

RNDr. Ing. Jan Pataky

pataky.jan@gmail.com

Korelácia zlyhaní / defaultu a diverzifikačný efekt.

Pri oceňovaní štruktúrovaných produktov ako sú CDO je jedným z hlavných faktorov ovplyvňujúcich cenu korelácia defaultu a diverzifikácia portfólia. V tomto článku si ukážeme ako odvodiť koreláciu defaultu aktív z korelácie hodnoty aktív. Pre koreláciu hodnoty aktív medzi firmami i a j , ρ_{ij} , pod predpokladom normalnosti rozloženia výnosov, implikovaná default korelácia je

$$\text{Corr}(i_{\text{def}}, j_{\text{def}}) = \frac{\Phi(\theta_i, \theta_j, \rho_{i,j}) - p_i p_j}{\sqrt{(p_i - p_i^2)(p_j - p_j^2)}},$$

kde Φ je kumulatívna funkcia hustoty štandardného normálneho rozdelenia, p je pravdepodobnosť defaultu a θ je hranica prislúchajúca k zlyhaniu.

Takýto prístup však nezachytáva diverzifikačný efekt portfólia. Nástroj na odstránenie tohto defektu je multi faktorový model zachytávajúci systematické riziko.

A) najprv si zadefinujeme multi faktorový model pre každý sektor k ,

$$Z_k = \rho_k Z_m + \sqrt{1 - \rho_k^2} \cdot \varepsilon_k, \text{ kde } \rho_k \text{ je korelácia výnosov pre } k\text{-tý sektor a trh, a } \varepsilon_k$$

je systematické riziko pre k -tý sektor. Pre každú firmu máme:

$$\begin{aligned} Z_i &= \alpha + \sum \rho_i(k) \cdot Z_k + r_i \cdot \varepsilon_i = \\ &= \alpha + \left[\sum \rho_i(k) \cdot \rho_k \right] Z_m + \sum \rho_i(k) \cdot \sqrt{1 - \rho_k^2} \cdot \varepsilon_k + \sqrt{1 - \left[\sum \rho_i(k) \cdot \rho_k \right]^2 - \sum \rho_i(k)^2 (1 - \rho_k^2)} \cdot \varepsilon_i \end{aligned}$$

, kde $\rho_i(k)$ je korelácia výnosov medzi firmou i a sektorom k .

r_i som vybral tak, aby volatilita Z_i trhového faktora ostala rovná 1. Potom korelácia výnosov medzi i a j firmami môže byť odvodená ako :

$$\rho_{i,j} = \text{corr}(Z_i, Z_j) = \frac{\text{Var}(Z_i + Z_j) - \text{Var}(Z_i) - \text{Var}(Z_j)}{2\sigma_i\sigma_j} =$$

$$= \frac{\text{Var}\left(\left[\sum (\rho_i(k) + \rho_j(k))\rho_k\right]Z_m + \sum (\rho_i(k) + \rho_j(k)) \cdot \sqrt{1-\rho_k^2} \cdot \varepsilon_k + r_i\varepsilon_i + r_j\varepsilon_j\right) - 2}{2}$$

$$= \frac{\left[\sum (\rho_i(k) + \rho_j(k))\rho_k\right]^2 + \sum (\rho_i(k) + \rho_j(k))^2 \cdot (1-\rho_k^2) + 1 - \left[\sum \rho_i(k) \cdot \rho_k\right]^2 - \sum \rho_i(k)^2 (1-\rho_k^2) + 1 - \left[\sum \rho_j(k) \cdot \rho_k\right]^2 - \sum \rho_j(k)^2 (1-\rho_k^2) - 2}{2}$$

$$= \left[\sum \rho_i(k)\rho_k\right] \cdot \left[\sum \rho_j(k)\rho_k\right] + \sum \rho_i(k)\rho_j(k) \cdot (1-\rho_k^2)$$

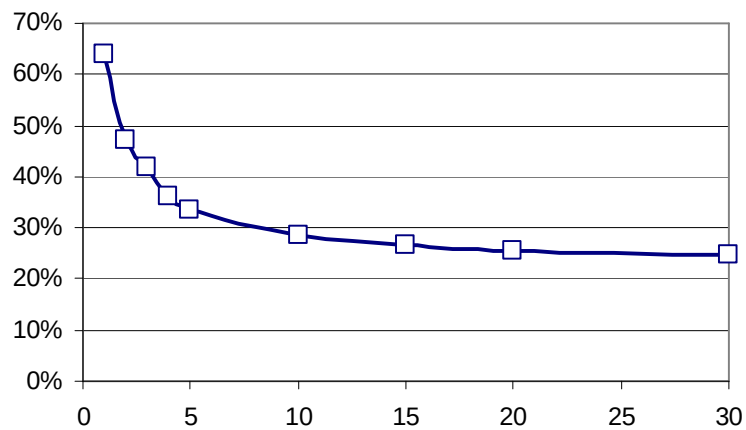
d'alej predpokladám, že $\rho_i(k)=\rho$ ak firma i je z k sektora a 0 inak. Potom $\rho_{i,j}=\rho^2\rho_k^2+\rho^2(1-\rho_k^2)=\rho^2$, ak i a j sú z rovnakého sektora k a $\rho_{i,j}=\rho^2\rho_k\rho_l$, ak sú z rôznych sektorov.

B) pre firmu i , ktorá má pravdepodobnosť defaultu p_i a recovery r_i , očakávaná strata je $p_i F_i(1-r_i)$, kde F_i je hodnota nominálu. Rozptyl strát je $s_i=p_i(1-p_i)(F_i(1-r_i))^2$

Pre portfólio firiem očakávaná strata je $\sum p_i F_i(1-r_i)$, a rozptyl

$$\text{Var}(\text{PortfolioLoss}) = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & \dots & \dots & s_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2}^{def} & \dots & \dots & \rho_{1,n}^{def} \\ \rho_{2,1}^{def} & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n,1}^{def} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ s_n \end{bmatrix}$$

V nasledujúcom grafe môžeme vidieť efekt diverzifikácie portfólia na výnosnosť portfólia v priemere. Začal som so 100 firmami vloženými do jedného sektora / industry. Postupne ako som pridával počet sektorov priemyslu priemerná korelácia portfólia sa znížila takmer úplne. Napokon sa ustálila pri hodnote sektorov 20.



Obrázok č. 4.1.1 : Závislosť počtu sektorov od priemernej korelácie portfólia.

Už z obrázka je vidieť , že diverzifikácia je veľmi dôležitý fakt portfólia. Je veľmi dôležité to podchytiť cez koreláciu. V praxi sa osvedčil prístup S&P agentúry, a to mať dve rôzne korelácie. Jedna medzi sektormi spravidla nižšia 12% a jedna v rámci jedného sektora vyššia 30%.