



FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY UNIVERZITY
KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Oceňovanie a využitie kreditných derivátov na kapitálovom trhu

Obhajoba dizertačnej práce v odbore aplikovaná matematika
Školiteľ: doc. RNDr. Vladimír Toma, PhD

22.10 2010

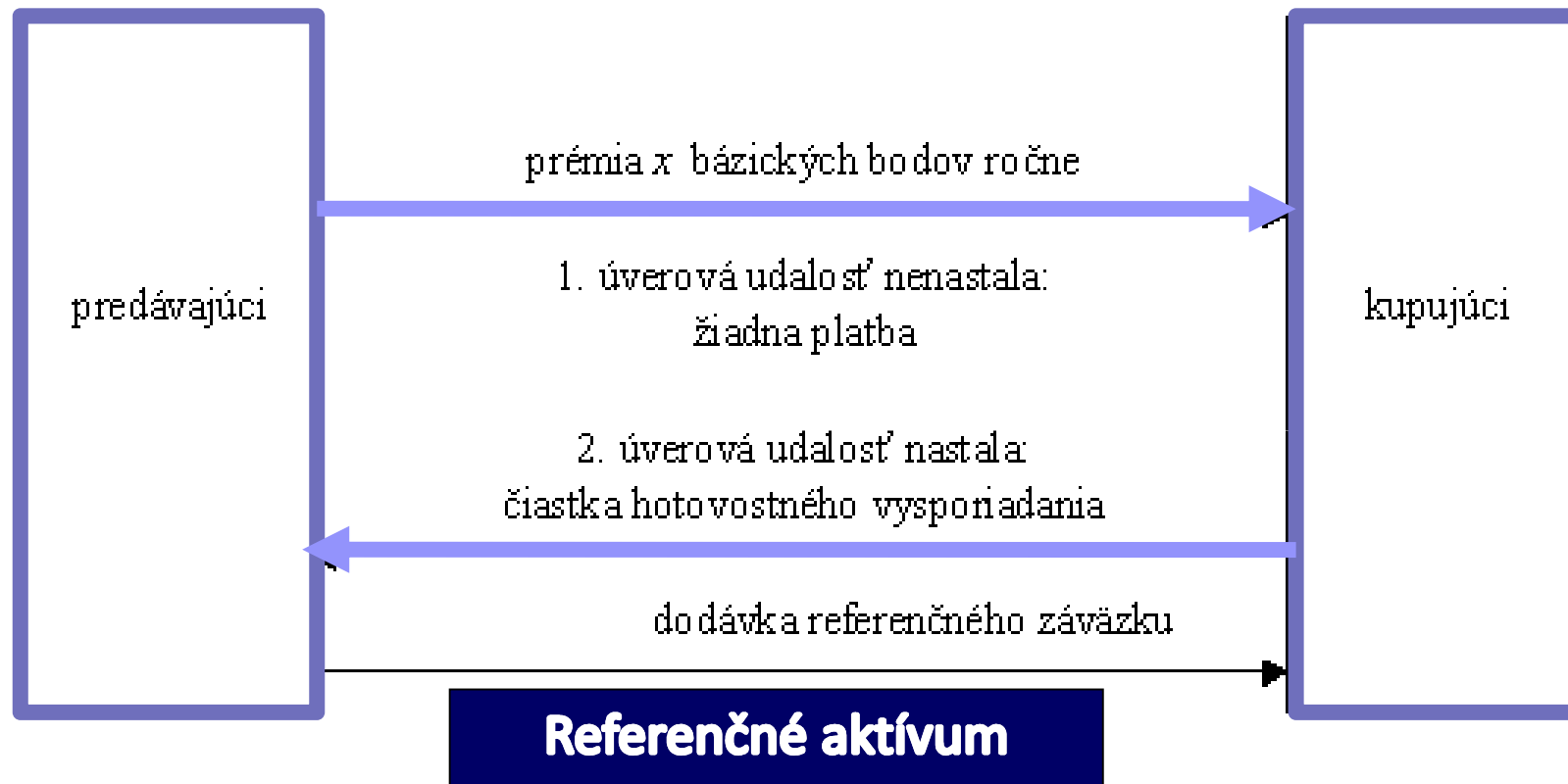
Ján Pataky



Motivácia a ciele práce

- vybudovať matematický model na oceňovanie nehomogénneho korelovaného portfólia aktív založený na teórii kopula funkcie
- predložiť štatistický model založený na funkcií prežitia za pomoci historických dát tried aktív s využitím teórie kreditných kriviek
- preskúmať citlivosť predloženého modelu na vstupne parametre
- predložiť komparatívnu analýzu produktu a porovnať výsledky s cenami z trhu, urobiť komplexnú analýzu ocenenia a zhodnotiť produkt
- analyzovať príčiny súčasnej finančnej krízy z pohľadu modelovania oceňovania

CDS(credit default swap)



