

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky



Oceňovanie a využitie kreditných derivátov na
kapitálovom trhu

DIZERTAČNÁ PRÁCA

Študijný odbor: 11-14-09 Aplikovaná matematika

Autor: Ján Pataky
Vedúci dizertačnej práce: doc. RNDr. Vladimír Toma, PhD.

Bratislava 2010

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

2010 Ján Pataky



UNIVERZITA KOMENSKÉHO BRATISLAVA

Chcel by som sa poďakovať môjmu školiteľovi Vladimírovi Tomovi za jeho neoceniteľnú pomoc a povzbudenie pri písaní tejto práce a mojej manželke Alenke.

Bratislava, 2010

Ján Pataky

Abstrakt

Pataky, Ján: *Oceňovanie a využitie kreditných derivátov na kapitálovom trhu*, Dizertačná práca, Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Vedúci práce: doc. RNDr. Vladimír Toma, PhD., Bratislava, 2010

V tejto dizertačnej práci sa zaoberáme rozborom a oceňovaním komplikovanejších finančných nástrojov ako je CDO, ABS a CDS. Miestami sa snažíme objasniť prečo vznikla kríza tohto typu aktív. Podstatná časť práce sa venuje matematickému modelovaniu výskytu strát na nehomogénom, korelovanom portfóliu aktív. Kalibrácii nami predloženého modelu, založenom na copula funkcii, na trhové dáta. Ako príklad sme zvolili jeden konkrétny produkt obchodovaný na neregulovanom trhu, ktorý sme ocenili našim modelom, nakalibrovaným na trhové dáta a porovnali sme výsledky s trhovými kotáciami. Ako nástroj na oceňovanie portfólia aktív sme si zvolili copula funkciu. Túto sme sa následne snažili nakalibrovať na aktuálne trhové dáta a to konkrétne pomocou rôznych „maximum likelihood“ metód. Stresovali sme historické pozorovania zlyhaní dát od ratingových agentúr za pomoci implikovanej korelácie z iTraxx indexov. Zvolili sme si Gaussovu copula funkciu kvôli výhodnému generovaniu chvostovej závislosti a ukázali sme jej asymptotickú nezávislosť. Pomocou Gaussovej copula funkcie a nástroja „hazard rate“ sme vypočítali očakávané straty na nehomogénom portfóliu aktív. V závere sme sa zamýšľali nad príčinami vzniku súčasnej krízy z pohľadu matematického modelovania rizika na finančných trhoch. Došli sme k poznaniu, že jedna z kľúčových vecí, ktoré trh podhodnotil, bola cena peňazí, alebo ináč povedané cena likvidity.

Kľúčové slová: kredit default swap, copula funkcia, CDO, colateral debt obligation, hazard rate, survive function, ABS, default probability, Gaussian copula, recovery rate

Predhovor

Práca sa zaoberá oceňovaním kreditných derivátov. Zamýšľa sa nad príčinami likviditnej krízy štruktúrovaného kreditu. Cieľom práce je ukázať, že matematické modely založené na copula funkcii prepojenej korelačnou štruktúrou sú vhodné na oceňovanie štruktúr ako je CDO a že tieto modely nie sú hlavnou príčinou straty dôvery investorov v túto triedu aktív. V prvých krokoch práce sme využíval hlavne moje poznatky z modelovania týchto štruktúr v praxi, ktorú som získal pri ich oceňovaní. Neskôr na tieto praktické poznatky nadväzovala moja práca na fakulte elektrotechniky a informatiky, kde som sa venoval hlavne nájdeniu čo najefektívnejších algoritmov na oceňovanie štruktúrovaných produktov. Neskôr sa k tomu pridala aj komplexná štúdia senzitivnosti, ktorá bola aj neskôr publikovaná. Keďže daná problematika ma natoľko zaujala a môj vedúci práce nebol proti, vzniklo toto dielo. Veľmi vhod mi prišla aj súčasná kríza finančného sektora, ktorá ma prinútila pozrieť sa na problematiku aj z iného pohľadu. A to konkrétne z pohľadu ceny za hotovosť, ceny za likviditu. Túto problematiku doposiaľ nik nezahŕňal do modelovania a to je aj jeden z hlavných faktorov úpadku tejto triedy aktív.

Obsah

Abstrakt	4
Predhovor	5
Úvod	8
Štruktúrovaný kredit, popis problematiky a typu aktív	11
1.1 ABS asset back securities	11
1.2 CDS, credit default swap kontrakt	14
1.3 CDO (collateralized debt obligations)	17
Oceňovanie CDO pomocou opcí	21
2.1 DAS – Default adjusted spread.....	21
2.2 Replikácia payoff diagramu pomocou put opcii.	22
2.3 DAS senzitivnosť	24
Oceňovanie CDO z kvantitatívneho hľadiska	26
3.1 CDO z kvantitatívneho hľadiska.....	26
3.2 Modelovanie strany aktív.....	27
3.3 Modelovanie strany pasív	28
3.4 Copula funkcia	29
3.5 Gaussova copula.....	34
3.6 Jednofaktorová Gaussova copula.....	37
3.7 Kalibrácia copula funkcie pomocou likelihood metód.....	39
3.7.1 Likelihood metóda s exaktným maximom / EML.....	39
3.7.2 Funkcia hypotéz pre marginálnu metódu / IFM	40
3.7.3 Likelihood metóda pre kanonické maximum / CML	41
3.8 Kreditné krivky, hazard rate funkcia.....	42
3.8.1 Kalibrácia kreditnej krivky	43
3.9 Funkcia miery rizika	50

Jednofaktorové modely a korelácia	52
4.1 Jednofaktorový model	52
4.2. Korelácia hodnoty aktív.....	55
4.3. Korelácia zlyhania	56
Oceňovanie CDO pomocou simulácií Monte Carlo	61
5.1 Simulácia Monte Carlo	61
Kalibrácia modelu na trhové dáta	67
6.1 Oceňovanie	67
6.2 Definícia príkladu.....	68
6.3 Kalibrácia na trh	72
Dosiahnuté výsledky, porovnanie s trhom	78
7.1 Výsledky.....	78
7.2 Citlivosť výsledkov na vstupne dáta	88
Záver	91
Apendix:	93
Recovery Rates	93
Zdrojový kód hlavnej funkcie v R	95
Literatúra	103

Úvod

Kreditné deriváty vznikli ako dôsledok spojenia finančných derivátov a potreby zabezpečenia bankových portfólií. Podľa niektorých autorov ako je Vinod Kothari možno za najstarší kreditný derivát považovať finančnú garanciu, ktorá sa v rôznych podobách vyskytuje už stovky rokov. Súčasný koncept kreditných derivátov existuje podstatne kratšiu dobu. Pojem kreditný derivát bol po prvý raz použitý v roku 1992, kedy Medzinárodná agentúra pre swapy a deriváty (International Swap and Derivatives Agency; ISDA) týmto pojmom označila nový exotický produkt mimoburzového kapitálového trhu.

Prvá zmienka o derivátovej transakcii sa datuje od roku 1993, kedy tri veľké firmy z Wall Street – J. P.Morgan, Merrill Lynch a Bankers Trust uzavreli obchod s kreditnými derivátmi. V priebehu spomínaného roka prebehlo ešte niekoľko súkromných transakcií, bolo však spochybnené, či vôbec došlo k ich vyrovnaniu¹.

Zatiaľ čo v roku 1993 boli kreditné deriváty považované za „dotieravý“ produkt, o tri roky neskôr, teda v roku 1996, ho trhové prostredie označilo za produkt s nesmiernym potenciálom pre subjekty obchodujúce na kapitálovom trhu.

V oblasti kreditných derivátov možno zaznamenať niekoľko významných míľnikov:

- v septembri 1996 bol vysporiadaný prvý *Credit Loan Obligation* (CLO) kontrakt, jeho emitentom (originátorom) bola anglická National Westminster Bank;
- v decembri roku 1997 bola firmou Standard & Poor's realizovaná prvá syntetická sekuritizácia pod názvom *Bistro deal*;
- v júli 1999 vydala agentúra ISDA prvé definície kreditných derivátov, ktoré boli v roku 2003 a následne 2009 aktualizované.

¹ V tomto období spoločnosť Standard & Poor's odmietla klasifikovať existujúce produkty úverových derivátov. Dôvodom bolo uistenie spoločnosti S&P, že žiaden z korporátnych emitentov referenčnej skupiny nezlyhá ani nezbankrotuje, a teda nebolo potrebné tieto produkty ratingovo ohodnotiť.

Položme si základnú otázku, čo to je kreditný derivát? Kreditný derivát môžeme definovať ako dvojstranný kontrakt, ktorý presúva riziko výskytu kreditnej udalosti (credit event) z predávajúceho na kupujúceho. Ten poskytuje predávajúcemu kontraktu kreditnú ochranu a dostáva zato od predávajúceho odmenu. Iná definícia hovorí, že kreditný derivát je nástroj, ktorý umožňuje jednej zmluvnej strane (kupujúcemu ochranu) preniesť riziko referenčného aktíva na jeden alebo viacero ďalších subjektov (predávajúcich ochranu). V tomto prípade je podkladovým (alebo referenčným) aktívom úver, resp. pôžička, finančný lízing a pod. Ako vidíme už z úvodnej definície nie je celkom jednoznačné nájsť hranicu, čo spĺňa podmienku byť kreditný derivát a čo nie.

Rapidný rast na trhu kreditných derivátov bol spôsobený kombináciou viacerých faktorov. Na rapidný rast mali veľký vplyv investori, emitenti a kolaterál manažéri.

Kľúčovými motívmi jednotlivých účastníkov boli hlavne:

- *Motivácia emitenta* – hlavnými motívami pri vydávaní CDO sú participovať na príležitosti kreditnej arbitráže a dosiahnutie optimálnej kapitálovej primeranosti sledovanej regulátorom kapitálového trhu (transfer rizika).
- *Motivácia kolaterál manažéra* – CDO mu umožňuje zvýšiť objem spravovaných aktív, rozširovať existujúce manažérske kapacity a generovať stabilný príjem (poplatky) v súvislosti so spravovaním aktív.
- *Motivácia investora* – CDO umožňuje dosiahnuť primeranú úroveň diverzifikácie a dosiahnuť lepší profil pomeru riziko/výnos.

