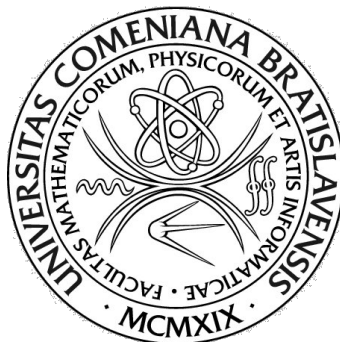


UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**Rozdelenia pravdepodobnosti
vyjadrené parciálnymi sumáciami:
limity, oscilácie a dvojrozmerné zovšeobecnenia**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



**Rozdelenia pravdepodobnosti
vyjadrené parciálnymi sumáciami:
limity, oscilácie a dvojrozmerné zovšeobecnenia**
(Dizertačná práca)

Študijný program: Aplikovaná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Školiteľ: doc. Mgr. Ján Mačutek, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

- Meno a priezvisko študenta:** Mgr. Lívia Leššová
Študijný program: aplikovaná matematika (Jednoodborové štúdium, doktorandské III. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: dizertačná
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický
- Názov:** Rozdelenia pravdepodobnosti vyjadrené parciálnymi sumáciami: limity, oscilácie a dvojrozmerné zovšeobecnenia
Partial-sums probability distributions: limits, oscillations, bivariate generalizations
- Anotácia:** Zovšeobecnenie rozdelení vyjadrených parciálnymi sumáciami do dvoch rozmerov. Odvodenie základných vlastností týchto rozdelení (momenty, vytvárajúce funkcie). Riešenie problému invariantnosti dvojrozmerných rozdelení vzhľadom na parciálne sumácie.
- Opakované sumácie pre jedno- a dvojrozmerné rozdelenia. Limitné rozdelenia a oscilujúce postupnosti rozdelení.
- Literatúra:** Johnson, N.L., Kemp, A.W., Kotz, S. (2005). Discrete Multivariate Distributions. Hoboken: Wiley.
- Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1997). Discrete Multivariate Distributions. New York: Wiley.
- Kocherlakota, S., Kocherlakota, K. (1992). Bivariate Discrete Distributions. New York: Marcel Dekker.
- Kotz, S., Johnson, N.L. (1991). A note on renewal (partial sums) distributions for discrete variables. Statistics & Probability Letters 12, 229-231.
- Mačutek, J. (2003). On two types of partial summations. Tatra Mountains Mathematical Publications 26, 403-410.
- Wimmer, G., Mačutek, J. (2012). New integrated view at partial-sums distributions. Tatra Mountains Mathematical Publications 51, 183-190.
- Kľúčové slová:** dvojrozmerné rozdelenia pravdepodobnosti, parciálne sumácie, charakteristiky rozdelení
- Školiteľ:** doc. Mgr. Ján Mačutek, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Dátum zadania: 09.02.2016

Dátum schválenia: 11.04.2016

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
šľudent

.....
šľkoliteľ

Podakovanie:

Na tomto mieste by som sa chcela veľmi pekne poďakovať školiteľovi doc. Mgr. Jánovi Mačutkovi, PhD. za pomoc pri výbere vhodných študijných materiálov, za ochotu vždy poradiť a pomôcť pri zložitejších aj menej zložitých problémoch a za veľkú trpezlivosť. Za trpezlivosť a podporu ďakujem tiež celej svojej rodine a priateľom.

Abstrakt

Parciálne sumácie rozdelení pravdepodobnosti boli zatiaľ skúmané prevažne v jednorozmernom prípade, kedy sa jedno rozdelenie pravdepodobnosti nazývané rodič pomocou sumácie transformuje na iné rozdelenie pravdepodobnosti nazývané potomok. V našej práci sa najprv venujeme konkrétnym jednorozmerným rozdeleniam, pričom skúmame, aký potomok vznikne z konkrétneho rozdelenia pravdepodobnosti a konkrétnej parciálnej sumácie. Ďalšie kapitoly sú zamerané na dvojrozmerné parciálne sumácie a sústreďujú sa na rozšírenie známych poznatkov z jednorozmerného prípadu, konkrétne odvodzame vzťah medzi vytvárajúcimi funkciami a momentami rodiča a potomka, formulujeme nutnú a postačujúcu podmienku pre invariantnosť parciálnych sumácií (podmienok, za ktorých je rodič totožný s potomkom). Tiež skúmame postupnosti rozdelení pri iterovaných parciálnych sumáciách, pričom sa obmedzujeme len na rozdelenia s konečným nosičom.

Kľúčové slová: diskkrétne rozdelenia pravdepodobnosti, dvojrozmerné rozdelenia, parciálne sumácie, charakteristiky rozdelení, postupnosti rozdelení

Abstract

Partial summations of probability distributions have been studied so far mainly for the one-dimensional case, where one probability distribution called a parent is transformed into another probability distribution called a descendant by a summation. In this work, we first investigate several specific cases of one-dimensional partial summations. Specifically, we derive relations between the probability generating functions and moments of the parent and the descendant. We formulate a necessary and sufficient condition for invariance of the partial summations (conditions under which the parent is identical with the descendant). We also examine the sequences of the distributions created by iterated partial sums, restricting ourselves to distributions with a finite support.

Keywords: discrete probability distributions, bivariate distributions, partial summations, characterizations of distributions, sequences of distributions

Predhovor

Počas štúdia na fakulte sme sa ako študenti pomerne často stretávali s diskretnými rozdeleniami pravdepodobnosti. Môj záujem o túto tému bol umocnený bakalárskou a diplomovou prácou, ktoré sa tiež viac či menej týkali rôznych rozdelení.

Parciálne sumácie sú od začiatku blízko späté s diskretnými rozdeleniami, nakoľko sa na ne dá tiež nahliadať ako na ich jednoznačnú charakterizáciu. Dalo by sa dokonca povedať, že ich doménou sú práve diskkrétne rozdelenia, keďže v spojitom prípade sa im dostalo zatiaľ minima pozornosti.

Výskum doteraz zväčša prebiehal iba v jednorozmernom prípade, preto sme sa snažili túto oblasť obohatiť o výsledky z dvojrozmerných rozdelení. Väčšina prezentovaných výsledkov je preto rozšírením známych výsledkov na dvojrozmerné parciálne sumácie. Tretia a čiastočne siedma kapitola zostávajú pri jednorozmerných sumáciách.

Hlavnými piliermi tejto práce sú práce [33], [8], [19], [21] a [9]. Posledný zmienený článok, ktorý je jedným z posledných publikovaných v tejto oblasti, hovorí o využití poznatkov z teórie matíc pri opakovaných sumáciách. Tieto zaujímavé výsledky sme rozšírili v šiestej kapitole.

Hoci bolo v poslednom čase prezentovaných niekoľko nových výsledkov týkajúcich sa témy parciálnych sumácií diskretných rozdelení, nedá sa považovať za uzavretú. Stále sa vynárajú zaujímavé súvislosti a prepojenia, ale tiež aj nové otázky.

Obsah

Úvod	11
1 Diskrétna rozdelenia pravdepodobnosti	12
2 Parciálne sumácie	14
2.1 Všeobecná definícia	14
2.2 Typy parciálnych sumácií	14
2.3 Spojitá analógia parciálnych sumácií	18
2.4 Opakované parciálne sumácie	18
3 Kombinovanie rodičovského rozdelenia a sumácie	20
3.1 Geometrická sumácia	21
3.2 Geometrické rodičovské rozdelenie	28
4 Dvojrozmerné parciálne sumácie	33
4.1 Vzťah medzi vytvárajúcou funkciou rodiča a potomka	33
4.2 Momenty	35
5 Invariantnosť vzhľadom na parciálne sumácie	37
5.1 Teoretické odvodenie	37
5.2 Príklady	39
5.2.1 Dvojrozmerné Phatakovo - Sreehariho geometrické rozdelenie	39
5.2.2 Dvojrozmerné Hawkesovo geometrické rozdelenie	40
5.2.3 Dvojrozmerné Ashovo - Sankaranovo geometrické rozdelenie	42
5.2.4 Dvojrozmerné Nairovo - Nairovo geometrické rozdelenie	43
5.2.5 Dvojrozmerné hypergeometrické rozdelenie	44
5.2.6 Dvojrozmerné inverzné hypergeometrické rozdelenie	46
5.2.7 Dvojrozmerné negatívne hypergeometrické rozdelenie	47
5.2.8 Dvojrozmerné negatívne inverzné hypergeometrické rozdelenie	48
5.2.9 Dvojrozmerné Pólyovo rozdelenie	49
5.2.10 Dvojrozmerné inverzné Pólyovo rozdelenie	50
5.2.11 Dvojrozmerné negatívne binomické rozdelenie	51

5.2.12	Dvojrozmerné Waringovo rozdelenie	51
6	Opakované parciálne sumácie	53
6.1	Mocninová metóda	53
6.2	Teoretický základ	55
6.3	Príklad - dvojrozmerné inverzné hypergeometrické rozdelenie	58
6.4	Príklad - dvojrozmerné negatívne hypergeometrické rozdelenie	62
7	Oscilujúce postupnosti rozdelení	65
7.1	Oscilujúce postupnosti rozdelení s nosičom veľkosti dva	66
7.1.1	Oscilujúce postupnosti rozdelení s nosičom veľkosti tri	67
7.2	Oscilujúce postupnosti rozdelení pri dvojrozmerných parciálnych sumáciách .	72
	Záver	74
	Literatúra	75

Úvod

V tejto dizertačnej práci skúmame parciálne sumácie pre jedno- a dvojrozmerné diskkrétne rozdelenia a ich vlastnosti. V prvej kapitole prinášame stručný prehľad podstatných, niekedy primárne prehľadovo orientovaných, publikácií zameraných na jednorozmerné aj viac-rozmerné diskkrétne rozdelenia. V druhej kapitole sa nachádza prehľad toho, čo bolo do-siaľ publikované pre parciálne sumácie vrátane článkov s aplikáciou v rôznych odvetviach pravdepodobnosti a štatistiky. Výskum parciálnych sumácií sa doteraz orientoval prevažne na jednorozmerné parciálne sumácie, táto práca prináša nové výsledky pre jedno, ale najmä pre dvojrozmerné rozdelenia. Tretia kapitola sa ako jediná venuje spomínaným jednorozmer-ným parciálnym sumáciám, pričom sa zameriava hlavne na geometrické rozdelenie.

Vzťah medzi vytvárajúcimi funkciami rodiča a potomka je prezentovaný vo štvrtej kapitole spolu s inými teoretickými výsledkami. V nasledujúcej piatej kapitole je rozobratý prob-lém invariantnosti a je poskytnutých množstvo výsledkov pre rôzne verzie dvojrozmerného geometrického rozdelenia a pre rozdelenia hypergeometrického typu.

Pri jednorozmerných parciálnych sumáciách boli vo viacerých publikáciách skúmané tzv. opa-kované parciálne sumácie, pričom nedávno bol zaznamenaný pokrok v tomto smere pre roz-delenia definované na konečnom nosiči. V šiestej kapitole ponúkame rozšírenie opakovaných parciálnych sumácií pre dvojrozmerné diskkrétne rozdelenia. Výsledky sú dosiahnuté pomocou mocninovej metódy, ktorá bola aplikovaná pri jednorozmerných opakovaných parciálnych su-máciách. Následne sú podrobne rozobraté niektoré zaujímavé prípady pre limity postupností rozdelení hypergeometrického typu.

Siedma kapitola poukazuje na zatiaľ neskúmané prípady oscilácie postupností pravdepodob-ností získaných pomocou opakovaných parciálnych sumácií. Sú v nej zaznamenané oscilujúce postupnosti pre vybrané príklady v jednorozmernom aj dvojrozmernom prípade.

Kapitola 1

Diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti

V publikácii [28] nachádzame praktický prehľad viac ako 750 diskretných pravdepodobnostných rozdelení aj s ich vzájomnými prepojeniami. Nájdeme tu tiež špeciálne prípady rozdelení, ich zovšeobecnenia a triedy rozdelení. Autori uvádzajú aj vytvárajúce funkcie rozdelení pravdepodobnosti a množstvo užitočných referencií.

Monografia [4] tiež zahŕňa bibliografické odkazy pre hlbší výskum. Obsahuje navyše vlastnosti popisovaných rozdelení, rôzne charakteristiky, odhady parametrov, spriaznené rozdelenia a mnoho iného. Tretia edícia tejto monografie, ktorá vyšla v roku 2005, bola reorganizovaná a obohatená v porovnaní s predchádzajúcimi dvoma aj o množstvo nových referencií a sú v nej tiež zahrnuté nové objavy a výsledky.

Zaujímavý náhľad do viacerých diskretných rozdelení odvodených hlavne pomocou urnových schém ponúka publikácia [5], v ktorej sa autori zameriavajú nielen na jednorozmerné ale v poslednom rade aj na viacrozmerné rozdelenia. Za zmienku určite stoja tiež popísané aplikácie týchto rozdelení v rôznych oblastiach ako genetike, náhodnom výbere, testovaní a iných. Autori knihu končia limitnými rozdeleniami pre urnové schémy.

Z literatúry v slovenskom jazyku odporúčame siahnuť po knihe [27], ktorá sa podrobne venuje jednorozmerným diskretným rozdeleniam. Nájdeme v nej základné vlastnosti mnohých diskretných rozdelení ako sú vytvárajúce funkcie, momenty či odhady parametrov. Tiež sa tu autor venuje vzťahom jednotlivých rozdelení k iným rozdeleniam, triedam rozdelení a praktickým príkladom z jazykovedy. Zaujímavou časťou je rozbor Ordovej triedy rozdelení obsahujúcou Ordovo grafické zobrazenie niektorých rozdelení pravdepodobnosti z tejto triedy.

Pre dvojrozmerné a viacrozmerné diskkrétne rozdelenia pravdepodobnosti sú známe publikácie [7] a [6]. V [7] môžeme nájsť dvojrozmerné diskkrétne rozdelenia. Autori sa venujú interpretáciám rozdelení, ich vzájomným vzťahom, ale aj odhadom parametrov a testovaniu hypotéz. Nájdeme tu podrobný rozbor dvojrozmerných rozdelení odvodeným z urnových schém a tiež napríklad dvojrozmerné Poissonovo, negatívne binomické rozdelenie a iné.

Pre mnohorozmerné diskkrétne rozdelenia, ich vlastnosti a odhady parametrov odporúčame siahnuť po [6]. Nachádzajú sa tu rozbery najznámejších viacrozmerných diskrétnych rozdelení ako multinomického, viacrozmerného Poissonovho, mocninnej triedy rozdelení, hypergeometrického, Pólyovho-Eggenbergerovho a iných.

Kapitola 2

Parciálne sumácie

2.1 Všeobecná definícia

Nech sú $\{P_j^*\}_{j=0}^\infty$ a $\{P_j\}_{j=0}^\infty$ diskrétna rozdelenia pravdepodobnosti definované na nezáporných celých číslach a nech $u(x, j)$ je reálna funkcia. Potom ak platí vzťah

$$P_x = \sum_{j=x}^{\infty} u(x, j) P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

tak vravíme, že $\{P_j\}_{j=0}^\infty$ je výsledkom parciálnej sumácie (tzv. potomkom) rozdelenia $\{P_j^*\}_{j=0}^\infty$ (tzv. rodiča).

Čo sa týka viacrozmerných parciálnych sumácií, jediná zmienku sme našli v [8], kde sa autori na parciálne sumácie pozerajú z hľadiska teórie spoľahlivosti. Definujú dvojrozmerné parciálne sumácie ako rozšírenie parciálnej sumácie

$$P_x = c \sum_{j=x}^{\infty} P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

(tomuto typu parciálnej sumácie sa ešte budeme venovať ďalej) vzťahom

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = \frac{P(X_1 > y_1, X_2 > y_2)}{E(X_1 X_2)}$$

a skúmajú ich vzťah voči poruchovosti.

2.2 Typy parciálnych sumácií

Parciálne sumácie definované vzťahom (2.1) sú zovšeobecnením typov, ktoré dostaneme vhodnou voľbou funkcie $u(x, j)$. V práci [19] sú analyzované dva typy parciálnych sumácií, a to

$$P_x = \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

a

$$P_x = h(x) \sum_{j=x}^{\infty} P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Pre sumácie (2.2) a (2.3) bolo v tejto práci ukázané, za akých podmienok zostáva rodič invariantný (t.j. $P_x^* = P_x$, $x = 0, 1, 2, \dots$). Nech pre rodiča $\{P_x^*\}_{x=0}^\infty$ platí rekurentný vzťah

$$P_{x+1}^* = f(x+1)P_x^*, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

potom pre sumáciu (2.2) je rodič rovnaký ako potomok práve vtedy, keď

$$g(x) = 1 - f(x+1) = 1 - \frac{P_{x+1}^*}{P_x^*},$$

kde $x = 0, 1, 2, \dots$. Pri sumácii (2.3) (tiež ak platí (2.4)) je to práve vtedy, keď

$$h(x) = \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^j f(x+k)\right)^{-1},$$

pre $x = 0, 1, 2, \dots$. Pre takéto funkcie $g(x)$ a $h(x)$ sú poskytnuté príklady s príslušnými rozdeleniami pravdepodobnosti, ako príklad uvádzame Poissonovo rozdelenie s parametrom λ :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \frac{\lambda}{x+1}, \\ g(x) &= \frac{x - \lambda + 1}{x+1}, \\ h(x) &= \frac{1}{{}_1F_1(1; x+1; \lambda)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

kde ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$ je tzv. hypergeometrická funkcia definovaná ako

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}$$

s $(a)_n$ tzv. Pochhammerovým symbolom

$$(a)_n = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1).$$

V [19] sú uvedené aj vzťahy medzi vytvárajúcimi funkciami rodiča a potomka. Označme μ^* strednú hodnotu rodiča, $G^*(t)$ vytvárajúcu funkciu rodiča a $G(t)$ vytvárajúcu funkciu potomka. Platí

$$G(t) = \frac{c_1}{1-t} \left(1 - tG^*(t) - \sum_{x=0}^{\infty} P_x^* f(x+1)(1-t^{x+1})\right), \quad (2.6)$$

kde

$$c_1 = \frac{1}{1 + \mu^* - \sum_{x=0}^{\infty} (x+1)f(x+1)P_x^*},$$

ak postupnosť $\{\sum_{j=x}^{\infty} g(j)P_j^*\}_{x=0}^{\infty}$ nemení znamienko.

Článok [17] uvádza, že rozdelenia z Katzovej triedy, pre ktorú platí

$$P_{j+1}^* = \frac{\alpha + \beta j}{1+j} P_j^*, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \alpha \geq 0, \beta < 1$$

a ak pre $n \in \{1, 2, \dots\}$ platí $\alpha + \beta n < 0$, tak $P_{n+j}^* = 0$, sú invariantné vzhľadom na (2.2) práve vtedy, keď

$$g(j) = 1 - \frac{\alpha + \beta j}{1 + j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \alpha \geq 0, \beta < 1. \quad (2.7)$$

Na základe (2.7) definuje *Katzovu triedu parciálnych sumácií* $(\alpha, \beta, \{P_j^*\}_{j=0}^\infty)$ s rozdelením pravdepodobnosti

$$P_x = c \sum_{j=x}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha + \beta j}{1 + j}\right) P_j^*. \quad (2.8)$$

Pre Katzovu triedu parciálnych sumácií s (2.8) odvádza vzťah medzi vytvárajúcimi funkciami a faktorovými momentami.

V článku [20] sa autor pozerá na parciálnu sumáciu (2.1), jej typom (2.2) a prepojeniami rozdelení vo svetle modelov v lingvistike.

Nasledujúce časti obsahujú špeciálne typy parciálnej sumácie (2.1).

1. Pre $h(x) = c$ (konštanta) z (2.3) dostávame parciálnu sumáciu

$$P_x = c \sum_{j=x}^{\infty} P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

V článku [32] bolo ukázané, že vzhľadom na túto parciálnu sumáciu je geometrické rozdelenie jediným invariantným rozdelením (teda geometrické rozdelenie je jediné, pre ktoré platí $P_x^* = P_x$, $x = 0, 1, 2, \dots$). Tento výsledok bol aplikovaný v analýze rozdelenia príjmov a v manažmente zásobovania.

V článkoch [24] a [25], ktoré sa venujú teórii spoľahlivosti, využívajú autori charakterizáciu práve geometrického rozdelenia založenú na parciálnej sumácii (2.9). Na článok [24] nadväzuje [8], v ktorom autori navyše skúmajú vzťah poruchovosti a parciálnej sumácie (2.9) (pozri časť 2.1).

2. Uvažujme teraz prípad, keď

$$P_x = c \sum_{j=x+1}^{\infty} \frac{P_j^*}{j}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.10)$$

kde $g(j) = \frac{c}{j}$ z (2.2), c je normalizačná konštanta. V [34] bolo ukázané, že Yuleovo rozdelenie definované ako

$$P_x = \frac{\rho x!}{(\rho + 1)_{(x+1)}}, \quad \rho > 0, \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $a_{(b)} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)}$, $a > 0, b > 0$, je jediné rozdelenie, ktoré zostáva invariantné pri parciálnej sumácii (2.10).

Článok [29] uvádza, že STER (Sums successively Truncated from the Expectation of the Reciprocal of a random variable) rozdelenia sa dajú zapísať pomocou sumácie (2.10).

Zovšeobecnenie sumácie (2.10) môžeme nájsť v [18] v tvare

$$P_x(k, l) = A(k, l) \sum_{j=x}^{\infty} \frac{1}{j+l} P_{j+k}^* \quad (2.11)$$

pre $x = 0, 1, 2, \dots$ a k, l také celé čísla, že $k \geq 0$ a $l \geq 1$. V článku sa tiež nachádza rekurzívny vzťah pre výpočet rozdelenia $\{P_x(k, l)\}_{x=0}^{\infty}$, vzťah medzi vytvárajúcimi funkciami rozdelení $\{P_x(k, l)\}_{x=0}^{\infty}$ a $\{P_x^*\}_{x=0}^{\infty}$ a vzťah medzi ich klesajúcimi faktoriálnymi momentami. Autor sa tiež vyjadruje k problému invariantnosti.

Parciálne sumácie typu (2.9) a (2.10) boli v článku [31] použité v modeloch v muzikológii a lingvistike.

3. Nasledujúci typ parciálnych sumácií sa využíva pri kvantitatívnom modelovaní v lingvistike a v muzikológii. Pre $h(x) = \frac{c}{x}$ z (2.3) dostávame

$$P_x = \frac{c}{x} \sum_{j=x}^{\infty} P_j^* \quad (2.12)$$

pre $x = 0, 1, 2, \dots$. V práci [30] autori ukázali, že sumácia (2.12) necháva rozdelenie nezmenené práve vtedy, keď je rodičovské rozdelenie 1-useknuté Salviovo - Bolingerovo rozdelenie definované pre $a \in (0, 1)$ ako

$$P_x = (-1)^{x-1} \binom{a}{x}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

Ukazujú tiež vzťahy medzi vytvárajúcimi funkciami rodiča a potomka a medzi ich klesajúcimi faktoriálnymi momentami.