$$KR = Pr_{\text{defaultu}} \times LGD$$

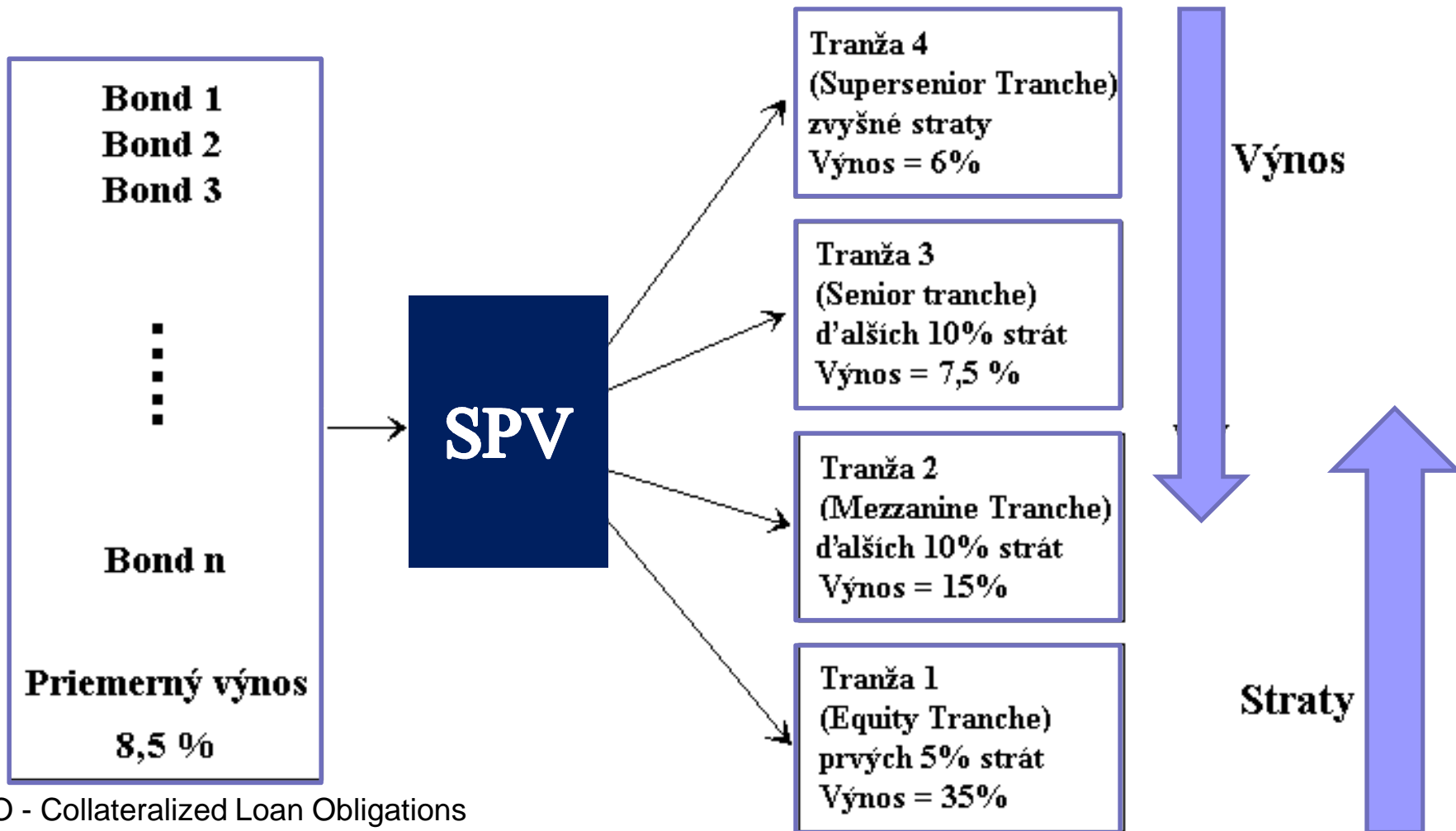
KR - kreditné riziko

Pr_{defaultu} - pravdepodobnosť zlyhania (vzniku kreditnej udalosti)

LGD - Loss Given Default - strata, v prípade zlyhania. $LGD = 1 - RR$, kde *RR* je recovery rate alebo pomerná zostatková hodnota.

Oceňovanie a využitie kreditných derivátov na kapitálovom trhu

CDO(Collateralized Debt Obligations)



CLO - Collateralized Loan Obligations

CCO - Collateralized commodity Obligations

CBO - Collateralized Bond Obligations

Oceňovanie a využitie kreditných derivátov na kapitálovom trhu

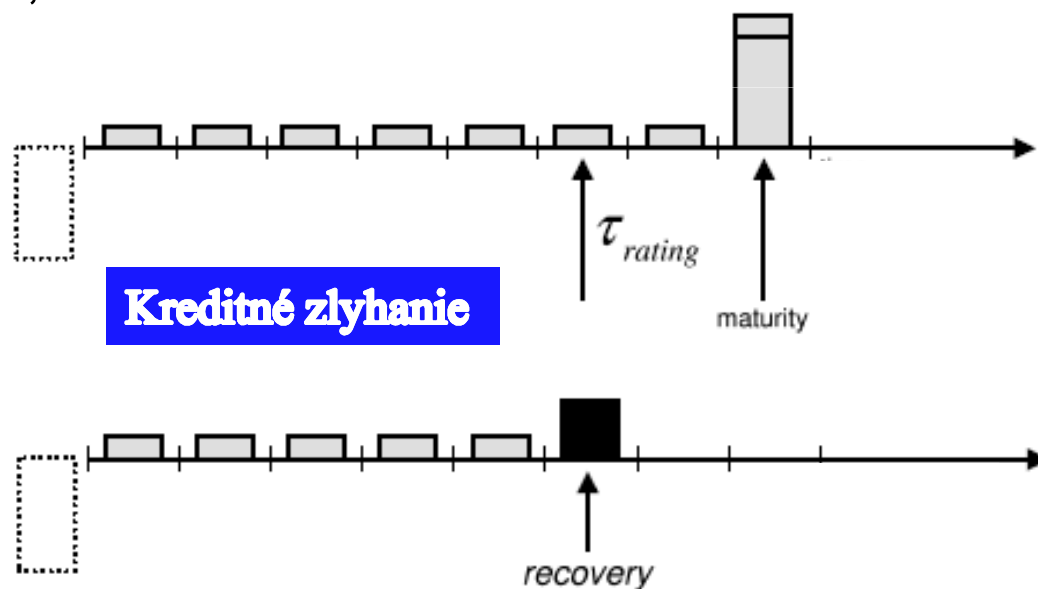


Prečo ?

