

Vedecká rada Fakulty matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave

RNDr. Ján Pataky

Autoreferát dizertačnej práce

Oceňovanie a využitie kreditných derivátov na kapitálovom trhu

Na získanie vedecko-akademickej hodnosti *philosophiae doctor*

Vo vednom odbore: 11-14-9 Aplikovaná matematika

Bratislava, 2010

Dizertačná práca bola vypracovaná v externej forme doktorandského štúdia na Katedre aplikovanej matematiky a štatistiky, Fakulty matematiky, fyziky a informatiky (FMFI) Univerzity Komenského (UK) v Bratislave.

Predkladateľ: RNDr. Ján Pataky

FMFI UK, Mlynská dolina

841 04 Bratislava

pataky.jan@gmail.com

Školiteľ: doc. RNDr. Vladimír Toma, PhD.

FMFI UK, Mlynská dolina

841 04 Bratislava

Oponenti: prof. RNDr. Radko Mesiar, DrSc

stavebná fakulta, STU Bratislava

prof. RNDr. Jozef Komorník, DrSc

fakulta managementu, UK Bratislava

RNDr. Igor Melicherčík, PhD

fakulta matematiky fyziky a informatiky, UK Bratislava

Autoreferát bol rozoslaný dňa:10.9.2010 . Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa: 22.10.2010 o 13:00 v posluchárni C pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce vo vednom odbore doktorandského štúdia 11-14-9 Aplikovaná matematika vymenovanou podpredsedom spoločnej odborovej komisie dňa 30.8.2010 na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Podpredseda spoločnej odborovej komisie:

Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc.

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

FMFI - UK v Bratislave

Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Úvod

Kreditné deriváty vznikli ako dôsledok spojenia finančných derivátov a potreby sekuritizácie bankových portfólií.

Kreditný derivát môžeme definovať ako dvojstranný kontrakt, ktorý presúva riziko výskytu kreditnej udalosti (credit event) z predávajúceho na kupujúceho. Ten poskytuje predávajúcemu kontraktu kreditnú ochranu a dostáva zato od predávajúceho odmenu.

Kľúčovými motívmi jednotlivých participantov boli hlavne:

- *Motivácia emitenta* – hlavnými motiváciami pri vydávaní CDO sú participovať na príležitosti kreditnej arbitráže a dosiahnutie optimálnej kapitálovej primeranosti sledovanej regulátorom kapitálového trhu.
- *Motivácia kolaterál manažera* – CDO mu umožňuje zvýšiť objem spravovaných aktív, rozširovať existujúce manažérske kapacity a generovať stabilný príjem (poplatky) v súvislosti so spravovaním aktív.
- *Motivácia investora* – CDO umožňuje dosiahnuť primeranú úroveň diverzifikácie a dosiahnuť lepší riziko výnos profil.

Collateralized debt obligations (CDO) predstavujú dôležitú triedu cenných papierov podložených aktívami. Oceňovanie CDO sa zakladá na matematickom modelovaní, simulácii, na analytických metódach, ktoré závisia na podkladovom súbore aktív a na štruktúre transakcie. Hlavná časť uznávaných modelov oceňovania v praxi sa sústreďuje na oceňovanie kreditného rizika zlyhania a na cashflow modelovanie. V praxi sa často pozabúda na riziko likvidity a leverage¹, ktoré boli aj dôvodom zániku jednej z epoch týchto produktov.

Práca predkladá komplexný model ocenenia CDO za pomoci Kopula funkcií a zaoberá sa jeho kalibráciou trhovými dátami. Začína vysvetlením základných princípov ako fungujú a ako sa využívajú štruktúrované finančné nástroje kapitálového trhu, vysvetľuje analytické prístupy oceňovania CDO a rozoberá pojmy PD, EL a DAS súvisiace s CDO. Porovnáva teoretickú modelovanú cenu s trhovou cenou a snaží sa vysvetliť rozdiely. Analyzuje modely a ich nedostatky a zamýšľa sa nad príčinami kolapsu týchto inštrumentov.

¹ pomer vlastných zdrojov k požíčným zdrojom

Ciele

Cieľom dizertačnej práce bolo vybudovať matematicko štatistický aparát na oceňovanie CDO a vysvetliť dosiahnuté výsledky použiteľné v praxi. Použiť doterajšie poznatky z teórie poisťovníctva na diverzifikovanom poistnom kmeni v praxi pri oceňovaní diverzifikovaného portfólia aktív v spojení s hazard rate funkciou. Nájsť akým spôsobom a aké dáta použiť na kalibráciu hazard rate funkcie.

Za hlavné ciele práce sme si vytýčili :

- vybudovať matematický model založený na Kopula funkcii,
- vybudovať štatistický model založený na funkcii prežitia za pomoci historických dát jednotlivých typoch aktív s pomocou teórie kreditných kriviek,
- navrhnúť numerické schémy pre výpočet súčasnej hodnoty CDO tranži,
- preskúmať citlivosť výsledkov na meniace sa vstupne parametre,
- predložiť komparatívnu analýzu jedného produktu a porovnať výsledky s cenami z trhu, urobiť komplexnú analýzu ocenenia a zhodnotiť produkt

1 CDO (Collateralized Debt Obligations)

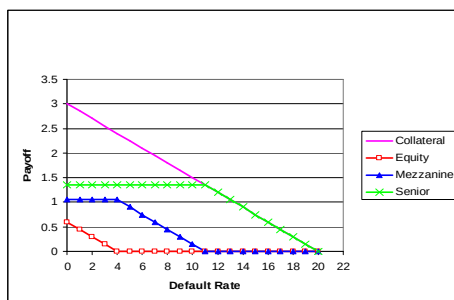
CDOčka sú odvodené od kreditných nástrojov a predstavujú pokročilú formu sekuritizácie. Môžu sa skladať z pôžičiek alebo dlhopisov, prípadne iných nástrojov. Podkladové pôžičky a dlhopisy sú združené a spravované špeciálnou inštitúciou SPV (Special Purpose Vehicle). Zväčša ide o málo likvidné aktíva, ktoré by mali ako celok produkovať relatívne stabilný výnos. V rámci SPV sú vytvorené viaceré tranže, ktoré majú priradené ratingy. Ako prvý je vyplácaný nominálna hodnota a výnos senior tranže, preto je najmenej riziková, zároveň však aj najmenej výnosná. Po nej nasleduje stredná a nakoniec junior tranža. Výnos junior tranže predstavuje čiastku zostávajúcu po vyplatení senior a mezz tranže.