4. V článku [15] sa autori venujú modelom rizika. Zdôrazňujú, že teoretické modely využívajú prevažne koncept spojitého času, v praxi sú však často uprednostňované diskkrétne modely (napríklad kvôli ľahkej programovateľnosti). Prinášajú prehľad diskkrétnych modelov a poukazujú na to, že aj tieto diskkrétne modely môžu byť užitočné, napríklad na ohraňenie alebo aproximáciu korešpondujúcich modelov využívajúcich spojitý čas. V modeloch rizika v [16] sa skúma napríklad čas zruinovania, prebytok tesne pred zruinovaním, deficit v čase ruinovania a iné. Pre tento výskum bola užitočná definícia operátora T_r definovaného v [14] na reálnych funkciách, ktoré sú definované na kladných celých číslach, ako

$$T_r f(y) = \sum_{x=y}^{\infty} r^{x-y} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} r^x f(x+y), \quad r \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{N}^+,$$

čo vedie k parciálnej sumácii

$$P_x = d \sum_{j=x}^{\infty} r^{j-x} P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

$r \in \mathbb{C}$, c normalizačná konštanta. Dodávame, že parciálna sumácia (2.13) je špeciálnym prípadom (2.2).

2.3 Spojitá analógia parciálnych sumácií

Nakoľko pre každé rozdelenie existuje práve jedna parciálna sumácia (2.2) taká, že nemení rodičovské rozdelenie ($P_x^* = P_x$, $x = 0, 1, 2, \dots$), môže byť parciálna sumácia braná ako jednoznačná charakterizácia diskretných rozdelení. Táto vlastnosť bola využitá v článku [22], v ktorom autori hľadali metódu na hľadanie spojitých analógií diskretných modelov v lingvistike a naopak. Ako spojitú analógiu parciálnej sumácie (2.2) definovali

$$\varphi(x) = \int_x^\infty \gamma(t) \varphi^*(t) dt, \quad (2.14)$$

kde $\varphi(x), \varphi^*(x)$ sú hustoty, $\varphi(x)$ je diferencovateľná na $(0, \infty)$, $\varphi(x) = \varphi^*(x) = 0$ pre $x < 0$ a $\varphi(x) > 0$ pre $x > 0$.

Spojitémi parciálnymi sumáciami sa tiež zaoberala práca [21]. Autor skúmal analógiu exponenciálneho rozdelenia s geometrickým z pohľadu parciálnych sumácií. Ukazuje, že vzhľadom na vzťah

$$\varphi(x) = k \int_x^\infty \varphi^*(t) dt,$$

je exponenciálne rozdelenie jediné invariantné.

2.4 Opakované parciálne sumácie

Opakované parciálne sumácie pre sumáciu (2.9) boli zadefinované v článku [21] nasledovne. Nech $\{P_x^{(1)}\}_{x=0}^\infty, \{P_x^{(2)}\}_{x=0}^\infty, \dots, \{P_x^{(n)}\}_{x=0}^\infty, \dots$ sú rozdelenia pravdepodobnosti na nezáporných celých číslach vygenerované z rozdelenia $\{P_x^*\}_{x=0}^\infty$ pomocou parciálnej sumácie (2.9):

$$\begin{aligned} P_x^{(1)} &= c_1 \sum_{j=x}^\infty P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \\ P_x^{(2)} &= c_2 \sum_{j=x}^\infty P_j^{(1)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \\ &\vdots \\ P_x^{(n)} &= c_n \sum_{j=x}^\infty P_j^{(n-1)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.15)$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ sú normalizačné konštanty.

Pomocou vytvárajúcich funkcií autor ukazuje, že limitné rozdelenie

$$P_x^{(\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_x^{(n)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

takýchto opakovaných parciálnych sumácií existuje, ak existuje

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_{x+1}^*}{P_x^*} = q$$

a $0 \leq q < 1$. Limitné rozdelenie je buď deterministické (pre $q = 0$), alebo geometrické s parametrom q (pre $0 < q < 1$).

Zovšeobecnením (2.15) sú opakované parciálne sumácie vychádzajúce z (2.2). Nech $\{P_x^*\}_{x=0}^\infty$ je rodičovské rozdelenie pravdepodobnosti definované na nezáporných celých číslach a

$$\begin{aligned} P_x^{(1)} &= c_1 \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \\ P_x^{(2)} &= c_2 \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^{(1)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \\ &\vdots \\ P_x^{(n)} &= c_n \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^{(n-1)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.16}$$

kde $\{P_x^{(1)}\}_{x=0}^\infty, \{P_x^{(2)}\}_{x=0}^\infty, \dots, \{P_x^{(n)}\}_{x=0}^\infty, \dots$ sú rozdelenia pravdepodobnosti na nezáporných celých číslach, $g(j)$ je reálna funkcia a $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ sú normalizačné konštanty.

V [9] boli skúmané takto definované opakované parciálne sumácie s rodičom definovanom na konečnom nosiči. Využitím mocninovej metódy bola za určitých podmienok ukázaná konvergencia a bol nájdený limitný potomok $P_x^{(\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_x^{(n)}, x = 0, 1, 2, \dots$

V šiestej kapitole tejto práce rozširujeme tento výsledok pre dvojrozmerné opakované parciálne sumácie definované na konečnom nosiči.

Kapitola 3

Kombinovanie rodičovského rozdelenia a sumácie

Viac svetla do vzťahu rodiča, potomka a parciálnej sumácie priniesol článok [33]. Autori ukázali, že dve rozdelenia pravdepodobnosti $\{P_x\}_{x=0}^{\infty}$ a $\{P_x^*\}_{x=0}^{\infty}$ definované na $\mathbb{N}_0$ so všetkými pravdepodobnosťami nenulovými spĺňajú (2.1) pre

$$u(x, j) = u(j) = \frac{P_j^* - P_{j+1}^*}{P_j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Ako dôsledok bolo uvedené, že nemá zmysel hovoriť o triede parciálnych sumácií s napríklad Poissonovským rodičom, keďže všetky rozdelenia s nosičom $\mathbb{N}_0$ s nenulovými pravdepodobnosťami môžu byť vyjadrené ako potomkovia Poissonovského rodiča a nejakej funkcie $u(x, j)$. Preto ak chceme vybudovať triedu rozdelení, musíme fixovať dva z troch prvkov - rodič, potomok, funkcia $u(x, j)$. Vtedy je tretí prvok jednoznačne určený (v prípade rozdelení s nosičom $\mathbb{N}_0$ s nenulovými pravdepodobnosťami), inak je rozdiel spôsobený normalizačnou konštantou. Tiež ale môže nastať prípad, že dvaja rozdielni rodičovia s dvoma rôznymi funkciami $u(x, j)$ vyústia do rovnakých potomkov.

Táto kapitola sa venuje jednorozmerným parciálnym sumáciám, konkrétne parciálnym sumáciám typu (2.2):

$$P_x = c \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Zaujímavým problémom je otázka, čo vznikne z nejakého konkrétneho rodičovského rozdelenia a jemu nezodpovedajúcej parciálnej sumácie v zmysle, že je sumácia $g(x)$ rôzna od tej, ktorá necháva rodiča nezmeneného. Pre nájdenie takéhoto potomka využívame vetu z článku [19], prípadne priame odvodenie z definície (3.2).

V [19] bolo ukázané, že ak má rodičovské rozdelenie vytvárajúcu funkciu $G^*(t)$, potom je vytvárajúca funkcia potomka $G(t)$

$$G(t) = \frac{c_1}{1-t} \left(1 - tG^*(t) - \sum_{x=0}^{\infty} P_x^* (1 - g(x)) (1 - t^{x+1}) \right), \quad (3.3)$$

pričom

$$c_1 = \frac{1}{1 + \mu^* - \sum_{x=0}^{\infty} (x+1)f(x+1)P_x^*}$$

a μ^* je stredná hodnota rodiča.

Na začiatok uvažujme najjednoduchší prípad a to sumáciu zodpovedajúcu gometrickému rozdeleniu.

3.1 Geometrická sumácia

V prípade, že uvažujeme geometrickú sumáciu, je funkciou $g(x)$ taká funkcia, ktorá necháva nezmenené geometrické rozdelenie, a takouto funkciou je konštanta (pozri [19]). Pre geometrickú sumáciu, ktorá zodpovedá geometrickému rozdeleniu $Geo(p)$ je

$$g(x) = p, \quad p \in (0, 1).$$

Vytvárajúca funkcia potomka v tomto prípade po odvodení zo vzťahu (3.3) je

$$G(t) = \frac{1}{1 + \mu^*} \frac{1 - tG^*(t)}{1 - t}, \quad (3.4)$$

kde μ^* je stredná hodnota rodiča a $G^*(t)$ jeho vytvárajúca funkcia (pozri [19]). Môžeme si všimnúť, že toto vzniknuté rozdelenie je nezávislé na voľbe parametra p , teda nezávislé na hodnote funkcie $g(x)$.

Príklad 3.1. Ako prvého rodiča majme Poissonovo rozdelenie, ktorého rozdelenie pravdepodobnosti je

$$P_x^* = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

s nosičom $x = 0, 1, 2, \dots$. Potom rozdelenie potomka je

$$P_x = \frac{e^{-\lambda}}{1 + \lambda} \sum_{i=x}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Zapísané pomocou gama funkcie

$$P_0 = \frac{1}{1 + \lambda},$$

$$P_x = \frac{1}{1 + \lambda} \left(1 - \frac{\Gamma(x, \lambda)}{\Gamma(x)} \right), \quad x = 1, 2, \dots,$$

kde $\Gamma(x, \lambda)$ je nekompletná gama funkcia, pre ktorú platí

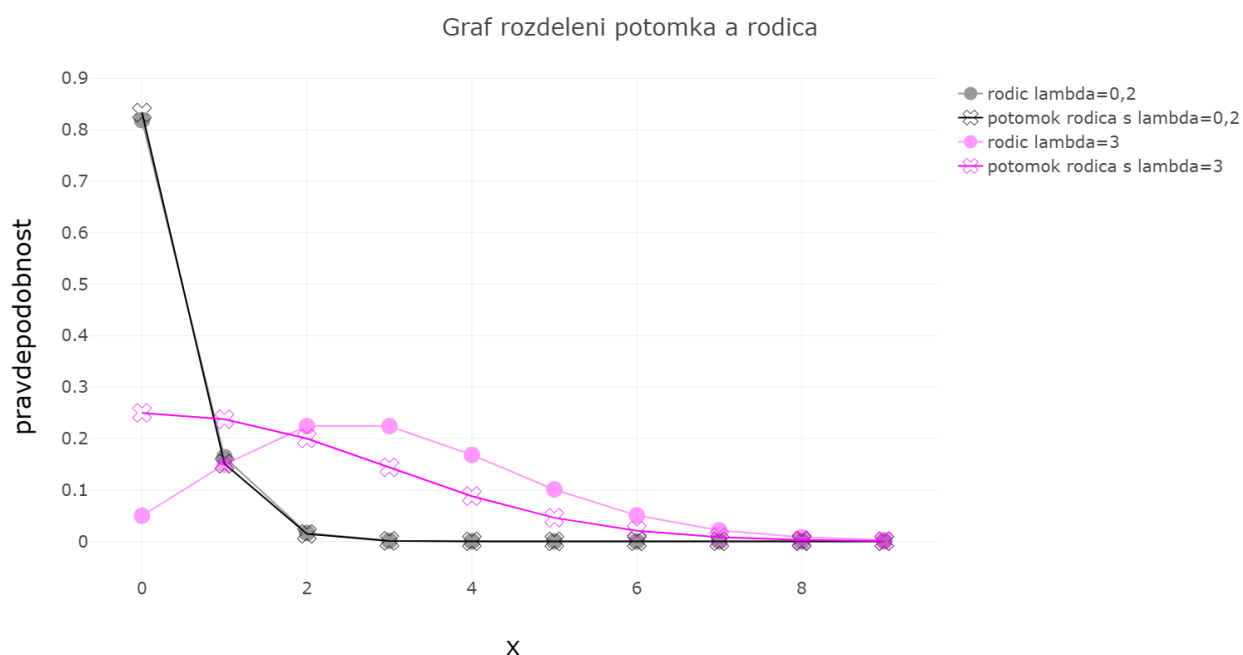
$$\Gamma(x, \lambda) = (x-1)! e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{x-1} \frac{\lambda^i}{i!}$$

a

$$\Gamma(x) = (x-1)!$$

pre $x = 1, 2, 3, \dots$

Pre lepšiu názornú predstavu uvádzame konkrétne príklady rozdelení. Na obrázku 3.1 sú vykreslené čiernou farbou hodnoty pravdepodobností rodičovského rozdelenia Poissonovho s parametrom $\lambda = 0,2$ s guľičkami a jeho potomoka s krížikmi pri spomínanej geometrickej sumácii. Ružovou farbou je rovnako vykreslený Poissonovský rodič a jeho potomok s parametrom $\lambda = 3$. V tabuľke 3.1 sú zaznamenané hodnoty vykreslených pravdepodobností.



Obr. 3.1: Rozdelenia pravdepodobnosti pri geometrickej sumácii a rodičovskom rozdelení Poissonovom s parametrami $\lambda = 0,2$ a $\lambda = 3$.

	$\lambda = 0, 2$				
	0	1	2	3	4
P_x^*	0,81873075	0,1637462	0,01637462	0,0010916410	$5,458205 \cdot 10^{-5}$
P_x	0,83333333	0,1510577	0,01460258	0,0009570677	$4,736687 \cdot 10^{-5}$
	5	6	7	8	9
P_x^*	$2,183282 \cdot 10^{-6}$	$7,277607 \cdot 10^{-8}$	$2,079316 \cdot 10^{-9}$	$5,198290 \cdot 10^{-11}$	$1,155176 \cdot 10^{-12}$
P_x	$1,881825 \cdot 10^{-6}$	$6,242377 \cdot 10^{-8}$	$1,777045 \cdot 10^{-9}$	$4,428173 \cdot 10^{-11}$	$9,626464 \cdot 10^{-13}$
	$\lambda = 3$				
	0	1	2	3	4
P_x^*	0,04978707	0,1493612	0,22404181	0,2240418077	$1,680314 \cdot 10^{-1}$
P_x	0,24972438	0,2372776	0,19993731	0,1439268577	$8,791641 \cdot 10^{-2}$
	5	6	7	8	9
P_x^*	$1,008188 \cdot 10^{-1}$	$5,040941 \cdot 10^{-2}$	$2,160403 \cdot 10^{-2}$	$8,101512 \cdot 10^{-3}$	$2,700504 \cdot 10^{-3}$
P_x	$4,590857 \cdot 10^{-2}$	$2,070386 \cdot 10^{-2}$	$8,101512 \cdot 10^{-3}$	$2,700504 \cdot 10^{-3}$	$6,751260 \cdot 10^{-4}$

Tabuľka 3.1: Rozdelenia pravdepodobnosti pri geometrickej sumácii a rodičovskom rozdelení Poissonovom s parametrami $\lambda = 0, 2$ a $\lambda = 3$.

Vytvárajúcu funkciu potomka získame po dosadení vytvárajúcej funkcie rodiča, ktorým je Poissonovo rozdelenie,

$$G^*(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

a jeho strednej hodnoty $\mu^* = \lambda$ do vzťahu (3.4) a jej tvar je

$$G(t) = \frac{1}{1+\lambda} \frac{1 - te^{\lambda(t-1)}}{1-t}.$$

Príklad 3.2. Ďalším rodičovským rozdelením je negatívne binomické s rozdelením pravdepodobnosti

$$P_x^* = \binom{x+k-1}{x} p^k (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

$p \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$. Je známe, že jeho vytvárajúca funkcia (pozri [28]) je

$$G^*(t) = \frac{p^k}{(1 - (1-p)t)^k}$$

a stredná hodnota

$$\mu^* = \frac{(1-p)k}{p}.$$

Potom je vytvárajúca funkcia potomka po odvodení z (3.4) rovná

$$G(t) = \frac{p}{p - (1-p)k} \left(\frac{1}{1-t} - p^k \frac{t}{(1-t)(1 - (1-p)t)^k} \right).$$

Z čoho derivovaním dostávame prvé pravdepodobnosti

$$P_0 = \frac{p}{p + (1-p)k},$$

$$P_1 = \frac{p}{p + (1-p)k}(1-p^k),$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{p}{p + (1-p)k}(2 - p^k(2 + 2(1-p)k)),$$

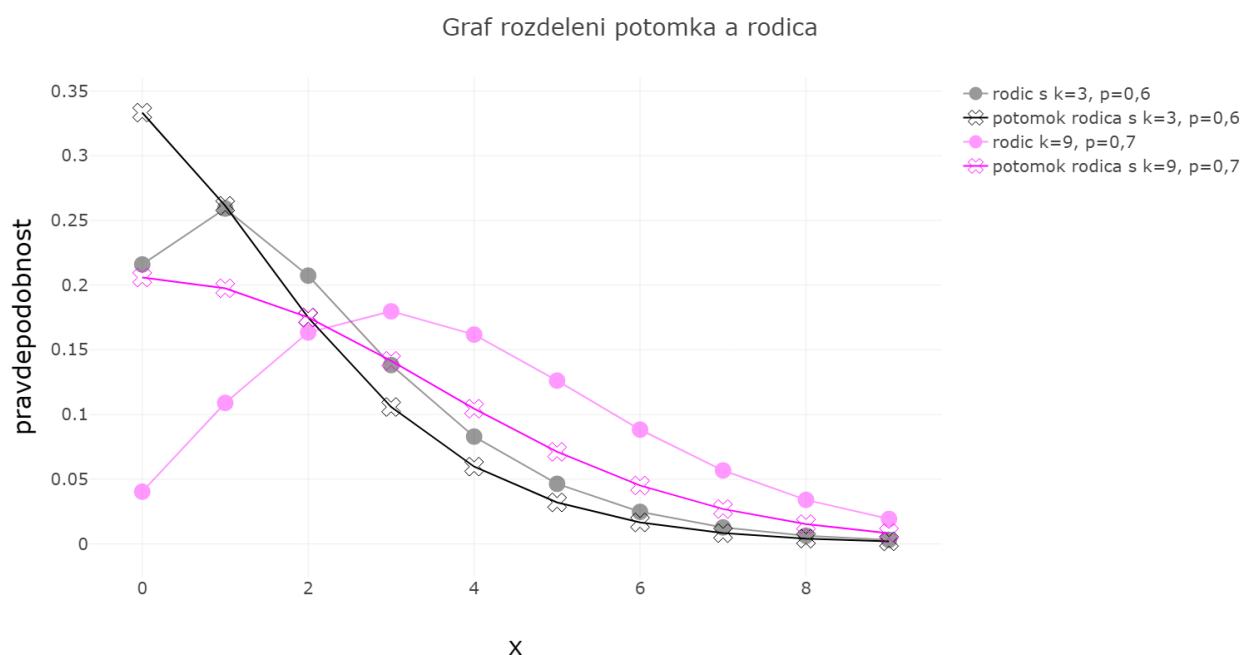
$$P_3 = \frac{1}{3!} \frac{p}{p + (1-p)k}(3! - p^k(3! + 3!(1-p)k + 3(1-p)^2k(k+1))),$$

$\vdots$

Rozdelenie pravdepodobnosti potomka potom je

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{x!} \frac{p}{p + (1-p)k} \left[x! - p^k \sum_{i=0}^{x-1} \frac{x!}{i!} (1-p)^i k^{(i-1)} \right] = \\ &= \frac{p}{p + (1-p)k} \left[1 - p^k \sum_{i=0}^{x-1} \frac{(1-p)^i k^{(i-1)}}{i!} \right], \quad x = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Na nasledujúcom obrázku 3.2 sú vykreslené rozdelenia pravdepodobnosti rodičovského negatívneho binomického rozdelenia guľičkami s parametrami $k = 3$ a $p = 0,6$ a jeho potomka krížikmi čiernou farbou. Rozdelenia prislúchajúce parametrom $k = 9$, $p = 0,7$ majú ružovú farbu. V tabuľke 3.2 sú vypísané hodnoty vykreslených pravdepodobností.



Obr. 3.2: Rozdelenia pravdepodobnosti pri geometrickej sumácii a rodičovskom rozdelení negatívne binomickom s parametrami $k = 3$; $p = 0,6$ a $k = 9$; $p = 0,7$.

	$k = 3$		$p = 0,6$		
	0	1	2	3	4
P_x^*	0,21600000	0,2592000	0,2073600	0,1382400	0,08294400
P_x	0,33333333	0,2613333	0,1749333	0,1058133	0,05973333
	5	6	7	8	9
P_x^*	0,04644864	0,02477261	0,012740198	0,006370099	0,003114271
P_x	0,03208533	0,01660245	0,008344917	0,004098185	0,001974818
	$k = 9$		$p = 0,7$		
	0	1	2	3	4
P_x^*	0,04035361	0,1089547	0,1634321	0,1797753	0,16179779
P_x	0,20588235	0,1975743	0,1751424	0,1414946	0,10448205
	5	6	7	8	9
P_x^*	0,12620227	0,08834159	0,056791023	0,034074614	0,019308948
P_x	0,07117074	0,04518792	0,026999942	0,015307672	0,008292310

Tabuľka 3.2: Rozdelenia pravdepodobnosti pri geometrickej sumácii a rodičovskom rozdelení negatívne binomickom s parametrami $k = 3$; $p = 0,6$ a $k = 9$; $p = 0,7$.