- **Motivácia emitenta CDO** - participovať na príležitosti kreditnej arbitráže, dosiahnutie optimálnej kapitálovej primeranosti sledovanej regulátorom.
- **Motivácia kolaterál manažéra** - zvýšiť objem spravovaných aktív, rozširovať existujúce kapacity a generovať stabilný príjem (poplatky)
- **Motivácia investora** – CDO umožňuje dosiahnuť primeranú úroveň diverzifikácie a dosiahnuť lepší profil pomeru riziko/výnos.

Oceňovanie CDO

- V CDO je na strane aktív vždy súbor kreditných nástrojov ako sú dlhopisy, pôžičky, kreditné deriváty (napr. CDS, ABS, CCO).
- Na strane pasív sú cenné papiere emitované na kapitálovom trhu , ktoré sú tranžované



Dlhopis
Úver
CDS
Opcia



Modelovanie strany pasív

- Modelovanie cash flow
 - Podriadenosť tranži, subordinácia
- Štrukturálne zjednodušenia
 - Reinvestične testy , maturita aktív , doinvestovanie
- Modelovanie IC/ OC testov
 - ochrana rôznych typov investorov, principal ochrana, úroková ochrana
- Zahedgovanie FX, IR, basis swap
 - CIRS, IRS, Fix/FLOAT aktíva/pasíva, Forward, CDS, Short pozicionovania
- MC simulácie na modelovanie strát
 - Spracovanie štatistík, VaR, IRR, PV, DAS
- Modelovanie poplatkov
 - Výnosové poplatky, manažment poplatky, vstupné poplatky

Matematický aparát

■ Kopula funkcia

n -rozmernou kopulou nazývame funkciu $C : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ s nasledovnými vlastnosťami:

1. $C(\mathbf{u})$ je rastúca v každej zložke u_k , $k=1,2,\dots,n$.
2. Pre každý vektor $[0,1]^n$, $C(\mathbf{u})=0$, ak aspoň jedna zložka vektora \mathbf{u} je nulová a $C(\mathbf{u})=u_k$, ak všetky zložky \mathbf{u} okrem k -tej zložky sú rovné 1.
3. Pre každé $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in [0,1]^n$, $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ a n -rozmernú kocku $\mathbf{B}=[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \cdots \times [a_n, b_n]$, ktorej vrcholy ležia v definičnom obore funkcie C , je objem tejto kocky $V_C(\mathbf{B}) \geq 0$.

■ Sklarova veta

vyjadruje základnú myšlienku modelovania závislosti prostredníctvom kopula funkcií, pretože nám hovorí, že v ľubovoľnej distribučnej funkcii náhodného vektora vieme navzájom oddeliť distribučné funkcie zložiek tohto vektora od ich korelačnej štruktúry, pričom túto štruktúru vystihuje kopula funkcia

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$$

Gaussova kopula

Nech \mathbf{R} je kladne definitná symetrická matica, $\text{diag}(\mathbf{R}) = \mathbf{1}$ a $\Phi_{\mathbf{R}}$ je n -rozmerná kumulatívna distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia s korelačnou maticou \mathbf{R} . Gaussova kopula je definovaná ako

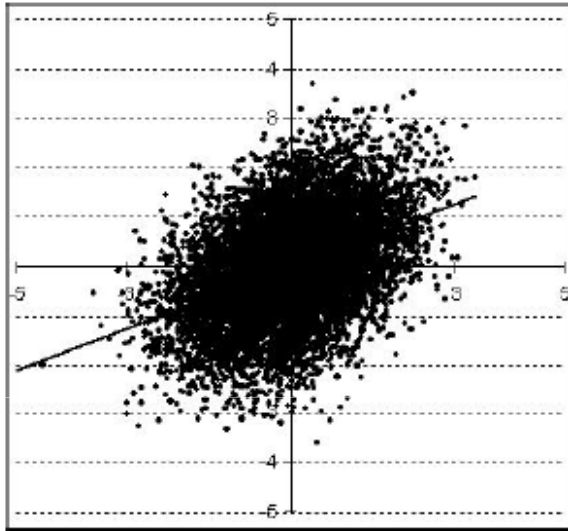
$$C(u_1, u_2, \dots, u_n, \mathbf{R}) = \Phi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

kde $\Phi^{-1}(u)$ označuje inverznú distribučnú funkciu ku kumulatívnej distribučnej funkcii Φ normovaného normálneho rozdelenia.

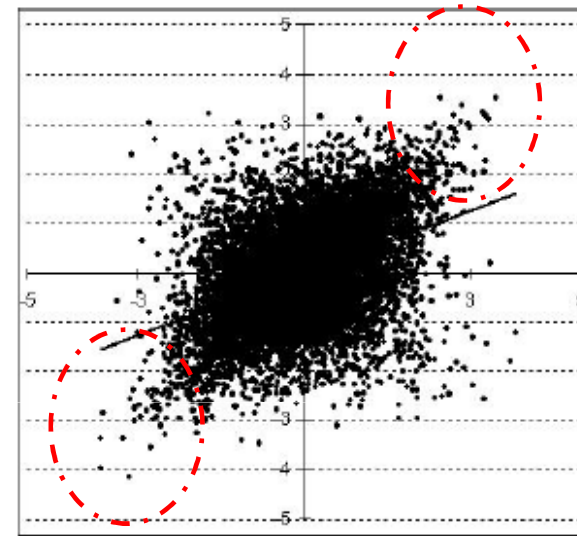
Funkciu hustoty Gaussovej kopuly

$$c(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) = \frac{f^{\text{Gauss}}(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i^{\text{Gauss}}(x_i)} = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right)}{\prod_{i=1}^n (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_i^2\right)}.$$

