ . Alternatívne môžeme voliť





Obr. 5.12: Minimálne hodnoty prípustných stratégií podľa úrokových sadzieb. Biela oblasť označuje neprípustné stavy

riadenie  $u_i = 1$ , pokiaľ  $x_i < x_i^{\text{MIN}}$ , následne  $u_i = 0$ . Tým pádom s veľkou pravdepodobnosťou splníme podmienku, napriek tomu, že počiatkový bod sa nachádza mimo prípustnej oblasti.

To nás privádza na myšlienku definovať v tomto prípade množinu prípustných riadení alternatívnym spôsobom.

### 5.5.2 Alternatívna formulácia podmienky

Keďže v predchádzajúcom prípade bola množina prípustných stratégií veľmi obmedzená, skúsime definovať prípustnosť stratégií iným spôsobom. Využijeme predpis (2.10), tzv. alternatívnu definíciu množiny prípustných hodnôt riadenia, ktorú sme diskutovali v časti 2.1.2. Pre  $i = k - 1$  použijeme pôvodný tvar (5.38):

$$\begin{aligned} W_{k-1}(x) &= \{u_{k-1} \in \mathbb{U}_{k-1} \mid E_{k-1} f_{k-1}(x, u_{k-1}, z_{k-1}) \geq \mu\}, \\ X_{k-1} &= \{x \in \mathbb{X}_{k-1} \mid W_{k-1}(x) \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

zatiaľčo pre  $i < k - 1$  použijeme strednú hodnotu  $E_i$ :

$$\begin{aligned} W_i(x) &= \{u_i \in U_i \mid \mathbf{E}_i f_i(x, v_i(x), z_i) \in X_{i+1}\}, \\ X_i &= \{x \in \mathbb{X}_i \mid W_i(x) \neq \emptyset\}. \end{aligned} \tag{5.46}$$

teda bude nám stačiť, že stratégia je prípustná v strednej hodnote, teda v akomsi priemernom prípade - nie nutne pre všetky hodnoty  $z_i$ .

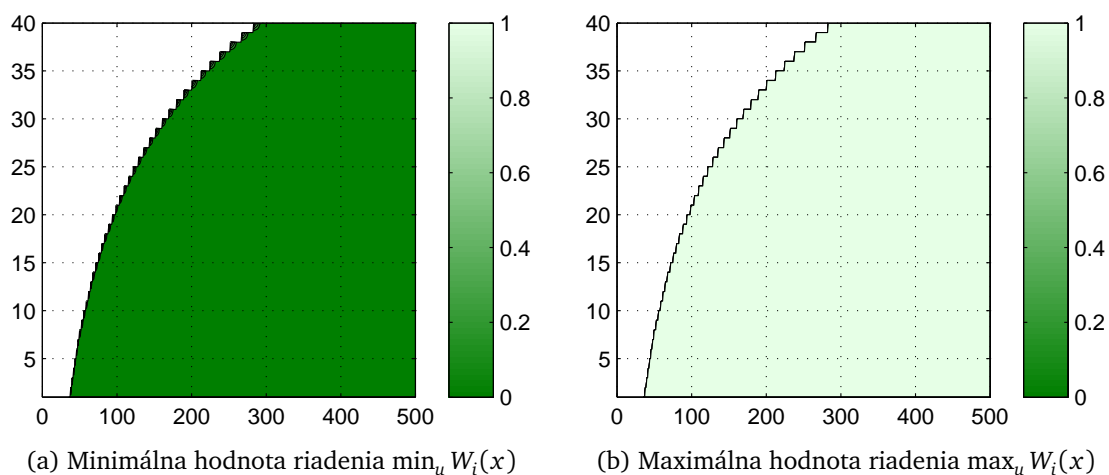
Podobne ako v predchádzajúcej kapitole môžeme vyjadriť dolné ohraničenie pre prípustné stavy  $x_i^{\text{MIN}}$ , v tomto prípade to bude:

$$x_{k-1}^{\text{MIN}} = \frac{\mu}{1 + \bar{z}_{k-1}},$$

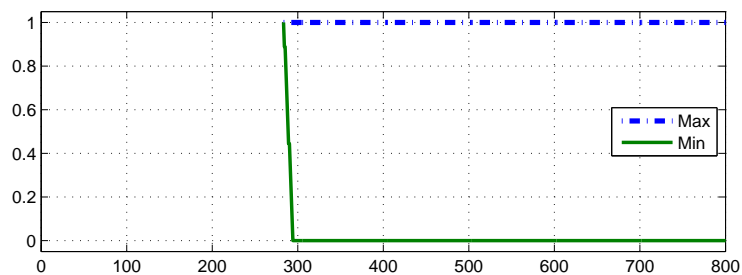
resp. pre  $i \in \mathcal{I}$

$$x_i^{\text{MIN}} = \frac{x_{i+1}^{\text{MIN}}}{1 + \bar{z}_i}.$$

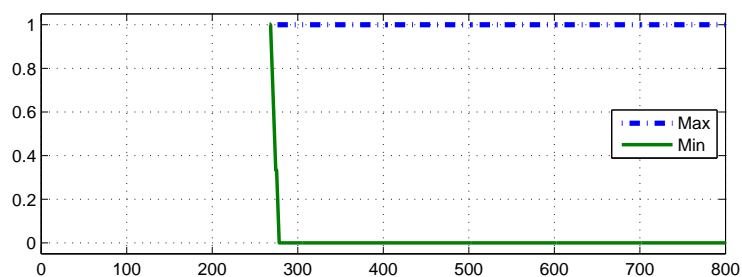
### 5.5. PODMIENKA NA KONCOVÝ STAV



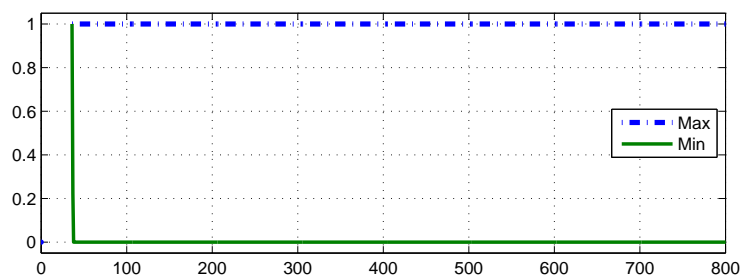
Obr. 5.13: Prípustné hodnoty riadenia vzhľadom na alternatívnu podmienku  $E[x_k|x_{k-1}] \geq \mu$



(a)  $t = 39 = k - 1$ , posledná etapa

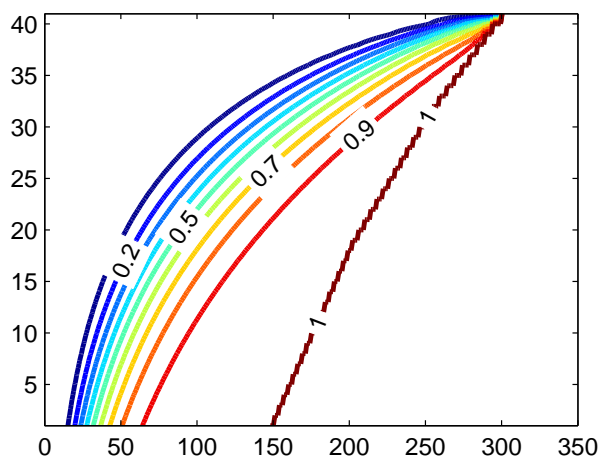


(b)  $t = 38$ , predposledná etapa



(c)  $t = 0$ , prvá etapa

Obr. 5.14: Alternatívna množina prípustných hodnôt riadenia vo vybraných časových etapách



Obr. 5.15: Úloha na maximalizáciu pravdepodobnosti splnenia podmienky  $x_k \geq \mu$ : hodnotová funkcia predstavuje maximálnu pravdepodobnosť v závislosti od aktuálneho stavu a času

Hoci už z analytického tvaru vyplýva, že oblasti prípustných stavov budú väčšie ako v predchádzajúcej podkapitole, znázorníme ich aj graficky: minimálne a maximálne riadenia na obrázku 5.13, resp. časové rezy na obrázku 5.14. V čase  $i = k - 1$  nám ostáva pôvodná množina prípustných riadení, množina v čase  $i = k - 2$  sa teraz na ňu veľmi podobá. S klesajúcim  $i$  sa množina prípustných stavov zväčšuje a s výnimkou pravého okraja môžeme používať celú škálu riadení  $u_i \in [0, 1]$ .

Teda zdá sa, že všetky „rozumné“ hodnoty riadenia sú povolené, oblasť prípustných stavov je podstatne väčšia (porovnajme s obrázkom 5.10), dokonca aj bod  $x_0 = 100$  je v čase 0 prípustný. Navyše máme veľkú voľnosť pri voľbe riadenia a teda má zmysel optimalizovať podľa účelovej funkcie. Možnostiam riešenia úlohy s podmienkou v tomto tvare sa venujeme v kapitole 5.5.4.

### 5.5.3 Minimálna pravdepodobnosť splnenia podmienky

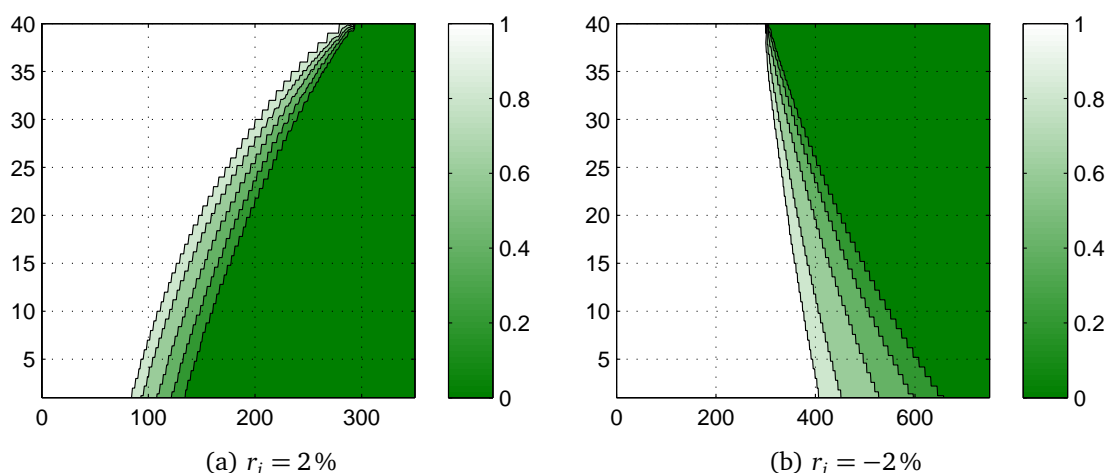
V časti 2.2.2 sme sa venovali ohraničeniu v tvare minimálnej pravdepodobnosti, teda požiadavke, aby pravdepodobnosť splnenia koncovej podmienky  $x_k \geq \mu$  bola prinajmenšom  $\beta$  (napr.  $\beta = 90\%$ ). Toto ohraničenie zapíšeme v tvare

$$P [x_k \geq \mu] \geq \beta. \quad (5.47)$$

Podľa definície 2.16 môžeme určiť množinu prípustných hodnôt riadenia spĺňajúcich podmienku (5.47), pričom  $\beta$  je voliteľný parameter. Túto množinu pre rôzne  $\beta$  získame riešením úlohy (5.1) s účelovou funkciou (5.32), teda úlohy na maximalizáciu pravdepodobnosti splnenia podmienky, pomocou RDP (2.14).

Týmto spôsobom môžeme určiť pravdepodobnosť splnenia podmienky v závislosti od aktuálneho času  $i$  a stavu  $x_i$ . Hodnotová funkcia  $V_i(x_i)$  úlohy (5.32) totiž predstavuje maximálnu hodnotu účelovej funkcie od času  $i$  po čas  $k$  so začiatkom v bode  $x_i$ , teda v našom prípade maximálnu pravdepodobnosť dosiahnutia požadovaného koncového stavu  $x_k \geq \mu$ .

Riešením tejto úlohy zároveň môžeme zistiť, aká je pravdepodobnosť splnenia podmienky  $x_k \geq \mu$ . To je zaujímavá otázka aj pri riešení úlohy s podmienkou na strednú hodnotu (2.6), aby sme vedeli, či je úloha pri zvolených parametroch  $x_0$  a  $\mu$  riešiteľná.



Obr. 5.16: Riadenie maximalizujúce pravdepodobnosť splnenia koncovej podmienky v závislosti od úrokovej sadzby

Zvoľme si teda počiatkový vklad  $x_0 = 100$  a požadovanú minimálnu hodnotu koncového stavu  $\mu = 300$ . Použijeme bezrizikovú mieru  $r_i = 2\%$ , rizikový výnos  $\bar{z}_i = 6\%$  p.a., ostatné parametre rovnako ako v časti 5.3.1. Pri riešení úlohy použijeme diskretnú numerickú schému.

Na obrázku 5.15 je znázornené numerické riešenie - hodnotová funkcia  $V_i(x_i)$ , čo je zároveň pravdepodobnosť splnenia podmienky v bode  $x_i$  a v čase  $i$ . Riadenie, ktoré maximalizuje túto pravdepodobnosť splnenia podmienky, uvádzame na obrázku 5.16a.

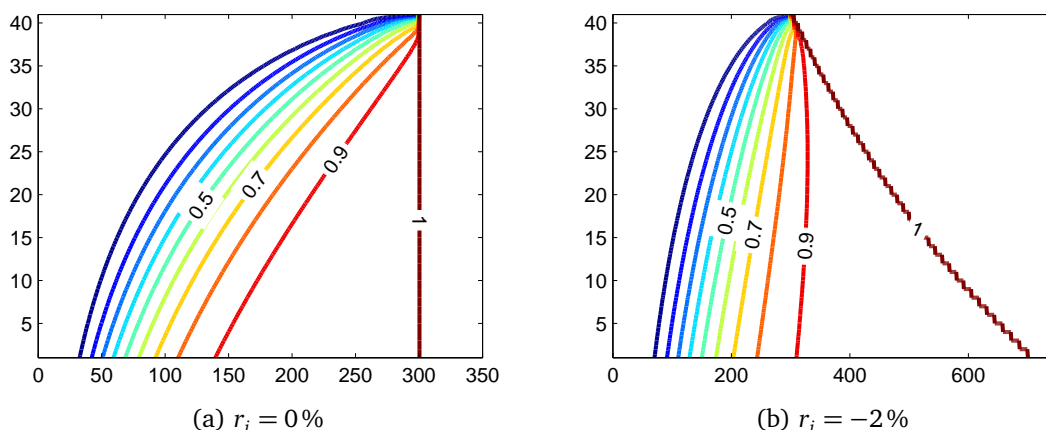
V súlade s výsledkami kapitoly 5.2.4 nám vyšla pre  $x_j \geq \bar{x}_j$  v jednotlivých časoch  $j < k$  pravdepodobnosť splnenia podmienky  $x_k \geq \mu$  rovná 1. V tomto prípade totiž pre  $x_j \geq \bar{x}_j$  voľba  $u_j = 0$  zaručí  $x_{j+1} \geq \bar{x}_{j+1}$ , teda aj 100%-tnú istotu splnenia koncovej podmienky.