Príklad 3.3. Ak je rodičovské rozdelenie hyper-Pascalovo s rozdelením pravdepodobnosti

$$P_x^* = \frac{1}{{}_2F_1(k, 1; m; q)} \frac{\binom{k+x-1}{x}}{\binom{m+x-1}{x}} q^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $k \geq 0$, $m > 0$ alebo $k, m < 0$, $[k] = [m]$, $m \neq -1, -2, -3, \dots$ a tiež platí, že

$$0 \leq q < 1, \quad k+1 \geq m > k \text{ alebo } k \geq m$$

alebo

$$0 \leq q \leq 1, \quad m > k+1$$

(pozri [28]), potom zodpovedajúca vytvárajúca funkcia pre toto rozdelenie je

$$G^*(t) = \frac{{}_2F_1(k, 1; m; qt)}{{}_2F_1(k, 1; m; q)}.$$

Pre vytvárajúcu funkciu potomka potom dostávame z (3.4)

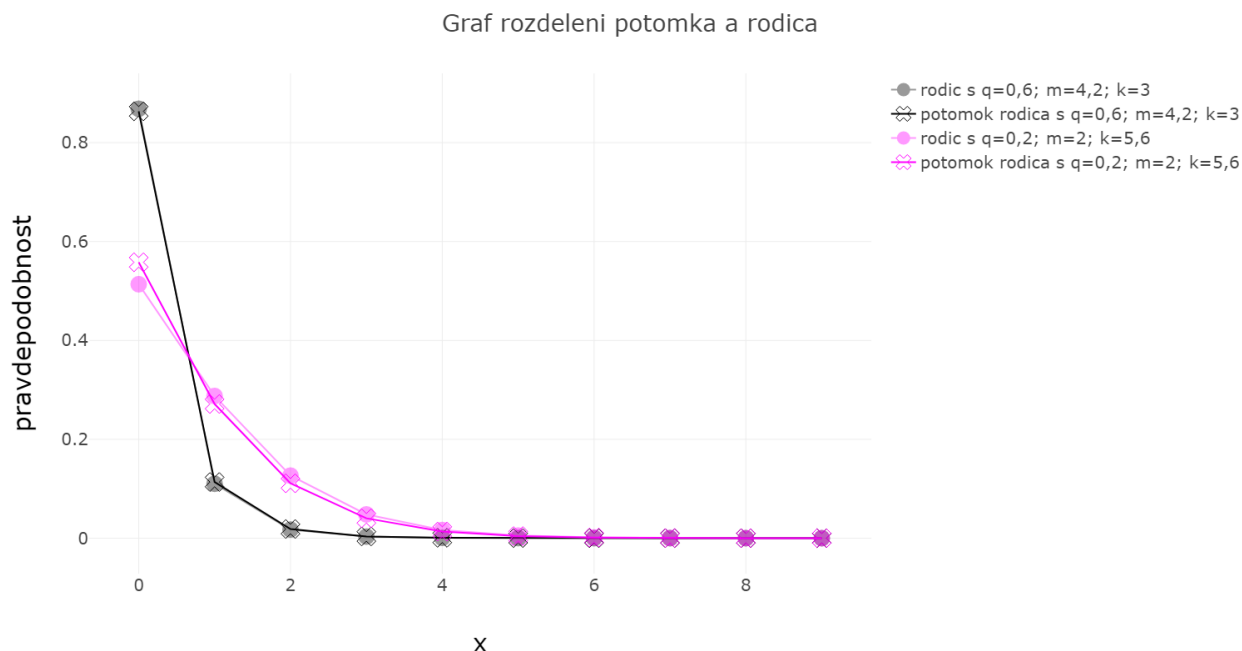
$$G(t) = \frac{{}_2F_1(k, 1; m; q) - t {}_2F_1(k, 1; m; qt)}{[{}_2F_1(k, 1; m; q)(1-k) + k {}_2F_1(k+1, 1; m; q)](1-t)}.$$

Rozdelenie pravdepodobnosti potomka získané pomocou vytvárajúcej funkcie

$$P_x = \frac{{}_2F_1(k, 1; m; q) - \sum_{i=0}^{x-1} \frac{q^i k^{(i)}}{m^{(i)}}}{{}_2F_1(k, 1; m; q)(1-k) + k {}_2F_1(k+1, 1; m; q)} \quad (3.5)$$

pre $x = 0, 1, 2, \dots$

Na obrázku 3.3 môžeme vidieť čiernou farbou rozdelenie pravdepodobnosti rodičovského Hyper-Pascalovho rozdelenia s parametrami $q = 0,6$, $m = 4,2$ a $k = 3$ guľičkami a pravdepodobnosti potomka rozdelenia (3.5) krížikmi. Ružovou farbou je znázornené toto rodičovské rozdelenie s parametrami $q = 0,2$, $m = 2$ a $k = 5,6$ a tiež pravdepodobnosti jeho potomka. V tabuľke 3.3 nižšie sú vypísané hodnoty vykreslených pravdepodobností.



Obr. 3.3: Rozdelenia pravdepodobnosti pri geometrickej sumácii a rodičovskom rozdelení hyper-Pascalovom s parametrami $q = 0,6$; $m = 4,2$; $k = 3$ a $q = 0,2$; $m = 2$; $k = 5,6$.

	$q = 0,6$	$m = 4,2$	$k = 3$		
	0	1	2	3	4
P_x^*	0,86843387	0,1100832	0,01738155	0,003218806	0,0006737036
P_x	0,8633220	0,1135840	0,01854675	0,003540877	0,0007620110
	5	6	7	8	9
P_x^*	0,0001554701	$3,886751 \cdot 10^{-5}$	$1,039033 \cdot 10^{-5}$	$2,940658 \cdot 10^{-6}$	$8,742497 \cdot 10^{-7}$
P_x	0,0001803879	$4,616723 \cdot 10^{-5}$	$1,261205 \cdot 10^{-5}$	$3,641852 \cdot 10^{-6}$	$1,103117 \cdot 10^{-6}$
	$q = 0,2$	$m = 2$	$k = 5,6$		
	0	1	2	3	4
P_x^*	0,5136312	0,2876335	0,12655872	0,048092314	0,0165437561
P_x	0,5580236	0,2714053	0,11089902	0,040276268	0,0134396227
	5	6	7	8	9
P_x^*	0,0052940020	$1,603326 \cdot 10^{-3}$	$4,649646 \cdot 10^{-4}$	$1,301901 \cdot 10^{-4}$	$3,541171 \cdot 10^{-5}$
P_x	0,0042078167	$1,253639 \cdot 10^{-3}$	$3,589449 \cdot 10^{-4}$	$9,948369 \cdot 10^{-5}$	$2,683455 \cdot 10^{-5}$

Tabuľka 3.3: Rozdelenia pravdepodobnosti pri geometrickej sumácii a rodičovskom rozdelení hyper-Pascalovom s parametrami $q = 0,6$; $m = 4,2$; $k = 3$ a $q = 0,2$; $m = 2$; $k = 5,6$.

Príklad 3.4. Hyperlogaritmické rozdelenie s parametrami m, q má rozdelenie pravdepodobnosti

$$P_x^* = \frac{x!q^x}{(m+1)^{(x)} {}_2F_1(1, 1; m+1; q)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

pre

$$0 < m \leq 1, \quad 0 \leq q < 1$$

alebo

$$m > 1, \quad 0 \leq q \leq 1$$

(pozri [28]).

Jeho vytvárajúca funkcia má tvar

$$G^*(t) = \frac{{}_2F_1(1, 1; m+1; qt)}{{}_2F_1(1, 1; m+1; t)}.$$

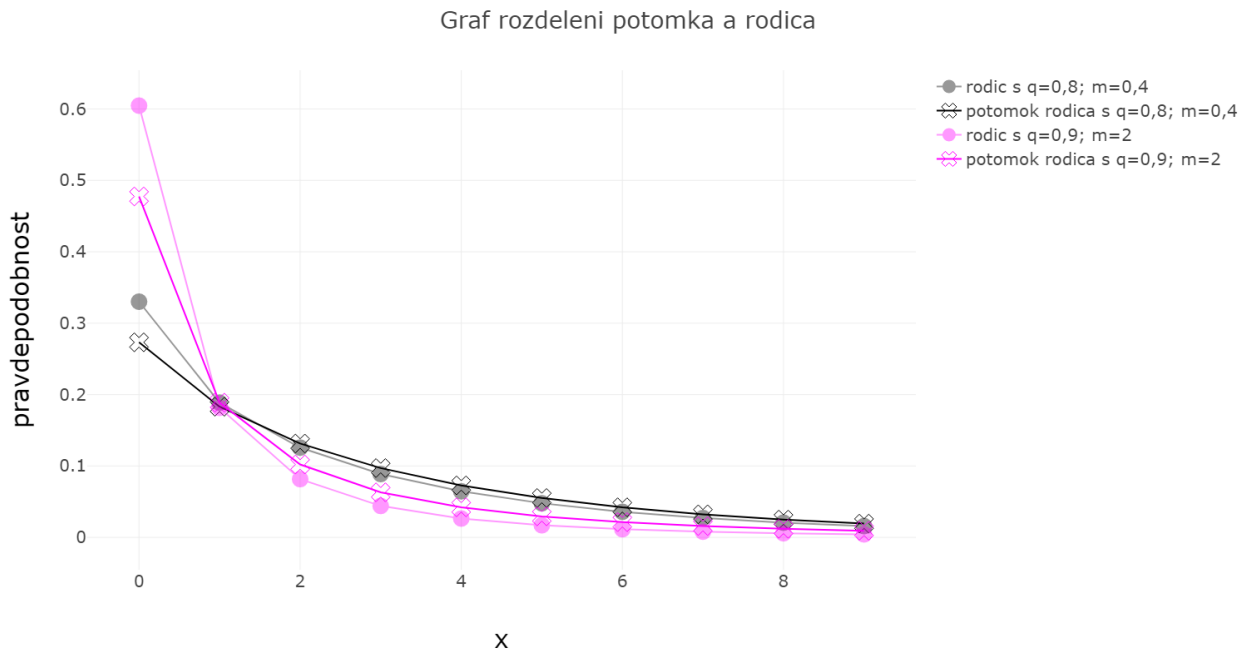
Potom z (3.4) po dosadení dostávame

$$G(t) = \frac{q {}_2F_1(1, 1; m+1; q)}{m [{}_2F_1(1, 1; m; q) - 1]} \frac{{}_2F_1(1, 1; m+1; t) - t {}_2F_1(1, 1; m+1; qt)}{(1-t) {}_2F_1(1, 1; m+1; t)},$$

čo je vytvárajúca funkcia zodpovedajúca rozdeleniu pravdepodobnosti

$$P_x = \frac{q {}_2F_1(1, x+1; m+x+1; q)}{m ({}_2F_1(1, 1; m+1; q) - 1)} \frac{x!q^x}{(m+1)^{(x)}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Na obrázku 3.4 môžeme vidieť vykreslené čiernou farbou hyperlogaritmické rodičovské rozdelenie s parametrami $q = 0,8$ a $m = 0,4$ s guľičkami a jeho potomka s krížikmi. Ružovou farbou je vykreslené toto rozdelenie s parametrami $q = 0,9$ a $m = 2$. Nižšie môžeme vidieť tabuľku 3.4 s vypísanými príslušnými pravdepodobnosťami.



Obr. 3.4: Rozdelenia pravdepodobnosti pri geometrickej sumácii a rodičovskom rozdelení hyperlogaritmicom s parametrami $q = 0,8$; $m = 0,4$ a $q = 0,9$; $m = 2$.

	$q = 0,8$	$m = 0,4$			
	0	1	2	3	4
P_x^*	0,3301369	0,1886497	0,12576645	0,08877632	0,06456459
P_x	0,2732036	0,1830090	0,13146923	0,09710939	0,07285538
	5	6	7	8	9
P_x^*	0,04782563	0,03586922	0,027144274	0,020681351	0,015841035
P_x	0,05521610	0,04214997	0,032350366	0,024934453	0,019284233
	$q = 0,9$	$m = 2$			
	0	1	2	3	4
P_x^*	0,6047109	0,1814133	0,08163598	0,04408343	0,02645006
P_x	0,4775051	0,1887525	0,10212677	0,06314518	0,04209512
	5	6	7	8	9
P_x^*	0,01700361	0,01147744	0,008034205	0,005784627	0,004259589
P_x	0,02946509	0,02134578	0,015865244	0,012028871	0,009266682

Tabuľka 3.4: Rozdelenia pravdepodobnosti pri geometrickej sumácii a rodičovskom rozdelení hyperlogaritmicom s parametrami $q = 0,8$; $m = 0,4$ a $q = 0,9$; $m = 2$.

3.2 Geometrické rodičovské rozdelenie

V prípade, že sumácia nie je geometrická, je situácia o niečo komplikovanejšia aj pre najjednoduchšie rodičovské rozdelenie - geometrické. Uvádzame dva príklady.

Príklad 3.5. Sumácia $g(x)$ vytvorená zo Salviovo-Bollingerovho rozdelenia s parametrom α má tvar

$$g(x) = \frac{\alpha + 1}{x + 2}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

(pozri [19]).

Pri takejto funkcii $g(x)$ pri parciálnej sumácii (3.2) je potomok rovný

$$\begin{aligned} P_x &= c \sum_{i=x}^{\infty} \frac{\alpha + 1}{i + 2} P_i^* = c(\alpha + 1) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i + 2} P_i^* - \sum_{i=0}^{x-1} \frac{1}{i + 2} P_i^* \right) = \\ &= c(\alpha + 1) \left(E_{P^*} \left(\frac{1}{X + 2} \right) - \sum_{i=0}^{x-1} \frac{1}{i + 2} P_i^* \right), \end{aligned}$$

kde normalizačná konštanta c je rovná

$$\frac{1}{c(\alpha + 1)} = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{i=x}^{\infty} \frac{1}{i + 2} P_i^* = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x + 1}{x + 2} P_x^* = \sum_{x=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x + 2} P_x^* \right) = 1 - E_{P^*} \left(\frac{1}{X + 2} \right)$$

a

$$E_{P^*} \left(\frac{1}{X + 2} \right) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x + 2} P_x^*.$$

Po dosadení dostávame potomka P_x

$$P_x = \frac{E_{P^*} \left(\frac{1}{X+2} \right) - \sum_{i=0}^{x-1} \frac{1}{i+2} P_i^*}{1 - E_{P^*} \left(\frac{1}{X+2} \right)}.$$

Môžeme si všimnúť, že potomok nezávisí od parametra sumácie α , iba od rodičovského rozdelenia.

V tomto prípade máme rodičovské rozdelenie pravdepodobnosti geometrické s parametrom p a stredná hodnota $E_{P^*} \left(\frac{1}{X+2} \right)$ je rovná

$$E_{P^*} \left(\frac{1}{X+2} \right) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x+2} p(1-p)^x = p \frac{-(1-p) - \ln(p)}{(1-p)^2}.$$

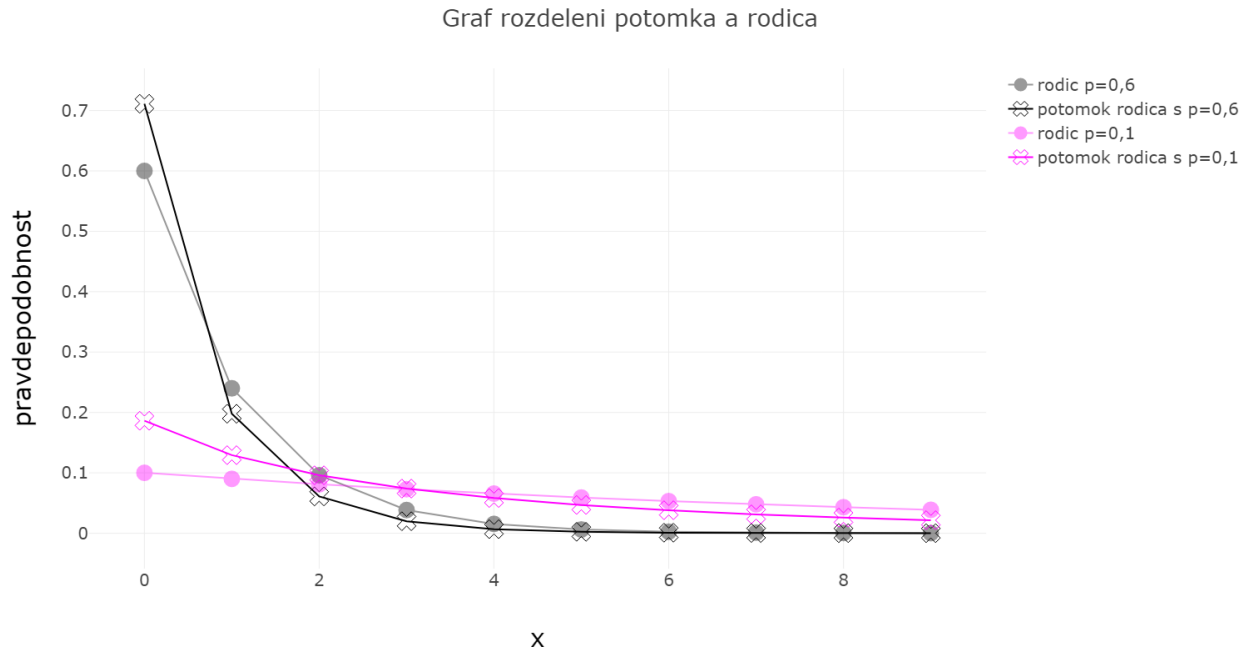
Pro geometrické rodičovské rozdelenie je potomok rovný

$$\begin{aligned} P_x &= c \sum_{i=x}^{\infty} \frac{\alpha+1}{i+2} P_i^* = \frac{1}{1 - E_{P^*} \left(\frac{1}{X+2} \right)} \sum_{i=x}^{\infty} \frac{1}{i+2} (1-p)^i p = \\ &= \frac{p(1-p)^x}{1 - E_{P^*} \left(\frac{1}{X+2} \right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-p)^k}{x+k+2}, \end{aligned}$$

teda výsledné rozdelenie potomka je

$$P_x = \frac{p(1-p)^{x+2}}{1-p+p \log p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-p)^k}{x+k+2}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Na obrázku 3.5 môžeme vidieť pre lepšiu predstavu o vzťahu rodiča a potomka vykreslené čiernou farbou a guľičkami rodičovské geometrické rozdelenie s parametrom $p = 0,6$ a rozdelenie jeho potomka (3.7) čiernou farbou krížikmi. Podobne, len ružovou farbou, sú rozdelenia prislúchajúce parametru $p = 0,1$. V tabuľke 3.5, ktorá nasleduje, sú zaznamenané hodnoty vykreslených pravdepodobností z obrázka 3.5.



Obr. 3.5: Rozdelenia pravdepodobnosti pri Salviovej-Bollingerovej sumácii a rodičovskom rozdelení geometrickom s parametrami $p = 0,6$ a $p = 0,1$.

	$p = 0,6$				
	0	1	2	3	4
P_x^*	0,6000000	0,2400000	0,09600000	0,03840000	0,015360000
P_x	0,7111310	0,1977964	0,06090811	0,01984186	0,006700721
	5	6	7	8	9
P_x^*	0,006144000	0,0024576000	0,00098304	0,0003932160	$1,572864 \cdot 10^{-4}$
P_x	0,002320361	0,0008185294	0,00029289	0,0001059966	$3,871517 \cdot 10^{-5}$
	$p = 0,1$				
	0	1	2	3	4
P_x^*	0,1000000	0,0900000	0,08100000	0,07290000	0,065610000
P_x	0,1862324	0,1292755	0,09591230	0,07386133	0,058277423
	5	6	7	8	9
P_x^*	0,059049000	0,0531441000	0,04782969	0,0430467210	$3,874205 \cdot 10^{-2}$
P_x	0,046781626	0,0380442214	0,03125506	0,0258892651	$2,159074 \cdot 10^{-2}$

Tabuľka 3.5: Rozdelenia pravdepodobnosti pri Salviovej-Bollingerovej sumácii a rodičovskom rozdelení geometrickom s parametrami $p = 0,6$ a $p = 0,1$.

Príklad 3.6. Sumácia $g(x)$ je v tomto prípade taká, aby Poissonovo rozdelenie s parametrom λ zostalo nezmenené. Takáto sumácia má tvar

$$g(x) = \frac{x - \lambda + 1}{x + 1}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

(pozri ([19])).

Máme teda parciálnu sumáciu

$$P_x = c \sum_{i=x}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{x+1}\right) P_x^*,$$

kde pre normalizačnú konštantu c platí

$$\frac{1}{c} = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{i=x}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{x+1}\right) = \sum_{x=0}^{\infty} (x+1) \left(1 - \frac{\lambda}{x+1}\right) P_x^* = 1 + \mu^* - \lambda,$$

kde μ^* je stredná hodnota rodičovského rozdelenia. Pri rodičovskom rozdelení geometrickom s parametrom p dostávame

$$P_x = c \sum_{i=x}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{x+1}\right) P_x^* = \frac{1}{1 + \mu^* - \lambda} \sum_{i=x}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{x+1}\right) (1-p)^i p$$

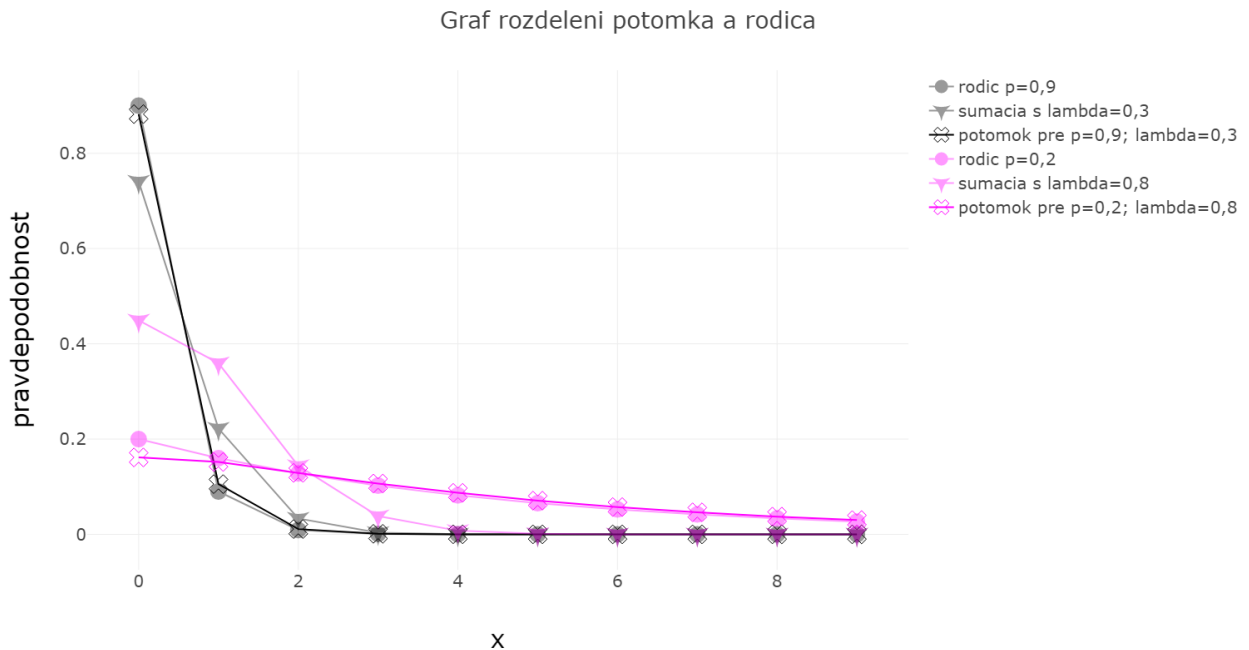
a po úpravách

$$P_x = \frac{p^2(1-p)^x}{1-\lambda p} \left(\frac{1}{p} - \frac{\lambda}{x+1} {}_2F_1(1, x+1; x+2; q) \right), \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Môžeme si všimnúť, že doteraz rozdelenie potomka nezáviselo od voľby parametra sumácie, avšak v tomto prípade sa vo vzorci (3.9) parameter λ vyskytuje.