Collateralized debt obligations (CDO) predstavujú dôležitú triedu cenných papierov podložených aktívami. Oceňovanie CDO sa zakladá na matematickom modelovaní a simulácii, na analytických metódach, ktoré závisia na podkladovom súbore aktív a na štruktúre transakcie. Hlavná časť uznávaných modelov oceňovania v praxi sa sústreďuje na oceňovanie kreditného rizika zlyhania a na modelovanie cashflow.

V praxi sa často pozabúda na riziko likvidity a leverage², ktoré boli aj dôvodom zániku jednej z epoch týchto produktov.

Táto práca pojednáva o CDO oceňovaní. Predkladá komplexný model oceňovania CDO. Začína vysvetlením základných princípov ako fungujú a ako sa využívajú CDO ako štruktúrované finančné nástroje kapitálového trhu. Vysvetľuje analytické prístupy oceňovania CDO a rozoberá pojmy PD, EL a DAS súvisiace s CDO. Porovnáva teoretickú modelovanú cenu s trhovou cenou a snaží sa vysvetliť ich rozdiely. Analyzuje modely a ich nedostatky a zamýšľa sa nad príčinami kolapsu týchto inštrumentov.

Za ciele dizertačnej práce sme si stanovili vybudovať matematicko štatistický aparát na oceňovanie CDO a vysvetliť dosiahnuté výsledky použiteľné v praxi. Použiť doterajšie poznatky z teórie poisťovníctva na diverzifikovanom poisťnom kmeni v praxi pri oceňovaní diverzifikovaného portfólia aktív v spojení s hazard rate funkciou. Nájsť akým spôsobom a aké dáta použiť na kalibráciu hazard rate funkcie.

Za hlavné ciele práce sme si vytýčili :

- vybudovať matematický model založený na copula funkcii,
- vybudovať štatistický model založený na funkcii prežitia za pomoci historických dát jednotlivých typoch aktív s pomocou teórie kreditných kriviek,
- navrhnúť numerické schémy pre výpočet súčasnej hodnoty CDO tranži,
- preskúmať citlivosť výsledkov na meniace sa vstupne parametre,
- predložiť komparatívnu analýzu jedného produktu a porovnať výsledky s cenami z trhu, urobiť komplexnú analýzu ocenenia a zhodnotiť produkt

² pomer vlastných zdrojov k požičaným zdrojom

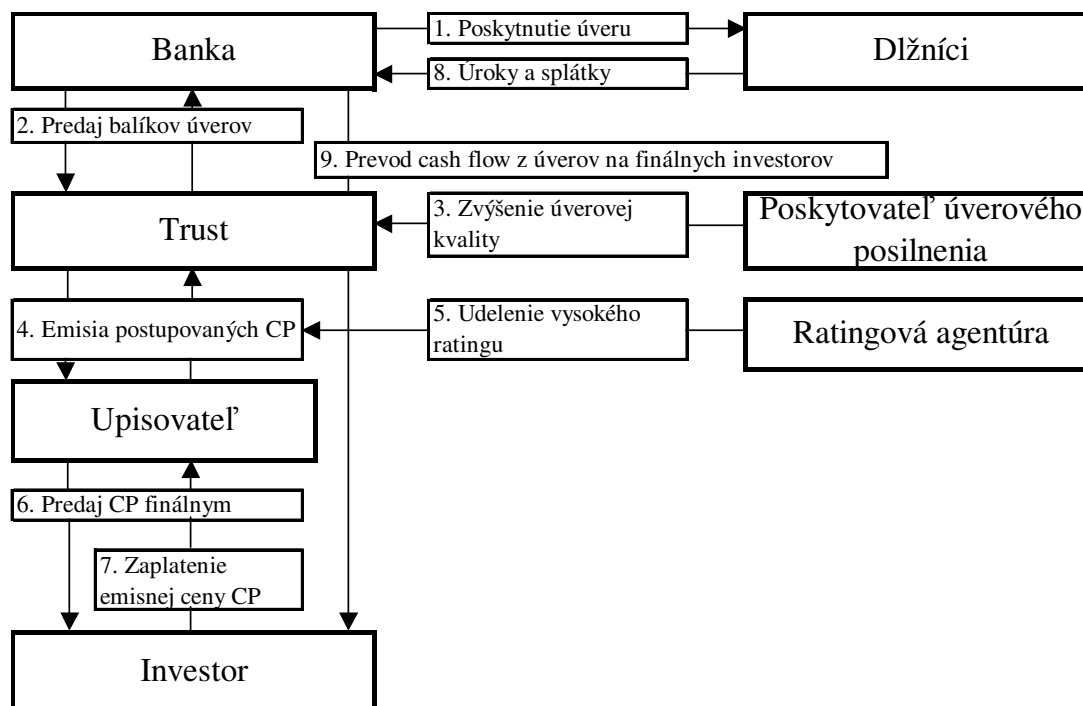
Kapitola 1

Štruktúrovaný kredit, popis problematiky a typu aktív

V tejto kapitole popíšeme jednotlivé typy aktív, z ktorých sa skladajú postupne zložité štruktúry ako je CDO (Collateralized debt obligation), ABS (asset back securities) a CDS (credit default swaps). Taktiež si popíšeme základné schémy a rovnice, z ktorých vychádza ocenenie CDS a CDO.

1.1 ABS asset back securities

ABS po prvý raz objavili v roku 1985 v USA. Ich podstatou je zhromaždenie niekoľkých menších neobchodovateľných úverov alebo iných pohľadávok, s približne rovnakými charakteristikami a ich následná premena na obchodovateľné dlhové cenné papiere, ktoré bývajú spravidla pevne úročené. Základný princíp emisie ABS prezentuje nasledujúca schéma.



Obrázok 1.1: Schéma mimo bilančnej sekuritizácie aktív formou ABS

Proces sekuritizácie aktív začína poskytnutím viacerých menších úverov rovnakého druhu s veľmi podobnými základnými charakteristikami (ako sú splatnosť, výška a spôsob úročenia) dlžníkovi. Tieto úvery spojí veriteľská inštitúcia (v tomto prípade banka) do jedného „produktu“ a celý ho prevedie na špeciálnu jednotku (v našom prípade trust). Trust vyemituje viac obchodovateľné cenné papiere kryté pohľadávkami z „produktu“ a následne ich predá finálnym investorom. Do vzťahu medzi trustom a investormi môže vstúpiť ďalší subjekt, ktorý emitované cenné papiere umiestňuje na trh (v schéme tento subjekt predstavuje upisovateľ)³. Je častým javom, že ešte pred finálnym predajom sa zvýši úverová kvalita takto vzniknutých cenných papierov napr. zárukou tretej banky, ktorá podľa stanovených podmienok môže prebrať časť úverového rizika dlžníkov na seba. Touto treťou osobou môže byť štát resp. určitá štátna inštitúcia, banka, štátna agentúra alebo poisťovňa.

³ Častejšie však tieto úlohy (emisie CP a ich umiestnenie na finančný trh) spadajú do kompetencie jediného subjektu – trustu.

Úverovú kvalitu zvyšujú aj ratingové agentúry, ktoré takto vzniknuté cenné papiere hodnotia vyšším ratingovým stupňom, ako sú hodnotené samotné podkladové úvery. Upisovateľ predáva cenné papiere za vyššiu cenu, než za akú ich kúpil od trustu, pričom rozdiel týchto cien predstavuje jeho výnos. Vo väčšine prípadov sa snaží pôvodná veriteľská inštitúcia (banka) presunúť úverové riziko dlžníkov z poskytnutých úverov, pričom sa vyskytujú prípady, keď táto banková inštitúcia za určité poplatky naďalej dané úvery spravuje, takzvané servisuje.

V priebehu splatnosti, dlžníci splácajú úvery vrátane úrokov, pričom tento *cash flow* je prevedený na finálnych investorov. **Tranžovanie**⁴ predstavuje prioritu cenných papierov pri sekuritizácii aktív. Peňažné toky zo sekuritizovaných aktív sa rozdeľujú do niekoľkých tried, minimálne dvoch, častejšie však viacerých. Každá trieda sa nazýva tranžou a medzi jednotlivými triedami platí podriadenosť. V daných tranžách sú štruktúrované pohľadávky dlžníkov, ktorí napr. prijali bankový úver. K najpoužívanejším tranžiam patria *senior* tranže, *mezzanine* tranže, podriadené (*subordinated*) tranže a *equity (first loss)* tranže. Poradie, v ktorom sú dané tranže uvádzané, zodpovedá aj priorite vyplácania ich *cash flow*, resp. rizikovosti jednotlivých tranží. Ako prvé sú uspokojované požiadavky držiteľov prvých tranží (*money market* či *senior*), ktoré však prinášajú najnižší výnos (pretože sú najbezpečnejšie⁵). Často sa stáva, že *equity* tranže nie sú vyplácané, nakoľko v prípade vzniku kreditnej udalosti nezostali finančné prostriedky na ich vyplatenie. Tiež je pravdou, že ak dôjde k vyplácaniu (za predpokladu, že nenastala kreditná udalosť), *equity* tranže získavajú najväčší výnos spomedzi všetkých tranží, ktorý predstavuje pre držiteľa tejto tranže odmenu za nesené riziko.

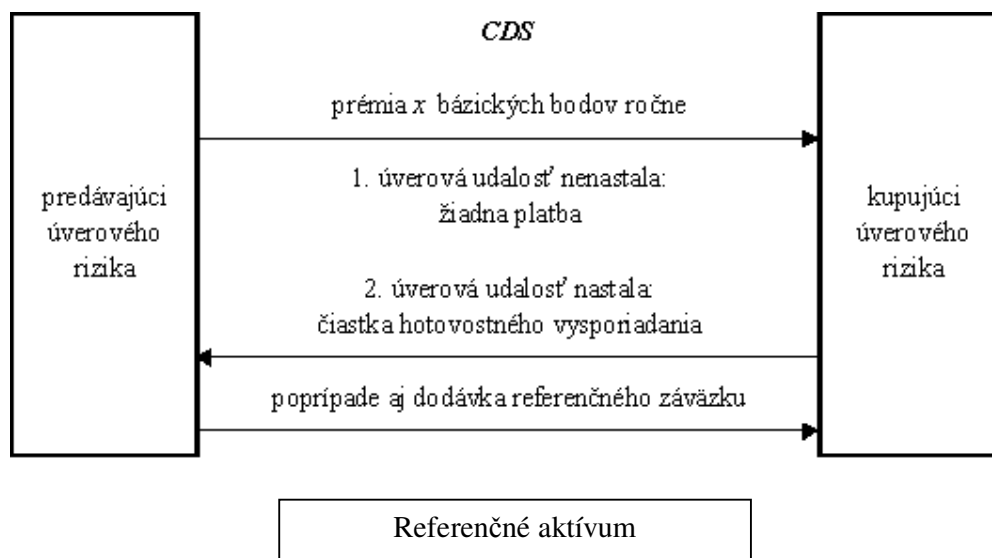
⁴ Jílek, J.: Finanční a komoditní deriváty v praxi. Praha: Grada, 2005. str. 557

⁵ Bývajú zabezpečené štátnymi dlhopismi, ktoré sú prakticky bezrizikové.