Predpokladajme, že máme takéto portfólio. Straty z hodnoty portfólia spôsobené zlyhaním firiem závisia predovšetkým od pravdepodobnosti zlyhania každej z firiem a od veľkosti strát niektorého z aktív v prípade jeho zlyhania (resp. veľkosti podielu hodnoty aktíva, ktorý bude vyplatený v prípade zlyhania – túto hodnotu vyjadruje tzv. *Recovery Rate*). Navyše, veľmi dôležitú úlohu pri modelovaní časov defaultu firiem, a následne aj

pravdepodobnostného rozdelenia strát portfólia, hrá aj stupeň závislosti medzi pravdepodobnosťami defaultu jednotlivých firiem – vzájomná korelácia.

1.2 Oceňovanie pomocou put opcií.

Rôzne tranže CDO štruktúry sú komplexne závislé na opciách na stratu z portfólia. Je veľa faktorov, ktoré určujú ako bude vyzerat' payoff funkcia každej tranže. Na základe týchto technických faktorov môžeme povedať, že Equity tranža je vlastne kúpená put opcia s nízkou strike na portfóliovú stratu. Mezzanine tranža je predaj nízkej strike put opcie a nákup vysokej strike put opcie na portfóliovú stratu. Napríklad pre mezz tranžu platí, že investor dostáva konštantný cashflow, ak strata z portfólia je pod hranicou jej subordinácie. Ak sa strata prehupne, alikvotne s rastúcou stratou sa znižuje aj cashflow investora podľa veľkosti straty. Povedzme, že naša transakcia má tri tranže.



Obrázok 1.2.1: zjednodušený payoff diagram pre CDO tranže.

Zhnutím hore uvedených faktov a skúseností z oceňovania opcií môžeme povedať nasledovné: rozdiel medzi opčnou funkciou a payoff funkciou alebo opčnou vnútornou cenou je opčná prémie. Opčná prémie rastie s volatilitou podkladového portfólia a teda portfólio stratou. Vega (sleduje ako vplyva zmena volatility aktíva na hodnotu opcie) opčnej prémie je najcitlivejšia v oblasti *at the money*.

2 Kopula funkcia

Ďalej ak chceme pokračovať v oceňovaní CDO štruktúry, musíme si na to vybudovať matematický aparát.

Definícia 1: *n*-rozmernou Kopulou nazývame funkciu $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ s nasledovnými vlastnosťami:

1. $C(\mathbf{u})$ je rastúca v každej zložke u_k , $k = 1, 2, \dots, n$.
2. Pre každý vektor $[0,1]^n$, $C(\mathbf{u}) = 0$, ak aspoň jedna zložka vektora $\mathbf{u}$ je nulová a $C(\mathbf{u}) = u_k$, ak všetky zložky $\mathbf{u}$ okrem k -tej zložky sú rovné 1.
3. Pre každé $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in [0,1]^n$, $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ a *n*-rozmernú kocku $\mathbf{B} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$, ktorej vrcholy ležia v definičnom obore funkcie C , je objem tejto kocky $V_C(\mathbf{B}) \geq 0$.

Objem $V_C(\mathbf{B})$ *n*-rozmernej kocky $\mathbf{B} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ je definovaný ako:

$$V_C(\mathbf{B}) = \sum_{\mathbf{d}} \text{sgn}(\mathbf{d}) C(\mathbf{d}) = \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n} C(d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_n}) \geq 0,$$

kde $d_{j1} = a_j$ a $d_{j2} = b_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Táto definícia naznačuje, že C je vlastne *n*-rozmerná distribučná funkcia, ktorej marginálne distribučné funkcie sú z rovnakého rozdelenia. Význam definície nám lepšie objasní nasledujúca veta a jej dôsledok.

Veta 1 (Sklar): *Nech G je *n*-rozmerná distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami $F_1, F_2, \dots, F_n$. Potom existuje *n*-rozmerná Kopula C taká, že pre každé $\mathbf{x} \in \square^n$ platí:*

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

Navyše, ak $F_1, F_2, \dots, F_n$ sú spojité, C je určená jednoznačne, teda C je prosta funkcia.

Práve Sklarova veta vyjadruje základnú myšlienku modelovania závislosti prostredníctvom Kopula funkcií, pretože nám hovorí, že v ľubovoľnej distribučnej funkcii náhodného vektora vieme navzájom oddeliť distribučné funkcie zložiek tohto vektora od ich korelačnej štruktúry, pričom túto štruktúru vystihuje Kopula funkcia.

Dôsledok 1: *Nech G je *n*-rozmerná distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami $F_1, F_2, \dots, F_n$ a C je *n*-rozmerná Kopula funkcia. Potom pre každé $\mathbf{u} \in [0,1]^n$ platí:*

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = G(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n)),$$

kde $F_i^{-1}(u_i)$ označuje inverznú distribučnú funkciu ku kumulatívnej distribučnej funkcii F_i , konkrétne pre $u_i \in [0,1]$: $F_i^{-1}(u_i) = \inf \{x: F_i(x) \geq u_i\}$.

Uvažujme vektor náhodných premenných $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ s príslušnými distribučnými funkciami $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ a spoločnou n -rozmernou distribučnou funkciou G . Podľa Sklarovej vety ak $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ sú spojité funkcie, potom $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ má Kopula funkciu jednoznačne určenú takto :

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$$

Aplikáciou Sklarovej vety a využitím známeho vzťahu medzi distribučnou funkciou a funkciou hustoty môžeme odvodiť tzv. *Kopula hustotu*. Vieme, že v jednorozmernom prípade môžeme hustotu $f(x)$ rozdelenia náhodnej premennej X určiť pomocou distribučnej funkcie $F(x)$ zo vzťahu $f(x) = -\frac{\partial F(x)}{\partial x}$.

Definícia 2: Zo Sklarovej vety pre funkciu hustoty $f(x_1, \dots, x_n)$ náhodného vektora a

Kopula funkciu $C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ máme:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n [C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))]}{\partial F_1(x_1) \dots \partial F_n(x_n)} \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

kde Kopula hustotu $c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ definujeme ako

$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i(x_i)}.$$

V súvislosti s Kopula funkciou má zmysel hovoriť o takzvanej *chvostovej závislosti*. Pojem chvostovej závislosti súvisí s meraním závislosti medzi výskytmi extrémnych hodnôt.