Na obrázku 3.6 môžeme okrem rozdelenia pravdepodobnosti pre rodiča a potomka vidieť aj rozdelenie pravdepodobnosti zodpovedajúce Poissonovskej sumácii. Čiernou farbou je guľičkami vykreslené rodičovské geometrické rozdelenie s parametrom $p = 0,9$, trojuholníkmi Poissonovo rozdelenie s parametrom $\lambda = 0,3$ a krížikmi rozdelenie potomka (3.9). Ružovou farbou je znázornené rodičovské geometrické rozdelenie s $p = 0,2$, Poissonovské rozdelenie zodpovedajúce sumácii s $\lambda = 0,8$ a tiež ich potomok, všetky s obdobnými značkami ako v čiernej farbe.

V tabuľke 3.6 sú vypísané vykreslené hodnoty pravdepodobností.



Obr. 3.6: Rozdelenia pravdepodobnosti pri Poissonovskej sumácii a rodičovskom rozdelení geometrickom s parametrami $\lambda = 0,3$; $p = 0,9$ a $\lambda = 0,8$; $p = 0,2$.

	$p = 0,9$	$\lambda = 0,3$			
	0	1	2	3	4
P_x^*	0,9000000	0,0900000	0,00900000	0,000900000	0,0000900000
P_x	0,8821561	0,1054438	0,01112869	0,001142393	0,0001160232
	0,7408182	0,2222455	0,03333682	0,003333682	0,0002500261
	5	6	7	8	9
P_x^*	$9,000000.10^{-6}$	$9,000000.10^{-7}$	$9,000000.10^{-8}$	$9,000000.10^{-9}$	$9,000000.10^{-10}$
P_x	$1,172185.10^{-5}$	$1,180755.10^{-6}$	$1,187202.10^{-7}$	$1,192228.10^{-8}$	$1,196257.10^{-9}$
	$1,500157.10^{-5}$	$7,500784.10^{-7}$	$3,214622.10^{-8}$	$1,205483.10^{-9}$	$4,018277.10^{-11}$
	$p = 0,2$	$\lambda = 0,8$			
	0	1	2	3	4
P_x^*	0,2000000	0,1600000	0,12800000	0,102400000	0,0819200000
P_x	0,1614553	0,1519315	0,12907439	0,106725179	0,0872204169
	0,4493290	0,3594632	0,14378527	0,038342738	0,0076685477
	5	6	7	8	9
P_x^*	$6,553600.10^{-2}$	$5,242880.10^{-2}$	$4,194304.10^{-2}$	$3,355443.10^{-2}$	$2,684355.10^{-2}$
P_x	$7,083642.10^{-2}$	$5,731312.10^{-2}$	$4,625670.10^{-2}$	$3,726891.10^{-2}$	$2,998990.10^{-2}$
	$1,226968.10^{-3}$	$1,635957.10^{-4}$	$1,869665.10^{-5}$	$1,869665.10^{-6}$	$1,661924.10^{-7}$

Tabuľka 3.6: Hodnoty pravdepodobnosti pre $x = 0, 1, 2, \dots, 9$ rodiča, potomka a rozdelenie zodpovedajúcej Poissonovskej sumácii pre sady parametrov $\lambda = 0,3$; $p = 0,9$ a $\lambda = 0,8$; $p = 0,2$.

Kapitola 4

Dvojrozmerné parciálne sumácie

Doteraz boli viacrozmerné parciálne sumácie spomenuté iba v práci [8], pričom šlo iba o definíciu a akési odporúčanie k ďalšiemu výskumu v tejto oblasti. Autori rozšírili definíciu parciálnej sumácie

$$P_x = c \sum_{j=x}^{\infty} P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

na dvojrozmernú parciálnu sumáciu

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = \frac{P(X_1 > y_1, X_2 > y_2)}{E(X_1 X_2)}. \quad (4.1)$$

Nadviazali sme na túto prácu a ďalej uvádzame dosiahnuté výsledky.

4.1 Vzťah medzi vytvárajúcou funkciou rodiča a potomka

V definícii dvojrozmerných parciálnych sumácií definovaných na diskretných rozdeleniach vychádzame a zovšeobecňujeme dvojrozmerné rozšírenie v [8].

Ako dvojrozmernú analógiu sumácie (2.2) môžeme definovať dvojrozmernú parciálnu sumáciu

$$P_{x,y} = \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} g(i, j) P_{i,j}^*, \quad x, y = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.2)$$

kde $\{P_{x,y}^*\}_{x,y=0}^{\infty}$ je rodičovské rozdelenie pravdepodobnosti, $\{P_{x,y}\}_{x,y=0}^{\infty}$ je tiež rozdelením pravdepodobnosti (potomok) a $g(x, y)$ je reálna funkcia. Parciálna sumácia (4.1) z úvodu kapitoly je špeciálnym prípadom tejto sumácie (4.2), kedy je funkcia $g(x, y)$ konštantná.

Uvažujme parciálnu sumáciu

$$P_{x,y} = c \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} g(i, j) P_{i,j}^*, \quad x, y = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

kde c je normalizačná konštanta. V tejto parciálnej sumácii na rozdiel od (4.2) normalizačná konštanta nie je súčasťou funkcie $g(x, y)$.

Označme $f(x, y) = 1 - g(x, y)$. Potom pre prislúchajúce vytvárajúce funkcie týchto rozdelení platí nasledujúca veta. Môžeme si všimnúť, že je to analógia k jednorozmernému prípadu (3.3) z článku [19].

Veta 4.1. *Nech $G(s, t)$ a $G^*(s, t)$ sú vytvárajúce funkcie prislúchajúce rozdeleniam pravdepodobnosti $\{P_{x,y}\}_{x,y=0}^\infty$, $\{P_{x,y}^*\}_{x,y=0}^\infty$ z (4.3). Ak existujú stredné hodnoty $E_{P^*}(X)$, $E_{P^*}(Y)$, $E_{P^*}(XY)$, potom platí*

$$G(s, t) = c \frac{1 - sG_X^*(s) - tG_Y^*(t) + stG^*(s, t) - \sum_{x=0}^\infty \sum_{y=0}^\infty (1 - s^{x+1})(1 - t^{y+1})f(x, y)P_{x,y}^*}{(1-s)(1-t)},$$

kde

$$c = \frac{1}{E_{P^*}(XY) + E_{P^*}(X) + E_{P^*}(Y) + 1 - \sum_{x=0}^\infty \sum_{y=0}^\infty (x+1)(y+1)f(x, y)P_{x,y}^*}$$

a $G_X^*(s)$, $G_Y^*(t)$ sú marginálne vytvárajúce funkcie prislúchajúce rozdeleniu pravdepodobnosti $\{P_{x,y}^*\}_{x,y=0}^\infty$.

Dôkaz. Pre vytvárajúcu funkciu potomka platí

$$\begin{aligned} G(s, t) &= \sum_{x=0}^\infty \sum_{y=0}^\infty P_{x,y} s^x t^y = \sum_{x=0}^\infty \sum_{y=0}^\infty s^x t^y c \sum_{i=x}^\infty \sum_{j=y}^\infty g(i, j) P_{i,j}^* = \\ &= c \sum_{x=0}^\infty \sum_{i=x}^\infty s^x \sum_{y=0}^\infty \sum_{j=y}^\infty t^y g(i, j) P_{i,j}^* = c \sum_{x=0}^\infty \sum_{i=x}^\infty s^x \sum_{y=0}^\infty g(i, y) P_{i,y}^* \left(\sum_{j=0}^y t^j \right) \\ &= c \sum_{x=0}^\infty \sum_{i=x}^\infty s^x \sum_{y=0}^\infty g(i, y) P_{i,y}^* \frac{1 - t^{y+1}}{1 - t} = \frac{c}{1 - t} \sum_{y=0}^\infty (1 - t^{y+1}) \sum_{x=0}^\infty \sum_{i=x}^\infty s^x g(i, y) P_{i,y}^* = \\ &= \frac{c}{1 - t} \sum_{y=0}^\infty (1 - t^{y+1}) \sum_{x=0}^\infty \sum_{i=0}^x s^i g(x, y) P_{x,y}^* = \\ &= \frac{c}{1 - t} \sum_{y=0}^\infty (1 - t^{y+1}) \sum_{x=0}^\infty g(x, y) P_{x,y}^* \frac{1 - s^{x+1}}{1 - s} = \\ &= \frac{c}{(1-s)(1-t)} \sum_{x=0}^\infty \sum_{y=0}^\infty (1 - s^{x+1}) (1 - t^{y+1}) g(x, y) P_{x,y}^* = \\ &= \frac{c}{(1-s)(1-t)} \sum_{x=0}^\infty \sum_{y=0}^\infty (1 - s^{x+1}) (1 - t^{y+1}) (1 - f(x, y)) P_{x,y}^* = \\ &= \frac{c}{(1-s)(1-t)} [1 - sG_X^*(s) - tG_Y^*(t) + stG^*(s, t)] - \\ &\quad - \frac{c}{(1-s)(1-t)} \left[\sum_{x=0}^\infty \sum_{y=0}^\infty (1 - s^{x+1}) (1 - t^{y+1}) f(x, y) P_{x,y}^* \right]. \end{aligned}$$

Normalizačnú konštantu c môžeme napísať v tvare

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c} &= \frac{1}{c} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} P_{x,y} = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} g(i,j) P_{i,j}^* = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} (x+1)(y+1)g(x,y)P_{x,y}^* = \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} (x+1)(y+1)(1-f(x,y))P_{x,y}^* = \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} xyP_{x,y}^* + \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} xP_{x,y}^* + \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} yP_{x,y}^* + \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} P_{x,y}^* - \\
 &- \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} (x+1)(y+1)f(x,y)P_{x,y}^* = \\
 &= E_{P^*}(XY) + E_{P^*}(X) + E_{P^*}(Y) + 1 - \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} (x+1)(y+1)f(x,y)P_{x,y}^*.
 \end{aligned}$$

□

Ako dvojrozmernú analógiu sumácie (2.9) (špeciálneho prípadu (4.3)) môžeme definovať dvojrozmernú parciálnu sumáciu

$$P_{x,y} = c \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} P_{i,j}^*, \quad x, y = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.4)$$

kde $\{P_{x,y}^*\}_{x,y=0}^{\infty}$ je rodičovské rozdelenie pravdepodobnosti, $\{P_{x,y}\}_{x,y=0}^{\infty}$ je tiež rozdelením pravdepodobnosti - potomok a c je normalizačná konštanta. Potom pre prislúchajúce vytvárajúce funkcie týchto rozdelení (ako špeciálny prípad Vety (4.1)) platí

$$G(s, t) = \frac{c}{(1-s)(1-t)} [1 - sG_X^*(s) - tG_Y^*(t) + stG^*(s, t)],$$

kde

$$c = \frac{1}{E_{P^*}(XY) + E_{P^*}(X) + E_{P^*}(Y) + 1}$$

a $G_X^*(s)$, $G_Y^*(s)$ sú marginálne vytvárajúce funkcie prislúchajúce rozdeleniu pravdepodobnosti $\{P_{x,y}^*\}_{x,y=0}^{\infty}$.

4.2 Momenty

Zaujímavou otázkou tiež je, ako vyzerajú základné momenty a kovariancia zložiek potomka získaného parciálnou sumáciou (4.3).

n -tý počiatočný moment pri rozdelení pravdepodobnosti $P(X = x)$, $x = 0, 1, 2, \dots$ je definovaný ako

$$E_P(X^n) = \sum_{x=0}^{\infty} x^n P(X = x).$$

Marginálne rozdelenie pravdepodobnosti potomka pri parciálnej sumácii (4.3) je

$$P(X = x) = \sum_{y=0}^{\infty} P_{x,y} = \sum_{y=0}^{\infty} c \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} g(i, j) P_{i,j}^* = \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{i=x}^{\infty} c(y+1) g(i, y) P_{i,y}^*$$

a po dosadení do n -tého počiatočného momentu X dostávame

$$E_P(X^n) = \sum_{x=0}^{\infty} x^n \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{i=x}^{\infty} c(y+1) g(i, y) P_{i,y}^* = \sum_{y=0}^{\infty} c(y+1) \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{i=x}^{\infty} x^n g(i, y) P_{i,y}^*.$$

Pre $n = 1$ dostávame strednú hodnotu X

$$\begin{aligned} E_P(X) &= \sum_{y=0}^{\infty} c(y+1) \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{i=x}^{\infty} x g(i, y) P_{i,y}^* = \sum_{y=0}^{\infty} c(y+1) \sum_{x=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^x i \right) g(i, y) P_{i,y}^* = \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} c(y+1) \frac{x(x+1)}{2} g(i, y) P_{i,y}^* = E_{P^*} \left(\frac{c}{2} X(X+1)(Y+1) g(X, Y) \right). \end{aligned}$$

Na výpočet disperzie využijeme druhý počiatočný moment

$$\begin{aligned} E_P(X^2) &= \sum_{y=0}^{\infty} c(y+1) \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{i=x}^{\infty} x^2 g(i, y) P_{i,y}^* = \sum_{y=0}^{\infty} c(y+1) \sum_{x=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^x i^2 \right) g(i, y) P_{i,y}^* = \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} c(y+1) \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} g(i, y) P_{i,y}^* = \\ &= E_{P^*} \left(\frac{c}{6} X(X+1)(2X+1)(Y+1) g(X, Y) \right), \end{aligned}$$

z čoho je disperzia

$$D(X) = E_{P^*} \left(\frac{c}{6} X(X+1)(2X+1)(Y+1) g(X, Y) \right) - \left(E_{P^*} \left(\frac{c}{2} X(X+1)(Y+1) g(X, Y) \right) \right)^2.$$

Podobným odvodením dostávame zmiešaný moment $E(XY)$

$$\begin{aligned} E_P(XY) &= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} xy \left(c \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} g(i, j) P_{i,j}^* \right) = c \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{i=x}^{\infty} x \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} y g(i, j) P_{i,j}^* = \\ &= c \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{i=x}^{\infty} x \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(1+y)y}{2} g(i, y) P_{i,y}^* = c \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(1+x)x}{2} \frac{(1+y)y}{2} g(x, y) P_{x,y}^* = \\ &= E_{P^*} \left(\frac{c}{4} XY(X+1)(Y+1) g(X, Y) \right), \end{aligned}$$

z čoho je kovariancia zložiek potomka vyjadrená pomocou rodiča

$$\begin{aligned} cov_P(X, Y) &= E_P(XY) - E_P(X)E_P(Y) = \\ &= \frac{c}{4} E_{P^*} (XY(X+1)(Y+1) g(X, Y)) - \\ &\quad - \frac{c^2}{4} E_{P^*} (X(X+1)(Y+1) g(X, Y)) E_{P^*} (Y(X+1)(Y+1) g(X, Y)). \end{aligned}$$

Kapitola 5

Invariantnosť vzhľadom na parciálne sumácie

Jedným zo zaujímavých problémov v parciálnych sumáciách bol a stále zostáva problém invariantnosti, t.j. určenie funkcie $g(i, j)$ takej, aby bolo rozdelenie pravdepodobnosti potomka zhodné s daným rozdelením rodiča. Táto kapitola sa venuje práve tomuto problému pre dvojrozmerné diskkrétne rozdelenia a pre parciálnu sumáciu (2.2), ktorej dvojrozmerným rozšírením je (4.2). Výsledky z tejto a nasledujúcej šiestej kapitoly boli spísané v článku [13].

5.1 Teoretické odvodenie

Článok [19] sa zaoberá invariantnosťou v jednorozmernom prípade pre sumácie (2.2) a (2.3). Uvádza okrem iného prehľad funkcií $g(x)$ a $h(x)$ pre konkrétne rozdelenia pravdepodobnosti.

Veta 5.1. *Nech $\{P_{x,y}^*\}_{x,y=0}^\infty$, $P_{x,y}^* \neq 0$ pre $x, y = 0, 1, 2, \dots$, je dvojrozmerné diskkrétne rozdelenie pravdepodobnosti definované na nezáporných celých číslach a nech preň platí*

$$P_{x+1,y+1}^* = P_{x+1,y}^* + P_{x,y+1}^* - f(x, y)P_{x,y}^*, \quad x, y = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

Potom rozdelenie $\{P_{x,y}^\}_{x,y=0}^\infty$ je invariantné vzhľadom na parciálnu sumáciu (4.2) práve vtedy, keď*

$$g(x, y) = 1 - f(x, y), \quad x, y = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Dôkaz. Rozdelenie $\{P_{x,y}^*\}_{x,y=0}^\infty$ je invariantné vzhľadom na parciálnu sumáciu (4.2), ak bude potomok rovnaký ako rodič, teda $P_{x,y}^* = P_{x,y}$, pre $x, y = 0, 1, 2, \dots$ Zároveň platí, že

$$P_{x,y} = \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} g(i, j) P_{i,j}, \quad x, y = 0, 1, 2, \dots$$

Nasledujúca tabuľka slúži pre lepšiu orientáciu sa v dôkaze:

$P_{x,y}$	$P_{x,y+1}$	$P_{x,y+2}$	$\cdots$	$P_{x,y+l}$	$\cdots$
$P_{x+1,y}$	$P_{x+1,y+1}$	$P_{x+1,y+2}$	$\cdots$	$P_{x+1,y+l}$	$\cdots$
$P_{x+2,y}$	$P_{x+2,y+1}$	$P_{x+2,y+2}$	$\cdots$	$P_{x+2,y+l}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{x+k,y}$	$P_{x+k,y+1}$	$P_{x+k,y+2}$	$\cdots$	$P_{x+k,y+l}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$

Zrejme platí

$$\begin{aligned}
 P_{x,y} &= \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} g(i,j) P_{i,j} = \\
 &= \sum_{i=x+1}^{\infty} \sum_{j=y+1}^{\infty} g(i,j) P_{i,j} + \sum_{i=x}^{\infty} g(i,y) P_{i,y} + \sum_{j=y}^{\infty} g(x,j) P_{x,j} - g(x,y) P_{x,y}.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Z invariantosti vyplýva, že $P_{x+1,y+1} = \sum_{i=x+1}^{\infty} \sum_{j=y+1}^{\infty} g(i,j) P_{i,j}$, a po dosadení do (5.3)

$$P_{x,y} = P_{x+1,y+1} + \sum_{i=x}^{\infty} g(i,y) P_{i,y} + \sum_{j=y}^{\infty} g(x,j) P_{x,j} - g(x,y) P_{x,y}. \tag{5.4}$$

Podobný postup zopakujeme pre $P_{x+1,y}$ a $P_{x,y+1}$:

$$\begin{aligned}
 P_{x+1,y} &= \sum_{i=x+1}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} g(i,j) P_{i,j} = P_{x+1,y+1} + \sum_{i=x}^{\infty} g(i,y) P_{i,y} - g(x,y) P_{x,y}, \\
 P_{x,y+1} &= \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y+1}^{\infty} g(i,j) P_{i,j} = P_{x+1,y+1} + \sum_{j=y}^{\infty} g(x,j) P_{x,j} - g(x,y) P_{x,y},
 \end{aligned}$$

z čoho vyjadríme sumy $\sum_{i=x}^{\infty} g(i,y) P_{i,y}$ a $\sum_{j=y}^{\infty} g(x,j) P_{x,j}$

$$\sum_{i=x}^{\infty} g(i,y) P_{i,y} = P_{x+1,y} - P_{x+1,y+1} + g(x,y) P_{x,y}, \tag{5.5}$$

$$\sum_{j=y}^{\infty} g(x,j) P_{x,j} = P_{x,y+1} - P_{x+1,y+1} + g(x,y) P_{x,y}. \tag{5.6}$$

Dosadením (5.5) a (5.6) do (5.4) dostávame vzťah:

$$P_{x,y} - P_{x+1,y} - P_{x,y+1} = -P_{x+1,y+1} + g(x,y) P_{x,y},$$

z čoho $g(x,y)$ je

$$g(x,y) = 1 - f(x,y) = 1 - \frac{P_{x+1,y} + P_{x,y+1} - P_{x+1,y+1}}{P_{x,y}}.$$

Nech $g(x,y) = 1 - f(x,y)$ a platí (5.1). Potom

$$\begin{aligned}
 P_{x,y} &= \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} g(i,j) P_{i,j}^* = \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} (1 - f(i,j)) P_{i,j}^* = \\
 &= \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} \left(1 - \frac{P_{i+1,j}^* + P_{i,j+1}^* - P_{i+1,j+1}^*}{P_{i,j}^*} \right) P_{i,j}^* = \\
 &= \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} (P_{i,j}^* - P_{i+1,j}^* - P_{i,j+1}^* + P_{i+1,j+1}^*) = P_{x,y}^*.
 \end{aligned}$$

□

Poznámka 5.1. Vetu 5.1 je možné jednoducho preformulovať tak, že platí aj pre rozdelenia pravdepodobnosti definované na konečnom nosiči. Problémom sú koncové body nosiča (za predpokladu, že na nosiči sú pravdepodobnosti nenulové), pretože pri

$$f(x, y) = \frac{P_{x+1,y}^* + P_{x,y+1}^* - P_{x+1,y+1}^*}{P_{x,y}^*}$$

nie je definovaná pravdepodobnosť na bodoch mimo nosiča. V takomto prípade stačí formálne predpokladať, že pravdepodobnosti mimo nosiča sú rovné nule.

Poznámka 5.2. Oproti jednorozmernému prípadu invariantnosti, kedy podmienkou bolo (2.4), je vo Vete 5.1 aj okrem podmienky (5.1) tiež podmienka nenulovosti jednotlivých pravdepodobností. V jednorozmernom prípade podmienka nenulovosti nebola potrebná, pretože podmienka (2.4) vraví, že

$$P_{x+1}^* = f(x+1)P_x^*,$$

a ak by pre nejaké x z nosiča rozdelenia platilo, že $P_x^* = 0$, z toho by vyplývalo

$$P_{x+1}^* = 0,$$

teda všetky nasledujúce pravdepodobnosti by museli byť nulové.

Avšak pri dvojrozmerných rozdeleniach je situácia o niečo zložitejšia, nakoľko do vzťahu

$$P_{x+1,y+1}^* = P_{x+1,y}^* + P_{x,y+1}^* - f(x,y)P_{x,y}^*, \quad x, y = 0, 1, 2, \dots$$

vstupujú hneď štyri a nie dve pravdepodobnosti. Ak platí, že $P_{x,y}^* = 0$ pre nejaké x, y , potom existuje funkcia $g(i, j)$ iba v prípade, že platí pre dané x, y vzťah

$$P_{x+1,y+1}^* = P_{x+1,y}^* + P_{x,y+1}^*.$$

5.2 Príklady

V tejto podkapitole uvádzame niekoľko príkladov rozdelení, pre ktoré sme odvodili funkciu $g(x, y)$ z Vety 5.1. Spolu s definíciami týchto rozdelení uvádzame kvôli kontextu aj niektoré ďalšie vlastnosti rozdelení. Veľa z týchto rozdelení (hlavne geometrické rozdelenia) bolo definovaných kvôli aplikáciám v teórii spoľahlivosti, preto ich interpretácia vychádza práve z tejto oblasti. Zvyšné rozdelenia sú zväčša odvodené z urnových schém (sú tzv. hypergeometrického typu). Rozdelenia sme čerpali prevažne z monografie [7].