Na obrázku 5.16a môžeme vidieť, že v oblasti 90% pravdepodobnosti splnenia podmienky sa postupne zvyšuje podiel rizikového fondu. V oblastiach s nižšou pravdepodobnosťou splnenia podmienky je už nevyhnutná voľba riadenia  $u = 1$ , teda investovať všetky prostriedky do rizikového fondu. Práve táto voľba totiž maximalizuje šancu na splnenie koncovej podmienky.

Počiatková hodnota  $x_0$  v čase 0 leží v oblasti medzi 90 a 100 percentnou pravdepodobnosťou dosiahnutia koncovej podmienky  $x_k \geq \mu$ , pravdepodobnosť splnenia podmienky v tvare (2.6) pri vhodnej voľbe riadenia je teda veľmi vysoká.

Pre zaujímavosť na obrázku 5.17 uvádzame aj pravdepodobnosti splnenia podmienky pri zmene úrokových sadzieb v prípadoch  $r_i = 0\%$  a  $r_i = -2\%$  (teda záporný reálny úrok). V týchto prípadoch vplyvom úrokovej sadzby zmenil sklon hranice jednotlivých oblastí. Optimálne riadenie pre  $r_i = -2\%$  uvádzame na obr. 5.16b.

**Poznámka 5.13** Pravdepodobnosti splnenia koncovej podmienky uvedené na grafoch platia iba za predpokladu, že budeme voliť optimálne riadenia, ktoré maximalizujú túto pravdepodobnosť. Ak zvolíme v niektorom časovom kroku iné riadenie, aj pravdepodobnosť splnenia podmienky môže byť a pravdepodobne bude iná (nižšia).



Obr. 5.17: Pravdepodobnosť splnenia podmienky v závislosti od úrokovej sadzby

### Prípustné hodnoty riadenia pri minimálnej pravdepodobnosti

Ako sme uviedli, zároveň s riešením úlohy (5.1) s účelovou funkciou (5.32) na maximalizáciu pravdepodobnosti splnenia koncovej podmienky sme zistili pravdepodobnosti splnenia podmienky (5.47) pre rôzne  $\beta$ . Môžeme teda definovať množiny hodnôt riadenia, resp. stavu, ktoré spĺňajú spĺňajúce podmienky (2.16), (2.17).

Tieto množiny sme graficky znázornili na obrázku 5.15, resp. obrázku 5.17 pre ďalšie hodnoty bezrizikovej úrokovej sadzby  $r_i$ . Analytické vyjadrenie týchto množín sme nehľadali, keďže tvar množín je odvodený pomocou numerického riešenia.

Na konkrétnom tvare oblasti si môžeme všimnúť, že množina prípustných riadení pre podmienku (5.47) sa podobá na množinu prípustných riadení podľa alternatívnej definície (2.10) s parametrom  $\beta \approx 50\%$ . Keďže podmienka na minimálnu pravdepodobnosť pripúšťa voľbu parametra  $\beta$ , takúto množinu prípustných hodnôt riadenia môžeme chápať ako ďalšie zovšeobecnenie alternatívnej definície pre podmienku (2.6).

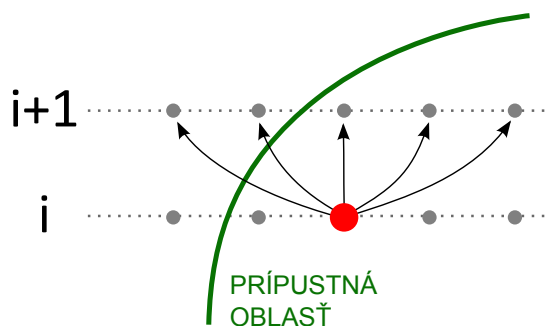
#### 5.5.4 Riešenie úlohy na ohraničenej oblasti

Uvažujme teraz prípustnú oblasť definovanú nasledovne: v čase  $i$  je stav  $x_i$  prípustný, ak  $x_i \geq x_i^{\text{MIN}}$ . Prítom dolné ohraničenia  $x_i^{\text{MIN}}$  berieme bez ujmy na všeobecnosti, teda zohľadňujú vybranú koncovú podmienku.

Predpokladajme, že v danom čase  $i$  a prípustnom stave  $x_i$  chceme podľa rovnice dynamického programovania vypočítať hodnotovú funkciu  $V_i(x_i)$ . Pri tomto výpočte však používame hodnotu  $V_{i+1}$  vo viacerých bodoch  $x_{i+1}^s$  pre jednotlivé možné realizácie náhodnej premennej  $z_i^s$  z intervalu  $[-1, 1]$ . Časť týchto bodov  $x_{i+1}^s$  môže ležať mimo prípustnej oblasti - viď ilustrácia na obrázku 5.18.

Pri voľbe  $u_i = 1$  budú ležať v maximálnom rozsahu  $x_{i+1}^s \in [0, 2x_i]$ , ak zvolíme menšie riadenie  $u_i$ , aj rozsah hodnôt bude menší. Pre  $u_i = 0$  to bude iba jediná hodnota  $x_{i+1} = x_i(1+r_i)$ . Extrémne hodnoty majú síce nízke pravdepodobnosti, pri výpočte strednej hodnoty ich však musíme zohľadniť.

Preto musíme riešiť otázku, ako definovať hodnotovú funkciu mimo množiny prípustných stavov. Pre  $x < x_i^{\text{MIN}}$  v danom čase  $i$  môžeme podľa [16] položiť  $V_i(x) \equiv -\infty$  (resp.  $+\infty$  pre



Obr. 5.18: Riešenie RDP na ohraničenej prípustnej oblasti

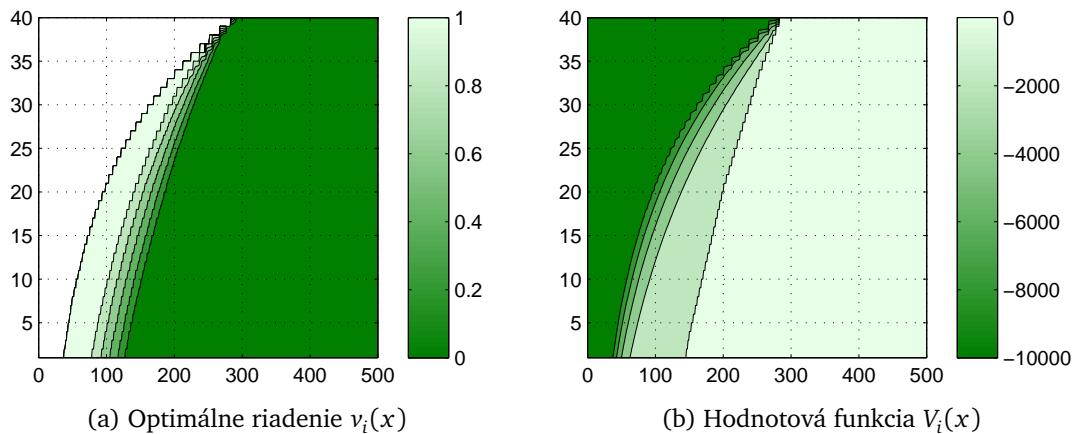
úlohu na min), tým pádom sa budeme vyhýbať dosiahnutiu stavu mimo prípustnej oblasti.

V skutočnosti to nie je také jednoduché, aby sme sa vyhli započítaniu  $V_{i+1}(x_{i+1}) = -\infty$ , musíme zvoliť veľmi konzervatívne riadenie  $u_i \rightarrow 0$ , ktoré bude spĺňať  $x_{i+1}^s \geq x_{i+1}^{\text{MIN}}$  pre všetky  $s$  a teda  $V_{i+1}(x_{i+1}^s)$  aj  $V_i(x_i)$  budú konečné. Ak by totiž pre nejaké  $s^*$  bolo  $x_{i+1}^{s^*} < x_{i+1}^{\text{MIN}}$ , tak  $V_{i+1}(x_{i+1}^{s^*}) = -\infty$  a potom aj  $V_i(x_i)$  bude  $-\infty$ . Tým pádom  $x_i$  bude de facto neprípustné a táto neprípustnosť sa bude ďalej rozširovať.

Zhrňme si teda možné riešenia uvedenej situácie:

1. buď položíme  $V_i(x_i) = -\infty$  pre  $x_i \geq x_i^{\text{MIN}}$ , tým pádom
  - ak riadenie  $u_i = 0$  bude prípustné, teda  $x_i^{\text{MIN}}(1 + r_i) \geq x_{i+1}^{\text{MIN}}$ , tak na okraji oblasti sa bude vyberať veľmi konzervatívne riadenie - také, aby  $x_{i+1}$  ostalo v prípustnej oblasti, teda ako v podkapitole 5.5.1, takéto riešenie sa však nezdá dostatočné,
  - v opačnom prípade konzervatívne riadenie nezaručí udržanie sa v prípustnej oblasti, v niektorých bodoch  $x$  nebude existovať konečné  $V_i(x)$ . Túto možnosť rozoberáme v časti 5.5.2,
2. alebo bude prípustná oblasť dostatočne veľká, teda  $x_i^{\text{MIN}} \equiv 0$ , čo je ekvivalentné riešeniu úlohy bez koncovej podmienky,
3. alebo budeme uvažovať  $V_i(x)$  konečné,
  - teda  $V_i(x)$  budeme počítať aj mimo prípustnej oblasti. Otvorenou otázkou zostáva, aké riadenie máme pri výpočte voliť, keďže prípustné riadenie neexistuje. Či vziať optimálne spomedzi všetkých hodnôt riadenia, maximálnu hodnotu alebo riadenie maximalizujúce pravdepodobnosť splnenia podmienky.
  - resp. mimo prípustnej oblasti namiesto  $-\infty$  použijeme dostatočne veľkú konštantu  $C$ , ktorú sčasti vykompenzuje nízka pravdepodobnosť príslušných stavov. Tým pádom môžeme numericky hľadať optimálne riadenie.

Takže pokiaľ budeme riešiť úlohu s ohraničenou množinou prípustných stavov, buď bude táto oblasť príliš malá a teda riešenie nebude prakticky použiteľné (konzervatívne na okraji, viď



Obr. 5.19: Riešenie úlohy s konštantnou účelovou funkciou na ohraničenej oblasti  $\mathcal{A}$

5.5.1), alebo z tejto prípustnej oblasti môžeme ľahko vypadnúť a teda prípustné riadenie nebude existovať (časť 5.5.2).

Preto musíme hľadať iné spôsoby riešenia stochastickej úlohy s podmienkou na koncový stav. Na základe uvedených argumentov sa zdá byť najvýhodnejšie definovať pre  $x$  mimo prípustnej oblasti  $V_i(x) = -C$ , kde  $C$  bude dostatočne veľká konštanta. Pre úlohy na ohraničenej oblasti budeme riešiť týmto spôsobom.

### Výsledky

Označme si preto nasledujúce množiny prípustných hodnôt riadenia a stavu:

- $\mathcal{A}$ : Alternatívna definícia prípustných riadení pre  $E[x_k|x_{k-1}] \geq \mu$  podľa (5.46)
- $\mathcal{B}$ : Oblasť spĺňajúca podmienku (5.47) s pravdepodobnosťou  $\beta = 90\%$
- $\mathcal{C}$ : Pôvodná definícia prípustných riadení pre  $E[x_k|x_{k-1}] \geq \mu$  podľa (5.38), (5.39)

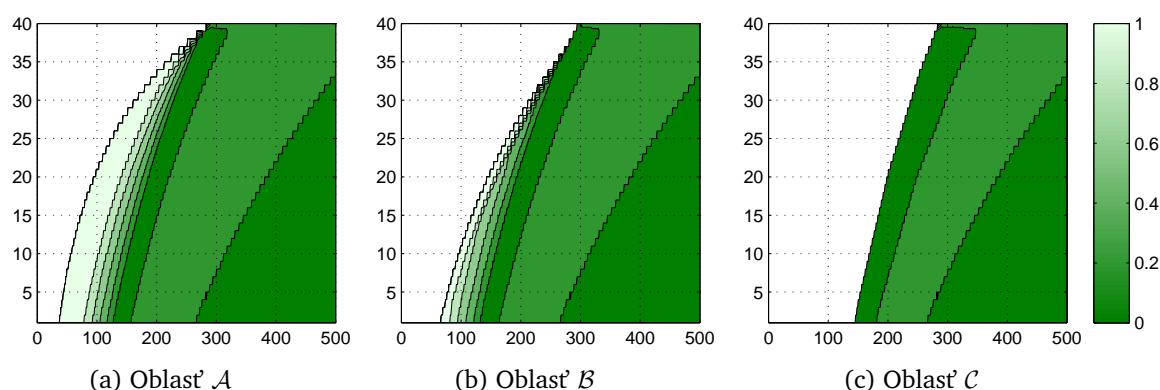
Na týchto oblastiach budeme numericky riešiť úlohu (5.1) s koncovou podmienkou s rôznymi účelovými funkciami (maximalizácia očakávanej užitočnosti a minimalizácia rizika).

Začnime však najjednoduchším prípadom – maximalizáciou konštanty na oblasti  $\mathcal{A}$ , teda v podstate hľadaním prípustného riešenia, ktoré spĺňa všetky ohraničenia. Tým, že účelová funkcia je konštantná, nebude mať teda vplyv na výsledné riešenie.

Hodnotu konštanty  $C$ , teda hodnotovú funkciu  $V_i(x_i)$  pre  $x_i$  mimo prípustnej oblasti  $X_i$ , sme zvolili ako  $V_i(x_i) = C = 10\,000$ . Voľba konkrétnej konštanty zrejme má vplyv na tvar optimálneho riadenia, avšak pre dostatočne veľké  $C \gg 1$  je tento vplyv malý, preto sa ním podrobnejšie nezaobráame.

Riešenie sme znázornili na obrázku 5.19: jednak samotné optimálne riadenie (v tomto prípade biela farba označuje oblasť, ktorá nie je prípustná - neexistuje tam žiadne riadenie) a tiež hodnotovú funkciu. Optimálne riadenie je rovné 0 na oblasti s istotou splnenia podmienky, resp. rastie až k 100% podielu rizikového fondu na hranici prípustnej oblasti.

Taktiež si môžeme všimnúť, že hodnotová funkcia sa mimo prípustnej oblasti rovná  $-C$ , teda  $-10\,000$ , pokiaľ na oblasti so 100% pravdepodobnosťou splnenia podmienky  $x_k \geq \mu$  je



Obr. 5.20: Maximalizácia užitočnosti na ohraničenej oblasti

rovná 0 (čo je optimálna hodnota účelovej funkcie). Na okraji oblasti hodnotová funkcia nevyjadruje optimálnu hodnotu účelovej funkcie, ale optimálnu hodnotu účelovej funkcie zníženú o riziko vyplývajúce z možného vypadnutia z ohraničenej oblasti.