Je veľké množstvo možností výberu niektorých z Kopula funkcií, ktoré umožňujú rôzne prístupy k modelovaniu závislosti medzi náhodnými premennými. My sme si z praktických dôvodov v súvislosti s voľbou modelu oceňovania CDO vybral typ *Gaussovej* Kopula funkcie. Dôvod na výber tejto Kopula funkcie je, že má slabú chvostovú závislosť a teda neprodukuje veľa extrémnych hodnôt a tým nepodhodnocuje senior tranže CDO a naopak nenadhodnocuje Equity tranže.

2.2 Gaussova Kopula

Definícia 5: Nech $\mathbf{R}$ je kladne definitná symetrická matica, $\text{diag}(\mathbf{R}) = \mathbf{1}$ a $\Phi_{\mathbf{R}}$ je n -rozmerná kumulatívna distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia s korelačnou maticou $\mathbf{R}$. Gaussova Kopula je definovaná ako

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n, \mathbf{R}) = \Phi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

kde $\Phi^{-1}(u)$ označuje inverznú distribučnú funkciu ku kumulatívnej distribučnej funkcii Φ normovaného normálneho rozdelenia.

Funkciu hustoty ku Gaussovej Kopule získame použitím vzťahu $c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i(x_i)}$ z predchádzajúcej vety:

$$c(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) = \frac{f_{\text{Gauss}}(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_{\text{Gauss}}(x_i)} = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right)}{\prod_{i=1}^n (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_i^2\right)}.$$

Ak fixujeme $u_i = \Phi(x_i)$ a zavedieme označenie $\zeta = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))^T$, dostávame vzťah:

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n, \mathbf{R}) = |\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \zeta^T (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{I}) \zeta\right].$$

2.3 Jednofaktorová Gaussova Kopula

Pri faktorových modeloch, máme náhodné premenné x_i , $i = 1, 2, \dots, N$

$$x_i = \rho_i M + \sqrt{1 - \rho_i^2} Z_i,$$

kde M a Z_i , $i = 1, 2, \dots, N$ sú nezávislé náhodné premenné z normovaného normálneho rozdelenia, $M, Z_i \in N(0,1)$ a $0 \leq \rho_i < 1$.

Rovnica $x_i = \rho_i M + \sqrt{1 - \rho_i^2} Z_i$ definuje korelačnú štruktúru medzi x_i závislými na jednom spoločnom faktore M . Predpokladáme, že podmienené nejakou hodnotou M , pričom x_i sú nezávislé. Korelácia medzi x_i a x_j je rovná $\rho_i \rho_j$.

Teda korelačná matica je (až na diagonálu) $\mathbf{R} = \rho\rho^T$, kde $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N)^T$. Potom môžeme napísať :

$$P(x_i < x | M) = \Phi\left(\frac{x - \rho_i M}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}\right),$$

kde Φ je kumulatívna distribučná funkcia Z_i (normovaného normálneho rozdelenia). Integrovaním cez funkciu ϕ faktora M - hustotu normovaného normálneho rozdelenia dostaneme pre jednofaktorovú Gaussovu Kopulu vzťah:

$$C_\rho(u_1, \dots, u_N) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_i) - \rho_i M}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}\right) \phi(M) dM.$$

Hodnoty chvostovej závislosti pre jednofaktorovú Gaussovu Kopulu sú opäť nezávislé od veľkosti korelácií, obe sú nulové, $\lambda_U = \lambda_L = 0$.

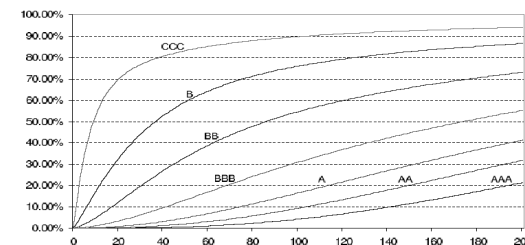
3 Kalibrácia kreditnej krivky

Predpokladajme, že máme množinu ratingov $R = \{AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, D\}$, kde AAA je najlepšia kreditná kvalita, CCC je najhoršia a D označuje default. Naším cieľom je nakalibrovať kreditnú krivku pre každý rating z množiny R. Môžeme to zapísať $t \mapsto p_t^{(R)} = P[R \mapsto D \text{ v čase } t]$, ($t, t \geq 0; R \in \{AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC\}$), kde $R \mapsto D$ označujeme migráciu. Inak povedané $p_t^{(R)}$ je pravdepodobnosť, že obligor s ratingom z množiny R zlyhá v čase t od dnes. Ratingové agentúry teda poskytujú jednoduchú možnosť odhadu kreditného rizika.

Problém pri historických dátach od ratingových agentúr je, že sú veľmi nepresné, nie je jasná metodológia, ako sú dáta zbierané, a hlavne sú veľmi vyhladzované. V matematického pohľadu majú ešte navyše nevýhodu, že sú diskrétné. Na odstránenie diskretnosti a prechod do spojitého času použijeme známi tzv. Markovov prístup. V praxi to pre nás znamená, že použijeme migračnú maticu Standard & Poor's, kde sú uvedené ratingy a jednotlivé pravdepodobnosti, že produkt s ratingom napr. AAA klesne na B a pod., takzvaný migračný prístup. Na výpočet sme použili Matlab a dole je aj graf s výsledkami.

Môžeme napísať, že sme získali $p_t^{(R)} = (e^{tQ})_{i(R),D}$, kde $i(R)$ označuje transakčnú maticu korešpondujúcu pre daný rating R. V nasledujúcom grafe je vidieť výsledok po nakalibrovaní z historických dát od Standard & Poor's. Je vidieť klasický efekt, že pre AAA

rating krivka rastie pomaličky a rýchlosť rastu sa časom zvyšuje a pre ratingy ako je CCC je rýchlosť rastu zo začiatku veľká a potom postupne klesá až sa takmer zastavuje. Vysvetlenie ak je firma dobrá, prežije krátke obdobie relatívne ľahko, ale s časom sa jej stav môže zhoršovať, a preto pravdepodobnosť zlyhania rastie rýchlejšie časom. Ak je firma v zlej ekonomickej situácii na začiatku a prežije určité obdobie, potom je pravdepodobnosť, že aj v budúcnosti prežije, a preto pravdepodobnosť rastie s časom už pomalšie.



Obrázok 3.1 : Kalibrované spojité kreditné krivky pre $(p_t^{(R)})_{t \geq 0}$. Kumulatívne pravdepodobnosti defaultu v čase pre jednotlivé ratingové triedy. x-os čas v štvrtrokoch.

3.2 Hazard rate funkcia.

Uvažujme pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s filtráciou $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, súvisiacou s časom τ nastátia zlyhania. Označme distribučnú funkciu času zlyhania $F(t) = P(\tau \leq t)$ a príslušnú funkciu hustoty $f(t)$.