Gaussova kopula



Gausova kopula



Studentova t kopula

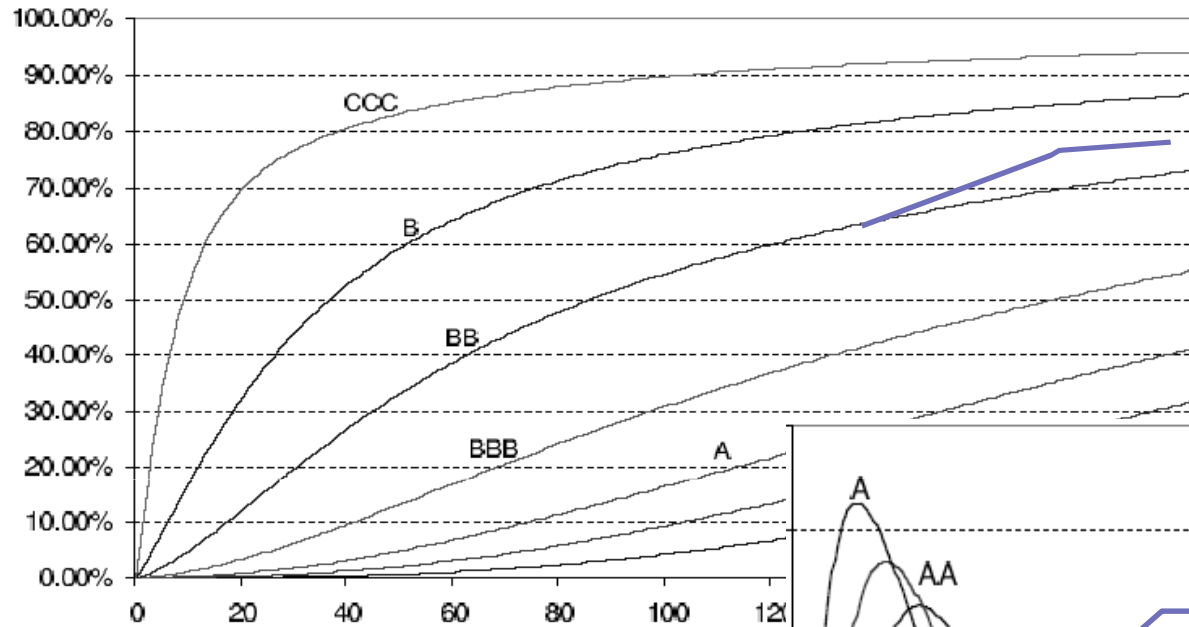
- Gausova má prednosť oproti t-kopule, pretože negeneruje veľa extrémnych hodnôt
- t-kopula v konečnom dôsledku konverguje ku Gausovej kopule



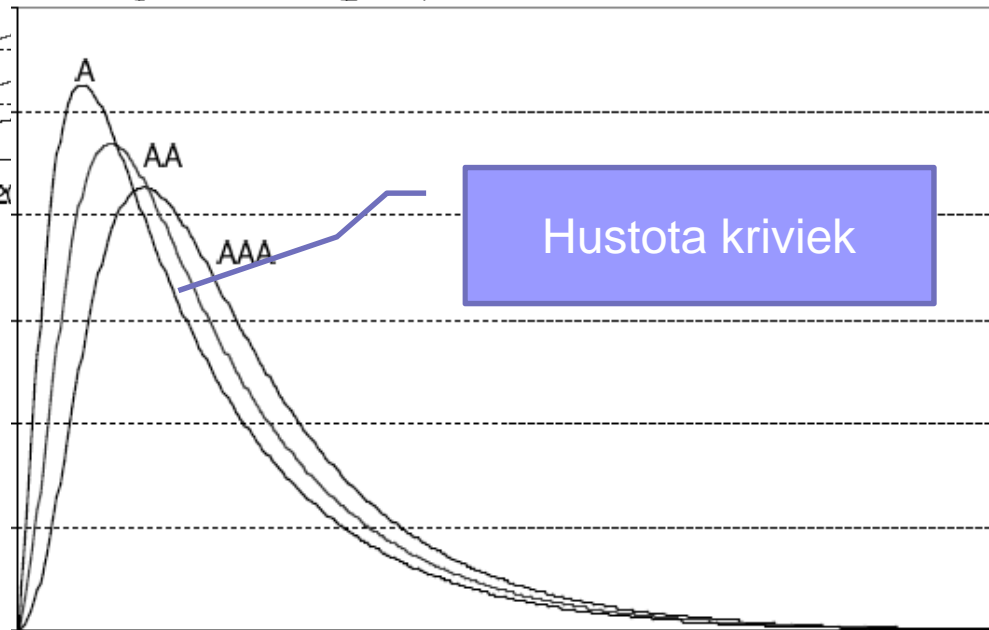
Kreditné krivky

- ratingové agentúry poskytujú historický odhad kreditného rizika
- štatistiky sú len pre veľké spoločnosti a len pre určitý typ aktív
 - dlhopis, niektoré úvery
- diskkrétne údaje
 - pozorovania s ročnou frekvenciou, Markovovský prístup , hazard rate funkcia
- príliš veľká agregácia, vyhladzovanie
 - len 16 tried ratingov
- informácie spojené s kreditným rizikom sa menia v čase, dynamike dát a v reálnom čase spracovania
 - neskorá reakcia veľkých agentúr na trhové zmeny, oneskorené zverejňovanie
- pozorovania jednotlivých agentúr sú rozdielne
 - tri rôzne ratingy pre jeden štát

Spojité kreditné krivky



Časová štruktúra
kriviek



Hustota kriviek

Kalibrované spojité kreditné krivky

v rokoch	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
E	103	90	80	64	43	25	12
σ	69	68	66	64	56	43	31
σ / E	67%	75%	83%	99%	128%	174%	266%

- AAA očakávame zlyhanie až po 103 rokoch pre rating B už po 25 a pre CCC po 12 rokoch.
- CCC prežije 12 rokov , ale s volatilitou 31 rokov, AA 90 rokov ale s volatilitou 68 rokov
- nebezpečné pozerať len na očakávaný čas zlyhania, musíme pozerať aj na volatilitu nášho očakávania.