5.2.1 Dvojrozmerné Phatakovo - Sreehariho geometrické rozdelenie

V rámci teórie spoľahlivosti majme systém, v ktorom sú dva komponenty, ktoré dostávajú tzv. šoky (podnety alebo informácie). S pravdepodobnosťou p_1 prežije (nezlyhá) prvý

komponent, s pravdepodobnosťou p_2 nezlyhá druhý komponent, s pravdepodobnosťou $p_0 = 1 - p_1 - p_2$ zlyhajú oba. Náhodná premenná X označuje počet šokov pre prvý komponent a Y počet šokov pre druhý komponent pred prvým zlyhaním systému. Potom $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ má dvojrozmerné geometrické rozdelenie predstavené Phatak a Sreeharim v [26] (ďalej budeme toto rozdelenie značiť BGD(P&S)).

Toto rozdelenie môžeme interpretovať aj pomocou klasifikácie výrobkov do troch kategórií. Po inšpekcii výrobok označíme ako dobrý, zlý alebo otázny (z anglického "marginal" - ani dobrý, ani zlý). S pravdepodobnosťou p_0 je výrobok zlý, s pravdepodobnosťou p_1 je otázny a s pravdepodobnosťou $p_2 = 1 - p_0 - p_1$ je výrobok dobrý. Náhodná premenná X označuje počet otáznych výrobkov a náhodná premenná Y označuje počet dobrých výrobkov, ktoré prešli inšpekciou pred prvým zlým výrobkom.

Definícia 5.1. Vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ má BGD(P&S), ak je jeho rozdelenie pravdepodobnosti

$$P(X = x, Y = y) = \binom{x+y}{y} p_1^x p_2^y p_0, \quad x, y = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.7)$$

kde $0 < p_1, p_2 < 1, 0 < p_0 = 1 - p_1 - p_2 < 1$.

Pre rozdelenie pravdepodobnosti BGD(P&S) (5.7) má funkcia $g(x, y)$ z (5.1) tvar

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{P_{x+1, y+1} - P_{x+1, y} - P_{x, y+1} + P_{x, y}}{P_{x, y}} = \\ &= \frac{\binom{x+y+2}{y+1} p_1^{x+1} p_2^{y+1} p_0 - \binom{x+y+1}{y} p_1^{x+1} p_2^y p_0}{\binom{x+y}{y} p_1^x p_2^y p_0} - \\ &- \frac{\binom{x+y+1}{y+1} p_1^x p_2^{y+1} p_0 - \binom{x+y}{y} p_1^x p_2^y p_0}{\binom{x+y}{y} p_1^x p_2^y p_0} = \\ &= p_1 p_2 \frac{(x+y+2)(x+y+1)}{(x+1)(y+1)} - p_1 \frac{(x+y+1)}{(x+1)} - p_2 \frac{(x+y+1)}{(y+1)} + 1, \end{aligned} \quad (5.8)$$

pre $x, y = 0, 1, 2, \dots$

Môžeme si všimnúť, že hoci je toto rozdelenie nazývané geometrické, funkcia $g(x, y)$ nie je nezávislá od x, y . V jednorozmernom prípade bola takáto vlastnosť špecifická pre geometrické rozdelenie (pozri [19]), čo sa pre takto definované geometrické rozdelenie neprenieslo do dvojrozmerného prípadu.

5.2.2 Dvojrozmerné Hawkesovo geometrické rozdelenie

Hawkesovo geometrické rozdelenie (ďalej označujeme BGD(H)) patrí medzi najpoužívanéjšie dvojrozmerné geometrické rozdelenia a bolo popísané v článku [3] Hawkesom.

Majme dva komponenty C_1, C_2 , ktoré dostávajú nezávislé šoky, pričom nie každý je fatálny. BGD(H) je motivované modelovaním životnosti komponentov C_1, C_2 . Náhodná premenná X symbolizuje počet šokov pre komponent C_1 pred jeho prvým zlyhaním a náhodná premenná Y symbolizuje počet šokov pre komponent C_2 pred jeho prvým zlyhaním.

Pomocou dvojrozmerného Bernoulliho rozdelenia sa definuje nasledovným spôsobom.

Definícia 5.2. Vravíme, že vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ má dvojrozmerné Bernoulliho (alternatívne) rozdelenie s parametrami $0 \leq p_{00}, p_{01}, p_{10} \leq 1$, ak je jeho rozdelenie pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = 0) &= p_{00}, \\ P(X = 0, Y = 1) &= p_{01}, \\ P(X = 1, Y = 0) &= p_{10}, \\ P(X = 1, Y = 1) &= 1 - p_{00} - p_{01} - p_{10} = p_{11}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Uvažujme postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných vektorov $\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3, \dots$, z dvojrozmerného Bernoulliho rozdelenia. Nech náhodná premenná U označuje počet núl pred prvou jednotkou v postupnosti $X_1, X_2, \dots$, náhodná premenná V analogicky pre $Y_1, Y_2, \dots$, potom

$$P(U = u, V = v) = \begin{cases} p_{00}^u p_{+0}^{v-u-1} p_{10} p_{+1}, & v > u, \\ p_{00}^u p_{11}, & u = v, \\ p_{00}^v p_{0+}^{u-v-1} p_{01} p_{1+}, & u > v, \end{cases} \quad (5.10)$$

kde

$$\begin{aligned} p_{+i} &= p_{0i} + p_{1i}, \\ p_{i+} &= p_{i0} + p_{i1} \end{aligned}$$

pre $i = 0, 1$.

Reparametrizovaním dostávame zaužívanú definíciu BGD(H) s parametrami p, r, s .

Definícia 5.3. Nech náhodné premenné X, Y nadobúdajú hodnoty z množiny $\{0, 1, 2, \dots\}$. Vravíme, že vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ má BGD(H) s parametrami p, r, s , ak

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} p^y r^{x-y-1} (r - p)(1 - r), & 0 \leq y < x, \\ p^x (1 + p - r - s), & 0 \leq x = y, \\ p^x s^{y-x-1} (s - p)(1 - s), & 0 \leq x < y, \end{cases} \quad (5.11)$$

kde $x, y = 0, 1, 2, \dots$, a pre parametre p, r, s platí, že

$$\begin{aligned} 0 &< p < r, s \leq 1, \\ r + s &\leq 1 + p. \end{aligned}$$

Toto rozdelenie je najpoužívanejším aj vďaka tomu, že jeho marginálne rozdelenia sú geometrické s parametrami $(1 - r)$ a $(1 - s)$.

Potom pre takéto rozdelenie BGD(H) (5.11) je funkcia $g(x, y)$ z parciálnej sumácie (5.1) rovná

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 + p - r - \frac{p}{r}, & y + 1 < x, \\ 1 + p - r - p \frac{1 + p - r - s}{(r - p)(1 - r)}, & x = y + 1, x > y, \\ 1 + p - \frac{(r - p)(1 - r)}{1 + p - r - s} - \frac{(s - p)(1 - s)}{1 + p - r - s}, & x = y, \\ 1 + p - s - p \frac{1 + p - r - s}{(s - p)(1 - s)}, & y = x + 1, y > x, \\ 1 + p - s - \frac{p}{s}, & y > x + 1 \end{cases}$$

pre $x, y = 0, 1, 2, \dots$

Môžeme si všimnúť, že pre BGD(H) je funkcia $g(x, y)$ nezávislá od premenných x, y - je po častiach konštantná. Keďže pre jednorozmerné geometrické rozdelenie je funkcia $g(x)$ z (2.2) konštanta (pozri [19]), mohli by sme to označiť za neprekvapivé. Upozorňujeme však, že pre geometrické rozdelenie BGD(P&S) toto neplatilo (pozri (5.8)).

5.2.3 Dvojrozmerné Ashovo - Sankaranovo geometrické rozdelenie

Nech X, Y sú náhodné premenné reprezentujúce životnosť dvoch komponentov A, B (pod životnosťou rozumieme počet cyklov prežitia) v systéme s dvoma komponentami. A je vystavený šoku S_1 a B je vystavený šoku S_2 , ktoré sú nezávislé a pre daný komponent sa vyskytne najviac jeden šok za jeden cyklus.

Nech Z_1, Z_2 sú čísla cyklov, v ktorých šoky S_1, S_2 spôsobia zlyhanie komponentov A, B . Komponent A zlyhá prvý v cykle s číslom x , ak $Z_1 = x$ a $Z_2 > Z_1$, B zlyhá prvý v cykle s číslom y , ak $Z_2 = y$ a $Z_1 > Z_2$.

Po prvom zlyhaní niektorého komponentu systém pokračuje vo fungovaní, kým nezlyhá druhý komponent. Nech Z_1^* je počet cyklov, v ktorých šok S_1 spôsobí zlyhanie komponentu A , ak platí $Z_1 > Z_2$. Z_2^* je počet cyklov, v ktorých šok S_2 spôsobí zlyhanie B pri $Z_2 > Z_1$. Potom životnosti komponentov A, B sú náhodné premenné X, Y , pre ktoré

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} Z_1, & Z_1 \leq Z_2, \\ Z_2 + Z_1^*, & Z_1 > Z_2, \end{cases} \\ Y &= \begin{cases} Z_2, & Z_1 \geq Z_2, \\ Z_1 + Z_2^*, & Z_1 < Z_2. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Nech Z_1, Z_2, Z_1^*, Z_2^* sú nezávislé, geometricky rozdelené náhodné premenné s parametrami p_1, p_2, p_1^*, p_2^* . Potom pre náhodný vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, kde náhodné premenné X, Y sú (5.12), je

združené rozdelenie

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} (p_1 p_2)^y (p_1^*)^{x-y-1} p_1 (1 - p_2) (1 - p_1^*), & x > y, \\ (p_1 p_2)^x (1 - p_1) (1 - p_2), & x = y, \\ (p_1 p_2)^x (p_2^*)^{y-x-1} p_2 (1 - p_1) (1 - p_2^*), & y > x, \end{cases} \quad (5.13)$$

pre $x, y = 0, 1, 2, \dots$, pričom platí, že

$$p_1^*, p_2^* \neq p_1 p_2,$$

$$0 < p_1, p_2, p_1^*, p_2^* < 1.$$

Definícia 5.4. Nech náhodné premenné X, Y nadobúdajú hodnoty z množiny $\{0, 1, 2, \dots\}$. Hovoríme, že náhodný vektor $(X, Y)^T$ má dvojrozmerné geometrické rozdelenie definované Ashom a Sankaranom v [1] (ďalej BGD(A&S)), ak je jeho rozdelenie pravdepodobnosti dané vzťahom (5.13).

Pre BGD(A&S) (5.13) je funkcia $g(x, y)$ (pre parciálnu sumáciu (4.2))

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 + p_1 p_2 - p_1^* - \frac{p_1 p_2}{p_1^*}, & x > y + 1, \\ 1 + p_1 p_2 - p_1^* - p_2 \frac{1 - p_1}{1 - p_1^*}, & x = y + 1, \\ 1 + p_1 p_2 - p_1 \frac{1 - p_1^*}{1 - p_1} - p_2 \frac{1 - p_2^*}{1 - p_2}, & x = y, \\ 1 + p_1 p_2 - p_2^* - p_1 \frac{1 - p_2}{1 - p_2^*}, & y = x + 1, \\ 1 + p_1 p_2 - p_2^* - \frac{p_1 p_2}{p_2^*}, & y > x + 1, \end{cases}$$

kde $x, y = 0, 1, 2, \dots$. Pre BGD(A&S) je funkcia $g(x, y)$ tiež (ako pri BGD(H)) po častiach konštantná.

5.2.4 Dvojrozmerné Nairovo - Nairovo geometrické rozdelenie

Nair a Nair si v článku [23] za podmienku, ktorú musí spĺňať dvojrozmerné geometrické rozdelenie, vzali konštantnosť podmienenej očakávanej dĺžky budúcej životnosti. V jednorozmernom prípade je geometrické rozdelenie jediným rozdelením, ktoré má konštantnú podmienenú očakávanú dĺžku budúcej životnosti (teda $\mu(x) = E[X - n | X \geq n]$ nezávisí od n). Autori rozšírili definíciu podmienenej očakávanej dĺžky budúcej životnosti $\mu(x, y)$ a na základe toho definovali geometrické rozdelenie. Zároveň upozornili, že ak by sme položili $\mu(x, y)$ nezávislé od x, y , tak združené rozdelenie $\binom{X}{Y}$ by bolo síce geometrické, ale náhodné premenné X, Y by boli nezávislé, čo by nemusela byť vyhovujúca definícia.

Zodpovedajúce rozdelenie pravdepodobnosti na základe tohto prístupu je

$$P(X = x, Y = y) = p_1^x p_2^y \theta^{xy-1} \left[(1 - p_1 \theta^{y+1})(1 - p_2 \theta^{x+1}) + \theta - 1 \right] \quad (5.14)$$

a ohraničenia pre parametre p_1, p_2, θ sú

$$0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1,$$

$$0 \leq \theta \leq 1,$$

$$1 - \theta \leq (1 - p_1 \theta)(1 - p_2 \theta)$$

pre $x, y = 0, 1, 2, \dots$

Potom pre takéto rozdelenie pravdepodobnosti (5.14) je sumácia $g(x, y)$ z (5.1)

$$g(x, y) = (1 - p_1 \theta^y - p_2 \theta^x + p_1 p_2 \theta^{x+y+1}) + (\theta - 1) \frac{p_1^2 p_2^2 \theta^{2x+2y+3} - p_1 p_2 \theta^{x+y+1} - 2}{1 - p_1 \theta^y - p_2 \theta^x + p_1 p_2 \theta^{x+y+1}}$$

pre $x, y = 0, 1, 2, \dots$

5.2.5 Dvojrozmerné hypergeometrické rozdelenie

Uvažujme náhodný výber bez návratu veľkosti n z konečnej množiny veľkosti N s tromi typmi objektov. Počet objektov prvého typu je N_1 , počet objektov druhého typu je N_2 a počet objektov tretieho typu je N_3 . Nech náhodná premenná X symbolizuje počet položiek vo výbere, ktoré sú prvého typu, náhodná premenná Y symbolizuje počet položiek vo výbere druhého typu a náhodná premenná Z počet položiek tretieho typu, teda platí $X + Y + Z = n$. Potom je rozdelenie pravdepodobnosti náhodného vektora $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{y} \binom{N_3}{n-x-y}}{\binom{N}{n}}, \quad (5.15)$$

pričom prirodzené ohraničenia na nosič sú

$$x = 0, 1, \dots, \min\{n, N_1\},$$

$$y = 0, 1, \dots, \min\{n, N_2\},$$

$$\max\{0, n - N_3\} \leq x + y \leq n.$$

Pre viac podrobností pozri [7].

Definícia 5.5. Hovoríme, že náhodný vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ má dvojrozmerné hypergeometrické rozdelenie, ak je jeho rozdelenie pravdepodobnosti dané vzorcom (5.15).

Funkcia $g(x, y)$ z parciálnej sumácie (5.1) sa pre toto rozdelenie (5.15) dá napísať ako

$$g(x, y) = \frac{(n-x-y)(n-x-y-1)(N_1-x)(N_2-y)}{(x+1)(y+1)(N_3-n+x+y+2)(N_3-n+x+y+1)} -$$

$$- \frac{(n-x-y)(N_1-x)}{(x+1)(x+y-n+N_3+1)} - \frac{(n-x-y)(N_2-y)}{(y+1)(x+y-n+N_3+1)} + 1, \quad (5.16)$$

pre $x = 0, 1, \dots, \min\{n, N_1\}$, $y = 0, 1, \dots, \min\{n, N_2\}$, $\max\{0, n - N_3\} \leq x + y \leq n$ a

$$x + y + 1 \neq n - N_3,$$

$$x + y + 2 \neq n - N_3.$$

Poznámka 5.3. V prípade, že nastane situácia, kedy

$$x + y + 1 = n - N_3$$

alebo

$$x + y + 2 = n - N_3,$$

túto situáciu riešime nájdením hodnoty funkcie $g(x, y)$ priamo zo vzťahov (5.1) a (5.2).

Príklad 5.1. Majme dvojrozmerné hypergeometrické rozdelenie s parametrami

$$N_1 = 3, N_2 = 2, N_3 = 2, n = 3.$$

Vo všeobecnosti platí pre nosič pri dvojrozmernom hypergeometrickom rozdelení, že

$$x = 0, 1, \dots, \min\{n, N_1\}, \quad y = 0, 1, \dots, \min\{n, N_2\}, \quad \max\{0, n - N_3\} \leq x + y \leq n,$$

pri daných parametroch sú ohraničenia na nosič

$$x = 0, 1, 2, 3, \quad y = 0, 1, 2,$$

$$1 \leq x + y \leq 3.$$

Nosičom tohto rozdelenia je teda množina $\{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (3, 0)\}$.

Potom je prislúchajúce rozdelenie pravdepodobnosti nasledovné:

		$P_{x,y}$		
		0	1	2
x \ y	0	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	
	1	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$
	2	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$	
	3	$\frac{1}{35}$		

Zodpovedajúce hodnoty funkcie $g(x, y)$ vypočítané zo vzťahu (5.16) sú

		$g(x, y)$		
		0	1	2
x \ y	0		$-\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	1	-3	$\frac{1}{4}$	1
	2	$\frac{1}{2}$	1	
	3	1		

5.2.6 Dvojrozmerné inverzné hypergeometrické rozdelenie

Uvažujme náhodný výber bez návratu z konečnej množiny s tromi typmi objektov s veľkosťami N_1 , N_2 a N_3 . Výber pokračuje, kým nie je vybratých k objektov tretieho typu. Náhodná premenná X popisuje počet vybratých prvkov prvého typu a Y popisuje počet vybratých prvkov druhého typu. Potom združené rozdelenie náhodného vektora $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ bolo definované v práci [6] nasledovne.

Definícia 5.6. Rozdelenie náhodného vektora $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ nazývame dvojrozmerné inverzné hypergeometrické, ak je jeho rozdelenie pravdepodobnosti

$$P(X = x, Y = y) = \frac{N_3 - k + 1}{N - (x + y + k - 1)} \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{y} \binom{N_3}{k-1}}{\binom{N}{x+y+k-1}} \quad (5.17)$$

pre

$$x = 0, 1, 2, \dots, N_1,$$

$$y = 0, 1, 2, \dots, N_2,$$

$$k \in \{1, 2, \dots, N_3\}$$

a

$$N = N_1 + N_2 + N_3.$$

Upozorňujeme na preklep v knihe [7], kde je rozdelenie pravdepodobnosti pre dvojrozmerné inverzné hypergeometrické rozdelenie uvedené ako

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{N_3 - k + 1}{N - k + x_1 + x_2 + 1} \frac{\binom{N_1}{x_1} \binom{N_2}{x_2} \binom{N_3}{k-1}}{\binom{N}{k+x_1+x_2-1}}, \quad (5.18)$$

kde $x_i = 0, 1, 2, \dots, N_i$ pre $i = 1, 2$ a $k = 1, 2, 3, \dots, N_3$, $N = N_1 + N_2 + N_3$. Vidíme, že rozdelenia (5.17) a (5.18) sa líšia iba v znamienkach v menovateli zlomku.

Potom pre rozdelenie (5.17) je funkcia $g(x_1, x_2)$ z (4.2) rovná

$$g(x, y) = \frac{(N_1 - x)(N_2 - y)(x + y + k)(x + y + k + 1)}{(x + 1)(y + 1)(N - k - x - y)(N - k - x - y - 1)} -$$

$$- \frac{(x + y + k)(N_1 - x)}{(x + 1)(N - x - y - k)} - \frac{(x + y + k)(N_2 - y)}{(y + 1)(N - x - y - k)} + 1,$$

kde

$$x = 0, 1, 2, \dots, N_1, \quad y = 0, 1, 2, \dots, N_2, \quad k \in \{1, 2, \dots, N_3\}, \quad N = N_1 + N_2 + N_3$$

a

$$N - k \neq x + y,$$

$$N - k - 1 \neq x + y.$$

Poznámka 5.4. V prípade, že $N - k = x + y$ alebo $N - k - 1 = x + y$ funkciu $g(x, y)$ dorátame v týchto bodoch zo vzťahov (5.1) a (5.2).

5.2.7 Dvojrozmerné negatívne hypergeometrické rozdelenie

Ďalším spomedzi hypergeometrických rozdelení je negatívne hypergeometrické rozdelenie, ktoré tiež môžeme nájsť v [7].

Definícia 5.7. Vravíme, že diskretný náhodný vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ má dvojrozmerné negatívne hypergeometrické rozdelenie, ak je jeho rozdelenie pravdepodobnosti

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\binom{N_1 + x - 1}{x} \binom{N_2 + y - 1}{y} \binom{N_3 + (n - x - y) - 1}{n - x - y}}{\binom{N + n - 1}{n}}, \quad (5.19)$$

kde

$$x, y = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$N_i > 0 \text{ pre } i = 1, 2,$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 < \infty$$

a

$$x + y \leq n.$$

Potom pre rozdelenie (5.19) je funkcia $g(x, y)$ z parciálnej sumácie (4.2)

$$g(x, y) = \frac{(N_1 + x)(N_2 + y)(n - x - y)(n - x - y - 1)}{(x + 1)(y + 1)(N_3 + n - x - y - 1)(N_3 + n - x - y - 2)} -$$

$$- \frac{(N_1 + x)(n - x - y)}{(x + 1)(N_3 + n - x - y - 1)} - \frac{(N_2 + y)(n - x - y)}{(y + 1)(N_3 + n - x - y - 1)} + 1,$$

kde

$$x, y = 0, 1, 2, \dots, n, \quad N_i > 0 \text{ pre } i = 1, 2, \quad N = N_1 + N_2 + N_3 < \infty, \quad x + y \leq n.$$

Poznámka 5.5. Ak $0 < N_3 \leq 2$, potom nastane prípad, kedy vzniká podobne ako v predchádzajúcich príkladoch nula v menovateli vzorca pre výpočet $g(x, y)$. Preto $f(x, y)$ vypočítame zo vzťahu (5.1)

$$P_{x+1,y+1}^* = P_{x+1,y}^* + P_{x,y+1}^* - f(x, y)P_{x,y}^*$$

a následne $g(x, y) = 1 - f(x, y)$.