Definícia: Hazard rate funkciu $h(t)$ definujeme nasledovne:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(t < \tau \leq t + \Delta t | \tau > t),$$

kde $P(t < \tau \leq t + \Delta t | \tau > t)$ vyjadruje pravdepodobnosť, že zlyhanie sa vyskytne v časovom intervale $(t, t + \Delta t)$, za predpokladu, že daná firma prežije do času t.

Ak sa pozrieme na rovnicu podrobnejšie, vidíme, že

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < \tau \leq t + \Delta t, \tau > t)}{P(\tau > t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} f(u) du}{\int_t^{\infty} f(u) du} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} F(t)}{1 - F(t)} = -\frac{\partial}{\partial t} \log(1 - F(t)).$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice dostávame vzťahy medzi distribučnou funkciou, hustotou a hazard rate funkciou:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t h(u) du\right), \quad f(t) = h(t) \exp\left(-\int_0^t h(u) du\right).$$

Ak označíme **funkciu prežitia (survival)** $S(t) = 1 - F(t) = P(\tau > t)$ dostaneme:

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t h(u) du\right) \text{ a teda } F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t h(u) du\right) = 1 - S(t).$$

4 Korelácia zlyhania / defaultu.

Ďalší krok je odvodiť koreláciu defaultu z korelácie hodnoty aktív. Pre danú koreláciu hodnoty aktív medzi firmami i a j , $\rho_{i,j}$, pod predpokladom normalnosti rozloženia výnosov, implikovaná default korelácia je

$$\text{Corr}(i_{\text{def}}, j_{\text{def}}) = \frac{\Phi(\theta_i, \theta_j, \rho_{i,j}) - p_i p_j}{\sqrt{(p_i - p_i^2)(p_j - p_j^2)}},$$

kde Φ je kumulatívna funkcia hustoty štandardného normálneho rozdelenia, p je pravdepodobnosť defaultu a θ je hranica prislúchajúca k zlyhaniu.

Takýto prístup však nezachytáva diverzifikačný efekt portfólia. Nástroj na odstránenie tohto defektu je multi faktorový model zachytávajúci systematické riziko.

A) najprv si zadefinujeme multi faktorový model pre každý sektor k ,

$$Z_k = \rho_k Z_m + \sqrt{1 - \rho_k^2} \cdot \varepsilon_k, \text{ kde } \rho_k \text{ je korelácia výnosov pre } k\text{-tý sektor a trh, a } \varepsilon_k$$

je systematické riziko pre k -tý sektor. Pre každú firmu máme:

$$\begin{aligned} Z_i &= \alpha + \sum \rho_i(k) \cdot Z_k + r_i \cdot \varepsilon_i = \\ &= \alpha + \left[\sum \rho_i(k) \cdot \rho_k \right] Z_m + \sum \rho_i(k) \cdot \sqrt{1 - \rho_k^2} \cdot \varepsilon_k + \sqrt{1 - \left[\sum \rho_i(k) \cdot \rho_k \right]^2 - \sum \rho_i(k)^2 (1 - \rho_k^2)} \cdot \varepsilon_i \end{aligned}$$

, kde $\rho_i(k)$ je korelácia výnosov medzi firmou i a sektorom k .

r_i som vybral tak, aby volatilita Z_i ostala rovná 1. Potom korelácia výnosov medzi i a j firmami môže byť odvodená ako :

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} = \text{corr}(Z_i, Z_j) &= \frac{\text{Var}(Z_i + Z_j) - \text{Var}(Z_i) - \text{Var}(Z_j)}{2\sigma_i \sigma_j} = \\ &= \left[\sum \rho_i(k) \rho_j(k) \right] + \sum \rho_i(k) \rho_j(k) \cdot (1 - \rho_k^2) \end{aligned}$$

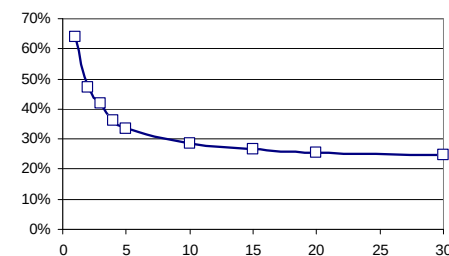
ďalej predpokladám, že $\rho_i(k) = \rho$ ak firma i je z k sektora a 0 inak. Potom $\rho_{i,j} = \rho^2 \rho_k^2 + \rho^2 (1 - \rho_k^2) = \rho^2$, ak i a j sú z rovnakého sektora k a $\rho_{i,j} = \rho^2 \rho_k \rho_i$, ak sú z rôznych sektorov.

B) pre firmu i , ktorá má pravdepodobnosť defaultu p_i a recovery r_i , očakávaná strata je $p_i F_i(1-r_i)$, kde F_i je hodnota nominálu. Rozptyl strát je $s_i = p_i (1-p_i)(F_i(1-r_i))^2$

Pre portfólio firiem očakávaná strata je $\sum p_i F_i(1-r_i)$, a rozptyl

$$\text{Var}(\text{PortfolioLoss}) = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & \dots & \dots & s_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2}^{\text{def}} & \dots & \dots & \rho_{1,n}^{\text{def}} \\ \rho_{2,1}^{\text{def}} & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n,1}^{\text{def}} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ s_n \end{bmatrix}$$

V nasledujúcom grafe môžeme vidieť efekt diverzifikácie portfólia na výnosnosť portfólia v priemere. Začal som so 100 firmami vloženými do jedného sektora / industry. Postupne ako som pridával počet sektorov priemyslu priemerná korelácia portfólia sa znížila takmer úplne. Napokon sa ustálila pri hodnote sektorov 20.



Obrázok 4.1 : Závislosť počtu sektorov od priemernej korelácie portfólia.

Už z obrázka je vidieť, že diverzifikácia je veľmi dôležitý fakt portfólia. Je veľmi dôležité to pochytiť cez koreláciu. V praxi sa osvedčil prístup S&P agentúry, a to mať dve rôzne korelácie. Jedna medzi sektormi spravidla nižšia 12% a jedna v rámci jedného sektora vyššia 30%.