1.2 CDS(credit default swap) kontrakt

Credit default swap, CDS, predstavuje taký nástroj mimoburzového finančného trhu, pri ktorom predávajúci úverového rizika platí kupujúcemu úverového rizika periodické platby (prémie, spread), za čo sa kupujúci úverového rizika zaväzuje v prípade vzniku úverovej udalosti definovanej v obojstrannom CDS kontrakte, vyplatiť tú časť straty, ktorá mu prislúcha. V prípade, že investor zakúpil len určitú časť emisie cenného papiera, určitú tranžu, výnosy i straty, ktoré inkasuje resp. znáša sú len pomernou časťou celkového zabezpečeného dlhu. Rozdiel medzi zvýšenou výnosnosťou do splatnosti referenčného aktíva a konštantným výnosom bezrizikového aktíva slúžiaceho na zabezpečenie celého obchodu sa nazýva „báza úverového rozpätia“ (*credit spread basis*) a slúži na výpočet prémie platenej predávajúcemu úverového rizika.

Podstatu CDS prezentuje nasledujúca schéma.



Obrázok 1.2.1 Schéma základného CDS kontraktu.

V prípade základného CDS kontraktu, prvý krok obchodu je kúpa úverového rizika predávajúcim ochrany za vopred stanovenú prémiiu \times bazických bodov. Tá je pravidelne platená druhou stranou kontraktu. V prípade, že úverová udalosť nenastane, nedochádza k žiadnej ďalšej platbe a kontrakt dosiahne splatnosť expiruje.

Naopak, ak nastane kreditná udalosť, predávajúci ochrany je povinný vyrovnať vzniknutú stratu v dohodnutej výške (preto je často CDS prirovnávaný k úverovej opcii), prípadne dochádza ku platbe menovitej hodnoty referenčného aktíva, pričom oproti danej platbe smeruje dodávka referenčného aktíva alebo sa vypláca len rozdiel medzi menovitou hodnotou a zostatkovou hodnotou referenčného aktíva (podľa toho, ako to bolo dohodnuté v CDS zmluve).

Výpočet hodnoty hotovostného vysporiadania je v rukách kalkulačného agenta. Ten je vopred určený v CDS zmluve. Väčšinou ide o jedného účastníka zo zmluvných strán. Spôsob výpočtu býva podrobne rozpísaný, v podstate sa určuje spôsob stanovenia trhovej hodnoty referenčného aktíva ku dňu ocenenia (štandardne nastáva tento deň do tridsiatich dní po vzniku kreditnej udalosti(defaulte)).

Základom oceňovania je odhad kreditného rizika, ktoré investor podstupuje. Toto riziko možno jednoducho vyjadriť pomocou očakávanej výšky straty, v prípade kreditnej udalosti.

$$KR = Pr_{defaultu} \times LGD$$

KR - kreditné riziko

Pr_{defaultu} - pravdepodobnosť zlyhania (vzniku kreditnej udalosti)

LGD - Loss Given Default - strata, v prípade zlyhania. $LGD = 1 - RR$, kde *RR* je recovery rate alebo pomerná zostatková hodnota.

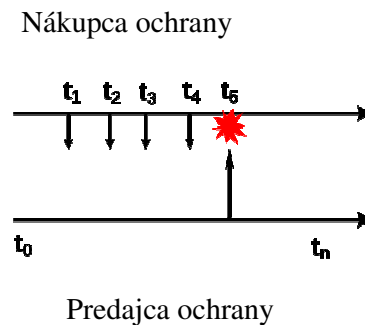
Cashflow spojený s jednoduchým kreditným derivátom (CDS) možno rozdeliť na tieto časti:

- Platby, ktoré platí kupujúci protekcie za poskytnutú ochranu. Ide o dávky platené ročne, vyjadrené v bázičných bodoch hodnoty kontraktu, ktoré sú platené do konca trvania kontraktu, maturity, prípadne do času zlyhania. Podľa toho, čo nastane skôr. Táto časť platieb sa zvykne označovať *premium leg*.
- Na druhej strane ide o platbu platenú v prípade zlyhania. Ide o náhradu škody investora. Predpokladáme, že v prípade zlyhania dostáva časť svojho dlhu, vyjadrenú prostredníctvom zostatkovej hodnoty (*L*). Investor teda dostane $RR \times L$, zvyšnú časť platby - čiastku $(1 - RR) L$ uhrádza predávajúci zábezpeky, táto časť platieb sa nazýva *protection leg*.

Aby bol kontrakt ocenený správne, musí v čase založenia zmluvy platiť, že súčasná hodnota (PV) oboch platieb je rovnaká, teda musí platiť:

$$PV \text{ premium leg} = PV \text{ protection leg}$$

Už vyššie sme spomínali, že prémie závisí od tzv. bázy úverového rozpätia. Nie je to však jediná premenná, ktorá ovplyvňuje jej výšku. Vplyv na stanovenie hodnoty prémie majú aj iné faktory, ako sú pravdepodobnosť zlyhania referenčnej jednotky, výška straty pri zlyhaní, angažovanosť pri zlyhaní, úverová kvalita kupujúceho úverového rizika, počet a druh úverových udalostí špecifikovaných v kontrakte a spoločné pravdepodobnosti súčasného zlyhania kupujúceho úverového rizika a referenčného aktíva. K nepriaznivému vývoju pre kupujúceho ochrany by mohlo dôjsť aj v prípade, že súčasne nastane kreditná udalosť a predávajúci ochrany nie je schopný splniť svoj záväzok. CDS predstavuje *nefinancovanú formu* kreditného derivátu – platby prémie síce prebiehajú na pravidelnej báze, ale platby vyplývajúce zo záväzku sú vyrovnávané len v prípade vzniku kreditnej udalosti.



Obrázok 1.2.2 Schéma hotovostných platieb CDS kontraktu v prípade zlyhania, poistného plnenia.

1.3 CDO (Collateralized Debt Obligations)

CDO sú bilančné produkty odvodené z kreditných derivátov a predstavujú určitú formu zabezpečenia. Môžu sa skladať z pôžičiek alebo dlhopisov, prípadne iných nástrojov ako opcií na komodity alebo katastrofy CDS. Podľa toho rozlišujeme:

- CLO - Collateralized Loan Obligations
- CCO - Collateralized commodity Obligations
- CBO - Collateralized Bond Obligations

Podkladové aktíva ako pôžičky a dlhopisy sú združené a spravované špeciálnou inštitúciou SPV (Special Purpose Vehicle). Zväčša ide o nelikvidné aktíva, ktoré by mali ako celok produkovať relatívne stabilný výnos. V rámci SPV sú vytvorené viaceré tranže, ktoré majú priradené ratingy.

Podľa typu tranží SPV vydáva cenné papiere:

- seniorské
- stredné (mezzanine)
- a podriadené - subordinované (juniorské)

Ako prvý je vyplácaný výnos a nominálna hodnota seniorskej tranže, a preto je najmenej riziková, zároveň však aj najmenej výnosná. Po nej nasleduje stredná a nakoniec juniorská. Výnos juniorskej tranže predstavuje čiastku zostávajúcu po vyplatení senior a mezzanine tranže.

Namodelujme si takéto portfólio. Straty z portfólia spôsobené zlyhaním firiem závisia predovšetkým od pravdepodobnosti zlyhania každej z firiem a od veľkosti strát niektorého z aktív v prípade jeho zlyhania (resp. veľkosti podielu hodnoty aktíva, ktorý bude vyplatený v prípade zlyhania – hodnotu vyjadruje tzv. *Recovery Rate*). Navyše, veľmi dôležitú úlohu pri modelovaní času zlyhania firiem, a následne aj pravdepodobnostného rozdelenia strát portfólia, hrá aj stupeň závislosti medzi pravdepodobnosťami zlyhania jednotlivých firiem – vzájomná korelácia.

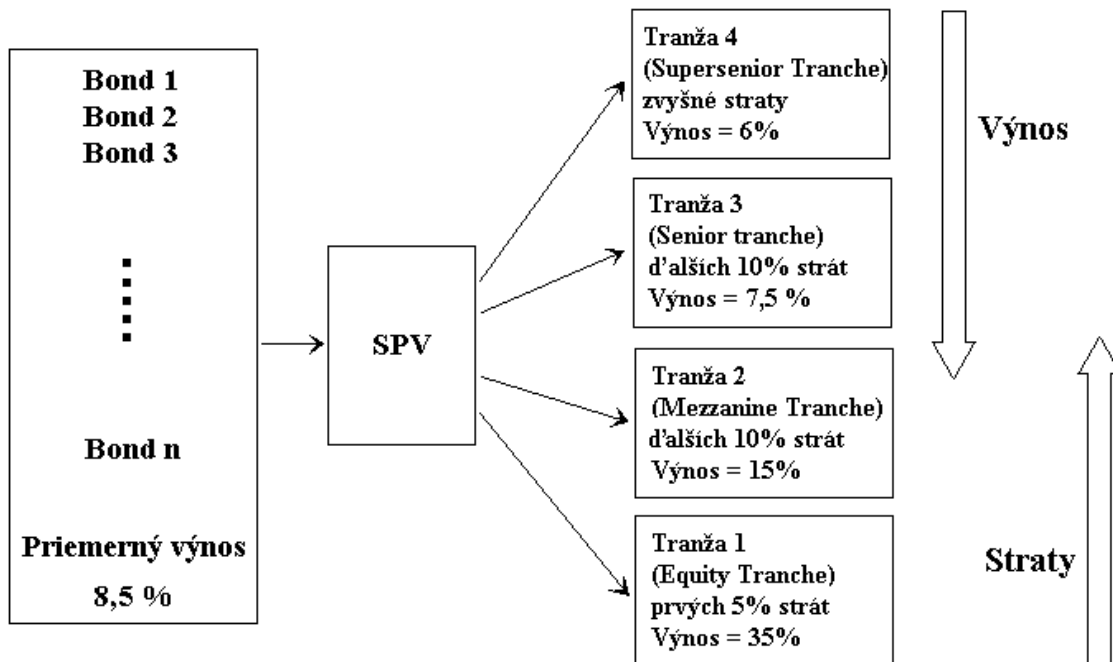
Ako majitelia portfólia sa chceme ochrániť pred možnými stratami spôsobenými výskytom zlyhaní, ale nechceme portfólio predať. CDO umožňuje takúto ochranu tak, že portfólio rozložíme na niekoľko rizikovo výnosových profilov, tranží, a tie

predávame. Kreditné riziko tvoriace naše portfólio CDO predávame v „prebalených“ produktoch na trhu.