Oceňovanie CDO / MC simulácie

■ Príprava vstupných údajov

- Výpočet korelačnej matice R
- vypočítame Choleského rozklad A korelačnej matice R , t.j. dolnú trojuholníkovú maticu A
- $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$

■ Generovanie realizácie N -rozmerného vektora korelovaných náhodných premenných

- náhodne generujeme Z , konkrétne hodnoty N -rozmerného vektora nekorelovaných náhodných premenných z normovaného normálneho rozdelenia
- vypočítame $\mathbf{x} := \mathbf{A}Z$, kde \mathbf{A} je Choleského rozklad korelačnej matice \mathbf{R} , vytvoríme požadovaný vektor s korelovanými zložkami
- zmeníme vektor \mathbf{x} na vektor \mathbf{u} korelovaných náhodných premenných rozložených na intervale tak, že položíme $\mathbf{u} := (\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_N))$

$$\mathbf{u} \sim C_{\mathbf{R}}^{Gauss}$$

Oceňovanie CDO / MC simulácie

- Výpočet časov zlyhania jednotlivých aktív.

- Hazard rate funkcia

$$\gamma_i(t) := \ln S_i(t) = -\int_0^t h_i(s) ds \quad \tau_i := \inf \{t > 0: \gamma_i(t) \leq \ln u_i\}$$

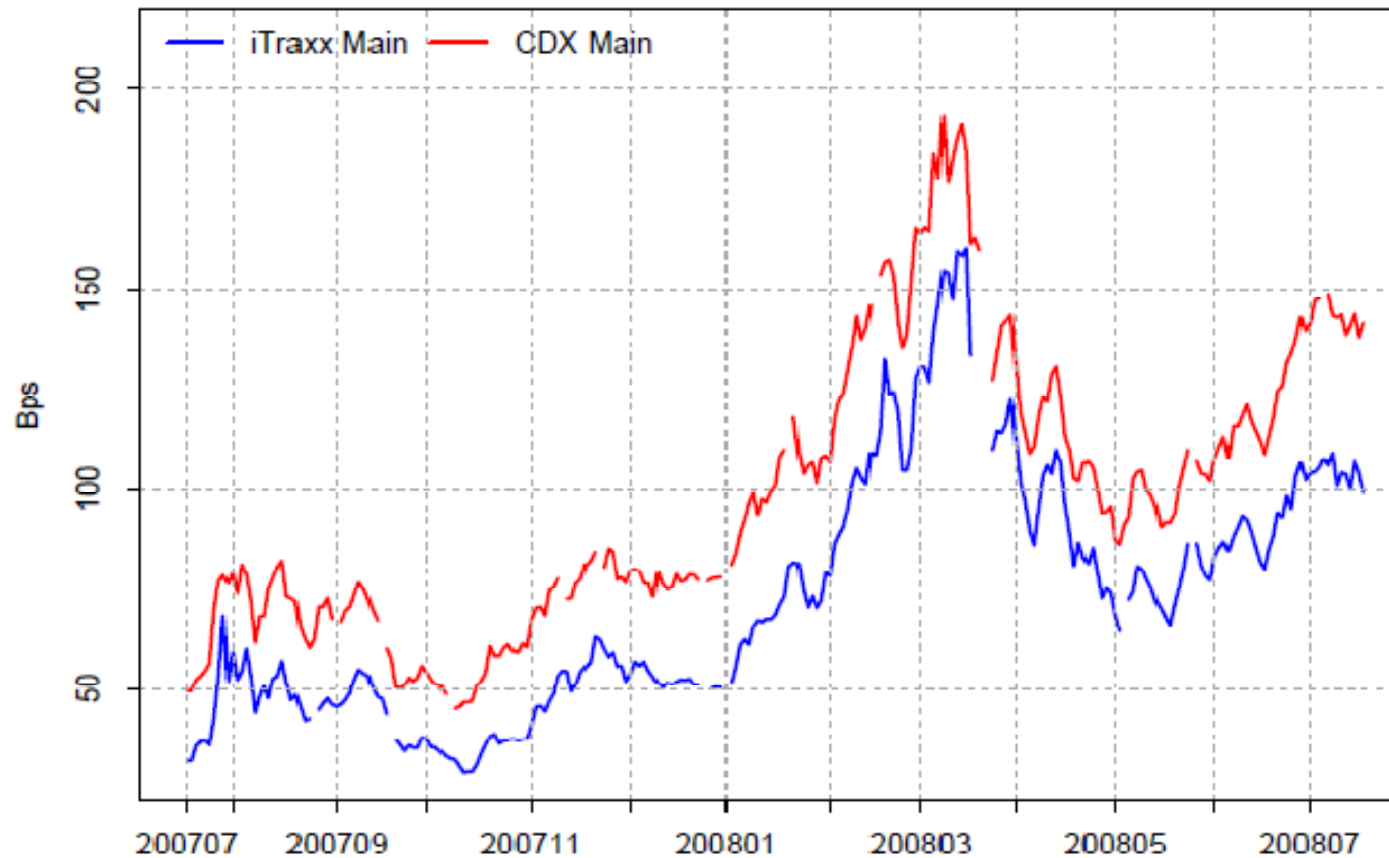
- Výpočet strát portfólia a premenných v rovnici oceňovania CDO