V ďalších numerických príkladoch sme na oblastiach  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  postupne riešili dve úlohy: maximalizáciu exponenciálnej užitočnosti koncového stavu a minimalizáciu rizika CVaRD (túto úlohu podrobnejšie popisujeme v kapitole 5.6.2). Optimálne riadenia sme zobrazili na obrázkoch 5.20 a 5.21.

Môžeme si všimnúť, že riešenie maximalizácie užitočnosti na ohraničenej oblasti sa podobá na riešenie rovnakej úlohy na neohraničenej oblasti na obr. 5.3a, odlišuje sa iba v blízkosti hranice prípustnej oblasti, kde sa s ohľadom na možné vypadnutie volí rizikovejšie riadenie. Toto je zrejme spôsobené konštantou  $-C$  mimo prípustnej oblasti.

Porovnaním obrázkov pre jednotlivé oblasti môžeme spozorovať, že ide v podstate o rovnaké riešenie, ktoré je iba „orezané“ tvarom danej oblasti. Oblasť  $\mathcal{A}$  je najväčšia, oblasť  $\mathcal{B}$  menšia a oblasť  $\mathcal{C}$  najmenšia, sú v podstate vnorené do seba (nie úplne presne, v okrajových bodoch môžu byť mierne odchýlky).

Táto vlastnosť sa týka aj riešenia úlohy na minimalizáciu rizika - na obrázku 5.21 vidíme, že riešenia sa tiež líšia iba orezaním do tvaru oblasti. Navyše ak porovnáme riešenia oboch úloh pre jednotlivé oblasti, tak si môžeme všimnúť, že v blízkosti hranice prípustnej oblasti sú riadenia veľmi podobné, priam totožné. Tento jav súvisí s veľkým vplyvom konštanty  $C$  na optimálne riadenie.

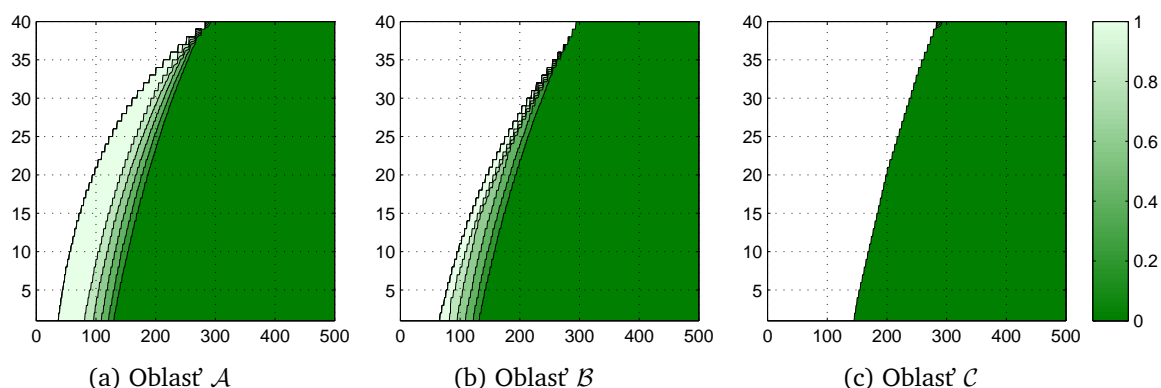
## Diskusia

Na tomto mieste môžeme zhrnúť úspešnosť riešenia úlohy s koncovou podmienkou pomocou ohraničenej množiny prípustných riadení. Na jednej strane kladne hodnotíme fakt, že týmto spôsobom môžeme numericky riešiť úlohy na rôznych oblastiach - či už použijeme pôvodnú alebo alternatívnu definíciu množiny prípustných riadení.

Na druhej strane má tento prístup aj viaceré nevýhody. Napríklad môžeme pripomenúť príliš malú prípustnú oblasť v prípade použitia definície z časti 5.5.1, kde nie sú prípustné stavy, ktoré by intuitívne mali byť.

S tým súvisí ďalšia nevýhoda riešenia úlohy na ohraničenej oblasti: čo v prípade, že vplyvom





Obr. 5.21: Minimalizácia rizika na ohraničenej oblasti

nízkeho náhodného výnosu rizikového fondu (resp. straty) z oblasti vypadneme? Aké riadenie máme zvoliť, pokiaľ sa dostaneme do stavu, v ktorom žiadne prípustné riadenie neexistuje?

Totíž keď sa vrátíme k reálnemu problému, ktorý riešime: ťažko si možno predstaviť, že ak napr. po 5 rokoch sporenia náhodou vypadneme z prípustnej oblasti, tak zvyšných 35 rokov zahodíme a nebudeme ďalej sporiť. Chceme pokračovať, „nejaké“ riadenie preto zvolíme. Riešením môže byť zníženie požadovanej cieľovej hodnoty  $\mu$  a nový výpočet optimálneho riadenia, to je však už riešenie úlohy s novými parametrami, ktoré nám nezaručí splnenie pôvodne požadovanej hodnoty  $\mu$ . Potrebujeme vedieť, aké riadenie musíme zvoliť, aby nám umožnilo vrátiť sa späť do prípustnej oblasti pre pôvodne zvolenú hodnotu  $\mu$ .

Ďalší problém je v tom, že bez ohľadu na prípustnú oblasť, riešenia sú v podstate rovnaké, odlišujú sa iba tvarom prípustnej oblasti. Z toho vyplýva, že môže byť výhodnejšie riešiť úlohu na dostatočne veľkej, ideálne neohraničenej oblasti. Splnenie podmienky, resp. jej aspoň čiastočné splnenie zabezpečíme pridaním špeciálneho člena do účelovej funkcie, tzv. penalizačnej funkcie, ktorá vyváži účelovú funkciu a umožní nám hľadať kompromisné riešenie. Tento spôsob rozoberáme v nasledujúcej časti.

## 5.6 Úloha s penalizáciou

V predchádzajúcich kapitolách sme sa venovali riešeniu úlohy (5.1) s koncovými podmienkami (2.6), resp. (2.11). Ako analyzujeme v kapitole 5.5.4, v prípade riešenia úlohy s ohraničenou množinou prípustných riadení a stavov sa počas behu procesu môže stať, že nový stav nebude patriť do množiny prípustných stavov. S týmto problémom sa treba vysporiadať. Ak totiž aktuálna hodnota stavu nepatrí do množiny prípustných stavov, nemáme určené, aké riadenie treba zvoliť – žiadne riadenie totiž nie je prípustné.

Existuje však aj alternatívne riešenie úlohy s koncovou podmienkou: požadovanú podmienku môžeme presunúť do účelovej funkcie. Týmto spôsobom riešenia sme sa podrobne zaoberali v časti 2.3, v tejto kapitole ho aplikujeme priamo na úlohu o alokácii prostriedkov v portfóliu (5.1) s účelovými funkciami maximalizácia užitočnosti (5.3), resp. minimalizácia rizika (5.26). Penalizačná funkcia  $\lambda$  s váhou  $\delta$  podľa definície 2.9 od účelovej funkcie odpočíta určitú hodnotu v prípade, že podmienka  $x_k \geq \mu$  nie je splnená. Pri numerickom riešení budeme používať najmä konštantnú penalizáciu (2.19).

### 5.6.1 Maximalizácia užitočnosti

V nasledujúcej kapitole chceme overiť vhodnosť použitia úlohy s penalizáciou pri hľadaní numerického riešenia. Očakávame, že takéto riešenie bude vyvážené zohľadňovať účelovú funkciu aj koncovú podmienku. Metódu aplikujeme najskôr na jednoduchšiu verziu úlohy o portfóliu - maximalizáciu užitočnosti koncového stavu.

Funkcia užitočnosti je konkávna, pri úlohe bez ohraničení teda zohľadňujeme aj riziko vyplývajúce z náhodného výnosu. Optimálne riadenie je preto v prípade väčšieho objemu prostriedkov konzervatívnejšie. Pokiaľ však do účelovej funkcie doplníme penalizačný člen, v niektorých časových periódach  $i$  a stavoch  $x_i$  musíme zvoliť vyšší podiel rizikového fondu, aby sme zvýšili pravdepodobnosť splnenia koncovej podmienky, resp. znížili pravdepodobnosť uplatnenia penalizácie.

Zmena nastane hlavne v tých prípadoch, kde rizikovejším riadením môžeme ľahko zvýšiť pravdepodobnosť splnenia podmienky. Konkrétny vplyv penalizačného člena na výsledné riešenie však závisí od jeho váhy  $\delta$ .

Pri numerickom riešení použijeme exponenciálnu funkciu užitočnosti v tvare

$$U(x) = 1 - \exp(-x/25),$$

konštantnú penalizačnú funkciu definovanú rovnicou (2.19) a cieľovú hodnotu stavu  $\mu = 300$ . Ďalšie parametre sú rovnaké ako v časti 5.3.1.

Na obrázku 5.22 sme znázornili optimálne riadenie v závislosti od váhy penalizácie. Začíname voľbou  $\delta = 0$ , teda úlohou bez penalizácie, ktorá je ekvivalentná úlohe bez ohraničení. Tým pádom môžeme ľahko vizuálne porovnať efekt penalizácie.

Keďže účelová funkcia samotná - exponenciálna funkcia užitočnosti nadobúda iba hodnoty v rozsahu 0 až 1, na jej vyváženie stačí voliť malé hodnoty  $\delta$  v intervale 0 až 1. Voľbou príliš veľkej váhy penalizačnej funkcie by sme úplne potlačili funkciu užitočnosti.

Penalizácia sa viditeľne prejaví už pri voľbe  $\delta = 5 \cdot 10^{-5}$  na obr. 5.22b v oblasti medzi stavmi 200 a 300 v časových periódach 35–40. Voľbou väčšieho  $\delta$  je jej vplyv výraznejší, ako môžeme

vidieť na ďalších obrázkoch, riadenie je rizikovejšie na väčšej oblasti. Pri voľbe  $\delta = 0,01$  až 1 na obr. 5.22g a 5.22h sa optimálne riadenie už príliš nemení, váhu preto netreba ďalej zvyšovať.

Všimnime si napríklad tmavozelený pás začínajúci v čase 0 a  $x_0 \approx 150$ , v tejto oblasti máme voľbou  $u_i = 0$  zaručený výnos 2% a splnenie podmienky  $x_k \geq \mu$ . Naopak, pri  $x \approx 80$  začína biely pás, teda oblasť, v ktorej maximalizujeme šancu splniť podmienku voľbou rizikového riadenia s vyšším výnosom. Pre veľké hodnoty  $x$  od cca 200 v čase  $i=0$  a 300 v čase  $i = k - 1$  sa riadenie nemení oproti prípadu bez penalizácie, pretože podmienka bude s veľkou pravdepodobnosťou splnená a teda penalizácia nemá vplyv na túto časť riešenia.

Voľbu váhy musíme určiť podľa preferencií investora, teda či preferuje menej rizikovú investíciu, alebo splnenie koncovkej podmienky. Vhodná voľba môže byť napr.  $\delta = 0,001$ . Celkovo však môžeme zhrnúť, že úloha s penalizáciou vyvážené reflektuje oba ciele investora - dosiahnutie požadovaného výnosu aj maximalizáciu užitočnosti.

### 5.6.2 Minimalizácia rizika

Aby sme mohli použiť penalizáciu v úlohe na minimalizáciu rizika, oproti rovnici (2.18) musíme urobiť dve úpravy. Použijeme totiž úlohu na minimum, penalizáciu teda musíme pripočítať, čo je ekvivalent odpočítania penalizačného faktora v maximalizačnej úlohe. Druhá úprava sa týka samotnej účelovej funkcie, kde namiesto funkcie konečného stavu musíme použiť viacperiódovú rizikovú mieru CVaRD definovanú (5.25).

Účelovú funkciu úlohy teda sformulujeme nasledovne:

$$\min E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} CVaRD_{\alpha}(x_{i+1} | x_i) + \delta \cdot \Lambda(x_k) \right] \quad (5.48)$$

Parametre miery CVaR zvolíme  $\alpha = 0.05$  a jednotkové váhy jednotlivých periód  $c_i \equiv 1$ . Ide o stochastickú úlohu s účelovou funkciou v tzv. Bolzovom tvare, teda okrem straty v jednotlivých periódach zahŕňa aj funkciu koncového stavu. Ostatné parametre definujeme rovnako ako v 5.3.1.

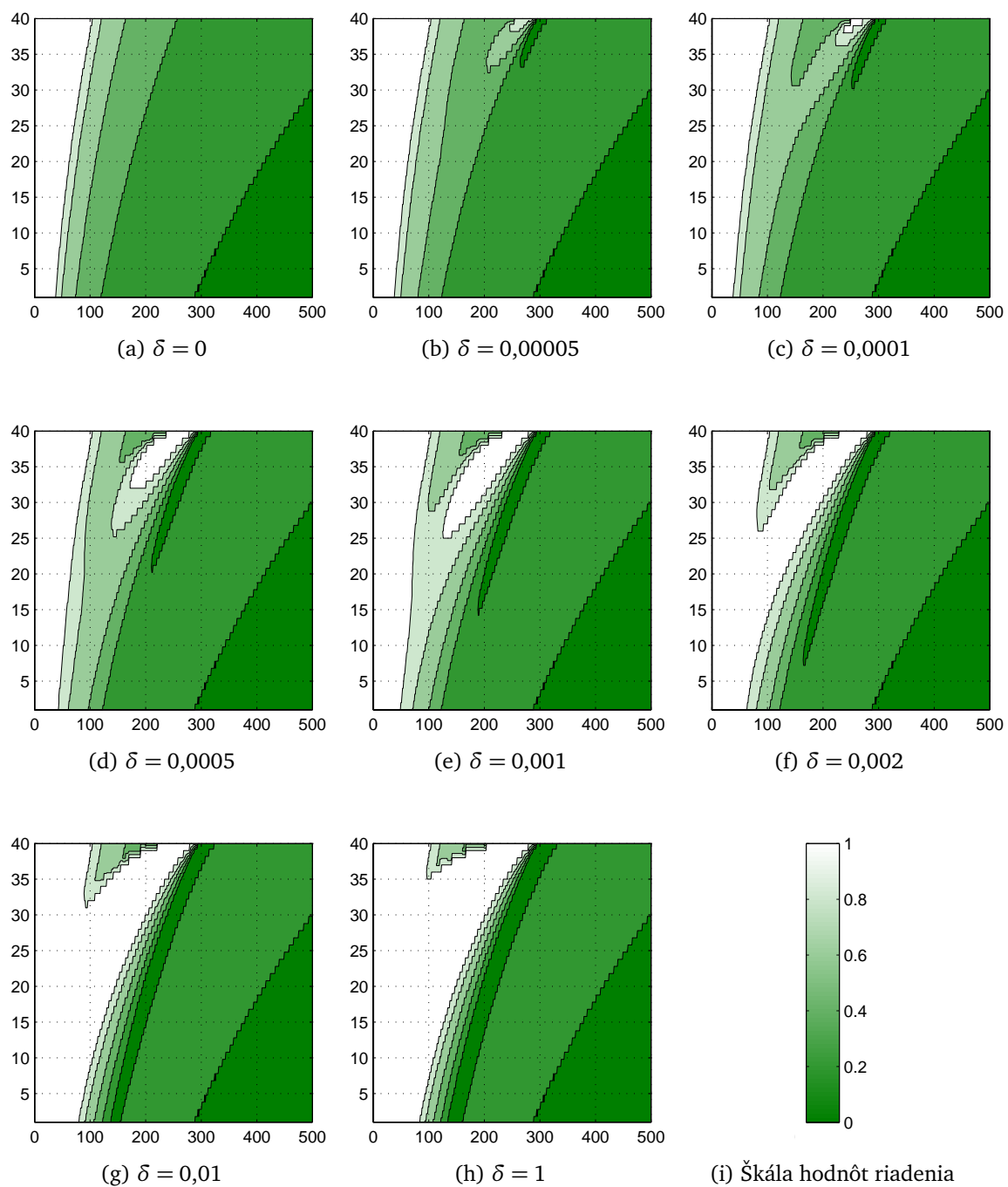
V tomto prípade účelová funkcia CVaRD nadobúda väčšie hodnoty v jednotkách investovaných prostriedkov, v každej z  $k = 40$  časových etáp. Preto aj hodnotu parametra  $\delta$  musíme voliť väčšiu ako v predchádzajúcom prípade,  $\delta \gg 1$ , aby mala penalizácia šancu vyvážiť prvý člen účelovej funkcie.