4.2 Kalibrácia na trh

Jedna z ciest ako môžeme model nakalibrovať na trh je použiť stress faktor. V tomto prípade si zafixujeme korelačnú maticu, konkrétne použijem koreláciu, ktorú používa S&P agentúra. To znamená 30% koreláciu v rámci jedného sektora a 12% koreláciu medzi sektorovú. Taktiež si zafixujeme recovery rate. Na to použijeme historické dáta Moodys, aká bola priemerná návratnosť pri zlyhaní firmy v jednotlivých krajinách a typov aktív (bond, Equity, sub debt). Pre náš produkt to bude očakávaná recovery hodnota 69% s volatilitou 29%. Pre generovanie recovery sme sa rozhodli použiť beta rozdelenie práve s týmito štatistikami. Zadefinujeme si teraz stress faktor ako hodnotu, ktorá nám pravdepodobnosť prežitia zmení. Teda $S_i(t)^{\text{stress}} = \left(\exp\left(-\int_0^t h_i(u) du\right) \right)^{\text{stress}}$ inak povedané pomocou tohto faktora vieme modifikovať naše na kalibrované kreditné krivky na aktuálne trhové dáta.

Ak chceme model nakalibrovať na aktuálne kótovanú koreláciu defaultu na trhu jediná možnosť, ako to získať, je iTraxx index. Je to vlastne jediný inštrument, kde sa kótuje korelácia defaultov trhovo.

Dosadím teraz do modelu za portfólio iTraxx portfólio a ako tranže kótovane tranže, ktoré sa kótuju na trhu. Spustením modelu a ocenením jednotlivých tranží získam ich ceny. Budem iteratívne hľadať taký stress faktor, že pri daných recovery rate platí rovnica:

$$\text{trhová cena iTraxx tranže } 0\%-3\% - PV[\text{model} / (\text{historické default rate})^{\text{stress}}] = 0$$

To iste urobíme pre ostatné tranže, ktoré sa kótuju. Tým vlastne získame vektor stress faktorov, ktoré prislúchajú k jednotlivým kótovaným tranžiam. Takto vlastne nepriamo na kalibrujeme náš model na trhovú koreláciu pre jednotlivé tranže. Hlavná výhoda tohto prístupu je v tom, že čím väčší stress faktor, tým horšie výsledky všetkých tranží. Je to jednoduchšie ako pri stresovaní korelácie, kde existuje takzvaný korelačný smile ako pri volatilitě opcií. Teda vysvetlenie zmien je jednoduchšie.

Ďalší krok, ktorý je potrebné urobiť je, že pri modelovaní iTraxov sme nebrali do úvahy ich oficiálny rating a na základe toho počítal straty ale takzvaný implikovaný rating, ktorý sme vypočítali z aktuálnych kótovaných CDS na jednotlivé podkladové mena. Teda vzali sme aktuálne default riziko entít, ako ich vidí trh, a nie ratingová agentúra. Takto sme získali implikované stress faktory, ktoré uvádzam v nasledujúcej tabuľke:

tranche	Implied Stress	Implied Fitch Rating
12-22%	1.45	NR
9-12%	0.91	AAA
6-9%	0.75	AA+
3-6%	0.55	BBB+
0-3%	0.87	NR

Tabuľka 4.2: Vypočítané implikované stress faktory.

Pre jednoduchosť budeme oceňovať len dve tranže z našej transakcie. A to konkrétne Aa2 tranžu a A2. Implikovaný rating pomocou idealizovaných pravdepodobností pre iTraxx nám vyšiel pre tranžu 6-9% AA+. Naša prvá tranža je Aa2, čo je o jeden stupeň menej ako AA+ a teda musíme použiť interpoláciu. Použijeme lineárnu interpoláciu a dostávam teda pre Aa2 stress faktor:

$0,75 - (0,75 - 0,55) / 6 = 0,717$. Teda pre tranžu Aa2 je implikovaný stress faktor **0,717**.

Pre tranžu A2 obdobne interpoláciou získam $0,75 - 4 * (0,75 - 0,55) / 6 = \mathbf{0,617}$.

Ako je vidieť aj z tabuľky v danom období sa kótovalo riziko senior tranží väčšie, ako historické a junior naopak. Následne môžem vypočítať cenu tranže z rovnice:

$$\left(\frac{Cena}{100} - 1\right) * \text{velkost.tranze} = ((\text{spread.tranze} - DAS) * \text{annuita}) * \text{velkost.tranze},$$

kde úpravou dostaneme $Cena = [1 - (DAS - \text{spread.tranze}) * \text{Annuita}] * 100$.

5 Dosiahnuté výsledky

Tranže Aa2 a A2 boli v danom období 20.2.06 ocenené trhom za priemernú cenu 99.56% respektíve 98,58%. To znamená, že ak pôvodne tranže mali výnos 3m Libor + 65bp pre tranžu Aa2 pri cene 99,56 je to už 3m Libor + 72bp p.a. a pre A2 z pôvodných 115bp trh očakával až 123bp pri cene 98,58. Teda trh jednoznačne 20.2.06 už očakával väčšie straty na portfóliu ako pri vydávaní transakcie. Pochopiteľne neberieme do úvahy bid/ask spread a transakčné náklady. Poďme sa teraz pozrieť, aké ceny nám vypočítal model po nakalibrovaní cez stress faktor na aktuálne iTraxx korelácie.

Tranche	Size	PVpc.95	PVpc.99	VaR.95	VaR.99	Exp.loss	Sharpe	Duration	DAS	Loss.prol	Rating	IRR
Aa2	33	99.349	99.163	-0.224	-0.288	0.158	0.51	6.74	62.39	0.3	A1	5.11
A2	30	96.239	44.205	-1.2	-17.802	1.48	0.219	7.174	87.15	4	Baa2	5.12

Tabuľka 5.1: Výsledky simulácie so historickými default dátami.

Ak by sme predpokladali, že historické dáta dobre popisovali situáciu na trhu v danom období, modelom sme získali tieto výsledky:

- tranžu Aa2 som vypočítal PV s 95% istotou rovnú 99,349%
- pre A2 PV = 96,23% s 95% istotou spoľahlivosti.

Model ocenil dane tranže pod par, čo znamená, že výnos, ktorý bol poskytnutý investorom už v danom období teda 2 roky po emisii nekompenzoval rizika spojené s portfóliom. Model je založený na simuláciách MC a v našom prípade sme urobili 10 000 simulácií kvôli zníženiu štatistickej chyby. Z rozdelenia PV môžeme vypočítať aj VaR 95%. Ako môžeme vidieť, z výsledkov pre A2 tranžu je VaR99% až 17m, čo predstavuje viac ako 50% strát jej veľkosti. Môžeme povedať, že daná tranža je veľmi citlivá na extrémne hodnoty.