Príklad 5.2. Uvádzame pre ilustráciu príklad dvojrozmerného negatívneho hypergeometrického rozdelenia s parametrami $N_1 = N_2 = N_3 = n = 2$. Potom jeho rozdelenie pravdepodobnosti je (nosič je iba "trojuholník")

$$P_{0,0} = \frac{1}{7}, \quad P_{0,1} = \frac{4}{21}, \quad P_{0,2} = \frac{1}{7}, \\ P_{1,0} = \frac{4}{21}, \quad P_{1,1} = \frac{4}{21}, \quad P_{2,0} = \frac{1}{7},$$

zapísané v tabuľke

		$P_{x,y}$		
		0	1	2
x \ y	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{7}$
	1	$\frac{4}{21}$	$\frac{4}{21}$	
	2	$\frac{1}{7}$		

Pre takéto rozdelenie pravdepodobnosti je prislúchajúca funkcia g :

		$g(x, y)$		
		0	1	2
x \ y	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{4}$	1
	1	$-\frac{3}{4}$	1	
	2	1		

5.2.8 Dvojrozmerné negatívne inverzné hypergeometrické rozdelenie

Majme tri typy objektov, z ktorých vyberáme s návratom. Pokračujeme vo výbere pokiaľ počet objektov tretieho typu nie je k . X je náhodná premenná, ktorá označuje počet objektov prvého typu, a Y počet objektov druhého typu. Ak je proporčné rozdelenie objektov do typov náhodné, má vektor $\binom{X}{Y}$ rozdelenie pravdepodobnosti

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\Gamma(k + x + y)\Gamma(N)\Gamma(k + N_3)\Gamma(N_1 + x)\Gamma(N_2 + y)}{\Gamma(k + x + y + N)\Gamma(k)\Gamma(N_1)\Gamma(N_2)\Gamma(N_3)x!y!}, \quad (5.20)$$

kde

$$x, y = 0, 1, 2, \dots,$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3$$

a N_1, N_2, N_3, k sú kladné reálne konštanty. Pre viac podrobností pozri [7].

Definícia 5.8. Hovoríme, že náhodný vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ má dvojrozmerné negatívne inverzné hypergeometrické rozdelenie, ak je jeho rozdelenie pravdepodobnosti dané vzorcom (5.20).

Potom je funkcia $g(x, y)$ pre rozdelenie (5.20)

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{(k + x + y + 1)(k + x + y)(N_1 + x)(N_2 + y)}{(k + x + y + N + 1)(k + x + y + N)(x + 1)(y + 1)} - \\ &- \frac{(k + x + y)(N_1 + x)}{(k + x + y + N)(x + 1)} - \frac{(k + x + y)(N_2 + y)}{(k + x + y + N)(y + 1)} + 1, \end{aligned}$$

kde

$$x, y = 0, 1, 2, \dots, N = N_1 + N_2 + N_3, 0 < N_1, N_2, N_3, k \in \mathbb{R}.$$

5.2.9 Dvojrozmerné Pólyovo rozdelenie

Podobne ako v jednorozmernom prípade je tiež možné odvodiť Pólyovo rozdelenie z urnovej schémy. Nech je v urne N loptičiek, N_1 prvej farby, N_2 druhej farby a $N_3 = N - N_1 - N_2$ tretej farby. V každom ťahu vytiahneme jednu loptičku a potom do urny vložíme c loptičiek rovnakej farby, akú sme vytiahli. Opakujeme n -krát. Na konci nás zaujímajú náhodné premenné X, Y ktoré označujú počet loptičiek prvej a druhej farby vo výbere. Počet loptičiek tretej farby vo výbere je určený počtami prvých dvoch, teda je $n - X - Y$.

Definícia 5.9. Hovoríme, že náhodný vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ má dvojrozmerné Pólyovo rozdelenie, ak je jeho rozdelenie pravdepodobnosti

$$P(X = x, Y = y) = \binom{n}{x, y} \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu_1 + x)\Gamma(\nu_2 + y)\Gamma(\nu_3 + n - x - y)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)\Gamma(\nu_3)\Gamma(\nu + n)}, \quad (5.21)$$

kde

$$\binom{n}{x, y} = \frac{n!}{x!y!(n - x - y)!},$$

$$x, y = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$N_1, N_2 \in \{1, 2, \dots, N\},$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3,$$

$$\nu_i = \frac{N_i}{c} \text{ pre } c \neq 0 \text{ a } i = 1, 2, 3$$

a $\Gamma(x)$ je štandardná gama funkcia.

Pre viac podrobností pozri [7]. Potom po jednoduchých úpravách dostávame funkciu $g(x, y)$ pre rozdelenie (5.21) tvaru

$$g(x, y) = \frac{(n - x - y)(n - x - y - 1)(\nu_1 + x)(\nu_2 + y)}{(x + 1)(y + 1)(\nu_3 + n - x - y - 2)(\nu_3 + n - x - y - 1)} - \\ - \frac{(n - x - y)(\nu_1 + x)}{(x + 1)(\nu_3 + n - x - y - 1)} - \frac{(n - x - y)(\nu_2 + y)}{(y + 1)(\nu_3 + n - x - y - 1)} + 1,$$

kde $x, y = 0, 1, 2, \dots, n$, $N_1, N_2 \in \{1, 2, \dots, N\}$, $N = N_1 + N_2 + N_3$, $\nu_i = \frac{N_i}{c}$ pre $c \neq 0$ a $i = 1, 2, 3$.

5.2.10 Dvojrozmerné inverzné Pólyovo rozdelenie

Toto rozdelenie je tiež možné odvodiť z urnovej schémy. Nech je v urne N loptičiek, N_1 jednej farby, N_2 druhej farby a $N_3 = N - N_1 - N_2$ tretej farby. Náhodne vyberáme z urny loptičky, kým nemáme k loptičiek napríklad tretej farby, pričom pridávame do urny c loptičiek v každom ťahu. Náhodné premenné X, Y symbolizujú počet loptičiek prvej a druhej farby vo výbere a ich združené rozdelenie nazývame dvojrozmerné inverzné Pólyovo.

Definícia 5.10. Hovoríme, že náhodný vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ má dvojrozmerné inverzné Pólyovo rozdelenie, ak je jeho rozdelenie pravdepodobnosti tvaru

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\Gamma(k + x + y) \Gamma(\nu_1 + x) \Gamma(\nu_2 + y) \Gamma(\nu_3 + n - x - y) (\Gamma(\nu))^3}{x! y! \Gamma(k)} \frac{\Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_2) \Gamma(\nu_3) (\Gamma(\nu + k + x + y))^3}{\Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_2) \Gamma(\nu_3) (\Gamma(\nu))^3}, \quad (5.22)$$

kde

$$x, y = 0, 1, 2, \dots,$$

$$N_i = 1, 2, \dots, N \text{ pre } i = 1, 2,$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3,$$

$$\nu = \frac{N}{c}, \quad \nu_i = \frac{N_i}{c} \text{ pre } c \neq 0 \text{ a } i = 1, 2, 3.$$

Potom pre rozdelenie (5.22) máme

$$g(x, y) = \frac{(k + x + y + 1)(k + x + y)(N_1 + xc)(N_2 + yc)}{(x + 1)(y + 1) [N + (k + x + y + 1)c] [N + (k + x + y)c]} - \\ - \frac{(k + x + y)(N_1 + xc)}{(x + 1) [N + (k + x + y)c]} - \frac{(k + x + y)(N_2 + yc)}{(y + 1) [N + (k + x + y)c]} + 1,$$

kde $x, y = 0, 1, 2, \dots$, $N_i = 1, 2, \dots, N$ pre $i = 1, 2$, $N = N_1 + N_2 + N_3$, $\nu = \frac{N}{c}$, $\nu_i = \frac{N_i}{c}$ pre $c \neq 0$ a $i = 1, 2, 3$. Vyjadrenie pre úpravu s parametrami ν_i :

$$g(x, y) = \frac{(k + x + y + 1)(k + x + y)(\nu_1 + x)(\nu_2 + y)}{(x + 1)(y + 1)(\nu + k + x + y + 1)(\nu + k + x + y)} - \\ - \frac{(k + x + y)(\nu_1 + x)}{(x + 1)(\nu + k + x + y)} - \frac{(k + x + y)(\nu_2 + y)}{(y + 1)(\nu + k + x + y)} + 1.$$

5.2.11 Dvojrozmerné negatívne binomické rozdelenie

Uvažujme postupnosť nezávislých pokusov, z ktorej každý pokus môže nadobudnúť jeden z možných výstupov A, B alebo C s pravdepodobnosťami $P(A) = p_1$, $P(B) = p_2$ a $P(C) = 1 - p_1 - p_2$. Predpokladajme, že nás zaujíma situácia, kedy počet výskytov výstupu C je r . Nech X je počet pokusov, v ktorých bol výstup A a Y počet výstupov, kedy bol výstup B (pri r -tom výstupe C). Potom je rozdelenie pravdepodobnosti náhodného vektora $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ dané nasledujúcou definíciou.

Definícia 5.11. Vravíme, že náhodný vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ má dvojrozmerné negatívne binomické rozdelenie, ak jeho rozdelenie pravdepodobnosti je

$$P(X = x, Y = y) = \binom{r + x + y - 1}{x, y} p_1^x p_2^y (1 - p_1 - p_2)^r, \quad (5.23)$$

kde $x, y = 0, 1, 2, \dots$,

$$p_1, p_2 \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$0 \leq 1 - p_1 - p_2 \leq 1,$$

$$r \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

a

$$\binom{r + x + y - 1}{x, y} = \frac{(r + x + y - 1)!}{x! y! (r - 1)!}.$$

Pre viac podrobností pozri [7]. Potom pre rozdelenie (5.23) je funkcia $g(x, y)$

$$g(x, y) = p_1 p_2 \frac{(r + x + y + 1)(r + x + y)}{(x + 1)(y + 1)} - p_1 \frac{r + x + y}{x + 1} - p_2 \frac{r + x + y}{y + 1} + 1,$$

pre $x, y = 0, 1, 2, \dots$ a $p_1, p_2 \in \langle 0, 1 \rangle$, $0 \leq 1 - p_1 - p_2 \leq 1$, $r = 0, 1, 2, \dots$

5.2.12 Dvojrozmerné Waringovo rozdelenie

Waringovo rozdelenie bolo navrhnuté pri modelovaní nehodovosti.

Definícia 5.12. Hovoríme, že náhodný vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ má dvojrozmerné Waringovo rozdelenie s parametrami $\alpha, \tau, \kappa, \beta > 0$, ak je jeho rozdelenie pravdepodobnosti

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\beta_{(\tau+\kappa)}}{(\alpha + \beta)_{(\tau+\kappa)}} \frac{\tau_{(x)}}{x!} \frac{\kappa_{(y)}}{y!} \frac{\alpha_{(x+y)}}{\gamma_{(x+y)}}, \quad (5.24)$$

kde

$$x, y = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\gamma = \alpha + \beta + \tau + \kappa,$$

$$A_{(B)} = \frac{\Gamma(A + B)}{\Gamma(A)}.$$

Pre viac podrobností pozri [7]. Potom pre (5.24) je funkcia $g(x, y)$ z (4.2)

$$g(x, y) = \frac{(x + \tau)(y + \kappa)(x + y + \alpha)(x + y + \alpha + 1)}{(x + 1)(y + 1)(x + y + \gamma)(x + y + \gamma + 1)} - \frac{(x + \tau)(x + y + \alpha)}{(x + 1)(x + y + \gamma)} - \\ - \frac{(y + \kappa)(x + y + \alpha)}{(y + 1)(x + y + \gamma)} + 1,$$

$x, y = 0, 1, 2, \dots$ a $\tau, \kappa, \alpha, \gamma > 0$.

Kapitola 6

Opakované parciálne sumácie

Opakované dvojrozmerné parciálne sumácie získame zovšeobecnením jednorozmerného prístupu (2.15). Majme rodičovské rozdelenie $\{P_{x,y}^*\}_{x,y=0}^\infty$ a nejakú reálnu funkciu $g(x, y)$, $x, y = 0, 1, 2, \dots$. Potom ak c_1 je normalizačná konštanta, tak potomka $\{P_{x,y}^{(1)}\}_{x,y=0}^\infty$ podľa (4.3) dostaneme vzťahom

$$P_{x,y}^{(1)} = c_1 \sum_{i=x}^\infty \sum_{j=y}^\infty g(i, j) P_{i,j}^*.$$

Potomka druhej generácie pri danej funkcii g získame, ak pristúpime k $P_{x,y}^{(1)}$ (potomkovi predchádzajúcej generácie) ako k rodičovi. Dostávame

$$P_{x,y}^{(2)} = c_2 \sum_{i=x}^\infty \sum_{j=y}^\infty g(i, j) P_{i,j}^{(1)},$$

kde c_2 je normalizačná konštanta. Potomka k -tej generácie získame analogicky sumáciou potomka $(k-1)$ -vej generácie ako

$$P_{x,y}^{(k)} = c_k \sum_{i=x}^\infty \sum_{j=y}^\infty g(i, j) P_{i,j}^{(k-1)}.$$

Predmetom skúmania je, či limitný potomok, teda limita $\lim_{k \rightarrow \infty} \{P_{x,y}^{(k)}\}_{x,y=0}^\infty$, existuje a čomu sa rovná. V nasledujúcej časti oboznamujeme čitateľa s mocninovou metódou, ktorá veľmi prispela k výsledkom v tejto otázke pri rodičovských rozdeleniach definovaných na konečnom nosiči.

6.1 Mocninová metóda

Mocninová metóda (Power Method) bola navrhnutá na aproximovanie vlastných čísel štvorcovej matice. Dá sa využiť na hľadanie vlastnej hodnoty matice A , ktorá je v absolútnej hodnote najväčšia (nazýva sa aj dominantná vlastná hodnota). Zaujímavosťou je, že našla uplatnenie napríklad aj pri internetovom vyhľadávacom Google. Nasledujúce tvrdenia a definície sme čerpali z [11].

Definícia 6.1. Nech $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sú vlastné hodnoty štvorcovej $n \times n$ matice A . Vlastná hodnota λ_1 sa nazýva dominantnou vlastnou hodnotou matice A , ak

$$|\lambda_1| > |\lambda_i|, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Vlastný vektor zodpovedajúci dominantnej vlastnej hodnote λ_1 sa nazýva dominantný vlastný vektor matice A .

Definícia 6.2. Matica A typu $n \times n$ je diagonalizovateľná, ak je A podobná diagonálnej matici, teda ak existuje invertovateľná matica P taká, že $P^{-1}AP$ je diagonálna matica.

Veta 6.1. Matica A typu $n \times n$ je diagonalizovateľná práve vtedy, keď má n lineárne nezávislých vlastných vektorov.

Dôkaz. Tento dôkaz je dostupný v [11]. □

Veta 6.2. Nech A je štvorcová $n \times n$ diagonalizovateľná matica s dominantnou vlastnou hodnotou, potom existuje nenulový vektor x_0 taký, že postupnosť

$$Ax_0, A^2x_0, A^3x_0, \dots, A^kx_0, \dots \quad (6.1)$$

konverguje k nejakému násobku dominantného vlastného vektora.

Dôkaz. Pre túto vetu v tejto práci dôkaz z [11] uvádzame, pretože priamo ukazuje, ako mocninová metóda funguje a tiež naznačuje rýchlosť konverencie.

Matica A je diagonalizovateľná podľa Vety 6.1 práve vtedy, keď má n lineárne nezávislých vlastných vektorov $x_1, x_2, \dots, x_n$. Nech sú k nim zodpovedajúce vlastné hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Môžeme predpokladať, že sú zoradené tak, že λ_1 je dominantnou vlastnou hodnotou. Keďže sú $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineárne nezávislé, tak tvoria bázu priestoru R^n . Za štartovací vektor vezmeme vektor, ktorý má nenulový vedúci koeficient c_1 (metóda by pre $c_1 = 0$ nekonvergovala)

$$x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

Ak vynásobíme obe strany rovnice maticou A zľava, dostávame

$$\begin{aligned} Ax_0 &= A(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) = c_1(Ax_1) + c_2(Ax_2) + \dots + c_n(Ax_n) = \\ &= c_1(\lambda_1x_1) + c_2(\lambda_2x_2) + \dots + c_n(\lambda_nx_n) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Po k -násobnom vynásobení oboch strán rovnice maticou A zľava máme

$$A^kx_0 = c_1(\lambda_1^kx_1) + c_2(\lambda_2^kx_2) + \dots + c_n(\lambda_n^kx_n),$$

z čoho dostávame

$$A^kx_0 = \lambda_1^k \left(c_1x_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k x_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k x_n \right). \quad (6.3)$$

Keďže λ_1 je dominantná vlastná hodnota, potom

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \in (-1, 1),$$

teda

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k, \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k, \dots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k$$

konvergujú k 0 pre k idúce do nekonečna, preto sa aproximácia

$$A^k x_0 \approx c_1 \lambda_1^k x_1, \quad c_1 \neq 0$$

s rastúcim k spresňuje. Keďže je x_1 dominantným vlastným vektorom, vidno, že $A^k x_0$ konverguje k jeho násobku. $\square$

6.2 Teoretický základ

Pri jednorozmerných parciálnych sumáciách v práci [9] bolo ukázané, že parciálnu sumáciu z (2.16) pri rodičovskom rozdelení s konečným nosičom vieme zapísať pomocou maticového zápisu. Štartovacím vektorom pri aplikácii mocninovej metódy bolo rodičovské rozdelenie pravdepodobnosti a prvky funkcie g boli vhodným spôsobom usporiadané do matice. Opakované parciálne sumácie potom vytvárali postupnosť (6.1) (až na konštanty), preto bolo možné využiť mocninovú metódu a ukázať konvergenciu k dominantnému vlastnému vektoru, pričom limitné rozdelenie pravdepodobnosti bolo násobkom práve tohto dominantného vlastného vektora.

Aby sme mohli využiť postup použitý pre jednorozmerné opakované parciálne sumácie definované na konečnom nosiči v [9] aj pre dvojrozmerné opakované parciálne sumácie, zdefinujeme zobrazenie, ktoré prevedie maticu na stĺpcový vektor. Môžeme to urobiť napríklad takým spôsobom, že prvý riadok toto zobrazenie ‘uloží’ do stĺpcového vektora, druhý riadok ‘uloží’ pod prvý do vektora, tretí podeň a tak ďalej. V literatúre je možné nájsť (pozri napr. [2]) zobrazenie *vec*, ktoré berie stĺpce namiesto riadkov. Formálne majme zobrazenie

$v : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$ také, že pre maticu M typu $n \times m$ je

$$v(M) = v \left(\begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} & \cdots & M_{0,m-1} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,m-1} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n-1,0} & M_{n-1,1} & M_{n-1,2} & \cdots & M_{n-1,m-1} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} M_{0,0} \\ M_{0,1} \\ M_{0,2} \\ \vdots \\ M_{0,m-1} \\ M_{1,0} \\ M_{1,1} \\ M_{1,2} \\ \vdots \\ M_{1,m-1} \\ \vdots \\ M_{n-1,0} \\ M_{n-1,1} \\ M_{n-1,2} \\ \vdots \\ M_{n-1,m-1} \end{pmatrix}.$$

Parciálne sumácie pre rodiča definovaného na konečnom nosiči rozsahu $n \times m$ môžeme zapísať ako súčin matice a vektora v tvare

$$v(\mathbb{P}^{(1)}) = c_1 \begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & g_{0,2} & \cdots & g_{0,m-1} & g_{1,0} & g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{n-1,m-1} \\ 0 & g_{0,1} & g_{0,2} & \cdots & g_{0,m-1} & 0 & g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{n-1,m-1} \\ 0 & 0 & g_{0,2} & \cdots & g_{0,m-1} & 0 & 0 & g_{1,2} & \cdots & g_{n-1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{0,m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{n-1,m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{1,0} & g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{n-1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{n-1,m-1} \end{pmatrix} v(\mathbb{P}^*),$$

kde c_1 je normalizačná konštanta. Vezmime $D = \text{diag}(g(0,0), g(0,1), \dots, g(n-1, m-1))$

diagonálnu maticu prvkov $g(0, 0), g(0, 1), \dots, g(n-1, m-1)$, teda

$$D = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} g_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{0,1} & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g_{0,2} & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_{0,m-1} & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & \vdots & & & \ddots & & & \vdots & & & & & \vdots & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & g_{n-1,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & g_{n-1,1} & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & g_{n-1,2} & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1,m-1} & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right).$$

Nech J je horná trojuholníková jednotková matica typu $m \times m$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom zrejme

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} J & J & J & \dots & J \\ 0 & J & J & \dots & J \\ 0 & 0 & J & \dots & J \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J \end{pmatrix} D.$$

$\tilde{G}$ je horná trojuholníková matica typu $nm \times nm$, v každom stĺpci sa nachádza iba jedno konkrétne $g(i, j)$ (môže sa tam nachádzať aj viackrát). Na diagonále sa vyskytujú všetky $g(i, j)$ práve raz. Využívajúc uvedené označenie dostaneme

$$v(\mathbb{P}^{(1)}) = \frac{\tilde{G}v(\mathbb{P}^*)}{\|\tilde{G}v(\mathbb{P}^*)\|_1},$$

kde pre vektor $\mathbf{x}$ veľkosti n je

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (6.4)$$

Pre potomka k -tej generácie môžeme písať

$$v(\mathbb{P}^{(k)}) = \frac{\tilde{G}v(\mathbb{P}^{(k-1)})}{\|\tilde{G}v(\mathbb{P}^{(k-1)})\|_1} = \frac{\tilde{G}^2v(\mathbb{P}^{(k-2)})}{\|\tilde{G}^2v(\mathbb{P}^{(k-2)})\|_1} = \dots = \frac{\tilde{G}^kv(\mathbb{P}^*)}{\|\tilde{G}^kv(\mathbb{P}^*)\|_1}.$$

Limitné rozdelenie pravdepodobnosti v tomto prípade bude

$$v(\mathbb{P}^{(\infty)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v(\mathbb{P}^{(k)})}{\|v(\mathbb{P}^{(k)})\|_1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{G}^kv(\mathbb{P}^*)}{\|(\tilde{G}^kv(\mathbb{P}^*))\|_1}. \quad (6.5)$$

Po aplikovaní mocninovej metódy za príslušných predpokladov (konečný nosič, jediná dominantná vlastná hodnota matice $\tilde{G}$, diagonalizovateľnosť matice $\tilde{G}$, vhodný štartovací vektor $\mathbb{P}^*$ nemôže byť kolmý na priestor dominantnej vlastnej hodnoty) vidíme, že postupnosť

$$\tilde{G}v(\mathbb{P}^*), \tilde{G}^2v(\mathbb{P}^*), \dots, \tilde{G}^kv(\mathbb{P}^*), \dots$$

konverguje k nejakému násobku dominantného vlastného vektora matice $\tilde{G}$ (vlastné čísla hornej trojuholníkovej matice sú prvky na diagonále, preto je dominantné vlastné číslo jediné práve vtedy, keď najväčšia absolútna hodnota $g(i, j)$ je práve jedna). Po prenasobení dominantného vlastného vektora matice $\tilde{G}$ normalizačnou konštantou (pozri (6.4)) získame hľadané limitné rozdelenie.