Opäť sme použili konštantnú penalizačnú funkciu. Výsledky sú na 5.23. Voľba  $\delta = 0$  opäť znamená úlohu bez penalizačného faktora, teda úlohu minimalizácie rizika bez akýchkoľvek ohraničení, takže v súlade s časťou 5.2.3 bude riešením identicky nulové riadenie.

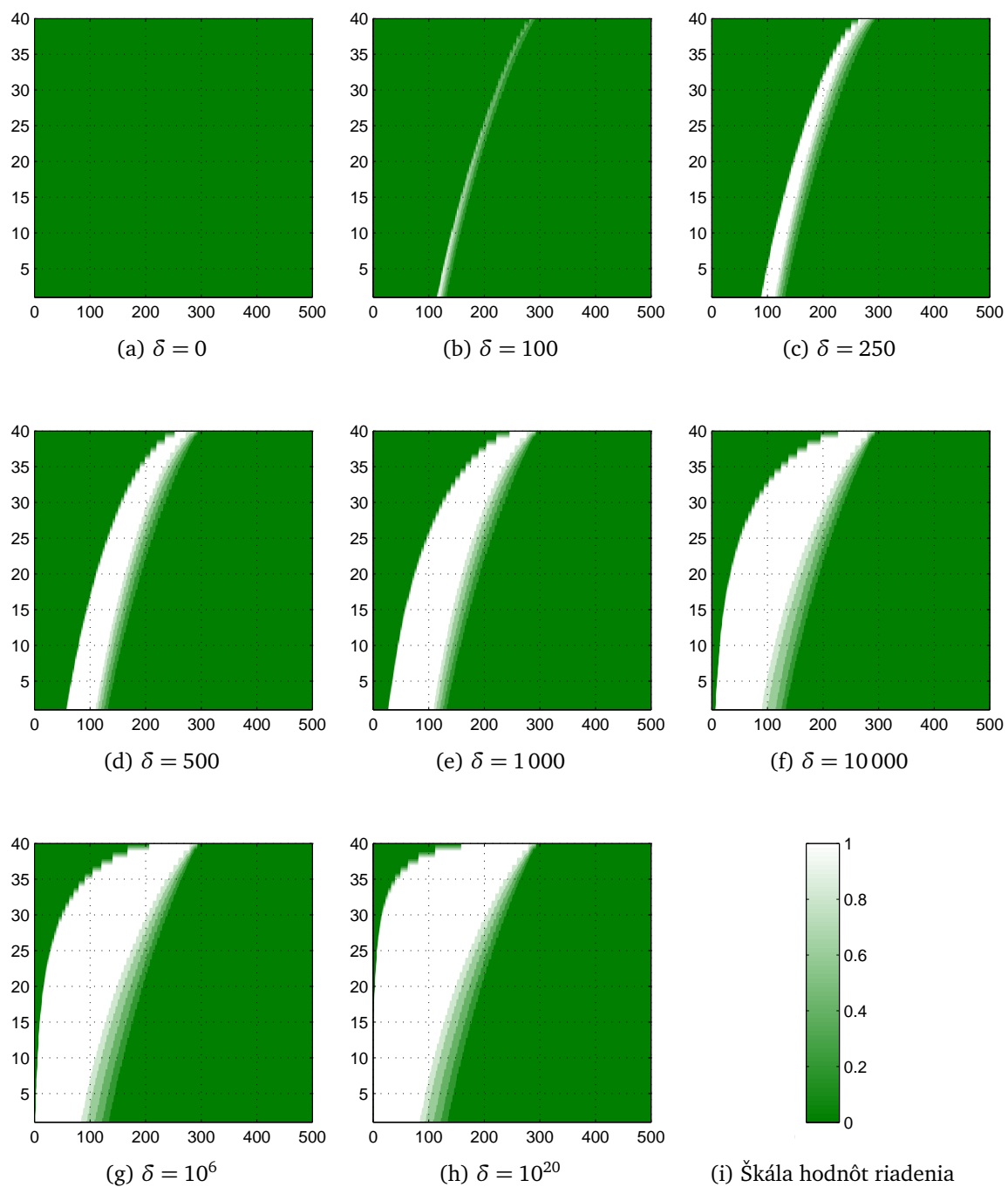
Zväčšovaním hodnoty  $\delta$  sa postupne zväčšuje oblasť, v ktorej volíme rizikové riadenia. Ide o oblasť, v ktorej môžeme s relatívne malým rizikom dosiahnuť splnenie koncovkej podmienky.

Všimnime si však zaujímavý rozdiel oproti predchádzajúcemu prípadu. V prípade maximalizácie užitočnosti na obr. 5.22 sa volila celá škála hodnôt optimálneho riadenia, kým pri minimalizácii rizika sa dochádza k voľbe len krajných hodnôt  $u_i \in \{0, 1\}$ , prechod medzi nimi je rýchly, vnútorné hodnoty intervalu  $[0, 1]$  sú optimálne iba na úzkom rozhraní medzi krajnými hodnotami. Táto vlastnosť súvisí s tvarom účelovej funkcie: táto je približne po častiach lineárna, preto sa optimálne riešenie nadobúda v krajných bodoch intervalu  $\mathbb{U}_i$ .

## 5.6. ÚLOHA S PENALIZÁCIOU



Obr. 5.22: Maximalizácia užitočnosti s penalizáciou: optimálne riadenie v závislosti od váhy penalizácie  $\delta$



Obr. 5.23: Minimalizácia rizika s penalizáciou: optimálne riadenie v závislosti od váhy penalizácie  $\delta$

**Porovnanie rôznych penalizačných funkcií**

Ako sme už naznačili, nie len váha  $\delta$ , ale aj samotný tvar penalizačnej funkcie má vplyv na výsledné optimálne riadenie. V predchádzajúcom texte sme diskutovali konštantnú penalizáciu (2.19), ktorá dáva rovnakú váhu všetkým  $x_k$ , ktoré nespĺňajú koncovú podmienku  $x_k \geq \mu$ . Nezohľadňuje teda vzdialenosť  $x_k$  od cieľovej hodnoty  $\mu$ .

Na obrázkoch 5.24, 5.25 a 5.26 zobrazujeme riešenia, pri ktorých sme použili ďalšie tvary penalizačnej funkcie. V prípade lineárnej penalizácie (2.20) je pre  $x_k \ll \mu$  podstatne väčšia penalizácia ako pre  $x_k \rightarrow \mu^-$ , chýba tak skok v okolí bodu  $x_k = \mu$ . Z tohto dôvodu sa s rastúcim  $\delta$  postupne rozširuje oblasť rizikového riadenia.

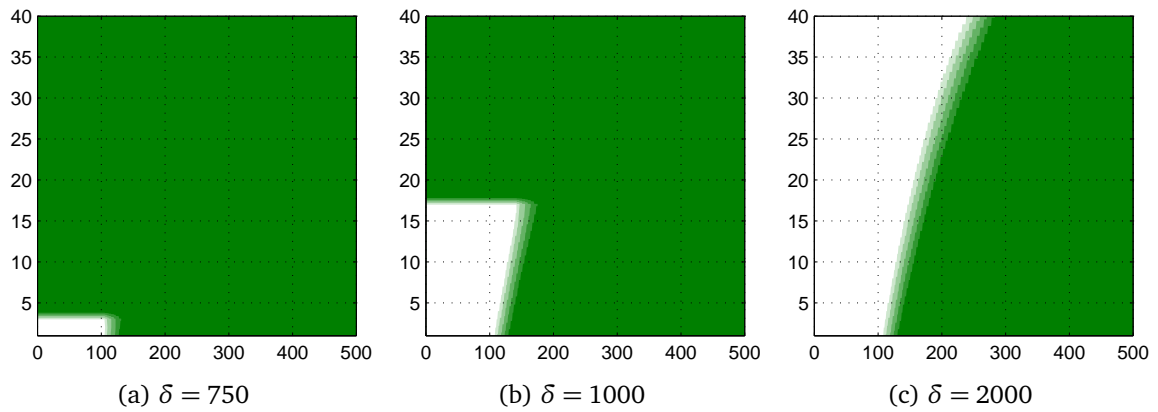
Lineárno-konštantná penalizácia (2.22) je kombináciou lineárnej a konštantnej kombinácie. Teda obsahuje skok v bode  $x_k = \mu$  (konštantný penalizačný člen  $1/2$  pri nesplnení podmienky), zároveň je penalizácia úmerná vzdialenosti od cieľovej hodnoty. Aj tvar riešenia je preto podobný konštantnej penalizácii.

Kvadratická penalizácia (2.21) dáva praveľký dôraz na veľké prekročenia, teda pre  $x_k \ll \mu$ . Podobne ako v prípade lineárnej funkcie nie je skok v okolí bodu  $x_k = \mu$ , keďže penalizácia pre  $x_k \rightarrow \mu^-$  je veľmi malá. Z tohto dôvodu je v prípade kvadratickej penalizácie optimálne voliť rizikové riadenie pre nízke hodnoty stavu, pravdepodobnosť dosiahnutia  $x_k \geq \mu$  sa neberie do úvahy.

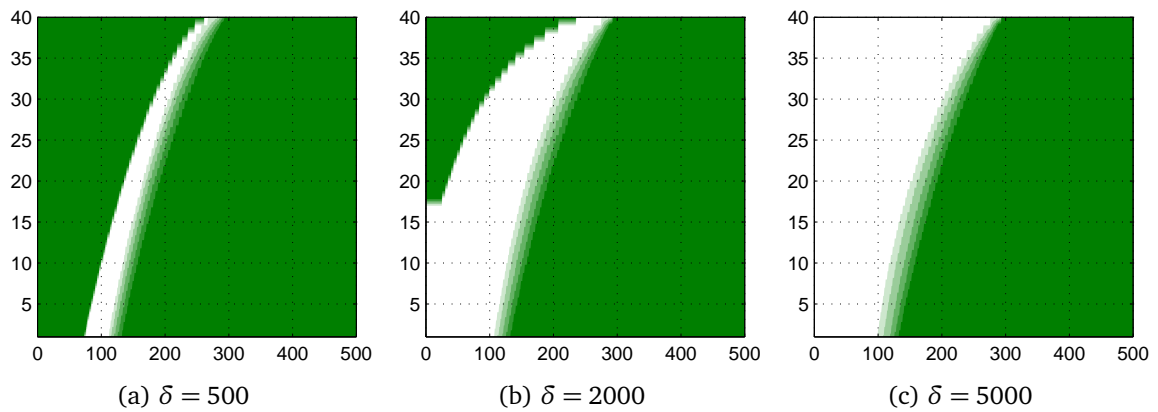
Opäť však platí, že vhodnú penalizáciu si musí vybrať investor podľa vlastných preferencií. V ďalšej časti porovnáme riešenia úloh s rôznymi penalizáciami prostredníctvom Monte-Carlo simulácií.

**Záver**

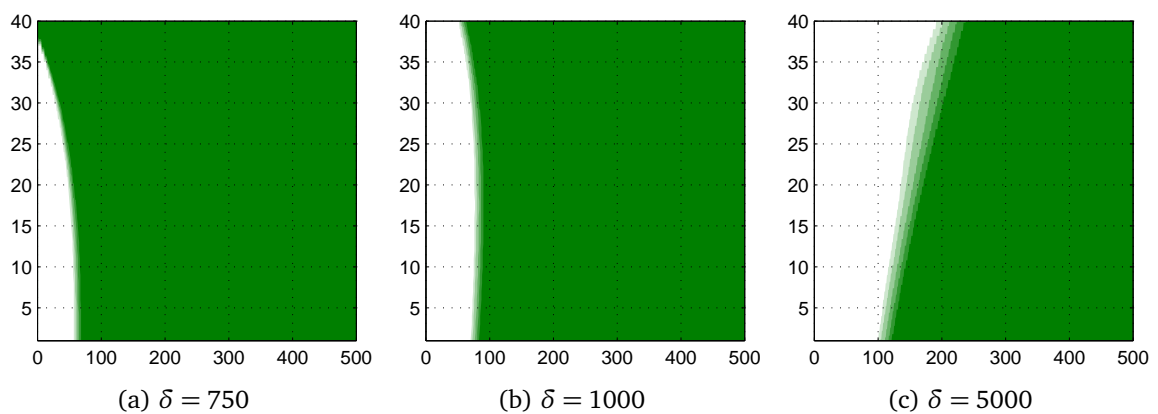
Ako sme ukázali, pridať do účelovej funkcie penalizačný člen je efektívny spôsob riešenia úlohy s koncovou podmienkou. Hlavnou výhodou je v podstate neohraničená oblasť prípustných stavov, teda nemôže sa nám stať, že sa dostaneme do situácie, v ktorej nebude existovať prípustné riadenie. Na druhej strane voľbou váhy môže investor určiť svoju preferenciu ohľadom oboch cieľov, ktoré sa snaží naplniť, teda aj hľadať kompromisné riešenia.