Tranže sú charakterizované svojím dolným a horným ohraničením. Investor tranže so spodnou hranicou K_S a hornou hranicou K_H bude znášať všetky straty portfólia, ktoré prekročia veľkosť straty K_S , až do výšky K_H celkovej hodnoty portfólia. To znamená, že držitelia tranže s hraničnými bodmi $[K_S, K_H]$ neutrpiť žiadnu stratu, pokiaľ celková strata portfólia nepresiahne úroveň K_S celkovej hodnoty portfólia. V prípade, že straty v portfóliu prekročia hornú hranicu K_H hodnoty portfólia, držitelia tranže $[K_S, K_H]$ majú úplnú teda 100% stratu. Dolný hraničný bod K_S každej tranže zodpovedá hornému hraničnému bodu K_H predchádzajúcej tranže. Počiatočné straty portfólia sú absorbované equity tranžou, ktorej hranica $K_S = 0$ a $K_H > 0$. Ak $K_H = 100\%$, tak takýto produkt sa nazýva first to default basket (FTD).

Držitelia každej tranže sú za riziko, ktoré podstupujú, kompenzovaní. Dostávajú platby až do doby splatnosti. Tieto platby predstavujú výnos tranže, nazývame ich *prémie*. Prémia equity tranže je najväčšia. Jej držitelia absorbujú prvé straty portfólia. Aby držitelia nasledujúcich tranží utrpeli stratu, musia držitelia nižších tranží utrpieť 100% stratu, ktorej boli vystavení, pričom prémia horných tranží je menšia. To znamená, že čím je tranža nižšie v kapitálovej štruktúre (zodpovedná za menšie straty), tým väčšie sú očakávané straty, ktoré utrpia jej držitelia, a tým väčšia je aj prémia, ktorú dostávajú.

Príklad CDO je znázornený na nasledujúcom obrázku. Z portfólia cenných papierov sme vytvorili tieto štyri tranže: Hrúbka prvej tranže predstavuje 5% hodnoty portfólia a absorbuje všetky kreditné straty portfólia do splatnosti CDO do výšky 5% hodnoty portfólia. Druhá tranža predstavuje 10% hodnoty portfólia a absorbuje všetky straty, ktoré prevýšia 5% hodnoty portfólia, až do výšky 15% hodnoty portfólia. Hrúbka tretej tranže predstavuje opäť 10% hodnoty portfólia a je zodpovedná za všetky straty, ktoré prekročia úroveň 15% hodnoty portfólia, až do výšky 25% hodnoty portfólia. Štvrtá tranža má 75% hodnoty portfólia a zodpovedá iba za straty, ktoré presiahnu hranicu 25% hodnoty portfólia.



Obr. 1.3.1 :Názorná štruktúra CDO.

Výnosy naznačené v obrázku 1.3.1 predstavujú prémie vyplácané držiteľom tranží. Tieto sú vyplácané z takej časti hodnoty tranže, ktorá zostala po odrátaní strát tranže. Vezmime si napríklad prvú tranžu. Pri jej nulových stratách sľubuje 35% výnos, avšak keď celková strata portfólia dosiahne 1% hodnoty portfólia, držiteľia tranže stratia 20% svojich investícií a výnos získajú len z 80% hodnoty, ktorú pôvodne nainvestovali.

Strata portfólia vo výške 2,5% znamená stratu 50% pôvodnej hodnoty tranže. Naopak, posledná (*super senior*) tranža zvyčajne dosahuje Aaa rating, keďže celková strata portfólia musí presiahnuť v našom prípade 25%, kým sú držiteľia atakovaný stratou.

Pri CDO sa často stáva, že zakladateľ CDO, zvyčajne banka, si ponechá najrizikovejšiu (equity) tranžu a predáva ostatné tranže. Banka pozná lepšie ako niekto iný, aká je kvalita príslušného portfólia, a aby uistila perspektívnych investorov, že nebudú oklamaní, necháva si najrizikovejšiu tranžu ako signál férového obchodu. V skutočnosti však banka len optimalizuje očakávané straty z daného portfólia. Keďže banka očakáva z pôvodného portfólia straty na úrovni 6% ponechá si najviac zarábajúcu tranžu a jej očakávania na stratu klesnú týmto o 50%.

Existujú rôzne typy CDO. Ten typ, o ktorom sme hovorili doteraz, sa nazýva *cash CDO*, alternatívou je tzv. *synthetic CDO*, ktoré je skonštruované pomocou portfólia CDS kontraktov.

Pod pojmom oceňovania CDO rozumieme správne stanovenie prémie pre jednotlivé tranže. Tieto by mali poskytnúť držiteľom tranží kompenzácie za očakávané straty, ktoré utrpia, a preto závisia na pravdepodobnostnom rozdelení strát podkladového portfólia. Ako sme už spomínali, straty portfólia závisia od pravdepodobností zlyhania jednotlivých firiem, veľkosti straty na aktívach v prípade ich zlyhania a korelačnej matice portfólia.

V súčasnosti existuje veľké množstvo rôznych modelov na oceňovanie CDO. Väčšina z nich vychádza z KMW prístupu oceňovania opcií. Modely sa odlišujú predovšetkým prístupom k modelovaniu korelácií pravdepodobností zlyhania jednotlivých aktív, výberom rôznych parametrov a predpokladov, alebo rôznym postojom k využívaniu prístupných trhových dát na výpočet veličín charakterizujúcich portfólio.

Kapitola 2

Oceňovanie CDO pomocou opcií

V tejto kapitole pretransformujeme problematiku ocenenia CDO do problematiky oceňovania opcií. Pomocou tejto transformácie môžeme následne použiť všetky poznatky z teórie opcií, oceňovanie, senzitivne správanie opcií a vplyv na správanie CDO. Zdefinujeme DAS (default adjusted spread) ako spread, pomocou ktorého neskôr budeme oceňovať CDO.

2.1 DAS – Default adjusted spread.

DAS predstavuje pridaný spread nad bezrizikový úrok, ktorý kompenzuje investorov za očakávané riziko straty ochudobňujúce cashflow. Je dôležité poznamenať, že DAS je veľmi závislý na predpokladoch zlyhania. Určením správnych predpokladov o zlyhania pre rôzne transakcie, môžeme pomocou DAS vypočítať ich cenu a odvodiť ich valuáciu.

Rôzne tranže CDO štruktúry môžeme vnímať ako kombináciu dlhej a krátkej put opcie na portfólio strát. DAS je definovaný ako konštantný spread na bezrizikový výnos tak, že zo simulácií vypočítame priemernú súčasnú hodnotu rizikového kapitálu diskontovanú bezrizikovou sadzbou + DAS, ktorá je rovná trhovej cene.

Teda môžeme napísať:

$$trhovacena = E_{portfolio.default}[PV(cashflow(portfolio.default)|DAS)],$$

kde $E_{portfolio.default}$ [] je priemer výnosov defaultovaných ciest z Monte Carlo simulácii. DAS podobne ako OAS (option adjusted spread) hovorí investorom čo je férová prémia za riziko, za predpokladu, že transakcia je korektne ocenená.

2.2 Replikácia payoff diagramu pomocou put opcí.

Rôzne tranže CDO štruktúry sú komplexne závislé na opciách na stratu z portfólia. Je veľa faktorov, ktoré určujú ako bude vyzerat' payoff funkcia každej tranže. Na základe týchto technických faktorov môžeme povedat' , že Equity tranža je vlastne kúpená put opcia s nízkou strike na portfóliovú stratu. Mezzanine tranža je predaj nízkej strike put opcie a nákup vysokej strike put opcie na portfóliovú stratu. Napríklad pre mezzanine tranžu platí, že investor dostáva konštantný cashflow, ak strata z portfólia je pod hranicou jej subordinácie. Ak sa strata prehupne, alikvotne s rastúcou stratou sa znižuje aj cashflow investora podľa veľkosti straty. Povedzme, že naša transakcia má tri tranže.

Príklad:

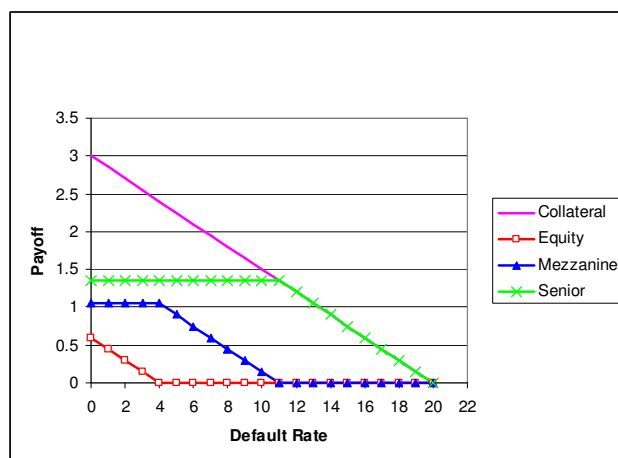
Nech S je celková strata z portfólia na konci prvého roka.