6.3 Príklad - dvojrozmerné inverzné hypergeometrické rozdelenie

Pozrime sa na konkrétny príklad s dvojrozmerným inverzným hypergeometrickým rozdelením (na výpočty bol použitý štatistický softvér R). Dvojrozmerné inverzné hypergeometrické rozdelenie (5.17) s parametrami N_1, N_2, N_3 a k je definované na konečnej množine, kde $x = 0, 1, 2, \dots, N_1$, $y = 0, 1, 2, \dots, N_2$, a parameter k má niektorú z hodnôt $1, 2, \dots, N_3$. Pre parametre $N_1 = 2, N_2 = 2, N_3 = 5, k = 2$ prislúchajúce rozdelenie pravdepodobnosti je

$$\mathbb{P}_G = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{10}{63} & \frac{5}{126} \\ \frac{10}{63} & \frac{10}{63} & \frac{4}{63} \\ \frac{5}{126} & \frac{4}{63} & \frac{5}{126} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Pre tieto parametre prislúchajúca funkcia g zapísaná do matice:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{20} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{20} & \frac{9}{20} & \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{8} & 1 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

Vytvoríme si maticu $\tilde{G}$, kde v prvom riadku sú po riadkoch usporiadané prvky matice G a zvyšok matice je vytvorený takým spôsobom, aby sme po vynásobení vektorom pravdepodobností dostali potomka (ktorého treba vynásobiť konštantou, aby bol rozdelením pravdepodobností). Dostávame takúto maticu

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{20} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{9}{20} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{8} & 1 \\ 0 & \frac{3}{20} & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{9}{20} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & \frac{9}{20} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{8} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{20} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{8} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je známe, že vlastné čísla diagonálnej matice sa rovnajú prvkom na diagonále, teda aby sme mohli použiť mocninovú metódu, musia mať prvky na diagonále (hodnoty funkcie $g(x_1, x_2)$) jedinú maximálnu absolútnu hodnotu, čo je v tomto prípade splnené. Keďže ale vlastné čísla matice $\tilde{G}$ nie sú všetky navzájom rôzne, musíme ešte overiť, či je matica $\tilde{G}$ diagonalizovateľná (ak by boli vlastné čísla rôzne, tak potom by bola diagonalizovateľná). Vlastné vektory s vlastnými číslami nájdeme v nasledujúcej tabuľke 6.1.

vl. č.	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{7}$
vl. v.	$\frac{1}{2\sqrt{367}}$	$\frac{1}{\sqrt{418}}$	$\frac{1}{\sqrt{418}}$	$\frac{1}{\sqrt{7078}}$	
	$\begin{pmatrix} 35 \\ 20 \\ 5 \\ 20 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 84 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
vl. č.	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	
vl. v.	$\frac{1}{2.3.439}$	$\frac{1}{2.3.439}$	$\frac{1}{3\sqrt{2.109}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2.109}}$	
	$\begin{pmatrix} 3465 \\ -365 \\ 15 \\ -325 \\ -195 \\ 39 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3465 \\ -325 \\ 0 \\ -365 \\ -195 \\ 0 \\ 15 \\ 39 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -21 \\ 39 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -21 \\ 0 \\ 0 \\ 39 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	

 Tabuľka 6.1: Vlastné čísla a vlastné vektory pre maticu $\tilde{G}$.

Vidíme, že podľa Vety 6.1 je matica $\tilde{G}$ diagonalizovateľná. Potom podľa mocninovej metódy, ak začíname z vhodne zvoleného počiatočného bodu, po opakovaní sumovania dokonvergujeme ku vlastnému vektoru prislúchajúcemu najväčšej vlastnej hodnote matice.

V našom prípade je najväčším vlastným číslom 1 a jej prislúchajúci vlastný vektor je

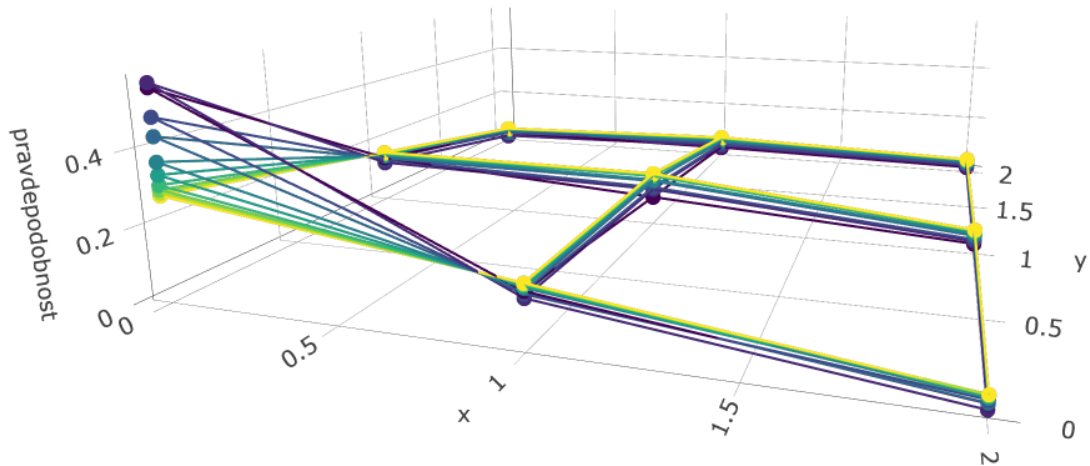
$$\frac{1}{2\sqrt{367}} \begin{pmatrix} 35 \\ 20 \\ 5 \\ 20 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix},$$

teda matica pravdepodobností je

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{10}{63} & \frac{5}{126} \\ \frac{10}{63} & \frac{10}{63} & \frac{4}{63} \\ \frac{5}{126} & \frac{4}{63} & \frac{5}{126} \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Vidíme, že limitné rozdelenie pravdepodobnosti (6.8) je identické s dvojrozmerným inverzným hypergeometrickým rozdelením s parametrami $N_1 = 2, N_2 = 2, N_3 = 5, k = 2$, teda je to rozdelenie (6.6), ktorému prislúcha matica G .

Graf rozdeleni pravdepodobnosti



Obr. 6.1: Rozdelenia pravdepodobností opakovaných sumácií pre sumáciu s dvojrozmerným inverzným hypergeometrickým rozdelením s parametrami $N_1 = 2, N_2 = 2, N_3 = 5$ a $k = 2$.

Na obrázku (6.1) môžeme vidieť vykreslené rodičovské rozdelenie, potomkov prvej až ôsmej generácie a limitné rozdelenie pre sumáciu (6.6). Najtmavšou fialovou farbou je znázornené rodičovské rozdelenie pravdepodobnosti $\mathbb{P}^*$ dvojrozmerné inverzné hypergeometrické (5.17) s parametrami $N_1 = 2, N_2 = 2, N_3 = 5$ a $k = 1$ ($v(\mathbb{P}^*)$ je štartovací vektor) s rozdelením pravdepodobnosti

$$\mathbb{P}^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{5}{36} & \frac{5}{252} \\ \frac{5}{36} & \frac{5}{63} & \frac{5}{252} \\ \frac{5}{252} & \frac{5}{252} & \frac{1}{126} \end{pmatrix},$$

bledšou fialovou farbou je znázornený potomok prvého rádu. Potomok druhého rádu je znázornený modrou farbou a potomkovia tretieho až ôsmeho rádu postupne bledšími farbami prechádzajúcimi do žltej. Poslednou jasne žltou farbou je znázornený limitný potomok (6.8).

6.4 Príklad - dvojrozmerné negatívne hypergeometrické rozdelenie

Pre niektoré rozdelenia a niektoré hodnoty parametrov môže nastať situácia, že limitný potomok je rozdelenie pravdepodobnosti, ale pre nejaké $k \in \mathbb{N}$ potomok k -tej generácie $\mathbb{P}^{(k)}$ nie je rozdelením pravdepodobnosti.

Uvádame konkrétny príklad takéhoto prípadu. Majme dvojrozmerné negatívne hypergeometrické rozdelenie s parametrami $N_1 = 6, N_2 = 4, N_3 = 4, n = 2$. Formálne sme nulou dodefinovali pravdepodobnosti chýbajúce do nosiča 3×3 . Jeho rozdelenie pravdepodobnosti potom je

$$\mathbb{P}_G = \begin{pmatrix} 0,0952381 & 0,1523810 & 0,0952381 \\ 0,2285714 & 0,2285714 & 0 \\ 0,2500000 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Príslušná matica G , ktorá je zostrojená tak, aby rozdelenie $\mathbb{P}_G$ zostalo invariantné, je tvaru

$$G = \begin{pmatrix} -0,6 & -1,125 & 1 \\ -0,875 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ak vytvoríme maticu $\tilde{G}$ analogicky ako v predchádzajúcom príklade, dostávame

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} -0,6 & -0,875 & 1 & -1,125 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,875 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,125 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ktorej dominantný vlastný vektor je

$$(0,9061831 \quad 0,4228855 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T.$$

Pri rodičovskom rozdelení negatívnom hypergeometrickom s parametrami $N_1 = 6, N_2 = 6, N_3 = 6, n = 2$

$$\mathbb{P}^* = \begin{pmatrix} 0,1228070 & 0,2105263 & 0,1228070 \\ 0,2105263 & 0,2105263 & 0 \\ 0,1228070 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

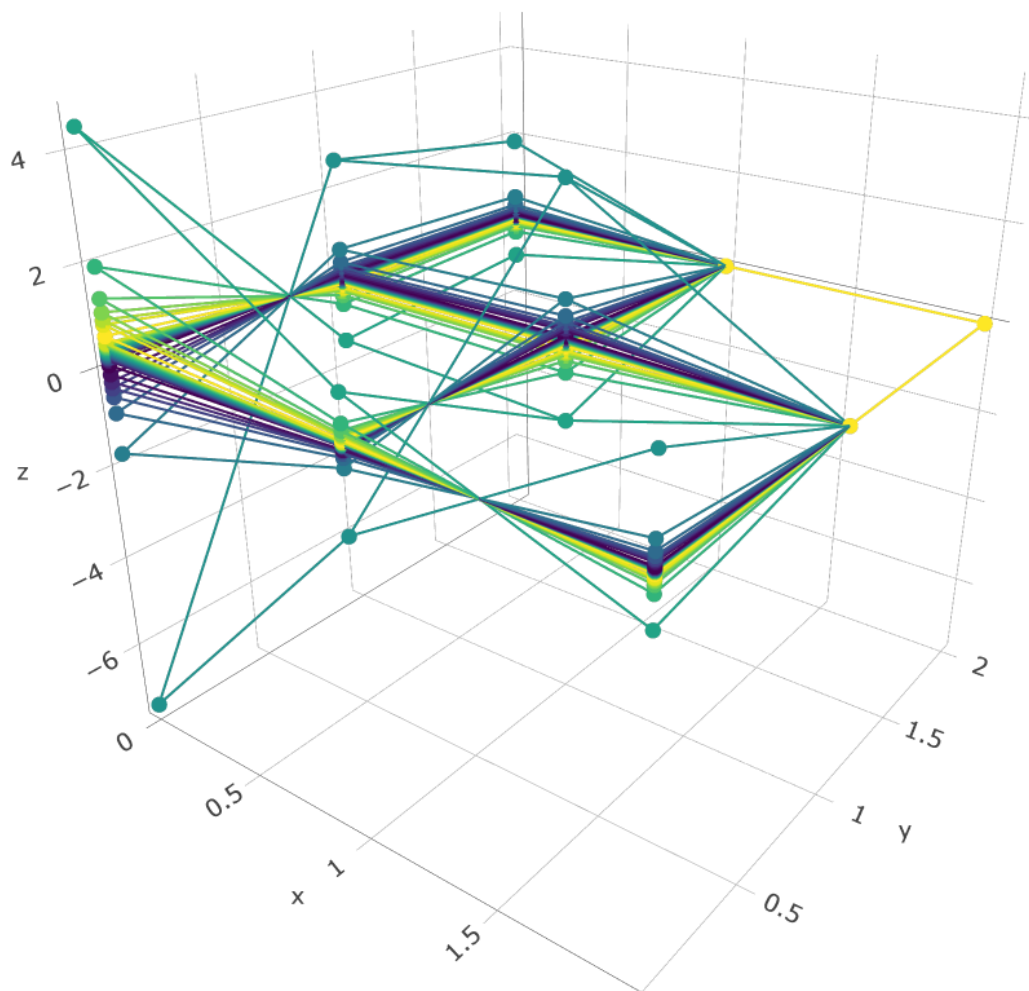
prvý potomok nie je rozdelením pravdepodobnosti:

$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{pmatrix} -0,05820106 & 0,1455026 & 0,1851852 \\ 0,22486772 & 0,3174603 & 0 \\ 0,18518519 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Limitný potomok, ktorého sme získali z dominantného vlastného vektora ale rozdelením pravdepodobnosti je:

$$\mathbb{P}^{(\infty)} = \begin{pmatrix} 0,6818182 & 0,3181818 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Na obrázku (6.2) môžeme vidieť potomkov opakovaných parciálnych sumácií pre rodiča (6.9) a limitného potomka (6.10). Najtmavšou fialovou farbou je znázornené rodičovské rozdelenie. Prvých pár potomkov opakovaných sumácií sa čím ďalej tým viac líši od rodičovského rozdelenia, pričom od určitého okamihu už nie sú rozdeleniami pravdepodobnosti. Od určitého okamihu sa ale situácia obráti a potomkovia sa stávajú rozdeleniami pravdepodobnosti a nakoniec sa začínajú sústreďovať okolo limitného potomka. Čím sú viac jasnozelenej farby a bližšie k žltej farbe, tým menej sa líšia od limitného rozdelenia (6.10), ktoré je znázornené žltou farbou.



Obr. 6.2: Opakované sumácie pre sumáciu s dvojrozmerným negatívnym hypergeometrickým rozdelením s parametrami $N_1 = 6$, $N_2 = 4$, $N_3 = 4$ a $n = 2$.

Mocninovú metódu môžeme využiť pri opakovaných parciálnych sumáciách dvojrozmerných diskretných rozdelení definovaných na konečnom nosiči aj v prípadoch, kedy je interpretácia potomka k -tej generácie pre niektoré hodnoty k otázna.

Kapitola 7

Oscilujúce postupnosti rozdelení

V minulosti bola za určitých predpokladov ukázaná existencia limity opakovaných parciálnych sumácií (pozri [9], [13], [21]). Avšak nebol známy príklad, kedy by táto limita neexistovala. Táto kapitola sa venuje príkladom z jednorozmerných aj dvojrozmerných parciálnych sumácií, kedy limita postupnosti rozdelení potomkov opakovanej parciálnej sumácie neexistuje. Výsledky z nej boli publikované v zborníku medzinárodnej konferencie EYSM [12].

Príklad 7.1. Nech je rodičovské rozdelenie s nosičom o veľkosti dva dané

$$\begin{pmatrix} P_0^* \\ P_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0^* \\ 1 - P_0^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix}.$$

Ak máme funkciu $g(0) = -1$ a $g(1) = 1$, potom matica G je

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Potomok prvej generácie s takýmto rodičovským rozdelením a funkciou g bude

$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{pmatrix} P_0^{(1)} \\ P_1^{(1)} \end{pmatrix} = c_1 G \begin{pmatrix} P_0^* \\ P_1^* \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{8}{10} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{17} \\ \frac{9}{17} \end{pmatrix}.$$

Potomok druhej generácie je

$$\mathbb{P}^{(2)} = c_2 G \begin{pmatrix} P_0^{(1)} \\ P_1^{(1)} \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{17} \\ \frac{9}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix},$$

ktorý je identický s pôvodným rodičovským rozdelením.

Takáto postupnosť potomkov určená parciálnou sumáciou $g(0) = -1$, $g(1) = 1$ začínajúca rodičom $P_0^* = \frac{1}{10}$, $P_1^* = \frac{9}{10}$ osciluje s periódou $k = 2$.

7.1 Oscilujúce postupnosti rozdelení s nosičom veľkosti dva

Majme rodičovské jednorozmerné diskkrétne rozdelenie definované na nosiči veľkosti dva

$$\mathbb{P}^* = \begin{pmatrix} P_0^* \\ P_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ 1 - p_0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq p_0 \leq 1.$$

Potom vhodná matica G zložená z hodnôt funkcie $g(x)$, $x = 0, 1$, ktorá bude vstupovať do parciálnej sumácie s takýmto rodičom, bude mať tvar

$$G = \begin{pmatrix} g(0) & g(1) \\ 0 & g(1) \end{pmatrix}.$$

Cieľom je identifikovať všetky periódny a prislúchajúce rodičovské rozdelenia, pre ktoré postupnosti parciálnych sumácií s nosičom dva oscilujú. Nech je perióda k a funkcia g má hodnoty $g(0) = a$ a $g(1) = b$ (normalizačná konštanta c_k je "schovaná" v tejto funkcii), teda platí

$$G^k \mathbb{P}^* = \mathbb{P}^*$$

a zároveň

$$c_1 G \mathbb{P}^* \neq \mathbb{P}^*, \quad c_2 G^2 \mathbb{P}^* \neq \mathbb{P}^*, \quad \dots, \quad c_{k-1} G^{k-1} \mathbb{P}^* \neq \mathbb{P}^*.$$

Potomok k -teho rádu je

$$\mathbb{P}^{(k)} = G^k \mathbb{P}^* = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^k p_0 + (a^{k-1}b + a^{k-2}b^2 + \dots + ab^{k-1} + b^k)p_1 \\ b^k p_1 \end{pmatrix}$$

a požadujeme, aby

$$\mathbb{P}^{(k)} = \begin{pmatrix} a^k p_0 + (a^{k-1}b + a^{k-2}b^2 + \dots + ab^{k-1} + b^k)p_1 \\ b^k p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \mathbb{P}^*.$$

Je zrejmé, že $g(1) = b = 1$ ($g(1)$ môže mať prípadne hodnotu -1 , avšak tento prípad vieme vyriešiť analogicky). Potom

$$\mathbb{P}^{(k)} = \begin{pmatrix} a^k p_0 + \left(\sum_{i=0}^{k-1} a^i \right) p_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

pre $k \geq 1$. Ak teda platí $P_0^{(k)} = p_0$ a ak $a \neq -1$, potom

$$\begin{aligned} P_0^{(k)} &= \frac{a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1}{-a^k + a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 2} = \\ &= \frac{a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1}{(2-a)(a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1)} = \frac{1}{2-a}. \end{aligned}$$

Z rozdelenia pravdepodobnosti dostávame, že $0 \leq \frac{1}{2-a} \leq 1$, z čoho $a \leq 1$. Tiež máme, že $a \neq -1$ a dostávame rozdelenie

$$\begin{pmatrix} P_0^* \\ P_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2-a} \\ \frac{1-a}{2-a} \end{pmatrix}.$$

ktoré je invariantné vzhľadom na parciálnu sumáciu $g(0) = a$, $g(1) = 1$ (zostáva nezmenené po aplikovaní tejto parciálnej sumácie):

$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2-a} \\ \frac{1-a}{2-a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2-a} \\ \frac{1-a}{2-a} \end{pmatrix}.$$

V prípade, že $a = -1$, dostávame

$$\mathbb{P}^{(k)} = \begin{pmatrix} (-1)^k p_0 + [(-1)^{k-1} + (-1)^{k-2} + \dots + (-1) + 1] p_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

z čoho môžeme jednoducho prísť k invariantnému rozdeleniu, ak položíme $k = 1$. Toto invariantné rozdelenie je

$$p_0 = \frac{1}{3}, \quad p_1 = \frac{2}{3}.$$

Pre párne periódy $k = 2l, l = 1, 2, \dots$ vyplýva z (7.2), že

$$\mathbb{P}^{(k)} = \begin{pmatrix} p_0 + [(-1) + 1 + \dots + (-1) + 1] p_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že najnižšia perióda je $k = 2$. Vskutku, iná párna perióda, pre ktorú dva nie je periódou, neexistuje. Ďalším ohraňením je, že potomok prvého rádu je pravdepodobnostným rozdelením, čo znamená, že v našom prípade s $a = -1$, $b = 1$ a $k = 2$ rodičovské rozdelenie musí spĺňať $p_0 \leq p_1$, inými slovami $p_0 \leq \frac{1}{2}$. Jediná možná nepárna perióda je $k = 1$, čo zodpovedá konštantnej postupnosti, teda invariantnému rozdeleniu.

V prípade, že $b = -1$, je situácia analogická a matica G je iba prenasobená konštantou -1 . Pri nosiči o veľkosti dva osciluje postupnosť opakovaných parciálnych sumácií, ak má funkcia g hodnoty $g(0) = -1$, $g(1) = 1$ (alebo $g(0) = 1$, $g(1) = -1$), a ak je rodičovské rozdelenie $P_0^* = p_0 \leq \frac{1}{2}$, $P_1^* = 1 - p_0$.

7.1.1 Oscilujúce postupnosti rozdelení s nosičom veľkosti tri

Príklad 7.2. Nechajme hodnotu funkcie $g(x)$ pre posledné dve pravdepodobnosti nezmenenú - $g(1) = -1$, $g(2) = 1$. Ak je parameter a z intervalu $(-\infty, 0)$, teda napríklad $a = -7$, potom ak $p_0 \in (0, \frac{1}{3-a}) = (0, \frac{1}{10})$, tak prichádza k oscilácii. Nech napríklad $p_0 = \frac{1}{12}$, potom

$$G^2 \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{90} \\ \frac{107}{180} \\ \frac{136}{180} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{29}{180} \\ \frac{136}{180} \end{pmatrix}.$$

Výsledky z predchádzajúcej časti je možné rozšíriť pre diskkrétne rozdelenia s nosičom veľkosti tri alebo viac. S hodnotami $g(1)$ a $g(2)$ máme podobnú situáciu ako v prípade s nosičom veľkosti dva, pretože hodnota $g(0)$ neovplyvňuje transformáciu pravdepodobností P_1^* , P_2^* :

$$\begin{aligned} P_0^{(1)} &= c_1 [g(0)P_0^* + g(1)P_1^* + g(2)P_2^*], \\ P_1^{(1)} &= c_1 [g(1)P_1^* + g(2)P_2^*], \\ P_2^{(1)} &= c_1 g(2)P_2^*. \end{aligned}$$

Z predchádzajúce príkladu vieme, že ak máme maticu

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

parciálne sumácie s rodičovským rozdelením

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ 1 - p_0 \end{pmatrix}$$

oscilujú s periódou $k = 2$ pre $p_0 \leq p_1$. Pre rodiča

$$\begin{pmatrix} P_1^* \\ P_2^* \end{pmatrix}$$

s $P_1^* \leq P_2^*$ to platí podobne, hoci nie je regulárnym rodičom (nie je rozdelením pravdepodobnosti - neplatí $P_1^* + P_2^* = 1$).