Obr. 5.24: Lineárna penalizácia v úlohe na minimalizáciu rizika, rôzne váhy



Obr. 5.25: Lineárno-konštantná penalizácia v úlohe na minimalizáciu rizika, rôzne váhy penalizácie



Obr. 5.26: Kvadratická penalizácia v úlohe na minimalizáciu rizika, rôzne váhy

## 5.7 Simulácie a porovnanie riešení

V predchádzajúcich častiach sme rôznymi spôsobmi našli rôzne riešenia - optimálne riadenia pre rôzne verzie úlohy o alokácii prostriedkov v portfóliu medzi rizikovým a bezrizikovým fondom. Nás však zaujíma, ktoré z týchto riešení je najlepšie. Čo však znamená „najlepšie“? Potenciálneho investora môžu zaujímať nasledujúce otázky:

- Aká je priemerná hodnota nasporenej sumy na konci sporenia, resp. jej štandardná odchýlka (riziko)?
- Aká je štatisticky pravdepodobnosť splnenia koncovkej podmienky  $x_k \geq \mu$ ?
- Ako sa priemerne vyvíja optimálne riadenie počas doby sporenia?
- V prípade ohraničenej oblasti: aká je pravdepodobnosť, že z nej vypadneme?
- V prípade penalizácie: aký tvar a akú váhu treba zvoliť?

Z týchto otázok vyplýva potreba porovnávať jednotlivé optimálne riešenia, resp. použité váhy penalizačných funkcií.

Predpokladajme, že máme k dispozícii numericky vypočítané optimálne riadenie v každom čase  $i$  a pre každú aktuálnu hodnotu investície  $x_i$ . Priamo ich porovnávať nemôžeme, nemá totiž zmysel počítať, koľkokrát sa v nich vyskytuje aká hodnota riadenia alebo ako vyzerá priemerné riadenie. Nevieme totiž povedať, ktoré hodnoty riadenia sa v praxi naozaj používajú.

Môžeme však urobiť Monte Carlo simuláciu reálneho priebehu: hodnoty riadenia v jednotlivých etapách zvolíme podľa aktuálneho stavu prostriedkov použitím vypočítanej optimálnej stratégie. Pomocou 50 000 simulácií tak dokážeme pomerne spoľahlivo určiť štatistické rozdelenie koncového stavu, prípadne zodpovedať aj ďalšie zaujímavé otázky.

Začneme s určeným počiatočným množstvom kapitálu  $x_0$ , hodnotu riadenia zvolíme podľa predpisu - zvolenej optimálnej spätnej väzby  $v_0(x_0)$  a zo stavovej rovnice dopočítame novú hodnotu majetku v závislosti od náhodne vygenerovaného výnosu rizikového fondu. Voľbu riadenia a výpočet nového stavu zopakujeme pre  $k$  etáp, čím sa dostaneme do stavu  $x_k$ .

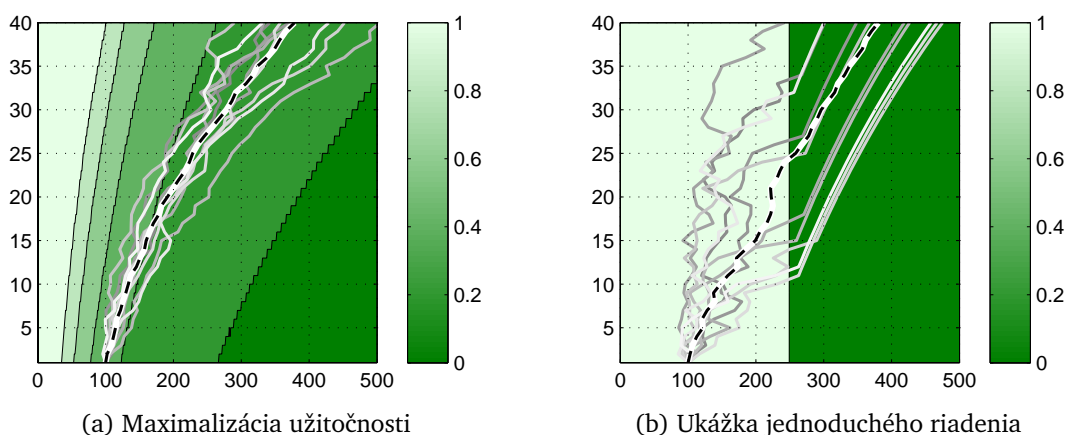
Koncový stav  $x_k$ , príp. celý vývoj hodnoty majetku  $x_i$  v závislosti od času (trajektóriu) si uložíme a pokračujeme ďalšou simuláciou. Na záver ľahko vypočítame priemernú hodnotu koncového stavu, priemernú hodnotu riadenia, ich štandardné odchýlky a pravdepodobnosť splnenia podmienky  $x_k \geq \mu$ .

Takto sme nasimulovali niekoľko možných vývojov hodnoty majetku (trajektórií) a zobrazili ich na grafe 5.27a. Všetky začínajú v štartovacom bode  $x_0 = 100$ . Náhodný výnos rizikového fondu generujeme z normálneho rozdelenia s rovnakými parametrami, ako boli použité pri výpočte, teda stredná hodnota  $\bar{z}_i = 6\%$ ,  $\sigma = 0,1$ . Výnos bezrizikového fondu sme zvolili  $r_i = 2\%$ . Parametre sú rovnaké, ako sme používali pri výpočte riadení, podrobnejšie v časti 5.3.1.

Ako demonštráciu správnosti výpočtu trajektórií sme na obr. 5.27b zobrazili trajektórie aj v prípade jednoduchého (neoptimálneho) riadenia:

$$v_i(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 250, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$





Obr. 5.27: Ukážka simulácie 10 náhodných trajektórií. Čierna prerušovaná čiara predstavuje priemernú hodnotu zobrazených trajektórií.

Ako môžeme vidieť, v ľavej časti volíme rizikový fond, tým pádom sa trajektórie v čase vyvíjajú náhodne, kým v pravej časti (od hodnoty 250) idú všetky prostriedky do bezrizikového fondu a investícia sa vyvíja deterministicky, teda v zhode s očakávaním.

Čo sa týka koncovej podmienky  $x_k \geq \mu$ , pri simuláciách budeme uvažovať dve verzie úlohy:

- 1)  $x_k \geq \mu_1 = 300$ ,
- 2)  $x_k \geq \mu_2 = 600$ .

Prvá podmienka je totiž pomerne ľahko dosiahnuteľná (napr. voľbou 50% podielu rizikového fondu po celý čas), preto volíme aj druhú, ambicióznejšiu, aby sme mohli lepšie porovnať jednotlivé optimálne riadenia.

Simulácie sme realizovali na všetkých verziách úlohy o portfóliu, ktoré sme diskutovali na predchádzajúcich kapitolách, teda úlohy bez ohraničení, úlohy na ohraničenej prípustnej oblasti aj úlohy s penalizáciou, s rôznymi účelovými funkciami a rôznymi penalizačnými funkciami.

Pre každú verziu úlohy sme urobili 50 000 simulácií (spolu viac ako 5,5 milióna), pri výpočtoch sme program Matlab verzia R2011b. Simulácie pre jednu úlohu trvali cca 130 až 150 sekúnd na počítači s dvojjadrovým procesorom Intel 1.5 GHz so 4 GB pamäte RAM. K tomu však musíme pripočítať aj čas výpočtu riešenia cca 70 až 185 sekúnd, resp. čas výpočtu prípustnej oblasti okolo 120 sekúnd.

Výsledky simulácií zhrnuli v tabuľkách 5.1 pre úlohu bez ohraničení, 5.2 pre úlohu s ohraničenou prípustnou oblasťou, 5.3 a 5.4 pre úlohy s penalizáciou. V nasledujúcom texte diskutujeme tieto výsledky podrobnejšie.

### 5.7.1 Rozdelenie koncového stavu

Pozrime sa najskôr na rozdelenie koncového stavu v jednotlivých verziách úlohy. Keďže máme k dispozícii 50,000 rôznych realizácií koncového stavu, môžeme ich graficky znázorniť v podobe histogramu na obrázku 5.28.

V prvom prípade ide o maximalizáciu exponenciálnej užitočnosti v úlohe bez ohraničení, tu sme dosiahli približne normálne rozdelenie koncového stavu s priemernou hodnotou  $\bar{x}_k = 380,5$ .

## 5.7. SIMULÁCIE A POROVNANIE RIEŠENÍ

Úloha bez ohraničení Účelová funkcia	Podmienka $\mu_1 = 300$			Podmienka $\mu_2 = 600$		
	Priemer	Št.odch.	Úspešnosť	Priemer	Št.odch.	Úspešnosť
Stredná hodnota $x_k$	1029,2	679,1	95,7%	1021,5	664,5	72,2%
Exponenciálna užitočnosť	380,5	63,4	89,8%	380,6	63,5	0,03%
Mocninová užitočnosť, $p = 4$	1022,9	667,1	95,8%	1024,4	666,4	72,3%
Mocninová užitočnosť, $p = 7$	560,3	209,9	93,5%	558,2	209,7	35,3%
Mocninová užitočnosť, $p = 11$	381,0	82,4	84,2%	380,9	82,4	1,3%
Pravdepodobnosť $x_k \geq \mu$	306,8	11,2	98,9%	569,9	98,2	79,6%

Tabuľka 5.1: Výsledky simulácií: úloha bez ohraničení

Podmienka $\mu_1 = 300$						
Prípustná oblasť	Účelová funkcia	$x_0$	Priemer	Št.odch.	Úspešnosť	Vypadnuté
Pôvodná definícia	Užitočnosť - exp	150	397,0	41,9	* 100 %	* 0 %
Pôvodná definícia	Riziko - CVaRD	150	331,2	0,0	* 100 %	* 0 %
Alternatívna def.	Užitočnosť - exp	100	301,8	14,3	54,6 %	1,8 %
Alternatívna def.	Konštanta	100	300,3	12,7	52,2 %	1,8 %
Alternatívna def.	Riziko - CVaRD	100	300,4	8,1	56,4 %	1,8 %
Oblasť $\beta = 90\%$	Užitočnosť - exp	100	310,5	9,0	83,5 %	8,9 %
Oblasť $\beta = 90\%$	Riziko - CVaRD	100	306,3	2,2	91,1 %	8,9 %
Oblasť $\beta = 70\%$	Užitočnosť - exp	100	312,1	11,3	83,8 %	3,1 %
Oblasť $\beta = 70\%$	Riziko - CVaRD	100	305,9	2,0	96,8 %	3,2 %

Podmienka $\mu_2 = 600$						
Prípustná oblasť	Účelová funkcia	$x_0$	Priemer	Št.odch.	Úspešnosť	Vypadnuté
Pôvodná definícia	Užitočnosť - exp	300	779,1	48,7	* 100 %	* 0 %
Pôvodná definícia	Riziko - CVaRD	300	662,4	0,0	* 100 %	* 0 %
Alternatívna def.	Užitočnosť - exp	100	602,5	38,8	33,5 %	37,3 %
Alternatívna def.	Konštanta	100	601,3	38,0	33,4 %	37,6 %
Alternatívna def.	Riziko - CVaRD	100	601,4	27,9	37,1 %	37,5 %
Oblasť $\beta = 90\%$	Užitočnosť - exp	150	611,3	10,4	* 53,3 %	* 43,3 %
Oblasť $\beta = 90\%$	Riziko - CVaRD	150	607,5	5,4	* 56,5 %	* 43,5 %
Oblasť $\beta = 70\%$	Užitočnosť - exp	100	612,7	13,1	34,5 %	60,9 %
Oblasť $\beta = 70\%$	Riziko - CVaRD	100	607,6	7,1	39,5 %	60,5 %

Tabuľka 5.2: Výsledky simulácií: úlohy na ohraničenej oblasti. Hodnoty označené \* nie je možné porovnávať, keďže majú odlišný štartovací bod

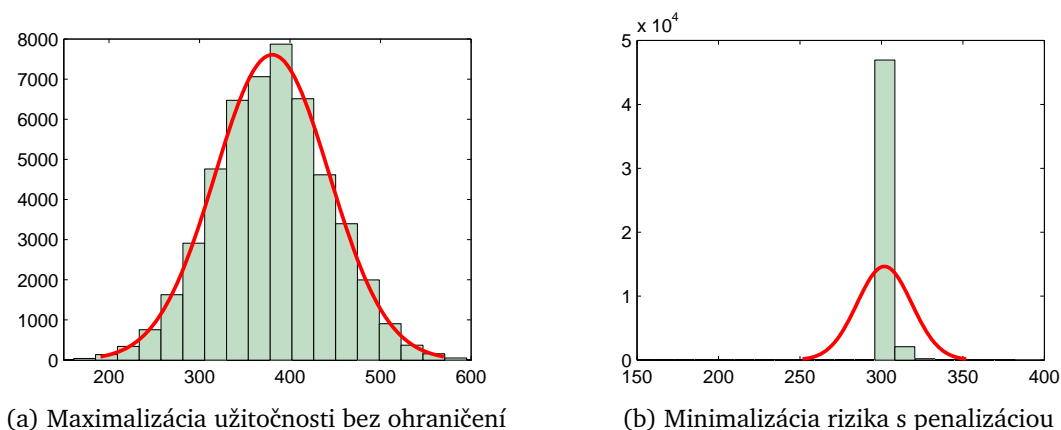
## 5.7. SIMULÁCIE A POROVNANIE RIEŠENÍ

Penalizácia Váha	Podmienka $\mu_1 = 300$			Podmienka $\mu_2 = 600$		
	Priemer	Št.odch.	Úspešnosť	Priemer	Št.odch.	Úspešnosť
0	380,9	63,3	90,0 %	380,5	63,4	0,03 %
0,000 05	376,2	59,1	96,6 %	542,5	131,2	71,3 %
0,000 1	373,5	58,5	97,2 %	552,8	124,1	75,1 %
0,000 5	363,9	54,3	98,4 %	563,7	114,1	78,6 %
0,001	358,2	52,2	98,6 %	565,8	111,6	78,9 %
0,002	351,7	49,3	98,8 %	567,8	108,5	79,5 %
0,01	336,2	40,1	98,9 %	567,2	107,9	79,1 %
1	313,5	20,3	98,9 %	568,2	105,4	79,1 %

Tabuľka 5.3: Výsledky simulácií: maximalizácia exponenciálnej užitočnosti s konštantnou penalizáciou, rôzne váhy

Penalizácia Druh	Váha	Podmienka $\mu_1 = 300$			Podmienka $\mu_2 = 600$		
		Priemer	Št.odch.	Úspešnosť	Priemer	Št.odch.	Úspešnosť
bez penalizácie		220,8	0,0	0,0 %			
konštantná	250	272,2	50,9	72,9 %			
konštantná	500	297,1	30,4	95,9 %			
konštantná	1 000	301,7	17,5	98,5 %			
konštantná	10 000	304,2	12,7	98,8 %	557,7	119,5	79,2 %
konštantná	$10^6$	306,4	11,6	98,9 %	565,0	108,7	79,2 %
konštantná	$10^{20}$	306,8	11,1	98,9 %	567,8	101,8	79,1 %
lineárna	1 000	286,8	26,7	5,8 %			
lineárna	2 000	298,8	10,6	19,0 %	403,8	125,7	0,8 %
lineárna	5 000	299,9	10,9	90,0 %	560,2	93,8	29,8 %
lineárna	10 000	300,6	9,4	97,9 %	562,0	94,3	50,9 %
lineárna	$10^6$	303,8	10,5	98,3 %	564,5	96,2	75,5 %
lin.-konšt.	500	287,3	42,6	88,3 %			
lin.-konšt.	1 000	300,9	19,0	98,3 %			
lin.-konšt.	2 000	302,4	13,5	98,7 %	501,4	170,0	69,9 %
lin.-konšt.	5 000	303,3	10,9	98,8 %	558,8	114,0	79,1 %
lin.-konšt.	10 000	303,8	10,9	98,8 %	566,7	98,9	79,0 %
lin.-konšt.	$10^6$	306,3	11,0	98,8 %	569,0	98,7	79,3 %
kvadratická	5 000	273,3	8,0	0,1 %	452,4	52,7	
kvadratická	10 000	285,4	8,7	0,6 %	503,7	69,2	0,02 %
kvadratická	$10^6$	299,4	8,9	75,9 %	555,7	89,4	12,2 %

Tabuľka 5.4: Výsledky simulácií: minimalizácia rizika s penalizáciou, rôzne druhy a váhy penalizácie



Obr. 5.28: Ukážka rozdelenia koncového stavu  $x_k$  na základe simulácie pri použití optimálnych riadení pre rôzne účelové funkcie

V druhom prípade na obr. 5.28a zobrazujeme koncový stav v úlohe na minimalizáciu rizika s penalizáciou pre  $x_k < \mu_1 = 300$ , preto je väčšina hodnôt len tesne nad hranicou 300. Napriek tomu je však disperzia koncového stavu pomerne veľká.