Equity tranža bude potom dostavat' $\text{Max}(0, K_{H, equity} - S)$,

mezzanine tranža bude dostavat' $\text{Max}(0, K_{H, mezz} - S) - \text{Max}(0, K_{H, equity} - S)$

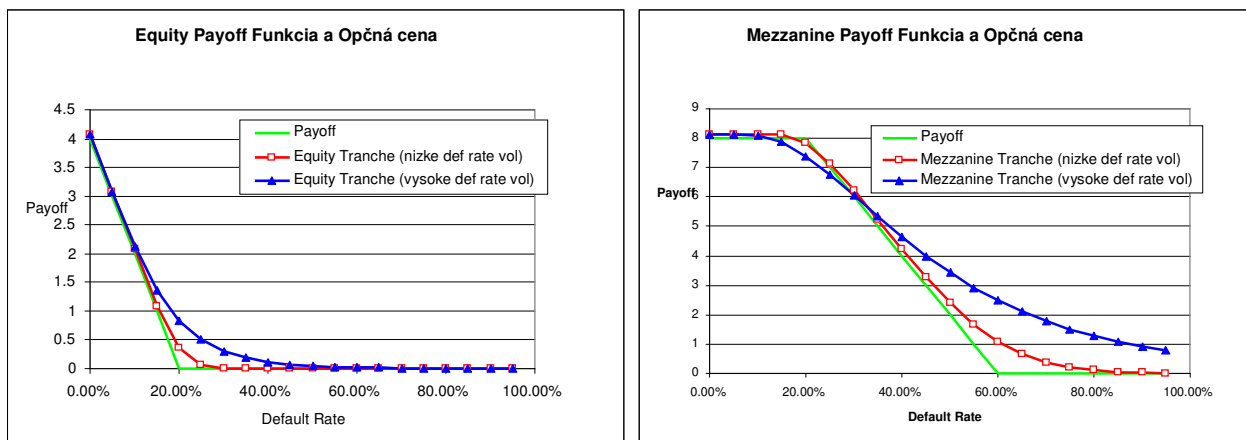
senior tranža bude dostavat' $S - \text{Max}(0, K_{H, mezz} - S)$.

V nasledujúcom grafe môžeme vidiet' tieto súvislosti farebne.



Obrázok 2.2.1: zjednodušený payoff diagram pre CDO tranže.

Zhrnutím hore uvedených faktov a skúseností z oceňovania opcii môžeme povedať nasledovné: rozdiel medzi opčnou funkciou a payoff funkciou alebo opčnou vnútornou cenou je opčná prémia. Opčná prémia rastie s volatilitou podkladového portfólia a teda portfólio stratou. Vega (sleduje ako vplýva zmena volatility aktíva na hodnotu opcie) opčnej prémie je najcitlivejšia v oblasti *at the money*.

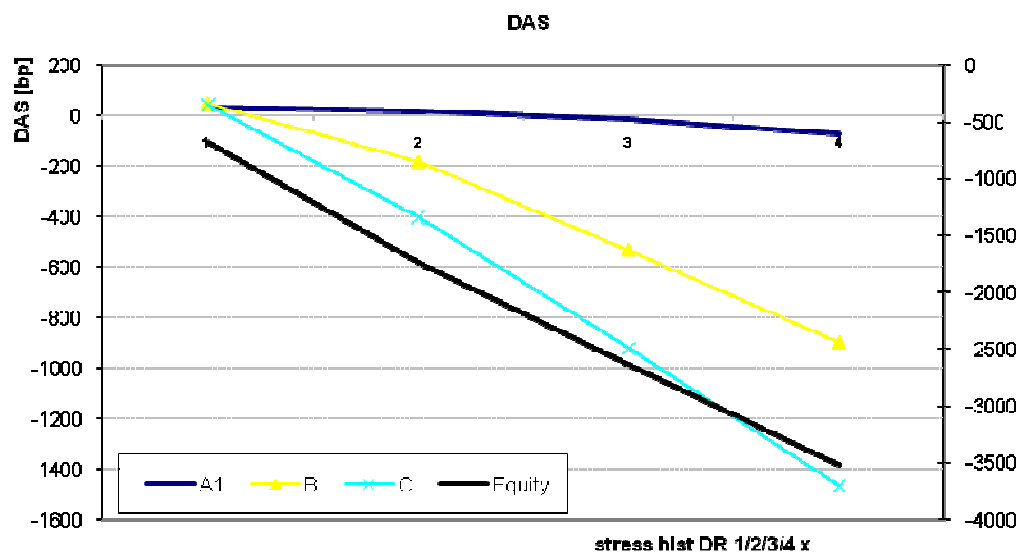


Obrázok 2.2.2: Payoff funkcia pre equity (vľavo) a mezzanine (vpravo) a opčná cena v závislosti na volatilita def. rate (červená nízka def.rate, modrá vysoká def.rate)

V praxi sa neujali modely založené na Black Scholesovej teórii oceňovania opcii pri oceňovaní CDO. Dôvod je hlavne veľmi náročné získanie vstupných parametrov do modelov a ich následná kalibrácia na dlhší časoví úsek. Preto sa touto skupinou modelov nebudem ďalej zaoberať.

2.3 DAS senzitivita

Pozrime sa teraz na equity tranžu. V tomto prípade DAS monotónne klesá so zvyšujúcou sa stratou portfólia. To implikuje, že Delta (vyjadruje percentuálnu zmenu ceny opcie oproti zmene ceny aktíva) je vždy negatívna, avšak rastúca a konverguje k 0. To taktiež implikuje, že DAS má kladnú Gamu (vyjadruje, o koľko sa zmení delta opcie pri zmene ceny podkladového aktíva o 1 jednotku). Tak ako put opcia aj equity tranža má vždy kladnú Vega. DAS je najviac citlivý v oblasti ATM (at the Money, situácia, keď sa spotová cena predmetného aktíva rovná realizačnej cene). Počas normálnych trhových podmienok je equity tranža hlboko v oblasti *in the Money*, a preto nie je veľmi citlivá na koreláciu zlyhania. Aj napriek tomu ako sa portfólio strata približuje k ATM, korelácia sa stáva najdôležitejším faktorom pri ocenení tranže.



Obrázok2.3: Senzitivita DAS tranží na zmenu pravdepodobnosti zlyhania, pravdepodobnosť zlyhania sa zvyšuje 2, 3, 4 krát, pravá os equity tranža.

Analýza mezzanine tranže je o niečo ťažší problém. Mezanín tranžu môžeme vidieť ako spojitosť medzi nízkou cenou strike put a vysokou cenou strike put. Equity tranža dodáva akúsi rezervu pre mezzanin tranžu, DAS je málo senzitivny na stratu. Ak strata prekročí určitú hranicu a priblíži sa k oblasti nízkej strike, DAS začne klesať s rastúcou stratou, čím sa zvyšuje pravdepodobnosť, že strata prekročí equity tranžu. Ak sa strata priblíži k hornej, alebo vysokej stike put opcii, DAS hlboko klesne a začne konvergovať k minimálnej hodnote.

DAS Delta pre mezzanin tranžu začne na 0, a potom pokračuje a klesá v zápornej oblasti. Niekde medzi vysokou a nízkou strike klesne na minimum, a potom sa opäť vracia k 0. Taktiež DAS Vega je určená oboma put opciami. Keďže mezzanin tranža je chránená pred nízkou stratou, volatilita strát nemá veľký vplyv na tranžu. Ak sa strata priblíži k dolnej strike put, situácia sa zmení. Pretože mezzanin investor predá nízkou strike put opciu, volatilita má na DAS negatívny dopad. Ak straty pokračujú v raste k hornej strike put opcii, Vega sa vráti späť k 0, prípadne sa prehupne do kladnej časti. Ak straty naďalej rastú, horná strike put opcia padne do oblasti *out of money*. To implikuje, že Vega padne opäť k 0.

Pre senior tranžu je to identická situácia ako pre mezzanin tranžu, avšak rozdiel je iba s jednou dolnou put opciou.

Kapitola 3

Oceňovanie CDO z kvantitatívneho hľadiska

V tejto kapitole sa venujeme problematike ocenenia CDO z kvantitatívneho hľadiska. Zdefinujeme matematicky aparát na oceňovanie ako je copula funkcia a hazard rate. Položíme základ nášho modelu a nakalibrujeme kreditné krivky. Ukážeme si ako sa modeluje strana pasív a strana aktív. Spojíme ich spolu pomocou simulácií Monte Carlo a copula funkciou cez ktorú vypočítame cenu CDO a DAS.

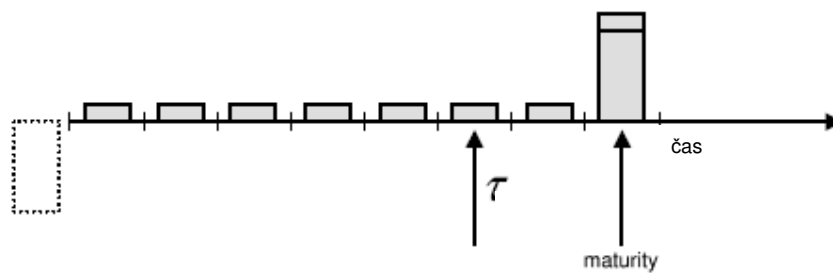
3.1 CDO z kvantitatívneho hľadiska

V CDO je na strane aktív vždy súbor kreditných, alebo inak rizikových nástrojov ako sú dlhopisy, pôžičky, kreditné deriváty (napr. CDS, ABS, CCO). Na strane pasív sú cenné papiere emitované na kapitálovom trhu, ktoré sú tranžované na prioritné (senior) triedy, strednú triedu mezanínov, junior (equity) triedy. Vo všeobecnosti sú všetky tranže kryté kolaterálom. Dokumentáciu takejto štruktúry obdrží investor od pôvodcu (iniciátora), ktorá sa nazýva RED alebo offering memorandum. Hlavným zdrojom neistôt ,čo sa týka správania sa cenných papierov na strane pasív, je správanie sa súboru aktív (cashflow). Správanie sa pasív popisujeme tranžovými stratami, kupónmi, IRR⁶.

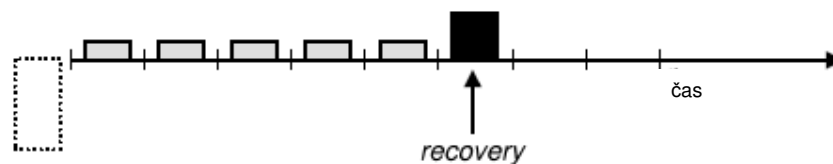
⁶ internal rate of return – vnútorná miera výnosnosti

3.2 Modelovanie strany aktív

Neistotu na strane aktív opíšeme pomocou modelu kreditného portfólia, resp. kreditného rizika. Používa sa tu model korelovaných časov do zlyhania. Máme množinu defaultných časov Ω , teda okamihov, kedy daný CP defaultne. Tomuto sú následne priradené cashflow. Čas defaultu $t \in \Omega$ závisí od kreditnej kvality daného CP. V čase defaultu sa prísun cashflow zastaví a investor dlhopisu obdrží sumu odškodnenia (recovery). Hotovosť plynúca z aktív je prerozdelená na stranu pasív. Podstatná je strata a rozdelenie defaultov.