Očakávaná strata pre A2 tranžu vyšla 1,48% a pre Aa2 0.15%. Z týchto očakávaných strát sme pomocou idealizovaných pravdepodobností určili aj rating tranží. Pre Aa2 nám vyšiel vypočítaný rating A1 a pre A2 až Baa2. Teda vyšiel nám dosť veľký nesúlad s ratingovými agentúrami. Nepodarilo sa nám potvrdiť pomocou historických dát externe pridelený rating. Dôvodov je viacero. Jeden, že sa zhoršila kvalita portfólia, počas dvoch rokov sa zmenili historické dáta o pozorovania počas týchto dvoch rokov a v neposlednom rade aj to, aký prístup pri pridelení externého ratingu zvolila ratingová agentúra. Tieto faktory najskôr spoločne mali za následok, že našim modelom za pomoci len hist. dát sme získali pre tranžu Aa2 rating o dva stupne horší a pre tranžu A2 o tri stupne horší rating.

Teraz sa pozrime na výsledky nakalibrovaného modelu pomocou stress faktorov pre Aa2 A2 tranže 0,717 resp. 0,617.

Tranche	Size	PVpc.95	PVpc.99	VaR.95	VaR.99	Exp.loss	Sharpe	Duration	DAS	Loss.prob	Rating	IRR
Aa2	33	99.212	99.038	-0.272	-0.332	0.018	1.018	6.926	64.06	0.3	Aa2	5.19
A2	30	98.561	94.732	-0.466	-1.707	0.114	0.49	7.3	107.2	0.7	A2	5.6

Tabuľka 5.2 :Výsledky simulácie s nakalibrovaným modelom pomocou stress faktora.

Keď sa teraz pozrieme na výsledky a porovnáme so stress =1 vidíme , že pomocou stress faktora sme potvrdili externe ratingy tranží. Vďaka stress faktorom klesla očakávaná strata pre tranžu Aa2 z pôvodných 0,15% na 0,018% čomu už prislúcha rating Aa2 pre A2 z 1.48% na 0.114%. Keď sa pozrieme na PV tranží vidíme , že sme sa veľmi blízko dostali k trhovým cenám. Pre Aa2 tranžu sme pomocou hist. dát dostali PV 95% = 99.34 a po nakalibrovaní o niečo menej 99,212. Priemerná trhovú cenu v tom čase bola 99,56%, čo je o trochu viac. Keď sa pozrieme na A2 tranžu, tak pomocou hist. dát som dostal PV 95% = 96.23 a po nakalibrovaní 98,56. Priemerná trhovú cenu v tom čase bola 98,58%.

Teda nakalibrovaný model pomerne presne ocenil danú tranžu. Keď sa pozrieme na DAS ,taktiež je možné vidieť zlepšenie z 87bp na 107bp. Čo sa týka IRR, tak stresovaním sme došli k IRR o 0,5% lepšiemu. Zaujímavé je, ako veľmi kleslo VaR. Z tohto môžeme usúdiť, že model je veľmi citlivý na kalibrovanie a aj menšie zmeny v stress faktore, alebo korelácii, spôsobujú relatívne veľkú zmenu VaR teda extrémnych hodnôt.

Teraz, ak zosumarizujeme, tak výsledky modelu nám hovoria, že tranžu A2 môžeme predat' za trhovú cenu, pretože je to cena, ktorá prislúcha aktuálnej cene rizika. Pre tranžu Aa2, jednoznačne predat', pretože trh momentálne nadhodnocuje jej cenu o 0,3% a teda je tu priestor na arbitráž.

Ďalším zo spôsobov, ako kalibrovat' model na trh, je ponechať historické kreditné krivky bez zmien , to znamená nemeniť stress faktor, ale modifikovať koreláciu. Obdobne by sme na to použili iTraxx. Teda riešili by sme rovnicu :

$$trhová\ cena\ iTraxx\ tranža_i - PV [model / r_i] = 0,$$

kde r_i je korelácia pre tranžu i , ktorá rieši príslušnú rovnicu. Opäť použijeme Newtonovu iteráčnú metódu na jej vyriešenie. Takýmto spôsobom získame implikovaný korelačný smile. Musíme však podotknúť, že táto metóda je veľmi náročná na interpretáciu výsledkov. Keďže sa jedná o nelinearitu modelu, pre equity tranže je vyššia korelácia pozitívna z pohľadu defaultov. Vyššia korelácia spôsobuje menšiu stratu equity tranže. Pre mezanin tranžu je vyššia korelácia problém, pretože zvyšuje početnosť extrémnych strát a pre senior tranže je to najhoršie. Ak zvýšime celkovú koreláciu nadhodnotíme Equity tranžu a podhodnotíme senior

tranžu. Celé si to môžeme vysvetliť na nasledujúcej tabuľke. Model sme kalibrovali pomocou rôznych korelácií a počítali hodnotu tranží iTraxx. Použili sme portfólio iTraxx a počítali sme hodnotu tranží pre jednotlivé korelácie. Pre tranžu 0-3% trhovú cenu 27,6% znamená, že kupujúci tranže dostane 27,6% ročne maržu. Obdobne pre ostatné tranže ale v bp a nie v %. Ďalej sme zafixovali všetky ostatné parametre a menili sme len koreláciu defaultov. V jednotlivých stĺpcoch je možné vidieť, ako model ocenil jednotlivé tranže pri rôznych koreláciách.

Pre koreláciu 0 vyšla cena tranže 0-3% 43,7% pričom trh ju hodnotil 27.6%. Keď sme zvýšili koreláciu na 25%, už sme dostali výsledok blízko trhu. Takto sme vypočítali implikované korelácie pre jednotlivé tranže. Problém však ostáva , ktorú koreláciu dať do modelu na ocenenie? Keďže model má vstup len jednu korelačnú maticu a tá je od tranží nezávislá.

Tranche	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%
Trhove ceny	27.60%	168	70	43	20
Korelacia	Ocenenie model				
0%	43.70%	66	0	0	0
5%	41.00%	107	9	3	1
10%	37.90%	133	23	10	4
15%	34.80%	150	37	18	8
20%	31.70%	161	49	26	13
25%	28.60%	167	60	35	18
30%	25.50%	171	69	42	23
40%	19.50%	173	84	56	34
Implikovana korelacia	27%	26%	30%	30%	27%

Tabuľka 5.3 :Výsledky simulácie pri zmene korelácie pre iTraxx tranže.

5.2 Senzitivita na zmenu recovery rate, stress faktora a korelácie

Model sme spúšťali pre tri typy scenárov. Prvá skupina je korelácia. Môžeme vidieť v tabuľke vplyv zmeny korelácie na PV jednotlivých tranží. Pre ľahšie porovnanie sme znormovali výsledky vzhľadom na prvý tzv. base scenár. Z tabuľky je vidieť, že s rastúcou koreláciou klesá PV pre tranže Aa2 a A2 a naopak rastie pre Equity.