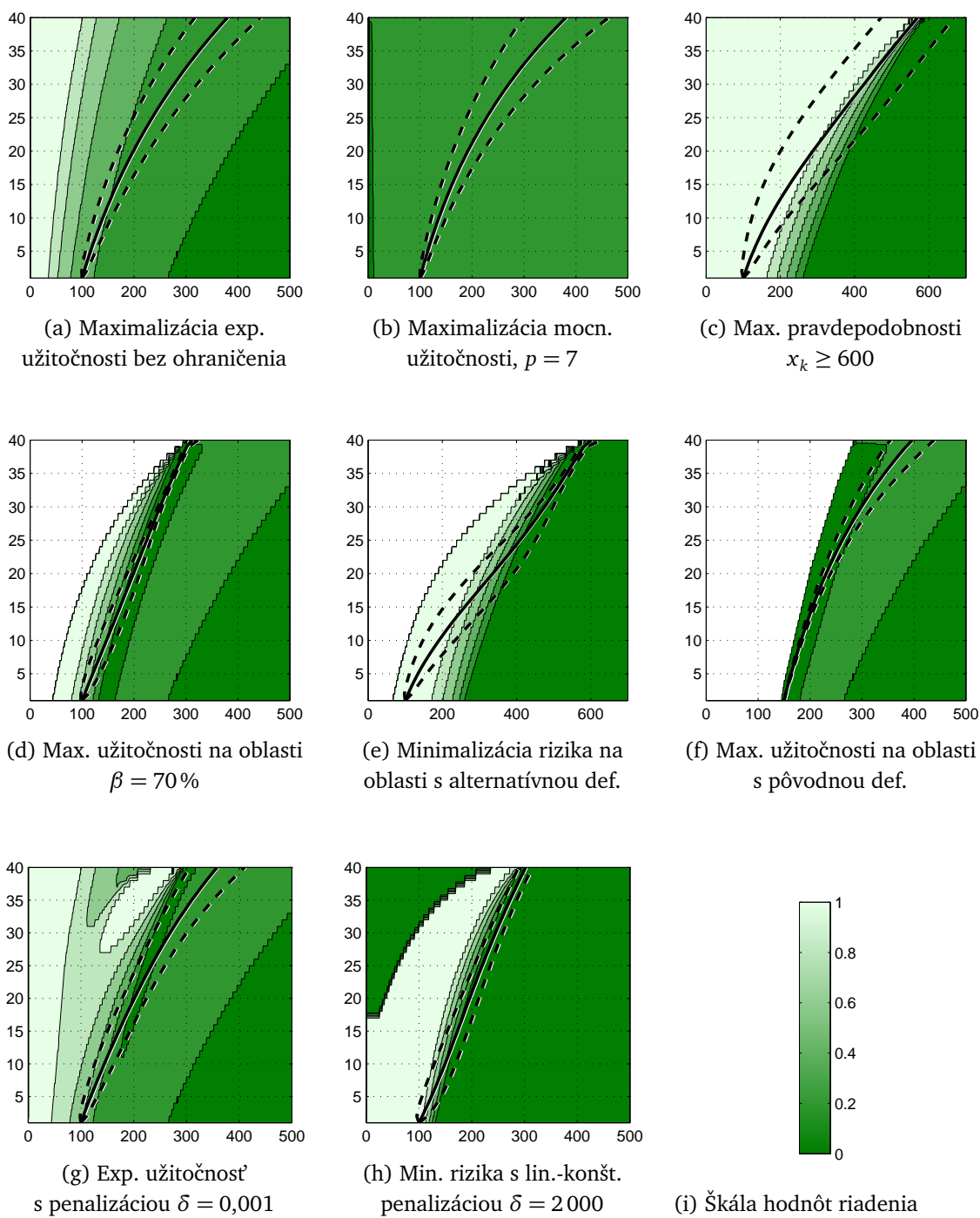
V tabuľkách môžeme porovnať priemernú hodnotu koncového stavu a tiež štandardnú odchýlku pre jednotlivé spôsoby výpočtu. Maximálne, resp. minimálne hodnoty v stĺpci sú pre lepšie porovnanie zvýraznené. Najväčšiu strednú hodnotu dosiahla maximalizácia strednej hodnoty, teda umiestnenie všetkých prostriedkov do rizikového fondu. V tomto prípade rastie stredná hodnota najrýchlejšie, spolu s ňou aj jej štand. odchýlka, ako uvádzame na obrázku 5.30a. Rovnaký výsledok dosiahneme aj v prípade maximalizácie mocnínovej užitočnosti pre  $p = 4$ , keďže v tom prípade je riadenie rovnaké (100 % rizikový fond).

V iných prípadoch môže byť disperzia podstatne menšia, príklady časového priebehu priemernej hodnoty stavu sú na obrázkoch 5.30b a 5.30c. Najmenšiu (nenulovú) št. odchýlku 2,0 sme dosiahli v prípade riešenia úlohy minimalizácie rizika na ohraničenej oblasti vzhľadom na minimálnu pravdepodobnosť splnenia podmienky  $\beta = 70\%$ , v tomto prípade bola dokonca aj pravdepodobnosť splnenia podmienky pomerne vysoká (96,8%). Na obrázku 5.29 znázorňujeme optimálne riadenie a priemerný stav počas simulácií aj v prípade ďalších úloh.

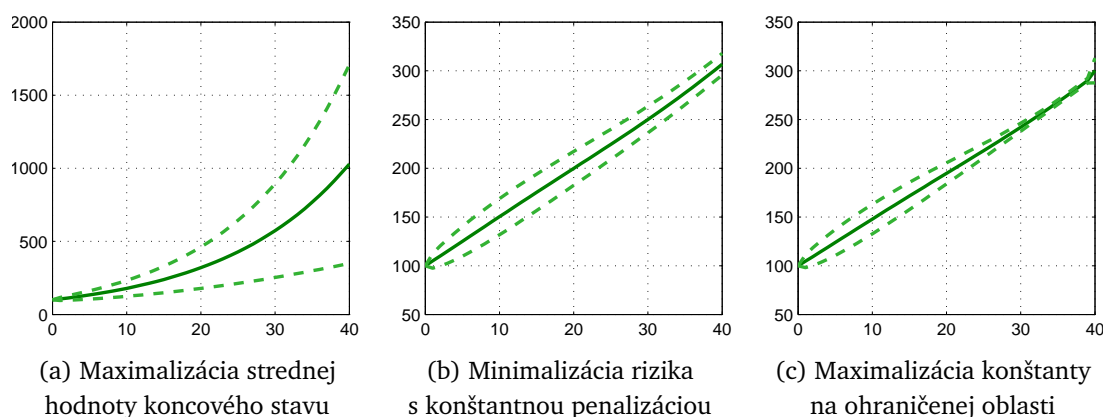
### Pravdepodobnosť splnenia koncovej podmienky

S rozdelením koncového stavu úzko súvisí aj pravdepodobnosť splnenia koncovej podmienky. V prípade podmienky  $x_k \geq \mu_1 = 300$  je pravdepodobnosť splnenia vysoká, vo veľa prípadoch viac ako 90%. Najvyššia hodnota, 98,9% bola dosiahnutá v úlohe na maximalizáciu pravdepodobnosti splnenia koncovej podmienky, čo je očakávaný výsledok. V prípade úlohy bez ohraničení bola vysoká úspešnosť okolo 96% v úlohe na maximalizáciu strednej hodnoty.

V úlohe na ohraničenej oblasti bola najvyššia úspešnosť 96,8% pri minimalizácii rizika na oblasti  $\beta = 70\%$ , resp. 91,1% na oblasti  $\beta = 90\%$ . V úlohách s penalizáciou sa pri dostatočnej váhe penalizácie dosahovali aj hodnoty nad 98% či už pri konštantnej, lineárnej aj lineárno-konštantnej penalizácii. Kvadratická penalizácia dávala praveľkú váhu na hodnoty  $x_k \ll \mu$ , kvôli čomu bola úspešnosť nižšia.



Obr. 5.29: Optimálne riadenie a priemerná hodnota stavu počas simulácie. Prerušovaná čiara označuje +/- štandardnú odchýlku priemerného stavu



Obr. 5.30: Porovnanie časového priebehu priemernej hodnoty stavu počas simulácií a jeho štandardnej odchýlky (prerušovaná čiara)

Pri ambicióznejšej podmienke  $x_k \geq \mu_2 = 600$  bola logicky aj úspešnosť splnenia nižšia, v prípade úlohy bez ohraničení veľmi nízka (keďže tieto riešenia nezávisia od zvolenej koncevej podmienky), okrem maximalizácie pravdepodobnosti, ktorá závisí a teda dosiahla výsledok 79,6%. Úlohy na ohraničenej oblasti dosiahli úspešnosť 30 až 40 percent, keďže veľa trajektórií sa neudržalo v prípustnej oblasti. Úloha s penalizáciou opäť dosahuje výborné výsledky 75 až 79 percent pri vhodnej váhe penalizácie.

Celkovo teda možno vhodnou voľbou parametrov dosiahnuť vysokú úspešnosť aj v prípade rôznych účelových funkcií a ohraničení v úlohe.

### Časový priebeh riadenia

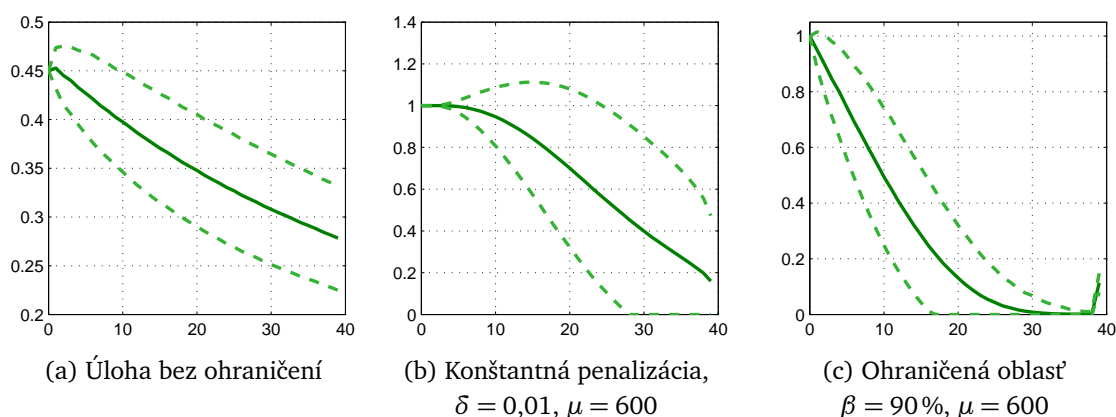
Vráťme sa ešte k časovému priebehu riadenia, ktorý tiež súvisí s koncovým stavom. Vo väčšine prípadov postupom času optimálne riadenie klesá. To však neznamená, že v priebehu simulácie sa riadenie nemôže náhle zväčšiť (napr. v prípade poklesu majetku), priemerné riadenie však nerastie.

Na obrázku 5.31 znázorňujeme časový priebeh riadenia v úlohe na maximalizáciu užitočnosti v niekoľkých verziách: úlohe bez ohraničení, úlohe s penalizáciou a úlohe na ohraničenej oblasti. Ako vidíme, priemerné riadenie klesá v čase. Môžeme pripomenúť podobný výsledok práce [32], podľa ktorej zastúpenie rizikových aktív v portfóliu má v čase klesajúci priebeh.

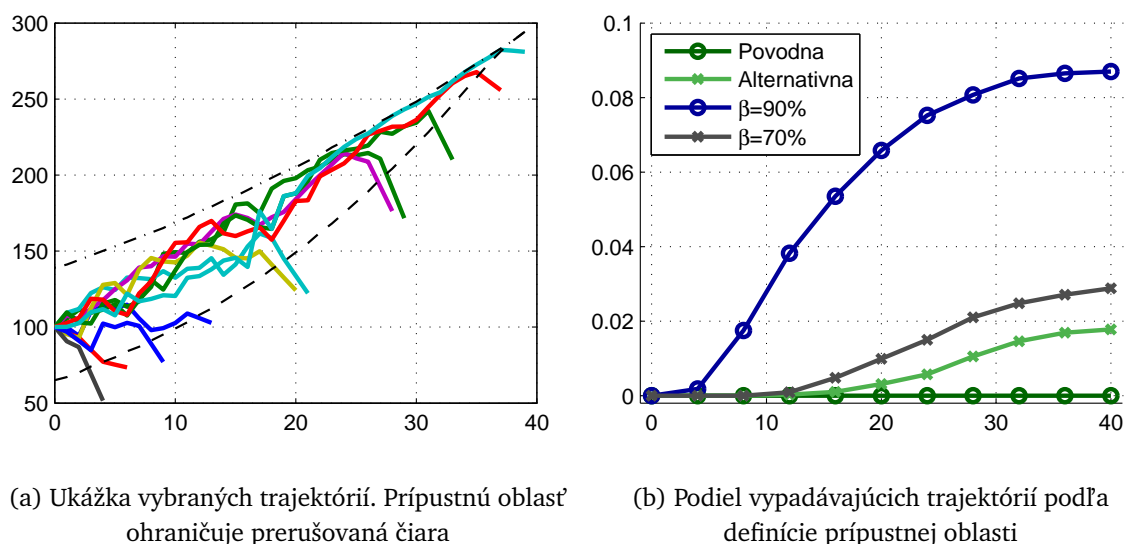
Priemerný časový priebeh riadenia pri simuláciách však samozrejme závisí najmä od tvaru optimálnej stratégie. Teda pokiaľ sa hodnota stavu dostane do nejakej špeciálnej oblasti, hodnota riadenia môže rásť aj klesať. V tom je najväčšia výhoda riešenia vo forme stratégie: konkrétna voľba riadenia závisí od situácie, v ktorej sa práve nachádzame.