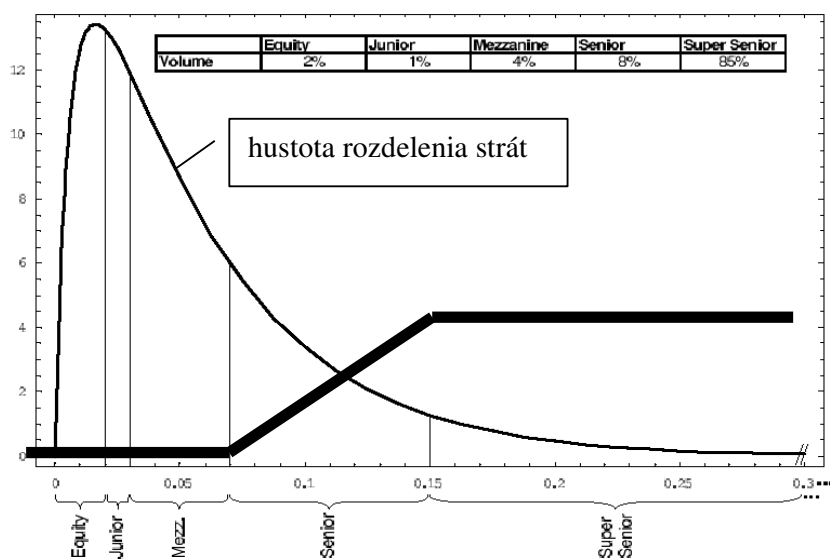


Cashflow profil dlhopisu v čase t zlyhanie (dole naznačená výplata recovery).



3.3 Modelovanie strany pasív

Modelovanie pasív sa skladá z modelovania celej škály cashflow a zjednodušovania štrukturálnych prvkov, aby sa s nimi ľahšie manipulovalo z matematického hľadiska. Ak napríklad emitujeme v rôznych menách, pri ktorých sa nám vyskytnú dlhopisy s pohyblivým kurzom, tento nesúlad sa dá hedžovať bazisovým alebo menovým swapom. V praxi sa často používa Monte Carlo simulácia, alebo aspoň polo analytický prístup.



Obrázok 3.3.1 znázorňuje payoff diagram strát a hustotu očakávanej straty.

3.4 Copula funkcia

Ďalej ak chceme pokračovať v oceňovaní CDO štruktúry, musíme si na to vybudovať najprv matematický aparát. V tejto časti si najprv zdefinujeme základné definície a vlastnosti copula funkcií, ktoré použijeme v našom modeli.

Definícia 1: *n -rozmernou copulou nazývame funkciu $C : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ s nasledovnými vlastnosťami:*

1. $C(\mathbf{u})$ je rastúca v každej zložke u_k , $k = 1, 2, \dots, n$.
2. Pre každý vektor $[0,1]^n$, $C(\mathbf{u}) = 0$, ak aspoň jedna zložka vektora \mathbf{u} je nulová a $C(\mathbf{u}) = u_k$, ak všetky zložky \mathbf{u} okrem k -tej zložky sú rovné 1.
3. Pre každé $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in [0,1]^n$, $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ a n -rozmernú kocku $\mathbf{B} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \cdots \times [a_n, b_n]$, ktorej vrcholy ležia v definičnom obore funkcie C , je objem tejto kocky $V_C(\mathbf{B}) \geq 0$.

Objem $V_C(\mathbf{B})$ n -rozmernej kocky $\mathbf{B} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ je definovaný takto:

$$V_C(\mathbf{B}) = \sum_{\mathbf{d}} \text{sgn}(\mathbf{d}) C(\mathbf{d}) = \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 \cdots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n} C(d_{1i_1}, d_{2i_2}, \dots, d_{ni_n}) \geq 0,$$

kde $d_{j1} = a_j$ a $d_{j2} = b_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Táto definícia naznačuje, že C je vlastne n -rozmerná distribučná funkcia. Jej marginálne distribučné funkcie sú z rovnakého rozdelenia. Význam definície nám objasní nasledujúca veta a dôsledok.

Veta 1 (Sklar): *Nech G je n -rozmerná distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami F_1, F_2, \dots, F_n . Potom existuje n -rozmerná copula C taká, že pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí:*

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

Navyše, ak F_1, F_2, \dots, F_n sú spojité, C je určená jednoznačne, teda C je prosta funkcia.

Práve Sklarova veta vyjadruje základnú myšlienku modelovania závislosti prostredníctvom copula funkcií, pretože nám hovorí, že v ľubovoľnej distribučnej funkcii náhodného vektora vieme navzájom oddeliť distribučné funkcie zložiek tohto vektora od ich korelačnej štruktúry, pričom túto štruktúru vystihuje copula funkcia.

Dôsledok 1: *Nech G je n -rozmerná distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami F_1, F_2, \dots, F_n a C je n -rozmerná copula funkcia. Potom pre každé $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ platí:*

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = G(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n)),$$

kde $F_i^{-1}(u_i)$ označuje inverznú distribučnú funkciu ku kumulatívnej distribučnej funkcii F_i , konkrétne pre $u_i \in [0, 1]$: $F_i^{-1}(u_i) = \inf \{x : F_i(x) \geq u_i\}$.

Uvažujme vektor náhodných premenných $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ s príslušnými distribučnými funkciami (F_1, F_2, \dots, F_n) a ich spoločnou n -rozmernou distribučnou funkciou G . Podľa Sklarovej vety ak (F_1, F_2, \dots, F_n) sú spojité funkcie, potom $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ má copula funkciu jednoznačne určenú takto :

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$$

Ak náhodné premenné X a Y majú spojité distribučné funkcie F_X a F_Y , potom náhodné premenné $U = F_X(X)$ a $V = F_Y(Y)$ sú rozložené na intervale $[0,1]$, a teda druhá vlastnosť v definícii 1 v dvojrozmernom prípade hovorí:

$$C(u,1) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq 1) = \mathbb{P}(U \leq u) = u,$$

$$C(u,0) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq 0) = 0.$$

Tretia vlastnosť definície 1 nás uisťuje, že copula funkcie spĺňajú vlastnosti riadnej distribučnej funkcie a pripisujú nezáporné hodnoty všetkým podmnožinám v $[0,1]^n$ typu $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Aplikáciou Sklarovej vety a využitím vzťahu medzi distribučnou funkciou a funkciou hustoty môžeme odvodiť tzv. *copula hustotu*. V jednorozmernom prípade môžeme hustotu $f(x)$ rozdelenia náhodnej premennej X určiť pomocou distribučnej funkcie

$$f(x) \text{ zo vzťahu } f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}.$$

Definícia 2: Zo Sklarovej vety pre funkciu hustoty $f(x_1, \dots, x_n)$ náhodného vektora a copula funkciu $C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ máme:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n [C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))]}{\partial F_1(x_1) \dots \partial F_n(x_n)} \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

kde copula hustotu $c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ definujeme ako

$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i(x_i)}.$$

Pojem chvostovej závislosti súvisí s meraním závislosti medzi výskytmi extrémnych hodnôt.

Definícia 3: Nech (X_1, X_2) je dvojrozmerný vektor spojitých náhodných premenných s marginálnymi distribučnými funkciami F_1 a F_2 . Koeficienty hornej $\lambda_U \in [0,1]$ a dolnej $\lambda_L \in [0,1]$ chvostovej závislosti, za predpokladu, že nižšie uvedené limity existujú, sú definované nasledovne:

$$\lambda_U = \lim_{u \nearrow 1} \mathbb{P} \left[X_2 > F_2^{-1}(u) \mid X_1 > F_1^{-1}(u) \right],$$

$$\lambda_L = \lim_{u \searrow 0} \mathbb{P} \left[X_2 \leq F_2^{-1}(u) \mid X_1 \leq F_1^{-1}(u) \right].$$

Ak $\lambda_U \in (0,1]$, hovoríme, že náhodné premenné (X_1, X_2) sú asymptoticky závislé na hornom chvoste. Ak $\lambda_U = 0$, hovoríme, že náhodné premenné (X_1, X_2) sú na hornom chvoste asymptoticky nezávislé. Analogicky, ak $\lambda_L \in (0,1]$, ide o náhodné premenné asymptoticky závislé na dolnom chvoste a asymptoticky nezávislé v prípade, že hodnota λ_L je nulová.

Pri výpočtoch koeficientov chvostovej závislosti pre konkrétne copula funkcie je vhodné rovnice previesť na nejaký použiteľnejší tvar. Na tento účel využijem definíciu copula funkcie, druhú vlastnosť definície 1 a vzťah medzi dvojrozmernou distribučnou funkciou a funkciou prežitia.

Definícia 4: Nech $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$ je distribučná funkcia náhodného vektora (X_1, X_2) . Funkcia prežitia (Survival) $S_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ je potom definovaná nasledovne: $S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$.

Najprv si všimnime, že udalosť $(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$ môžeme vyjadriť takto:

$$(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = \Omega \setminus \left[(X_2 \leq x_2) \cup (X_1 \leq x_1) \setminus (X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \right].$$

Z tohto vyjadrenia použijúc definície distribučnej a survival funkcií vidíme vzťah:

$$S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1, X_2}(x_1, x_2).$$

Potom môžeme napísať tiež

$$\lambda_U = \lim_{u \nearrow 1} \mathbb{P} \left[X_2 > F_2^{-1}(u) \mid X_1 > F_1^{-1}(u) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{u \nearrow 1} \frac{\mathbb{P}[X_2 > F_2^{-1}(u), X_1 > F_1^{-1}(u)]}{\mathbb{P}[X_1 > F_1^{-1}(u)]} \\
&= \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - \mathbb{P}[X_1 \leq F_1^{-1}(u)] - \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{-1}(u)] + \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{-1}(u), X_1 \leq F_1^{-1}(u)]}{\mathbb{P}[X_1 > F_1^{-1}(u)]}
\end{aligned}$$

a teda úpravou $\lambda_u = \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}$.