$$Loss^k(T) = \sum_{i=1}^n (1 - RR_i) N_i q_i^k$$

- Finálny výpočet očakávaných strát a prémiei

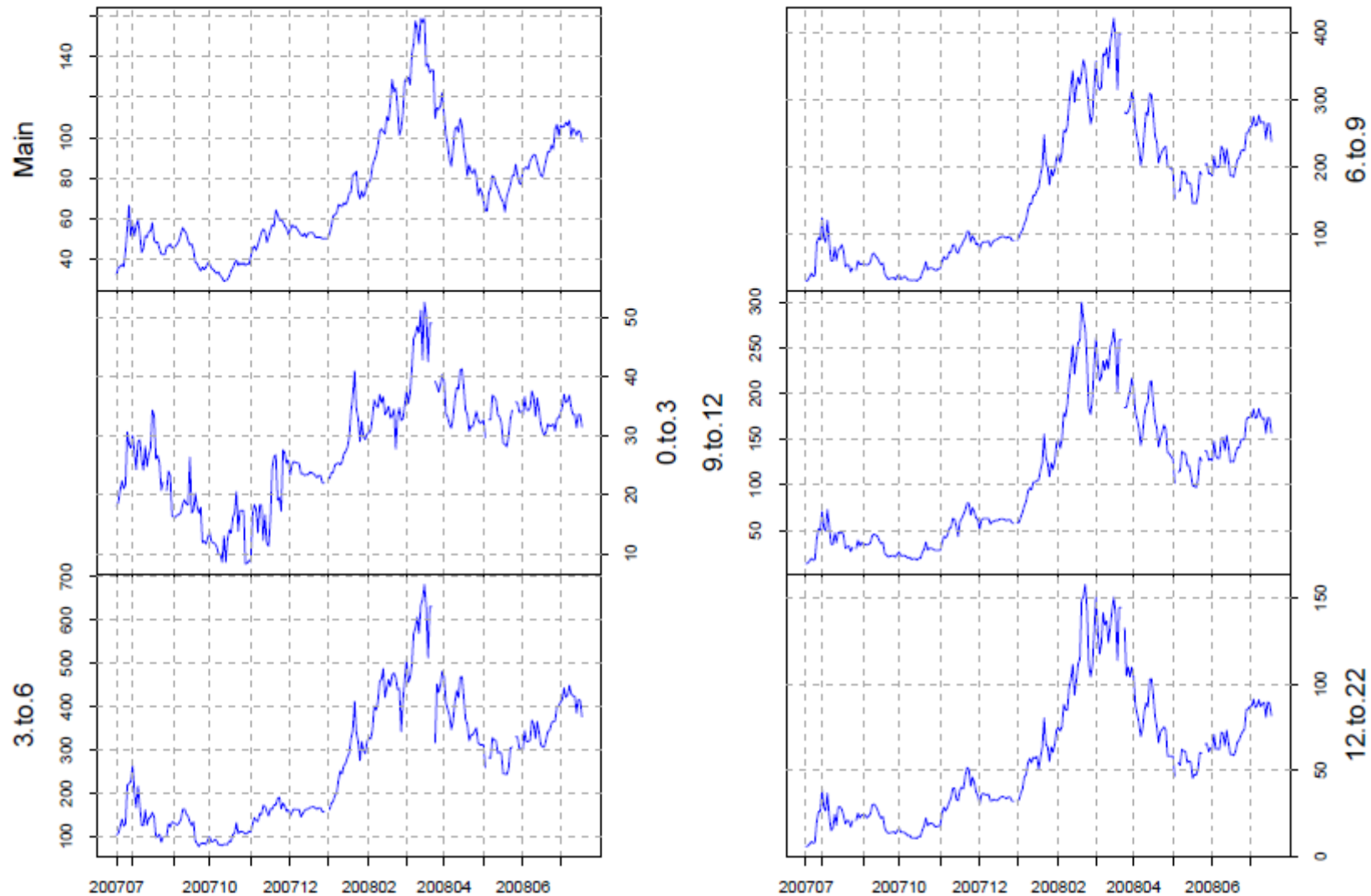
- Keďže sa jedná o nevychýlený odhad v poslednom kroku aritmetickým priemerom týchto štatistik získame celkovú očakávanú stratu portfólia
- VaR, IRR, DAS, PV, Duracia

Kalibrácia na trhové dáta



Oceňovanie a využitie kreditných derivátov na kapitálovom trhu

Kalibrácia na trhové dáta



Oceňovanie a využitie kreditných derivátov na kapitálovom trhu

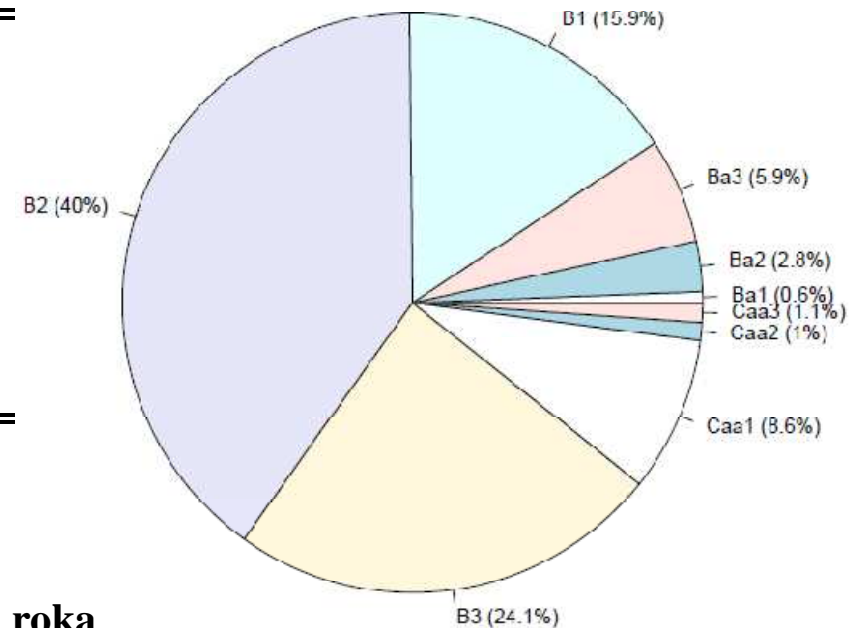
Aplikácia modelu - implikované stress faktory