### 5.7.2 Riešenie na ohraničenej oblasti

V tejto časti sa zaoberáme simuláciami riešenia úlohy s ohraničenou množinou prípustných riadení. Porovnávali sme štyri prípustné oblasti: pôvodnú definíciu pre  $E[x_k] \geq \mu$  podľa (5.39), alternatívnu definíciu podľa (5.46) a oblasti spĺňajúce podmienku (5.47) s pravdepodobnosťami  $\beta = 90\%$  a  $\beta = 70\%$ . Na všetkých sme riešili úlohu na maximalizáciu exponenciálnej



Obr. 5.31: Maximalizácia užitočnosti - porovnanie časového priebehu priemerného riadenia (prerušovaná čiara - štand. odchýlky), rôzne verzie úlohy



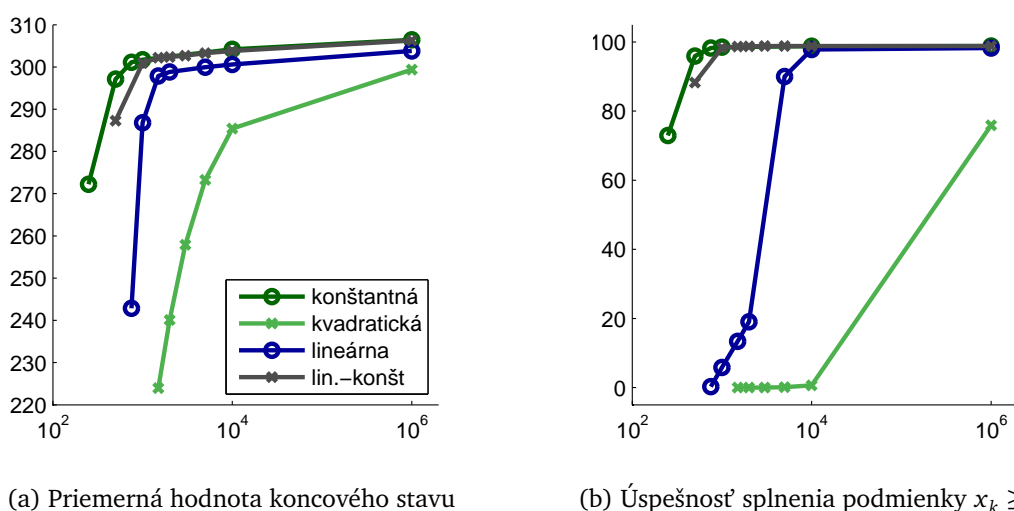
Obr. 5.32: Simulácia na ohraničenej oblasti – trajektórie mimo prípustnej oblasti

užitočnosti a úlohu na minimalizáciu rizika pre  $\mu_1 = 300$  a  $\mu_2 = 600$ .

Podrobné výsledky simulácií uvádzame v tabuľke 5.2. V niektorých prípadoch však štartovací bod  $x_0 = 100$  ležal mimo prípustnej oblasti, museli sme ho teda posunúť, aby sme mohli vypočítať simulácie. V tom prípade sme to uviedli v tabuľke. Problém sa týka pôvodnej definície prípustnej oblasti a pre  $\mu_2$  aj oblasti  $\beta = 90\%$ . Ekvivalentne by sme mohli znížiť minimálny očakávaný výnos  $\mu$ , aby sa štartovací bod  $x_0$  dostal do vnútra prípustnej množiny stavov. Oboma spôsobmi dosiahneme zníženie požiadavky na minimálny výnos.

Ako sme naznačili už v časti 5.5.4, v určitých prípadoch (v závislosti od náhodného výnosu) sa môže stať, že hodnota majetku klesne pod kritickú hodnotu a teda trajektória „vypadne“ z prípustnej oblasti. Takéto trajektórie sme ďalej nedopočítavali (keďže v danom stave neexistuje prípustné riadenie).

Niekoľko takýchto trajektórií sme znázornili na obrázku 5.32a. Tieto sa vplyvom nízkeho náhodného výnosu rizikového fondu neudržali v prípustnej oblasti ohraničenej prerušovanou



Obr. 5.33: Porovnanie penalizačných funkcií a vplyv váhy penalizácie pri minimalizácii rizika na hodnotu koncového stavu

čiarou. Okrem týchto trajektórií sme počas simulácii našli aj také, ktoré sa v prípustnej oblasti udržali - zväčša tie, ktoré sa dostali nad bodko-čiarkovanú čiaru, teda do oblasti s istotou splnenia koncovkej podmienky.

Zaujímalo nás však aj to, aké percento trajektórií opustí prípustnú oblasť v závislosti od použitej definície. Preto sme na ďalšom obrázku 5.32b znázornili podiel vypadnutých trajektórií spomedzi všetkých simulácií v závislosti od tvaru oblasti pre  $\mu_1 = 300$ . Najmenej úspešne vyšla oblasť  $\beta = 90\%$ , v tomto prípade pravdepodobnosť vypadnutia dosiahla až takmer 9%. Zvyšné oblasti sú väčšie, boli teda úspešnejšie. V prípade pôvodnej definície nedošlo k vypadnutiu trajektórii, to však súvisí so samotnou definíciou, ako sme poznamenali v časti 5.5.1.

### 5.7.3 Úloha s penalizáciou

Počas simulácií úlohy s penalizáciou sme maximalizovali exponenciálnu užitočnosť (výsledky uvádzame v tabuľke 5.3) a minimalizovali riziko (tabuľka 5.4). V oboch prípadoch sme skúmali rôzne váhy penalizačnej funkcie, v druhom prípade aj rôzne tvary. Prípád  $\delta = 0$  sme uviedli ako porovnanie s úlohou bez penalizácie.

Ako si môžeme všimnúť v oboch tabuľkách, zvyšovaním váhy penalizačnej funkcie dochádza k znižovaniu št. odchýlky a tiež k zvyšovaniu úspešnosti splnenia koncovkej podmienky  $x_k \geq \mu_1$ . Pre  $\mu_2$  to už nie je jednoznačné, privysoká penalizácia (konštantná s  $\delta = 10^{20}$ ) môže naopak úspešnosť znížiť.

Na obrázku 5.33 uvádzame porovnanie strednej hodnoty a úspešnosti splnenia podmienky v závislosti od tvaru a váhy bariéry. Ukazuje sa, že najvhodnejšia je konštantná, resp. lineárno-konštantná penalizácia. Najhoršie výsledky dosiahla kvadratická penalizácia, čo sme však mohli odhadnúť už podľa tvaru optimálneho riadenia.

Avšak ak porovnáme výsledky simulácií pre úlohu s penalizáciou s ostatnými riešeniami, ukazuje sa, že priemer koncového stavu aj úspešnosť splnenia podmienky sú pomerne vysoké, je to preto výhodný spôsob riešenia.



---

# Kapitola 6

## Záver

---

Hlavnou témou tejto dizertačnej práce boli **diskrétné stochastické úlohy optimálneho riadenia s ohraničeniami na koncový stav**. Takéto ohraničenia sa pri stochastických úlohách bežne nepoužívajú, hoci v deterministickom prípade nepredstavujú komplikáciu: pomocou rovnice dynamického programovania môžeme priamo riešiť úlohy s rôznymi typmi ohraničení. Naším cieľom bolo vyplniť túto medzeru v prípade stochastických úloh a aj na konkrétnych príkladoch ilustrovať možnosti riešenia stochastických úloh s koncovými ohraničeniami.

V prvej časti práce sme sa preto podrobne venovali **dvom kľúčovým otázkam**:

1. ako môžeme sformulovať ohraničenia na koncový stav v stochastickej úlohe,
2. akým spôsobom môžeme úlohy s takýmito ohraničeniami riešiť.

Najskôr sme spracovali prehľad rôznych koncových ohraničení, ktoré sa používajú v stochastických úlohách optimálneho riadenia, aby sme následne analyzovali ich dva základné typy:

1. podmienku na strednú hodnotu koncového stavu (2.6),
2. minimálnu pravdepodobnosť splnenia koncovej podmienky (2.11).

Obe ohraničenia majú v úlohe (2.3) vplyv na **prípustnosť stratégií**: prípustné budú len také stratégie, ktoré spolu so svojou odozvou splňajú koncové ohraničenie. Naším cieľom bolo preformulovať tieto podmienky na množinu prípustných hodnôt riadenia, aby boli riešiteľné pomocou špeciálnej rovnice dynamického programovania.

Pri **podmienke na strednú hodnotu** koncového stavu (2.6) sme vychádzali z formulácie prípustných množín (2.8) podľa článku [16], túto sme však porovnávali s našou alternatívnou definíciou 2.7. Ukázali sme, že obe verzie majú svoje nevýhody: buď je to priveľmi obmedzená množina prípustných stratégií a stavov, alebo vysoká pravdepodobnosť vypadnutia z prípustného stavu aj pri voľbe prípustnej hodnoty riadenia.

V nadväznosti na [24] sme analyzovali *podmienku na minimálnu pravdepodobnosť* (2.11). Doyen a De Lara sa však zaoberali iba súvisiacim problémom maximalizácie pravdepodobnosti splnenia podmienky na koncový, resp. priebežný stav. My sme v rámci dizertačnej práce navrhli, ako môžeme pomocou špeciálnej rovnice dynamického programovania (2.14) najskôr vypočítať prípustnú oblasť v závislosti od požadovanej minimálnej pravdepodobnosti splnenia podmienky  $\beta$  a následne maximalizovať zvolenú účelovú funkciu na tejto prípustnej oblasti.

Zaoberali sme sa však aj alternatívnym spôsobom riešenia úlohy s ohraničením na koncový stav: začlenením ohraničenia do účelovej funkcie vo forme tzv. *penalizácie* v úlohe (2.18). Ide o efektívny spôsob riešenia úlohy s koncovým ohraničením, výhodou je najmä fakt, že všetky stavy považujeme za prípustné. Aktuálny stav teda nemôže vypadnúť z prípustnej oblasti.

Na záver teoretickej časti sme sformulovali a dokázali Vetu (2.16) – *rovniciu dynamického programovania* pre úlohu so všeobecným ohraničením (2.27). Na základe tohto výsledku sme mohli riešiť úlohy s rôznymi ohraničeniami na koncový stav, resp. úlohu s penalizáciou, či už analyticky alebo numericky. Využili sme pri tom odvodené ohraničenia v tvare množiny prípustných hodnôt riadenia, medzi ktorými sme hľadali optimálne hodnoty riadenia pre optimálnu stratégiu.

V druhej časti práce sme sa venovali dvom konkrétnym úlohám a rozsiahlym *numerickým experimentom*. Na nich sme ilustrovali použitie koncových podmienok v stochastických úlohách optimálneho riadenia a zároveň sme overovali teoretické výsledky ohľadom riešenia týchto úloh. Pri riešení sme použili diskrétnu numerickú schému znázornenú na obr. 3.1. Zároveň sme sa zaoberali súvisiacimi numerickými problémami ako je napr. diskretizácia spojitého veličín alebo interpolácia hodnotovej funkcie.

Prvá bola *úloha predavača red'koviek* motivovaná úlohou z [29] s ohraničením na koncový stav v tvare strednej hodnoty (4.3). Je to diskrétna úloha s rovnomerným rozdelením náhodnej premennej. Riešili sme ju pomocou rovnice dynamického programovania. V podkapitole 4.2.2 sme sa venovali množinám prípustných stavov, ktoré sú rôzne v prípade pôvodnej (2.8), resp. alternatívnej definície (2.10). Ukázali sme, že v tejto úlohe je výhodnejšia alternatívna definícia.

Túto úlohu sme zároveň riešili aj pomocou *stochastického programovania* (SP) – pomocou úlohy lineárneho programovania na vygenerovanej sade náhodných scenárov. Následne sme pomocou simulácií porovnávali výsledky SP s optimálnym riadením (OR). Lepšie výsledky dosiahlo OR, to však nie je veľkým prekvapením. Stochastické optimálne riadenie totiž rieši úlohy v tvare stratégie, ktorá reaguje na aktuálny stav, zatiaľčo riešením SP je programové riadenie.

Kapitola 5 sa venuje druhej úlohe: *úlohe o alokácii prostriedkov v portfóliu*. Námet sme získali z problému dôchodkového sporenia v [32], uvažovali sme však rôzne verzie úlohy (maximalizácia užitočnosti (5.3), minimalizácia rizika (5.31)) s rôznymi koncovými podmienkami (na strednú hodnotu aj minimálnu pravdepodobnosť). Kontinuálny charakter stavu a riadenia sme diskretizovali, ako náhodnú premennú sme zvolili aproximáciu normálneho rozdelenia.

V prípade podmienky na strednú hodnotu sme analyticky popísali *množiny prípustných hodnôt* riadenia a prípustných stavov. Ukázalo sa, že pôvodná formulácia (5.39) neumožňuje problém reálne riešiť, pretože väčšina hodnôt stavu nie je prípustná. Lepšie výsledky sme dosiahli pomocou alternatívnej formulácie (5.46), aj tu sa však vyskytli problémy pri numerickej implementácii, ako ich popisujeme v časti 5.5.4. Taktiež sme sa zaoberali úlohou s podmienkou na minimálnu pravdepodobnosť (5.47) a podrobne aj úlohou s penalizáciou v časti 5.6.

V záverečnej podkapitole 5.7 sme realizovali porovnanie jednotlivých riešení úlohy prostredníctvom Monte-Carlo simulácii. Porovnávali sme riešenie úlohy bez ohraničení, riešenia úlohy s koncovou podmienkou v tvare strednej hodnoty, resp. podmienky na minimálnu pravdepodobnosť, ako aj riešenie úlohu s penalizáciou s rôznymi tvarmi penalizácie. Podrobné výsledky sme zhrnuli v tabuľkách 5.1 až 5.4.