Analogicky môžeme prepísať aj druhú rovnicu na tvar

$$\lambda_L = \lim_{u \searrow 0} \frac{C(u, u)}{u}.$$

Pre ďalšie informácie o možných metódach a postupoch pri výpočte koeficientov chvostovej závislosti vo všeobecnosti, ako aj výpočty pre rôzne copuly funkcie z tzv. *eliptickej* triedy *copul* a ďalšie typy copul odporúčame čitateľovi literatúru uvedenú v zozname pod číslom [11] a [29].

Je veľké množstvo možností výberu niektorej z copula funkcií, ktoré umožňujú rôzne prístupy k modelovaniu závislosti medzi náhodnými premennými. My sme si z praktických dôvodov v súvislosti s voľbou modelu oceňovania CDO vybrali typ *Gausovej* copula funkcie, ktorú stručne popíšem nižšie. Dôvod na výber tejto copula funkcie je, že má slabú chvostovú závislosť a teda neprodukuje veľa extrémnych hodnôt a tým nepodhodnocuje senior tranže CDO a naopak nenadhodnocuje equity tranže.

3.5 Gaussova copula

Definícia 5: Nech \mathbf{R} je kladne definitná symetrická matica, $\text{diag}(\mathbf{R}) = \mathbf{1}$ a $\Phi_{\mathbf{R}}$ je n -rozmerná kumulatívna distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia s korelačnou maticou \mathbf{R} . Gaussova copula je definovaná ako

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n, \mathbf{R}) = \Phi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

kde $\Phi^{-1}(u)$ označuje inverznú distribučnú funkciu ku kumulatívnej distribučnej funkcii Φ normovaného normálneho rozdelenia.

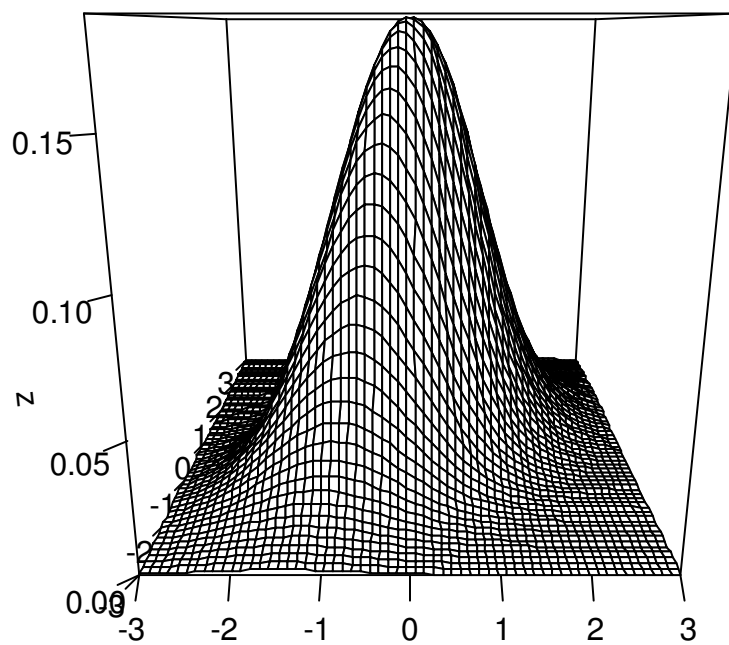
Funkciu hustoty ku Gaussovej copule získame použitím vzťahu

$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i(x_i)}$$
 z predchádzajúcej vety:

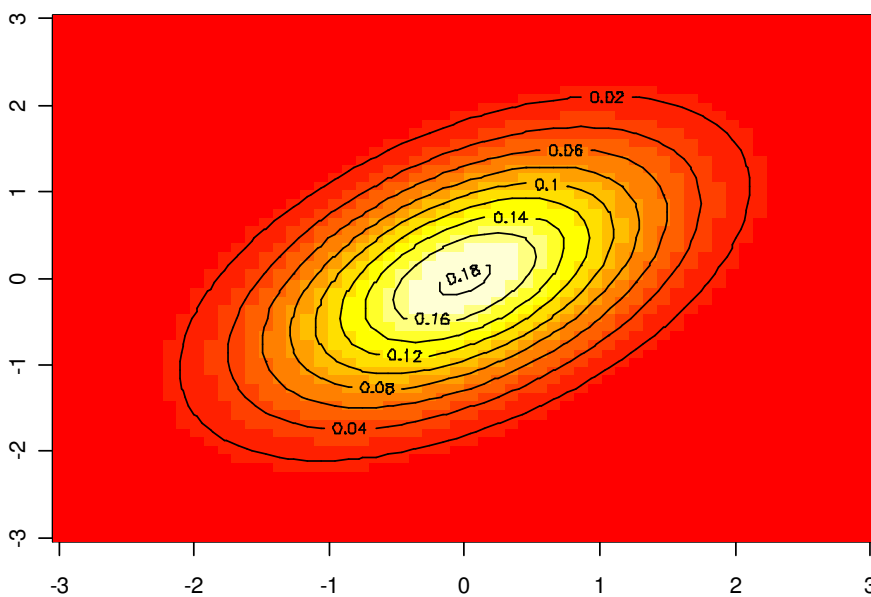
$$c(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) = \frac{f^{Gauss}(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i^{Gauss}(x_i)} = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right)}{\prod_{i=1}^n (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_i^2\right)}.$$

Ak fixujeme $u_i = \Phi(x_i)$ a zavedieme označenie $\zeta = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))^T$, dostávame vzťah:

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n, \mathbf{R}) = |\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \zeta^T (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{I}) \zeta\right].$$



Obrázok 3.5.1 : Graf hustoty Gaussovej copuly pre vzájomnú koreláciu dvoch cenných papierov 50%.



Obrázok 3.5.2 : Tepelný graf hustoty Gaussovej copuly pre vzájomnú koreláciu cenných papierov 50%, s ratingom Ba3 .

Obe hodnoty chvostovej závislosti vďaka vlastnosti radiálnej symetrie u eliptických rozdelení sú rovnaké. Výpočty hodnôt chvostovej závislosti pre jednotlivé copuly nie sú triviálne, preto uvedieme iba výpočet pre dvojrozmernú Gaussovú copula funkciu. Postupy výpočtov si čitateľ môže prezrieť v prácach [29] a [11]. V prípade Gaussovej copula funkcie pozorujeme obe hodnoty nulové,

$$\lambda_U = \lambda_L = 0.$$

Túto skutočnosť rozvedieme. Predpokladajme dvojrozmernú Gaussovú copula funkciu s lineárnou koreláciou r , danú

$$C_R^{Gaussian}(u, v) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-r^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2xy + y^2}{2(1-r^2)}\right\} dx dy$$

Keďže $Y / X = x \sim N(rx, 1-r^2)$ potom máme:

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} [P(Y > x / X = x)] = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} [1 - \phi\left(\frac{x - rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)] = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} [1 - \phi\left(x \frac{\sqrt{1-r}}{\sqrt{1+r}}\right)] = 0, \end{aligned}$$

teda $\lambda_U = 0$ a obdobne $\lambda_L = 0$ na základe toho, že eliptické distribúcie sú radiálnej symetrie. A teda potvrdili sme asymptotickú nezávislosť chvostov Gaussovej copula funkcie. Preto môžeme povedať, že sme si zvolili správny typ copula funkcie, teda taký, ktorý je asymptoticky nezávislý.

Teraz keď sme si vybrali Gaussovú copula funkciu, ktorú chceme použiť pri modelovaní korelačnej štruktúry náhodných premenných, v našom prípade štruktúry aktív v portfóliu, je vhodné zamyslieť sa nad tým, ako budeme určovať parametre, od ktorých táto copula závisí. Pri Gaussovej copule máme na mysli korelačnú maticu. V praxi sa používa viacero metód ako odhadnúť spomínané parametre z trhových dát jednotlivých aktív. Veľmi pekný prehľad a porovnanie možných metód kalibrácie parametrov copula funkcií ponúka práca [29].

3.6 Jednofaktorová Gaussova copula

Pri faktorových modeloch, máme náhodné premenné x_i , $i = 1, 2, \dots, N$

$$x_i = \rho_i M + \sqrt{1 - \rho_i^2} Z_i,$$

kde M a Z_i , $i = 1, 2, \dots, N$ sú nezávislé náhodné premenné z normovaného normálneho rozdelenia, $M, Z_i \in N(0, 1)$ a $0 \leq \rho_i < 1$.

Rovnica $x_i = \rho_i M + \sqrt{1 - \rho_i^2} Z_i$ definuje korelačnú štruktúru medzi x_i závislými na jednom spoločnom trhovom faktore M . Predpokladáme, že sú podmienené nejakou hodnotou M , pričom x_i sú nezávislé. Korelácia medzi x_i a x_j je rovná $\rho_i \rho_j$.

Teda korelačná matica je (až na diagonálu) $\mathbf{R} = \rho \rho^T$, kde $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N)^T$. Potom môžeme napísať :

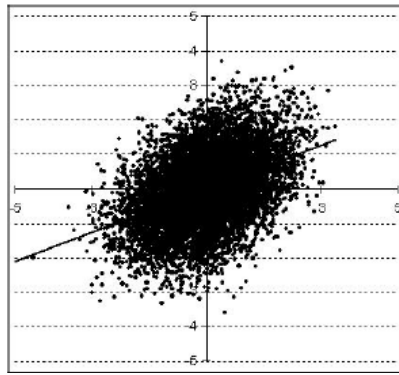
$$\mathbb{P}(x_i < x \mid M) = \Phi\left(\frac{x - \rho_i M}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}\right),$$

kde Φ je kumulatívna distribučná funkcia Z_i (normovaného normálneho rozdelenia). Integrovaním cez funkciu ϕ faktora M - hustotu normovaného normálneho rozdelenia dostaneme pre jednofaktorovú Gaussovú copulu vzt'ah:

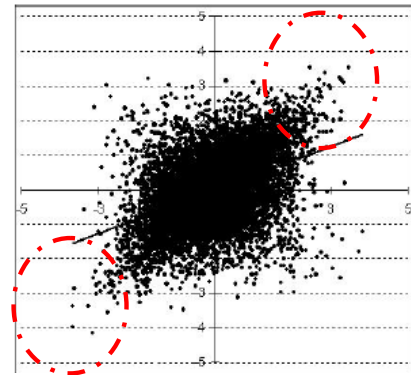
$$C_\rho(u_1, \dots, u_N) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_i) - \rho_i M}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}\right) \phi(M) dM.$$

Hodnoty chvostovej závislosti pre jednofaktorovú Gaussovú copulu sú opäť nezávislé od veľkosti korelácií, obe sú nulové,

$$\lambda_U = \lambda_L = 0.$$



Gausova copula



Studentova t copula

Obrázok 3.6.1 : Príklad generovania náhodných premenných pomocou Gaussovskej a t-copuly pre vzájomnú koreláciu cenných papierov rovnú 40%.