tranche	Stress	Fitch Rating
12-22%	1.45	NR
9-12%	0.91	AAA
6-9%	0.75	AA+
3-6%	0.55	BBB+
0-3%	0.87	NR

trhová cena $iTraxx$ tranže 0%-3% - $PV [model / (historické default rate)^{stress}] = 0$

Analyzovaná transakcia

Tranche	Size	Size.pc	Sub.pc	Spread	Rating
Revolver	15.5	3.26%	96.74%	35	Aaa
Aaa.sen	262.5	55.15%	41.60%	33	Aaa
Aaa.jun	54	11.34%	30.25%	55	Aaa
Aa2	33	6.93%	23.32%	65	Aa2
A2	30	6.30%	17.02%	115	A2
Baa2	28.5	5.99%	11.03%	210	Baa2
Ba2	12	2.52%	8.51%	550	Ba2
Equity	40.5	8.51%	0%	0	NR
Summary	476			63.77	



- Počet úverov, ktoré boli presunuté bol **460**
- Priemerná splatnosť do splatnosti celého portfólia bola **6,3 roka**
- Priemerná marža na úveroch bola **2,84%**
- Priemerný rating celého portfólia vypočítaný pomocou idealizovaných pravdepodobností bol **B3**.
- Prislúchajúca priemerná pravdepodobnosť zlyhania portfólia bola **29%**
- Portfólio sa správalo ako keby bolo tvorené len **20 nezávislými entitami**, teda od jednej firmy tam bolo aj viacero úverov a zároveň firmy boli vzájomne poprepájané



Analýza

oceňovali sme tranžu Aa2 a tranžu A2

Implikovaný rating pomocou idealizovaných pravdepodobnosti pre iTraxx nám vyšiel pre tranžu 6-9% AA+. Naša prvá tranža je Aa2 , čo je o jeden stupeň menej ako AA+ a teda museli sme použiť interpoláciu.

Použili sme lineárnu interpoláciu a dostali pre Aa2 stress faktor : $0,75 - (0,75 - 0,55)/6 = \mathbf{0,717}$.

pre A2 obdobne interpoláciou získame $0,75 - 4 * (0,75 - 0,55)/6 = \mathbf{0,617}$

Dosiahnuté výsledky / historické

- tranže Aa2 a A2 boli 20.2.06 ocenené trhom za priemernú cenu 99,56% respektíve 98,58%
- pôvodne tranže mali výnos **3m Libor + 65bp** pre tranžu Aa2 , pri cene **99,56%** je to už **3m Libor + 72bp** p.a. a pre A2 z pôvodných 115bp trh očakával až 123bp pri cene 98,58%.
- neberieme do úvahy bid/ask spread a transakčne náklady

Tranche	Size	PVpc.95	PVpc.99	VaR.95	VaR.99	Exp.loss	Sharpe	Duration	DAS	Loss.prol	Rating	IRR
Aa2	33	99.349	99.163	-0.224	-0.288	0.158	0.51	6.74	62.39	0.3	A1	5.11
A2	30	96.239	44.205	-1.2	-17.802	1.48	0.219	7.174	87.15	4	Baa2	5.12

Dosiahnuté výsledky / kalibrácia na trh

- výsledky nakalibrovaného modelu pomocou stress faktorov pre Aa2, A2 tranže 0,717 resp. 0,617.

Tranche	Size	PVpc.95	PVpc.99	VaR.95	VaR.99	Exp.loss	Sharpe	Duration	DAS	Loss.prob	Rating	IRR
Aa2	33	99.212	99.038	-0.272	-0.332	0.018	1.018	6.926	64.06	0.3	Aa2	5.19
A2	30	98.561	94.732	-0.466	-1.707	0.114	0.49	7.3	107.2	0.7	A2	5.6

- stress faktor 1, hist. def. prob.

Tranche	Size	PVpc.95	PVpc.99	VaR.95	VaR.99	Exp.loss	Sharpe	Duration	DAS	Loss.prol	Rating	IRR
Aa2	33	99.349	99.163	-0.224	-0.288	0.158	0.51	6.74	62.39	0.3	A1	5.11
A2	30	96.239	44.205	-1.2	-17.802	1.48	0.219	7.174	87.15	4	Baa2	5.12

Iný prístup

- ponechať historické kreditné krivky bezozmien , nemeniť stress faktor, modifikovať koreláciu.