PV [%] normované	Aa2	A2	Equity
korelácia 30%, stress=1,RR=50%	100,00%	100,00%	100,00%
korelácia 40%	99,03%	97,88%	110,12%
korelácia 50%	98,25%	95,57%	119,07%
Recovery rate mean =55%	100,78%	101,54%	105,97%
Recovery rate mean =60%	100,97%	101,93%	113,60%
Recovery rate mean =65%	101,17%	103,28%	120,23%
Stress hist. default rate =2	93,37%	83,43%	39,97%
Stress hist. default rate =3	83,63%	62,81%	16,58%
Stress hist. default rate =4	72,71%	46,24%	6,47%

Tabuľka č. 5.4 :Výsledky simulácie s implikovanou implikovaným stress faktorom

Pri zvýšení korelácie o 10% PV tranže Aa2 poklesla o 0.7% a A2 o 2.22% čo je o 3x viac. Dôvod je postavenie tranží v štruktúre pasív teda rôzna subordinácia. Naopak pre equity tranžu pri raste korelácií o 10% stúplo PV o 10,12%. Obdobne sme menili recovery rate od 50% s prírastkom 5% po 65%. Pre všetky tranže to malo pozitívny efekt. Najviac pochopiteľne profitovala equity tranža keď pri zmene RR o 10% PV sa zvýšilo o 20%, kde pri Aa2 tranži len o 1.17% . Posledná skupina je ako reagovali tranže na stress faktor. Ten sme menili od 1 po 4. Teda najviac sme akoby 4-násobne zväčšili historické pozorovania defaultov. PV všetkých tranží prudko klesali. Pre faktor 4 tranža Aa2 stratila na PV o 22,3% pričom equity tranža až 93,53% teda takmer celú hodnotu. Ak by sa historické default rate zhoršili viac ako 4 násobne, equity tranža by nemala žiadnu hodnotu podľa nášho modelu. Z tejto tabuľky môžeme záverom konštatovať, že náš model je najviac citlivý na historické defaulty, ďalej na koreláciu a najmenej na recovery rate.

Záver

Hlavné prínosy dizertačnej práce sú:

- predloženie komplexného modelu na oceňovanie CDO,
- zhodnotenie a výber Kopula funkcií, ktorá najviac vyhovuje problematike oceňovania CDO a následnej interpretácii výsledkov
- prezentovanie troch prístupov ako nakalibrovať model na trhovú koreláciu
- výpočet a ocenenie produktu Navigator, porovnanie s trhovými kotáciami
- algoritmus vytvorenia spojených kreditných kriviek z diskretných dát
- predloženie prístupu ako sa dá obísť fenomén „korelačný smieľ“
- analýzu predkladaného modelu na vstupné parametre aj s jej kompletnou ekonomickou interpretáciou a matematickým zdôvodnením
- predložili sme prístup ako sa dá oceňovať CDO produkt pomocou put opcii
- naprogramovali sme model v prostredí R, ktorý môže poslúžiť pri ďalších analýzach modelovania Recovery Rate, prepaymentov a ďalších premenných
- predložili sme prístup ako sa dopracovať od kotácií iTraxu k implikovanej korelácií

Veríme, že táto práca čitateľa zaujala a môže byť východiskom pre ďalší výskum v tejto oblasti hlavne čo sa týka recovery rate. Na záver ešte pár slov k výsledkom z modelovania defaultov. Tam, kde hrozí riziko veľkých strát a je vyplácaný veľký spread, výnos, načasovanie defaultov je príznačné skôr ku koncu (backloaded default timing), a naopak. Hustota výskytu defaultov sa znižuje s rastúcou senioritou, pričom veľkosť extrémnych strát je hnaná hlavne koreláciou a kreditnými krivkami. Pri modelovaní treba dávať pozor na obmieňanie Kopul, prípadne zmeny v lineárnych koreláciách menia dynamiku v čase defaultu a nie len výslednú stratu. Nesmieme zabúdať, že pri oceňovaní takýchto nástrojov sa nestačí pozerať len na cenu, ale aj na časový priebeh a volatilitu strát.

Došli sme k záveru, že najväčším nedostatkom všeobecne uznávaných modelov je nezaobranie sa rizikom likvidity. Práve to bolo najviac podhodnotené pri oceňovaní CDO. Záverom môžeme konštatovať, že model, ktorý sme predložili a nakalibrovali na trhovú dáta dával v danom čase relatívne presné trhovú ocenenie. Môžeme usúdiť, že na trhu sa používajú podobné modely alebo metódy ich kalibrácie. Tento predpoklad je asi aj odpoveďou, prečo tieto nástroje od svojho vzniku až po začiatok krízy boli jedny z najstabilnejších, čo sa týka cien. Aj preto boli tak obľúbené u investorov.

Summary

The goal of this thesis was to develop a model for pricing CDO structure and to do complex analysis of results. In this paper, we have provided an examination of implied correlations. The concept is easy to explain and due to the monotonic relationship between fair spreads and correlations of equity tranches, the method provides easier way how to calibrate CDO model with implied correlation. Based on quoted fair spreads of iTraxx, the implied correlation framework aims to provide a simple method of calculating market spreads of tranches. CDO is a portfolio of defaultable fixed income products, Kopulas are functions which link univariate distributions together to build a multivariate distribution function. The attractiveness of Kopulas lies in their flexibility to simulate or fit dependant variables and their ability to provide scale invariant measures of association between random variables. When pricing CDO, the Kopula function is used in conjunction with the factor approach to model the company risk neutral joint default probabilities.

Pricing a CDO using Monte Carlo simulation involves creating sample paths of correlated default times. These default times are used to calculate the payments on the fixed and floating legs and value each leg. In the Gaussian Kopula approach as in other Monte Carlo approaches, default times are generated by a series of transformations on uniform random variables. From uniforms we generate independent normals using the form of the Box-Muller transform. The normality of the generated variables was verified in R by statistical test. Generating correlated normals from independent normals is accomplished using the Cholesky Decomposition. Default times in the Gaussian Kopula approach are easily generated from correlated normal by first applying the normal CDF. This transforms the normal variables into uniform variables coupled via the correlation matrix. These are then transformed into exponentially distributed default times by the standard method.

We calculate results for Navigator transaction. Based on that we can summarize that model which we introduce and calibrate to market via stress factor of historical default rate is correct and bring us results which are very similar to market quotation. We did also sensitivity of our model to input parameters and summarize it from mathematical and economical perspective.