Úspešnosť splnenia koncovej podmienky v jednotlivých prípadoch pritom závisela od konkrétnych parametrov. Porovnateľnú úspešnosť sa nám podarilo dosiahnuť v prípade použitia penalizácie, ako v prípade riešenia úlohy na ohraničenej prípustnej oblasti. Môžeme však pripomenúť, že v prípade riešenia úlohy na ohraničenej oblasti hrozí vypadnutie z oblasti, ktoré vyžaduje prehodnotenie cieľovej hodnoty majetku.

Celkovo môžeme zhrnúť, že v dizertačnej práci sa nám podarilo naplniť **hlavné ciele**: ukázali sme, ako môžeme v stochastických úlohách formulovať ohraničenia na koncový stav a akým spôsobom môžeme takéto úlohy riešiť pomocou rovnice dynamického programovania použitím formulácie v tvare množiny prípustných hodnôt riadenia.

Tiež sme overili, že ohraničenia je výhodné presunúť do účelovej funkcie a riešiť tak úlohu s penalizáciou, pričom nemusíme riešiť problémy s neprístupnosťou niektorých stavov. Použitie rôznych koncových ohraničení sme ilustrovali aj na konkrétnych numerických príkladoch.

Hoci sme dosiahli vytýčené ciele, niektoré otázky zostali otvorené a môžu byť predmetom ďalšieho výskumu. Napríklad otázka ďalších tvarov koncových podmienok, ktoré môžeme formulovať v stochastickej úlohe. Zaujímavou úlohou môže byť navrhnutie špeciálnej numerickej schémy na riešenie stochastických úloh s normálnym rozdelením náhodnej premennej, prípadne schémy, ktorá bude lepšie fungovať v prípade ohraničenej množiny prípustných stavov.

# Literatúra

- [1] ACERBI, C. (2002): *Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion*, Journal of Banking & Finance, Vol. 26, 1505–1518.
- [2] ACERBI, C., TASCHE, D. (2002): *Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk*, Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA, Vol. 31, No. 2, 379–388.
- [3] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M., HEATH, D. (1999): *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, Vol. 9, No. 3, 203–228.
- [4] ANIȚA, S., ARNĂUTU, V., CAPASSO, V. (2010): *An Introduction to Optimal Control Problems in Life Sciences and Economics: From Mathematical Models to Numerical Simulation with MATLAB*, Birkhäuser Boston.
- [5] BELLMAN, R. (1957): *Dynamic programming*, Princeton University Press.
- [6] BERTSEKAS, D. P. (2005): *Dynamic Programming and Optimal Control, Volume I*, Third Edition, Athena Scientific.
- [7] BERTSEKAS, D. P. (2007): *Dynamic Programming and Optimal Control, Volume II*, Third Edition, Athena Scientific.
- [8] BERTSEKAS, D. P., SHREVE, S. E. (1996): *Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case*, Athena Scientific.
- [9] BONNANS, J. F., SILVA, F. J. (2012): *Error estimates for the logarithmic barrier method in stochastic linear quadratic optimal control problems*, Systems and Control Letters, Vol. 61, No. 1, 143–147.
- [10] BOUCHARD, B., ELIE, R., IMBERT, C. (2010): *Optimal control under stochastic target constraints*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 48, No. 5, 3501–3531.
- [11] BOUCHARD, B., ELIE, R., TOUZI, N. (2009): *Stochastic target problems with controlled loss*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 48, No. 5, 3123–3150.
- [12] BOUCHARD, B., NUTZ, M. (2012): *Weak dynamic programming for generalized state constraints*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 50, No. 6, 3344–3373.
- [13] BOYD, S., SKAF, J. (2008): *Multi-Period Portfolio Optimization with Constraints and Transaction Costs*, Working manuscript, Stanford, dostupné na internete [http://www.stanford.edu/~boyd/papers/pdf/dyn\\_port\\_opt.pdf](http://www.stanford.edu/~boyd/papers/pdf/dyn_port_opt.pdf).

- 
- [14] BRAHMA, A., GUEZENNEC, Y., RIZZONI, G. (2000): *Optimal energy management in series hybrid electric vehicles*, American Control Conference, Vol. 1, No. 6, 60–64.
- [15] BRUNOVSKÝ, P. (2006): *Stochastické metódy operačnej analýzy*, elektronický učebný text, FMFI, Bratislava, dostupné na internete <http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky-smoa/>.
- [16] BRUNOVSKÝ, P., HALICKÁ, M., KILIANOVÁ, S. (2012): *Stochastic Dynamic Programming for Problems with Expected Value Constraint*, Working paper, FMFI, Bratislava.
- [17] BROWN, D. B., SMITH, J. E. (2010): *Dynamic Portfolio Optimization with Transaction Costs: Heuristics and Dual Bounds*, Duke University, dostupné na internete [http://www.optimization-online.org/DB\\_FILE/2010/08/2703.pdf](http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2010/08/2703.pdf).
- [18] CALAFIORE, G. C. (2008): *Multi-period portfolio optimization with linear control policies*, Automatica 44, 2463–2473, dostupné na internete [http://staff.polito.it/giuseppe.calafiore/Documenti/Papers/Automatica\\_Multi-period%20portfolio%20optimization%20with%20linear%20control%20policies.pdf](http://staff.polito.it/giuseppe.calafiore/Documenti/Papers/Automatica_Multi-period%20portfolio%20optimization%20with%20linear%20control%20policies.pdf)
- [19] CARPENTIER, P., CHANCELIER, J. P., COHEN, G., DE LARA, M., GIRARDEAU, P. (2010): *Dynamic consistency for stochastic optimal control problems*, Annals of Operations Research, 1–17, dostupné na internete <http://arxiv.org/pdf/1005.3605.pdf>.
- [20] CASTRO, J. (2009): *A stochastic programming approach to cash management in banking*, European Journal of Operational Research, Vol. 192, Num. 3, 963–974.
- [21] CINQUEMANI, E., AGARWAL, M., CHATTERJEE, D., LYGEROS, J. (2009): *On convex problems in chance-constrained stochastic model predictive control*, Preprint, arXiv.org, dostupné na internete <http://arxiv.org/pdf/0905.3447>.
- [22] DE LARA, M., MARTINET, V. (2010): *Multi-criteria dynamic decision under uncertainty: A stochastic viability analysis and an application to sustainable fishery management*, Mathematical Biosciences, Vol. 217, No. 2, 118–124.
- [23] DE LARA, M., DOYEN, L. (2008): *Sustainable management of natural resources: mathematical models and methods*, Springer.
- [24] DOYEN, L., DE LARA, M. (2010): *Stochastic viability and dynamic programming*, Systems & Control Letters, Vol. 59, No. 10, 629–634, dostupné na internete <http://arxiv.org/pdf/1002.1140>.
- [25] DUPAČOVÁ, J. (2013): *Robustness Analysis of Stochastic Programs with Joint Probabilistic Constraints*, System Modeling and Optimization, Springer Berlin Heidelberg, 155–164, dostupné na internete <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~dupacova/papers/IFIP-fin.pdf>.
- [26] DUPAČOVÁ, J., KOPA, M. (2011): *Robustness in stochastic programs with risk constraints*, Annals of Operations Research, 1–20.

- [27] DUPAČOVÁ, J., POLÍVKA, J. (2009): *Asset-liability management for Czech pension funds using stochastic programming*, Annual Operational Research, Vol. 165, 5–28, dostupné na internete <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~dupacova/papers/ALM-finP.pdf>.
- [28] DUPAČOVÁ, J., SLADKÝ, K. (2002): *Comparison of Multistage Stochastic Programs with Recourse and Stochastic Dynamic Programs with Discrete Time*, ZAMM 82, 753–765, dostupné na internete <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~dupacova/papers/zammfin3.pdf>.
- [29] HALICKÁ, M., BRUNOVSKÝ, P., JURČA, P. (2009): *Optimálne riadenie - Viacetapové rozhodovacie procesy v ekonómii a financiách*, Epos, Bratislava.
- [30] HAUGH, M., KOGAN, L., WU, Z. (2006): *Portfolio Optimization with Position Constraints: an Approximate Dynamic Programming Approach*, Working paper, Columbia University, dostupné na internete [http://www.columbia.edu/~mh2078/ADP\\_Dual\\_Oct06.pdf](http://www.columbia.edu/~mh2078/ADP_Dual_Oct06.pdf).
- [31] KALMAN, J. (2012): *Algoritmy pre základnú úlohu dynamickej optimalizácie portfólia*, Diplomová práca, FMFI UK Bratislava.
- [32] KILIANOVÁ, S. (2008): *Stochastic dynamic optimization models for pension planning*, Dissertation Thesis, FMFI UK Bratislava.
- [33] KILIANOVÁ, S., PFLUG, G. C. (2009): *Optimal pension fund management under multi-period risk minimization*, Annals of Operations Research, Vol. 166, No. 1, 261–270.
- [34] KROKHMAL, P., ZABARANKIN, M., URYASEV, S. (2011): *Modeling and optimization of risk*, Surveys in Operations Research and Management Science, Vol. 16, 49–66.
- [35] KROKHMAL, P., PALMQUIST, J., URYASEV, S. (2002): *Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints*, Journal of Risk, Vol. 4, 43–68.
- [36] KUHN, D. (2009): *Convergent bounds for stochastic programs with expected value constraints*, Journal of optimization theory and applications Vol. 141, No. 3, 597–618.
- [37] MARTINKOVÁ, D. (2011): *Koherentné miery rizika*, Bakalárska práca, Univerzita Palackého v Olomouci.
- [38] MELICHERČÍK, I., ČERNÝ, A. (2013): *Optimal fund management with gradual contributions*, Prednáška, Seminár Centra pre ekonómiu a financie (CEF), FMFI UK, Bratislava.
- [39] NUTZ, M. (2012): *Power utility maximization in constrained exponential Lévy models*, Mathematical Finance, Vol. 22, No. 4, 690–709.
- [40] NUTZ, M. (2012): *The Bellman equation for power utility maximization with semimartingales*, The Annals of Applied Probability, Vol. 22, No. 1, 363–406.
- [41] O'BRIEN, M. (2000): *Techniques for incorporating expected value constraints into stochastic programs*, Dissertation Thesis, Stanford University.

- [42] PÉREZ, L. V., BOSSIO, G. R., MOITRE, D., GARCÍA, G. O. (2006): *Optimization of power management in an hybrid electric vehicle using dynamic programming*, Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 73, No. 1, 244–254.
- [43] MUKUDDER-PETERSEN, J., PETERSEN, M. A. (2006): *Bank management via stochastic optimal control*, Automatica 42, 1395–1406.
- [44] PFLUG, G. CH., RÖMISCH, W. (2007): *Modeling, Measuring and Managing Risk*, World Scientific.
- [45] PFLUG, G. (2000): *Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at Risk*, kapitola v knihe S. Uryasev (editor): *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 272–81, dostupné na internete <http://www.gloriamundi.org/var/pub.html>.
- [46] PRÉKOPA, A. (2003): *Probabilistic programming*, kapitola 5 v knihe A. Ruszczyński, A. Shapiro (editori): *Handbooks in OR & MS*, Vol. 10, 267–351.
- [47] PRÉKOPA, A. (1973): *Contributions to the theory of stochastic programming*, Mathematical Programming, Vol. 4, No. 1, 202–221.
- [48] ROCKAFELLAR, R. T., URYASEV, S. (2000): *Optimization of Conditional Value-at-Risk*, The Journal of Risk, Vol. 2, No. 3, 21–41.
- [49] RUSZCZYŃSKI, A. (2010): *Risk-averse dynamic programming for Markov decision processes*, Math. Program., Ser. B, Vol. 125, 235–261.
- [50] RUSZCZYŃSKI, A. (2010): *Risk-averse dynamic programming for Markov decision processes*, Prezentácia, dostupné na internete <http://rutcor.rutgers.edu/Rusz.pdf>.
- [51] RUSZCZYŃSKI, A., SHAPIRO, A. (2003): *Stochastic Programming Models*, kapitola 1 v knihe A. Ruszczyński, A. Shapiro (editori): *Handbooks in OR & MS*, Vol. 10, 267–351.
- [52] SANTOSO, T., AHMED, S., GOETSCHALCKX, M., SHAPIRO, A. (2005): *A stochastic programming approach for supply chain network design under uncertainty*, European Journal of Operational Research 167, 96–115, dostupné na internete <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.71.4132&rep=rep1&type=pdf>.
- [53] SHAPIRO, A., DENTCHEVA, D., RUSZCZYŃSKI, A. (2009): *Lectures on stochastic programming: modeling an theory*, MPS-SIAM, dostupné na internete [http://www2.isye.gatech.edu/people/faculty/Alex\\_Shapiro/SPbook.pdf](http://www2.isye.gatech.edu/people/faculty/Alex_Shapiro/SPbook.pdf).
- [54] SHAPIRO, A., PHILPOTT, A. (2007): *A tutorial on stochastic programming*, Manuscript, dostupné na internete [http://www.isye.gatech.edu/people/faculty/Alex\\_Shapiro/TutorialSP.pdf](http://www.isye.gatech.edu/people/faculty/Alex_Shapiro/TutorialSP.pdf).
- [55] STOKEY, N. L., LUCAS, R. E. (1989): *Recursive methods in economic dynamics*, Harvard University Press.

- [56] ŠEVCOVIC, D., STEHLIKOVÁ, B., MIKULA, K. (2009): *Analytické a numerické metódy ocenovania finančných derivátov*, Nakladateľstvo STU.
- [57] ŠIMKO, M. (2010): *Stochastické úlohy optimálneho riadenia*, Diplomová práca FMFI, Bratislava.
- [58] TOMASGARD, A., HØEG, E. (2005): *A Supply Chain Optimization Model for the Norwegian Meat Cooperative*, kapitola 14, *Applications of Stochastic Programming*, SIAM.
- [59] WANG, W., AHMED, S. (2008): *Sample average approximation of expected value constrained stochastic programs*, *Operations Research Letters*, Vol. 36, No. 5, 515–519.
- [60] WATSON, J.-P., WOODRUFF, D., HART, W. (2010): *PySP: Modeling and Solving Stochastic Programs in Python*, Technical Report, Sandia National Laboratories, dostupné na internete [http://www.optimization-online.org/DB\\_FILE/2010/09/2725.pdf](http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2010/09/2725.pdf).
- [61] WILLEMS, J. C. (1996): *1696: the birth of optimal control*, In *Decision and Control, Proceedings of the 35th IEEE*, Vol. 2, 1586–1587.
- [62] YIU, K. F. C. (2004): *Optimal portfolios under a value-at-risk constraint*, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 28, No. 7, 1317–1334.
- [63] YU, L. Y., JI X. D., WANG S. Y. (2003): *Stochastic Programming Models in Financial Optimization: A Survey*, *AMO - Advanced Modeling and Optimization*, Vol. 5, No. 1.