Teda riešili sme rovnicu :

$$\text{trhová cena iTraxx tranža}_i - PV [\text{model} / r_i] = 0$$

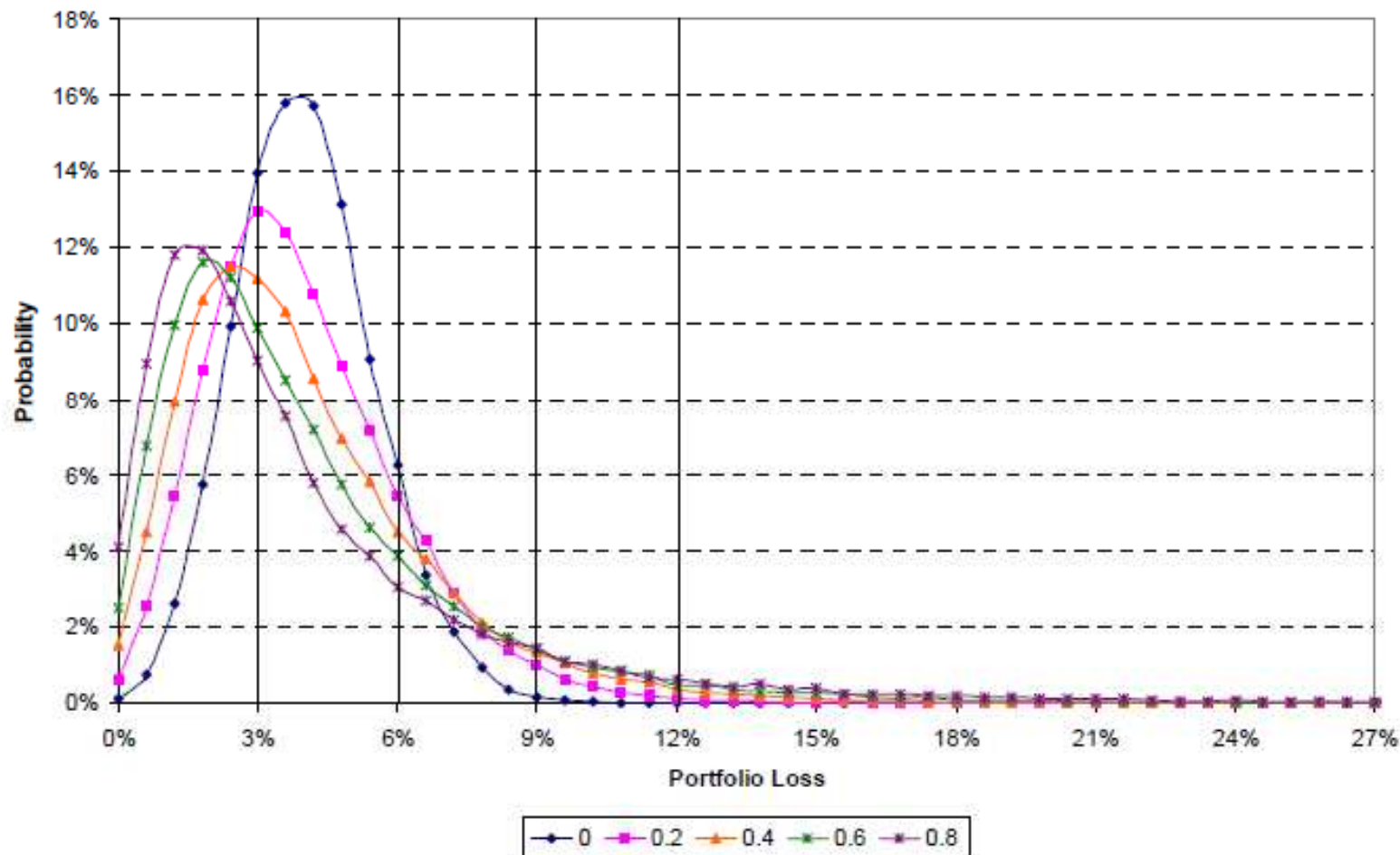
kde r_i je korelácia pre tranžu i , ktorá rieši príslušnú rovnicu. Opäť použijeme newtonovu iteračnú metódu na jej vyriešenie.

- získame implikovaný korelačný smile.
- metóda je veľmi náročná na interpretáciu výsledkov. Jedná sa o **nonlinearitu modelu**, pre equity tranžu je vyššia korelácia pozitívna z pohľadu zlyhaní.

Iný prístup

Tranže	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%
Trhove ceny	27.60%	168	70	43	20
Korelacia	Ocenenie modelu				
0%	43.70%	66	0	0	0
5%	41.00%	107	9	3	1
10%	37.90%	133	23	10	4
15%	34.80%	150	37	18	8
20%	31.70%	161	49	26	13
25%	28.60%	167	60	35	18
30%	25.50%	171	69	42	23
40%	19.50%	173	84	56	34
Implikovaná korelacia	27%	26%	30%	30%	27%

Korelácia hodnoty aktív



Oceňovanie a využitie kreditných derivátov na kapitálovom trhu

Citlivosť modelu

PV [%] normované	Aa2	A2	Equity
korelácia 30%, stress=1,RR=50%	100,00%	100,00%	100,00%
korelácia 40%	99,03%	97,88%	110,12%
korelácia 50%	98,25%	95,57%	119,07%
Recovery rate mean =55%	100,78%	101,54%	105,97%
Recovery rate mean =60%	100,97%	101,93%	113,60%
Recovery rate mean =65%	101,17%	103,28%	120,23%
Stress hist. default rate =2	93,37%	83,43%	39,97%
Stress hist. default rate =3	83,63%	62,81%	16,58%
Stress hist. default rate =4	72,71%	46,24%	6,47%



Hlavné prínosy dizertačnej práce

- zostavenie komplexného modelu na oceňovanie nehomogénnych diverzifikovaných portfólií použiteľného v praxi
- navrhnutie troch prístupov kalibrácie modelu na trhové dáta
 - historická, implikovaný stress, implikovaná korelácia
- nájdenie riešenia, ktoré obchádza fenomén korelačný smile
 - Implikovaný stress faktor vypočítaný z implikovaných trhových dát
- porovnanie výsledkov modelu s cenami na finančných trhoch
- komplexná analýza jedného investičného produktu
- zamyslenie sa prečo nastala súčasná finančná kríza a aký podiel na tom nesie matematika v oceňovaní

Ďakujem za pozornosť...