Literatúra

- [1] Arturo C., O'Connor G.: The Binomial Expansion Method Applied to CBO/CLO Analysis, 2000
- [2] Barnaby M., Batchvarov A.: Single Tranche Synthetic CDOs, 2003
- [3] Bluhm Ch.: CDO Modeling: Techniques, Examples and Applications, HypoVereinsbank Munich, 2003
- [4] Buil C.: FitchRatings, Structured Finance, ABS/Germany, 2002
- [5] Burtschell X., Gregory J., Laurent J.P.: A comparative analysis of CDO pricing models, ISFA Actuarial School, University of Lyon & BNP-Paribas 2005
- [6] Cai D.: Lecture on Derivatives: Roles of Simulation in Finance, Department of Mathematics, New York University, 2004
- [7] David Li.: On Default Correlation: A Kopula Function Approach, Journal of Fixed Income, 2000.
- [8] Default and Recovery Rates of European Corporate Bond Issuers: 1985-2004, Moody's Investors Service, 2003
- [9] Elizalde A.: Credit Risk Models IV: Understanding and pricing CDOs, CEMFI and Universidad Pública de Navarra, Madrid, 2005
- [10] Embrechts P., Lindskog F., McNeil A.: Modelling Dependence with Kopulas and Applications to Risk Management, working paper, Department of Mathematics, ETHZ, Zurich, 2001
- [11] Galiani S.: Kopula Functions and their Application in Pricing and Risk Managing Multiname Credit Derivative Products, Department of Math., King's College, London, 2003
- [12] Holík A.: Modelovanie defaultu v portfóliu bondov pomocou Kopula funkcie, diplomová práca, 2006
- [13] Hull J., White A.: Valuation of a CDO and an n-th to Default CDS Without Monte Carlo Simulation, Joseph L. Rotman School of Management, University of Toronto, 2003
- [14] ISRAEL, R., ROSENTHAL, J., WEI, J.: Finding Generators for Markov Chains via Empirical Transition Matrices with Application to Credit Ratings, Mathematical Finance 11, 2001
- [15] Ján Pataky : CDO - kreditný derivát model, FEI STU Bratislava, 2004
- [16] Joe Xu ,J.J : The Estimation Method of Inference Function for Margins for Multivariate Models, Dept. of Statistics, University of British Columbia, Technical Report, 166.
- [17] Jouanin J.F., Riboulet G., Roncalli T.: A Critical Approach to the Kopula Model for Credit Derivatives, Groupe de Recherche Operationnelle Credit Lyonnais, Journée Risque de Credit, Evry, 2003
- [18] Lang Gibson, Erin McCutcheon: Addressing CDO Downgrades and Evaluating Rating Methodologies, Bank of America, 2002
- [19] Laurent J.P.: Gregory J. Basket Default Swaps, CDO's and Factor Kopulas, ISFA Actuarial School, University of Lyon & BNP-Paribas, 2003
- [20] Lee McGinty and Rishad Ahluwalia : A Model for Base Correlation Calculation, 2004.
- [21] Madan D., Konikov M., Marinescu M: Credit and Basket Default Swaps, Robert H. Smith School of Business and Bloomberg LP, New York, 2004
- [22] Marshal, R: Beyond Correlation : Extreme Comovements Between Financial assets, working paper, Columbia Graduate School of Business, 2002
- [23] Michael K.Ong: Credit Ratings, Risk Waters Group Ltd, 2002

- [24] New Standard & Poor's: Artemus Strategic Asian Credit Fund Ltd., Standard & Poor's, Structured Finance, 2003
- [25] Noris J., Markov Chains: Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, 1998
- [26] Picone D. : Collateralised Debt Obligations, City University Business School, London, 2004
- [27] Schmid W. : Pricing Default Baskets, I. RISK 15, 2002
- [28] Standard and Poors: Global Cash Flow and Synthetic CDO Criteria, 2002
- [29] The Quantitative Credit Analyst, Fixed Income Quantitative Research, CitiGroup, May 2003
- [30] VASICEK O. A : Loan Loss Distribution, KMV Corporation, 2000

Zoznam publikovaných prác dizertanta

- [1] Pataky J. : Korelácia zlyhaní / defaultu a diverzifikačný efekt., Finančné trhy ISSN 1336-5711, 2010
- [2] Pataky J. : Sensitivity analysis of CDO, working paper Erste bank, 2007
- [3] Pataky J., Schiler J. : Kopula ? No, Monte Carlo, working paper of Quant team Erste bank, 2005
- [4] Pataky J. : Kreditné deriváty na Slovensku, Eco press, Trend, 2005
- [5] Pataky J. : CDO - kredit derivát model, FEI STU Bratislava, 2004

Zoznam prednášok dizertanta

- [1] Pataky J.: Oceňovanie CDO pomocou Kopula funkcie, Centrum pre Ekonomiu a financie Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Bratislava 2006
- [2] Godal M., Pataky J., Košecký R.: Oceňovanie kreditných derivátov z matematického pohľadu, Prefis conference, Hotel Devín 2007
- [3] Pataky J.: Modelovanie rizika a výnosov štruktúrovaných investícií, bankové fórum Trenčianske Teplice 2004
- [4] Pataky J.: Migration matrix and Copula modeling, investment forum Erste bank, Balaton 2005
- [5] Pataky J.: European leverage loans and CLO, European credit management day, London 2005
- [6] Pataky J.: Liquidity management and portfolio of CDOs, Cash and Liquidity management forum, Paríž 2007
- [7] Jankovičová A., Pataky J.: Ako sa orientovať v mori investičných nástrojov, Centrum pre Ekonomiu a financie Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Bratislava 2004
- [8] Pataky J.: Hlasovacie systémy: Slovensko verus EU, Centrum pre Ekonomiu a financie Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, 2003
- [9] Pataky J.: Aktuálne investičné príležitosti na trhu / úrokové a kreditné riziko, odborná prednáška pre investorov, Hotel Carlton 2008

Zoznam zistených citácií

- [1] Godalová M.: Credit Default Swaps a Sekuritizácia Aktív, 2006
- [2] Holík A.: Modelovanie defaultu v portfóliu bondov pomocou Kopula funkcie, 2006
- [3] Antalková K.: Riziká spojené s ABCP programami a ich eliminácia, 2008
- [4] Kotmanová I.: Optimalizácia Portfólia - Koncept Ekonomického Kapitálu, 2009
- [5] Timočkova M.: Zabezpečené dlhové obligácie - Kalibrácia modelu na trhové dáta a analýza krízy kreditného trhu, 2009