Pre $g(0) = a$, $g(1) = -1$, $g(2) = 1$ je prislúchajúca matica G

$$G = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nepárne periódny môžeme vylúčiť na základe nosiča veľkosti dva. Do úvahy pripadajú teda párne periódny $k = 2l$, $l = 1, 2, \dots$. Potom je k -tou generáciou

$$\mathbb{P}^{(k)} = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} P_0^* \\ P_1^* \\ P_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^k P_0^* + \left[\sum_{i=1}^k (-1)^i a^{k-i} \right] P_1^* + \left[\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} a^{2i-1} \right] P_2^* \\ P_1^* \\ P_2^* \end{pmatrix}.$$

Hľadáme také a , aby platilo pri párnej iterácii $k = 2l$

$$a^k P_0^* + \left[\sum_{i=1}^k (-1)^i a^{k-i} \right] P_1^* + \left[\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} a^{2i-1} \right] P_2^* = P_0^*.$$

Využitím jednoduchých algebraických operácií

$$\left[(a^2 - 1)P_0^* + (1 - a)P_1^* + aP_2^* \right] (a^{k-2} + a^{k-4} + \dots + 1) = 0,$$

a keďže polynóm $a^{k-2} + a^{k-4} + \dots + 1$ nemá reálny koreň, môžeme túto rovnosť zjednodušiť na

$$(a^2 - 1)P_0^* + (1 - a)P_1^* + aP_2^* = 0,$$

Teda hľadáme také a , aby platilo

$$G^2 \begin{pmatrix} P_0^* \\ P_1^* \\ P_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} P_0^* \\ P_1^* \\ P_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & -a+1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^* \\ P_1^* \\ P_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0^* \\ P_1^* \\ P_2^* \end{pmatrix}$$

a zároveň, aby neprišlo k invariantnosti, teda aby neplatilo

$$G \begin{pmatrix} P_0^* \\ P_1^* \\ P_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^* \\ P_1^* \\ P_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0^* \\ P_1^* \\ P_2^* \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Ak by platila takáto rovnosť (7.3), rozdelenie $\mathbb{P}^*$ by bolo invariantné vzhľadom na maticu G . Môžeme ho jednoducho zrátať:

$$aP_0^* - P_1^* + P_2^* = P_0^*,$$

$$-P_1^* + P_2^* = P_1^*,$$

$$P_2^* = P_2^*,$$

pričom musí platiť, že rodič je rozdelením pravdepodobnosti, teda

$$P_0^* + P_1^* + P_2^* = 1,$$

z čoho dostávame, že

$$\begin{pmatrix} P_0^* \\ P_1^* \\ P_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4-3a} \\ \frac{1-a}{4-3a} \\ \frac{2(1-a)}{4-3a} \end{pmatrix}, \quad a < \frac{4}{3}.$$

Môžeme si všimnúť, že druhá a tretia zložka sú v pomere 1 : 2, čo je rovnaký pomer ako pri invariantnosti rozdelenia s nosičom veľkosti dva.

Ak sa vrátíme znovu ku oscilácii potomkov s periódou dva, čo znamená, že pri druhej generácii potomkov bude potomok rovnaký ako rodič. Otázkou je, aký je vzťah medzi konštantou $a = g(0)$ a rodičovským rozdelením pravdepodobnosti $\mathbb{P}^*$, pričom máme

$$a^2P_0^* + (1-a)P_1^* + aP_2^* = P_0^*,$$

$$P_0^* + P_1^* + P_2^* = 0.$$

Pre konštantu $a \neq \frac{1}{2}$ sú oscilujúce rozdelenia pravdepodobnosti

$$\left(P_0^*, \frac{aP_0^* + P_0^* - a - a^2P_0^*}{1-2a}, \frac{aP_0^* + a^2P_0^* + 1 - 2P_0^* - a}{1-2a} \right)^T \quad (7.4)$$

pre nejaké hodnoty a a nejaké hodnoty P_0^* .

Prirodzene, zostáva určiť podmienky, ktoré musí $a = g(0)$ a rodičovské rozdelenie $\mathbb{P}^*$ spĺňať, aby jeho potomkovia boli regulárnymi rozdeleniami pravdepodobnosti.

Požadujeme, aby každý potomok bol rozdelením pravdepodobnosti, vieme, že $0 \leq P_0^* \leq 1$. Musí tiež platiť $0 \leq P_1^{(2)} \leq 1$, teda

$$0 \leq \frac{aP_0^* + P_0^* - a - a^2P_0^*}{1 - 2a} \leq 1,$$

z čoho dostávame kombinácie parametrov uvedené v nasledujúcej tabuľke 7.1.

a	p_0
$(-\infty, -1)$	$\left(0, \frac{-a}{a^2-a-1}\right)$
$(-1, 0)$	$(0, 1)$
$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{-a}{a^2-a-1}, \frac{a-1}{a^2-a-1}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$\left(\frac{a-1}{a^2-a-1}, \frac{-a}{a^2-a-1}\right)$
$(1, 2)$	$(0, 1)$
$(2, \infty)$	$\left(0, \frac{a-1}{a^2-a-1}\right)$

Tabuľka 7.1: Tabuľka parametrov vyhovujúcich podmienke $0 \leq P_1^{(2)} \leq 1$.

Podmienka $0 \leq P_2^{(2)} \leq 1$, kedy musí platiť

$$0 \leq \frac{aP_0^* + a^2P_0^* + 1 - 2P_0^* - a}{1 - 2a} \leq 1$$

určuje dvojice parametrov dané tabuľkou 7.2.

a	p_0
$(-\infty, -1 - \sqrt{3})$	$\left(0, \frac{-a}{a^2+a-2}\right)$
$(-1 - \sqrt{3}, -1)$	$(0, 1)$
$(-1, 0)$	$\left(0, \frac{a-1}{a^2+a-2}\right)$
$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{-a}{a^2+a-2}, \frac{a-1}{a^2+a-2}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3} - 1\right)$	$\left(\frac{a-1}{a^2+a-2}, \frac{-a}{a^2+a-2}\right)$
$(\sqrt{3} - 1, 1)$	$\left(\frac{a-1}{a^2+a-2}, 1\right)$
$(1, \infty)$	$\left(0, \frac{a-1}{a^2+a-2}\right)$

Tabuľka 7.2: Tabuľka parametrov vyhovujúcich podmienke $0 \leq P_2^{(2)} \leq 1$.

Tiež požadujeme, aby sme nielen pri druhej generácii dostali rozdelenie pravdepodobnosti (pôvodné rozdelenie), ale aj aby po prvej iterácii bol potomok rozdelením pravdepodobnosti. Z tohto dostávame ohraňovania na parametre zaznamenané v tabuľke 7.3.

a	p_0
$(-\infty, \frac{1}{2})$	$(0, \frac{1}{3-a})$
$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{3-2a^2}, 1)$

Tabuľka 7.3: Vyhovujúce parametre, pri ktorých po prvej iterácii vzniká rozdelenie pravdepodobnosti.

Ak zohľadníme všetky podmienky na parametre spomenuté vyššie, dostávame ohraničenia na parametre uvedené v tabuľke 7.4.

a	p_0
$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{1}{3-a})$
$(0, \frac{1}{2})$	$(\frac{-a}{a^2-a-1}, \frac{1}{3-2a^2})$
$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{3-2a^2}, \frac{-a}{a^2-a-1})$

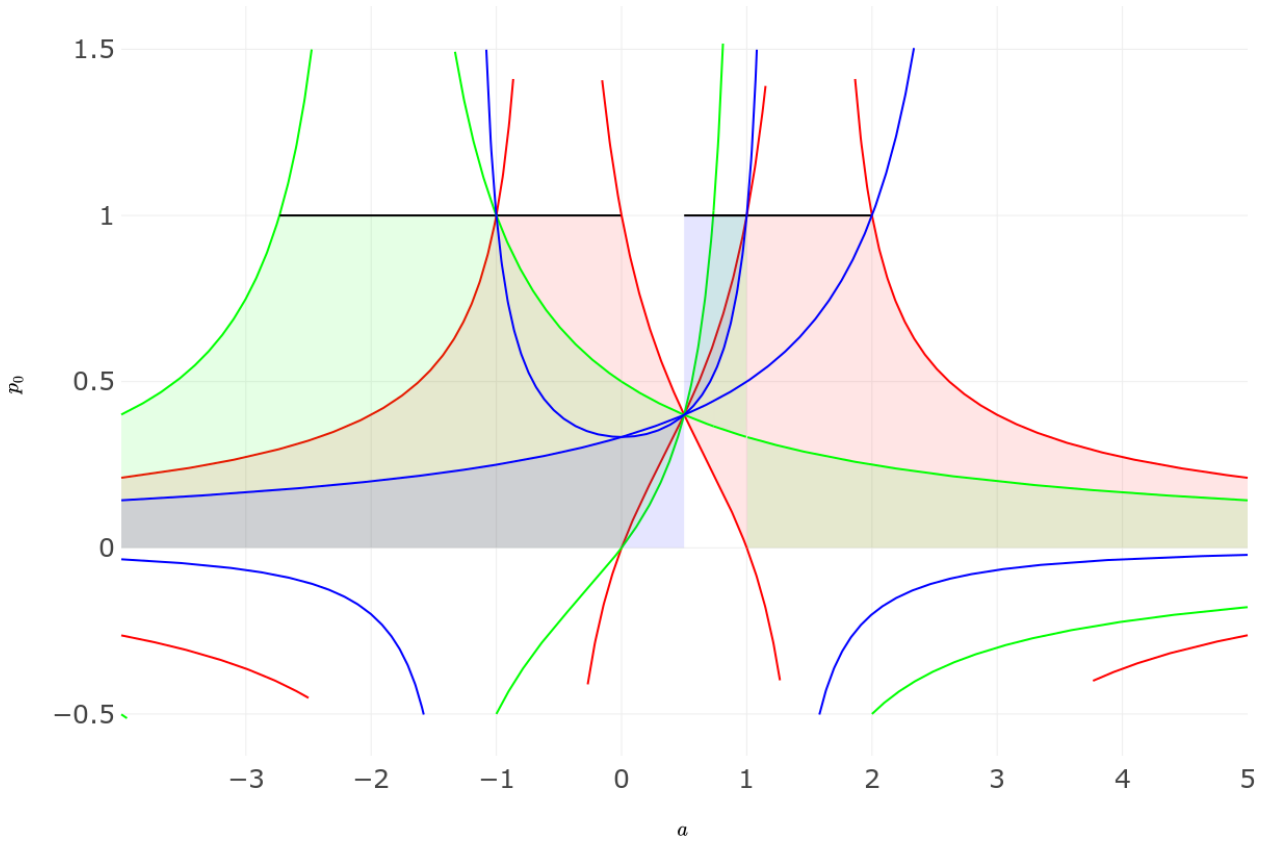
Tabuľka 7.4: Vyhovujúce parametre, pri ktorých prichádza k oscilácii postupností rozdelení opakovaných sumácií.

Prienik vyhovujúcich kombinácií parametrov je zakreslený v obrázku 7.1.

Pre každé a a P_0^* z týchto intervalov postupnosť potomkov osciluje s periódou $k = 2$. Výnimkou je perióda $k = 1$, kedy je rozdelenie invariantné vzhľadom na parciálnu sumáciu, čo je splnené, ak je rodičovské rozdelenie

$$P_0^* = \frac{1}{4-3a}, \quad P_1^* = \frac{1-a}{4-3a}, \quad P_2^* = \frac{2(1-a)}{4-3a}.$$

Prípád s $g(2) = -1$ je analogický, ako sme videli v prípade, kedy bol nosič rozdelenia veľkosti dva.

Vyhovujúce dvojice parametrov a, p_0


Obr. 7.1: Vyhovujúce dvojice parametrov a, p_0 zodpovedajúce tabuľke 7.4, pri ktorých prichádza k oscilácii. Červená farba zodpovedá ohraničeniam z tabuľky 7.1, zelená z tabuľky 7.2 a modrá podmienkam z tabuľky 7.3.

7.2 Oscilujúce postupnosti rozdelení pri dvojrozmerných parciálnych sumáciách

Pri dvojrozmerných parciálnych sumáciách je situácia ešte o čosi zložitejšia, uvádzame jednoduchý príklad oscilácie v tomto prípade.

Príklad 7.3. V tomto prípade vezmeme dvojrozmerné hypergeometrické rozdelenie s parametrami $N_1 = 1, N_2 = 1, N_3 = 2, n = 1$ ako rodiča a ako parciálnu sumáciu vezmeme tiež dvojrozmerné hypergeometrické rozdelenie s parametrami $N_1 = N_2 = N_3 = n = 1$. Keďže dvojrozmerné hypergeometrické rozdelenie je rozdelenie s konečným nosičom, rozdelenie pravdepodobnosti rodiča $\mathbb{P}^*$ s danými parametrami je

$$\mathbb{P}^* = \begin{pmatrix} P_{0,0}^* & P_{0,1}^* \\ P_{1,0}^* & P_{1,1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

a matica G funkcie g parciálnych sumácií je

$$G = \begin{pmatrix} g(0,0) & g(0,1) \\ g(1,0) & g(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} \\ g_{1,0} & g_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Ukážeme, že limitné rozdelenie pre takto zvolené parametre dvojrozmerného hypergeometrického rozdelenia neexistuje. Prepísané do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} P_{0,0}^{(1)} \\ P_{0,1}^{(1)} \\ P_{1,0}^{(1)} \\ P_{1,1}^{(1)} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & g_{1,0} & g_{1,1} \\ 0 & g_{0,1} & 0 & g_{1,1} \\ 0 & 0 & g_{1,0} & g_{1,1} \\ 0 & 0 & 0 & g_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{0,0}^* \\ P_{0,1}^* \\ P_{1,0}^* \\ P_{1,1}^* \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} g_{0,0}P_{0,0}^* + g_{1,0}P_{1,0}^* + g_{1,0}P_{1,0}^* + g_{1,1}P_{1,1}^* \\ g_{0,1}P_{0,1}^* + g_{1,1}P_{1,1}^* \\ g_{1,0}P_{1,0}^* + g_{1,1}P_{1,1}^* \\ g_{1,1}P_{1,1}^* \end{pmatrix}.$$

Po dosadení

$$v(\mathbb{P}^{(1)}) = \begin{pmatrix} P_{0,0}^{(1)} \\ P_{0,1}^{(1)} \\ P_{1,0}^{(1)} \\ P_{1,1}^{(1)} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix},$$

pre $c_1 = 2$, teda po prvej sumácii, je rozdelenie pravdepodobnosti

$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Druhá sumácia:

$$v(\mathbb{P}^{(2)}) = \begin{pmatrix} P_{0,0}^{(2)} \\ P_{0,1}^{(2)} \\ P_{1,0}^{(2)} \\ P_{1,1}^{(2)} \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

pre $c_2 = \frac{1}{2}$, teda po druhej sumácii je rozdelenie rovnaké, ako rodič:

$$\mathbb{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Opakované sumácie s takýmito parametrami oscilujú s periódou $k = 2$.

Záver

V oblasti parciálnych sumácií sa doteraz výskum sústredil prevažne na jednorozmerné diskrétne rozdelenia. Úvodné dve kapitoly tejto práce popisujú doterajšie poznatky. Prvá kapitola ponúka krátky prehľad významných publikácií v oblasti diskretných rozdelení a druhá stručne zhrňa viacero rozdielnych typov sumácií vychádzajúcich zo všeobecnej definície a doterajšie poznatky. Vychádzajúc z týchto dvoch kapitol sme sa v tejto práci zamerali na jeden z najznámejších typov parciálnych sumácií daný funkciou $g(x)$.

Tretia kapitola nadväzuje na známe výsledky pre jednorozmerné parciálne sumácie, kedy sa na parciálnu sumáciu pozerá ako na vzťah troch rozdelení. Jedným je rodič, druhým potomok a tretím je rozdelenie určujúce funkciu $g(x)$. Táto kapitola poskytuje konkrétne príklady sumácií, kedy do nich ako jeden člen vstupuje geometrické rozdelenie. V prvej časti je to cez funkciu $g(x)$, pričom za rodičovské rozdelenie sú brané rozdelenia ako Poissonovo, negatívne binomické a iné. V druhej časti je geometrické rozdelenie v roli rodiča a parciálnu sumáciu určujú rozdelenia Salviovo - Bollingerovo a Poissonovo. Iba pri poslednom spomenutom prípade (geometrický rodič, sumácia Poissonovská) nastáva situácia, kedy parameter sumácie ovplyvňuje výsledného potomka. V ostatných prípadoch, či už v prvej, alebo v druhej časti, parameter daného rozdelenia sumácie nezaváňal.

Štvrtá, piata, šiesta a čiastočne siedma kapitola sa venujú rozšíreniam známych výsledkov z jednorozmerných sumácií na dvojrozmerné diskrétne rozdelenia. Vo štvrtej kapitole sa jedná o teoretické výsledky ako vzťahy medzi vytvárajúcimi funkciami a momentami. Piata kapitola rieši problém invariantnosti, teda hľadá funkciu $g(x, y)$, pri ktorej zostáva rodič vstupujúci do sumácie nezmenený. Sú tu uvedené príklady tejto funkcie pre známe dvojrozmerné diskrétne rozdelenia. Špeciálne sa venujeme viacerým typom dvojrozmerného geometrického rozdelenia, rozdeleniam odvodeným pomocou urnových schém a iným.

Tematicky nadväzujúcou témou sú opakované parciálne sumácie zo šiestej kapitoly. Sú tu rozoberané postupnosti rozdelení získané pomocou opakovaných sumácií. Pre diskrétne rozdelenia s konečným nosičom sú za určitých podmienok nájdené ich limitné rozdelenia ako rozšírenie jednorozmerného prípadu. Výsledky z piatej a šiestej kapitoly boli spísané tiež v článku [13].

Siedma, posledná kapitola práce, sa rovnako zaoberá opakovanými sumáciami. Obsahuje zatiaľ nezaznamenanými jednoduchými príkladmi oscilujúcich postupností pre jednorozmerný aj dvojrozmerný prípad. Myšlienky šiestej a siedmej kapitoly boli prezentované v recenzovanom zborníku konferencie EYSM [12].

Ako možné pokračovanie tejto práce je nadviazanie na časť dizertačnej práce [10]. Autorka sa v nej okrem iného venovala aj tzv. parametrizácii jednorozmerných parciálnych sumácií diskretných rozdelení.

Literatúra

- [1] G. Asha and P.G. Sankaran. A Bivariate Geometric Model and Its Properties. *Journal of the Indian Statistical Association*, 40(1):1–12, 2002.
- [2] D. A. Harville. *Matrix Algebra From a Statistician's Perspective*. Springer-Verlag New York, Inc., 1997.
- [3] A.G. Hawkes. A Bivariate Exponential Distribution with Applications to Reliability. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 34:129–131, 1972.
- [4] N.L. Johnson, A.W. Kemp, and S. Kotz. *Univariate Discrete Distributions*. John Wiley & Sons, Inc., 3th edition, 2005.
- [5] N.L. Johnson and S. Kotz. *Urn Models and Their Application*. John Wiley & Sons, Inc., 1977.
- [6] N.L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan. *Discrete Multivariate Distributions*. John Wiley & Sons, Inc., 3th edition, 1996.
- [7] S. Kocherlakota and K. Kocherlakota. *Bivariate Discrete Distributions*. Marcel Dekker, Inc., 1992.
- [8] S. Kotz and N.L. Johnson. A Note on Renewal (Partial Sums) Distributions for Discrete Variables. *Statistics & Probability Letters*, 12:229–231, September 1991.
- [9] M. Koščová, R. Harman, and J. Mačutek. Iterated partial summations applied to finite-support discrete distributions. *Mathematica Slovaca*, 70(2):489–496, 2020.
- [10] M. Koščová. *Properties of Partial-Sum Discrete Probability Distributions*. PhD thesis, Comenius University in Bratislava, 2020.
- [11] R. Larson and D.C. Falvo. *Elementary Linear Algebra*. Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 6th edition, 2009.
- [12] L. Leššová. Oscillating sequences of partial-sums discrete probability distributions. In B. Milošević and M. Obradović, editors, *Proceedings from the 21st European Young Statisticians Meeting*, pages 41–45. Faculty of Mathematics, Belgrade, 2019.
- [13] L. Leššová and J. Mačutek. On the limit behaviour of finite-support bivariate discrete probability distributions under iterated partial summations. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, to appear, 2020.

-
- [14] S. Li. On a Class of Discrete Time Renewal Risk Models. *Scandinavian Actuarial Journal*, 4:241–260, 2005.
- [15] S. Li, Y. Lu, and J. Garrido. A Review of Discrete-Time Risk Models. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 103(2):321–337, 2009.
- [16] X.S. Lin and G.E. Willmot. Analysis of a Defective Renewal Equation Arising in Ruin Theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 25:63–84, 1999.
- [17] J. Mačutek. Katz Partial Summations Family. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 22:143–148, 2001.
- [18] J. Mačutek. Discrete Probability Distributions Generated by the Generalized STER Summation. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 16:1–6, 2002.
- [19] J. Mačutek. On Two Types of Partial Summations. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 26:403–410, 2003.
- [20] J. Mačutek. Discrete Distributions Connected by Partial Summations. *Glottometrics*, 11:51–55, 2005.
- [21] J. Mačutek. A Limit Property of the Geometric Distribution. *Theory of Probability and Its Applications*, 50(2):316–319, 2006.
- [22] J. Mačutek and G. Altmann. Discrete nad Continuous Modelling in Quantitative Linguistics. *Journal of Quantitative Linguistics*, 14(1):81–94, 2007.
- [23] K.R.M. Nair and N.U. Nair. On Characterizing a Bivariate Geometric Distribution. *Journal of the Indian Statistical Association*, 26:45–49, 1988.
- [24] N.U. Nair and N. Hitha. Characterization of Discrete Models by Distribution Based on Their Partial Sums. *Statistics & Probability Letters*, 8:335–337, 1989.
- [25] N.U. Nair, P.G Sankaran, and M. Preeth. Reliability Aspects of Discrete Equilibrium Distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 41:500–515, 2012.
- [26] A.G. Phatak and M. Sreehari. Some Characterizations of a Bivariate Geometric Distribution. *Journal of the Indian Statistical Association*, 19:141–146, 1981.
- [27] G. Wimmer. *Diskrétné jednorozmerné rozdelenia pravdepodobnosti*. Praha: Matfyzpress, 2000.
- [28] G. Wimmer and G. Altmann. *Thesaurus of Univariate Discrete Probability Distributions*. STAMM, 1st edition, 1999.
- [29] G. Wimmer and G. Altmann. On the Generalization of the STER Distribution Applied to Generalized Hypergeometric Parents. *Acta Universitatis Palackianae Olomouensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica*, 39:215–247, 2000.

-
- [30] G. Wimmer and G. Altmann. A New Type of Partial-Sums Distributions. *Statistics & Probability Letters*, 52:359–364, 2001.
- [31] G. Wimmer and G. Altmann. Models of Rank - Frequency Distributions in Language and Music. In Wimmer, G., Altmann, G., and Köhler, R., editors. *Text as a Linguistic Paradigm: Levels, Constituents, Constructs*, pages 283–294, 2001.
- [32] G. Wimmer and J. Kalas. A Characterization of the Geometric Distribution. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 17:325–329, 1999.
- [33] G. Wimmer and J. Mačutek. New Integrated View at Partial - Sums Distributions. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 51:183–190, 2012.
- [34] E. Xekalaki. A Property of the Yule Distribution and Its Applications. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 12/10:1181–1189, 1983.