Ako môžeme vidieť z obrázkov rozdiel je v chvostoch rozdelení. Studentova-t copula generuje viac extrémnych hodnôt ako Gaussova copula, a preto sme si ju nevybrali. V praxi by nám nadhodnocovala equity tranžu a podhodnocovala senior tranže. V praxi sa viac osvedčila Gaussova copula, ktorá generuje stabilnejšie rozdelenia.

3.7 Kalibrácia copula funkcie pomocou likelihood metód

Kalibrácia copula funkcie je jedná z kľúčových vecí pri oceňovaní CDO z matematického hľadiska. V ďalších analýzach budeme predpokladať časový rad $X=(X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{Nt})^T_{t=1}$, kde N je počet aktív v portfóliu a t je čas.

3.7.1 Likelihood metóda s exaktným maximom / EML

Nech $\theta \in \Theta$ je parametricky priestor, kde θ je k -rozmerný vektor odhadovaných parametrov. Nech $L_t(\theta)$ a $l_t(\theta)$ sú odhady resp. log - odhady pre pozorovanie v čase t . Potom definujeme log - odhad ako funkciu $l_t(\theta)$ nasledovne:

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T l_t(\theta)$$

Ďalej predpokladajme kanonicky rozklad pre funkciu hustoty. Potom môžeme napísať:

$$l_t(\theta) = \sum_{i=1}^T \ln c(F_1(x'_1), \dots, F_N(x'_N)) + \sum_{i=1}^T \sum_{n=1}^N \ln(f_n(x'_n))$$

Taktiež definujeme *exact maximum likelihood estimator* ako vektor $\hat{\theta}$:

$$\hat{\theta} := (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k) \in \arg \max \{l(\theta) : \theta \in \Theta\}$$

Majme $\theta \in \Theta = \{R : R \in \Theta R^{N \times M}\}$, s R pozitívne definitnou symetrickou maticou, označujúcou parametrický priestor. Aplikovaním

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n, \mathbf{R}) = |\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \zeta^T (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{I}) \zeta \right],$$

$$l_t(\theta) = \sum_{i=1}^T \ln c(F_1(x'_1), \dots, F_N(x'_N)) + \sum_{i=1}^T \sum_{n=1}^N \ln(f_n(x'_n))$$

pre prípad Gaussovej copula funkcie dostaneme:

$$l^{gaussian}(\theta) = -\frac{T}{2} \ln |R| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \zeta'_t (R^{-1} - I) \zeta_t.$$

Predpokladajme, že log - pravdepodobnostná funkcia

$$l_t(\theta) = \sum_{i=1}^T \ln c(F_1(x'_1), \dots, F_N(x'_N)) + \sum_{i=1}^T \sum_{n=1}^N \ln(f_n(x'_n))$$

je diferencovateľná v θ a riešenie rovnice $\frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta) = 0$ definuje globálne maximum, potom môžeme jednoducho určiť estimátor $\hat{\theta} = \hat{R}$ pre Gaussovu copula funkciu ktorého log-likelihood funkcia je :

$$l^{gaussian}(\theta) = -\frac{T}{2} \ln |R| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \zeta_t' (R^{-1} - I) \zeta_t$$

$$\text{ako } \frac{\partial}{\partial R^{-1}} l^{gaussian}(\theta) = \frac{T}{2} R - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \zeta_t' \zeta_t \text{ a preto}$$

$$\hat{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \zeta_t' \zeta_t.$$

3.7.2 Funkcia hypotéz pre marginálnu metódu / IFM

Táto metóda je relatívne nová, založená na prácach Joe Xu [16]. V podstate je založená na separácii marginálnych funkcií a štruktúre závislosti. To môžeme zapísať rovnicou :

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t; \theta_1), \dots, F_N(x_N^t; \theta_N); \alpha) + \sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N \ln f_n(x_n^t; \theta_n)$$

Svojráznosť je v podstate separácie medzi vektorom parametrov pre jedno variétu marginálnu funkciu $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ a vektorom parametrov pre copula funkciu. Inak povedané kalibrácia na trh môže prebiehať týmto spôsobom :

- 1) odhad vektora parametrov $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ pomocou EML metódy .

$$\text{Napríklad pre } i\text{-te aktívum } \hat{\theta}_i = \arg \max_{\theta_i} \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_i^t; \theta_i)$$

- 2) odhad vektora parametrov pre copula funkciu α použitím $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_N)$:

$$\hat{\alpha}_{IFM} = \arg \max_{\alpha} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t; \hat{\theta}_1), \dots, F_N(x_n^t; \hat{\theta}_N); \alpha)$$

Potom IFM estimátor je definovaný ako vektor : $\theta^{IFM} = (\hat{\theta}, \hat{\alpha}_{IFM})$

3.7.3 Likelihood metóda pre kanonické maximum / CML

Obe EML a IFM metódy sú založené na vstupnej požiadavke parametrického typu marginálnych zložiek. Alternatívnym prístupom, ktorý nevyžaduje žiadne počítačové podmienky na tvar distribúcie je CML metóda. Táto metóda je založená na empirickej marginálnej transformácii (Marshall & Zeevi [22]). Táto transformácia vedie k aproximácii neznámej parametrickej marginálnej funkcie $F_n(\cdot)$, pre $n=1, \dots, N$ s empirickou distribučnou funkciou $F_n(\cdot)$ definovanou nasledovne:

$$\hat{F}_n(\bullet) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T 1_{\{X_{nt} \leq \bullet\}}; \text{ pre } n=1, \dots, N,$$

kde $1_{\{X_{nt} \leq \bullet\}}$ predstavuje indikátorovú funkciu.

CML metóda sa dá aplikovať v dvoch krokoch:

- 1) transformáciou počiatkových dát $X = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{Nt})_{t=1}^T$ do rovnomerných variét, použitím empirických marginálnych distribučných funkcií, takých, že $t=1, \dots, T$,

$$\hat{u}_t = (\hat{u}_1^t, \dots, \hat{u}_N^t) = [\hat{F}_1(x_{1t}^t), \dots, \hat{F}_N(x_{Nt}^t)]$$

- 2) odhadom vektora parametrov α copula funkcie pomocou vzťahu :

$$\hat{\alpha}_{CML} = \arg \max_{\alpha} \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{u}_1^t, \dots, \hat{u}_N^t; \alpha)$$

Potom CML estimátor je definovaný ako $\theta^{CML} = \hat{\alpha}_{CML}$.

3.8 Kreditné krivky, funkcia miery rizika

Pri portfóliu kreditných aktív nás okrem závislostí medzi pravdepodobnosťami defaultu jednotlivých aktív samozrejme zaujímajú aj samotné hodnoty pravdepodobností defaultu pre jednotlivé firmy. Časová štruktúra pravdepodobností defaultu aktíva sa nazýva *kreditná krivka*. Tento pojem bol zavedený ako obdoba výnosovej krivky. Tieto pravdepodobnosti jasne popisujú rizikovosť jednotlivých aktív, a teda nám podávajú istú informáciu aj o kvalite zostaveného portfólia.

Existuje viacero metód používaných na odhad pravdepodobností zlyhania firiem. Jednou možnosťou je využiť informácie ratingových agentúr, ktoré používajú vlastné metódy na ohodnotenie kvality firmy. Viac informácií o takomto prístupe je možné nájsť v práci Christiana Bluhma [3]. Ďalšou možnosťou je určiť implikované pravdepodobnosti defaultu z voľne pozorovateľných trhových dát danej firmy, z trhových cien finančných nástrojov podliehajúcich kreditnému riziku. Madan, Konikov a Marinescu [21], ktorí vychádzajú z určitých predstáv o všeobecnom tvare distribučnej funkcie pravdepodobností defaultu kalibrujú parametre tejto funkcie pomocou dostupných trhových dát firmy.

3.8.1 Kalibrácia kreditnej krivky

Pre určité zjednodušenie a čistotu riešenia vychádzam z tabuľky defaultných pravdepodobností kalibrovaných podľa ratingov (AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, D). Predpokladajme, že máme množinu ratingov $R = \{AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, D\}$, kde AAA je najlepšia kreditná kvalita, CCC je najhoršia a D označuje default. V praxi sa zaužívalo a neskôr to potvrdila rada Basel II keď priradil každému ratingu nejaký interval pravdepodobnosti, ktorý slúži na prechod z číselného do textového zobrazenia. Tabuľka 3.8.1 nám ukazuje toto priradenie.

Rating	1 ročná pravdepodobnosť defaultu
AAA	0.01%
AA	0.02%
A	0.08%
BBB	0.36%
BB	1.55%
B	6.75%
CCC	29.35%

Tabuľka 3.8.1 : kalibrovaná 1-ročná pravdepodobnosť pre jednotlivé ratingy zlyhania cenného papiera

Naším cieľom je nakalibrovať kreditnú krivku pre každý rating z množiny R . Môžeme to zapísať $t \mapsto p_t^{(R)} = P[R \mapsto D \text{ v čase } t]$, ($t, t \geq 0; R \in \{AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC\}$), kde $R \mapsto D$ označujeme migráciu. Inak povedané $p_t^{(R)}$ je pravdepodobnosť, že obligor s ratingom z množiny R zlyhá v čase t od dnes. Pre $t=1$ je daná tabuľka 3.8.1

Ratingové agentúry teda poskytujú jednoduchú možnosť odhadu kreditného rizika. Avšak takýto odhad má niekoľko nevýhod:

- štatistiky, ktoré agentúry poskytujú sa týkajú najmä dlhopisov a sú dostupné len pre veľké spoločnosti

- kreditné riziko spoločností zaradených do rovnakej kategórie ratingu závisí od charakteru každej z nich, preto by pravdepodobnosti defaultu nemali byť úplne rovnaké pre všetky spoločnosti s rovnakým ratingom
- informácie spojené s kreditným rizikom sa menia v čase. Sú odvodené aj od celkovej makroekonomickej situácie (napríklad vývoja úrokových mier), a preto odhad pravdepodobností získaný z historických údajov použitý v súčasnosti nemusí byť správny.
- často sa stáva, že pozorovania jednotlivých agentúr sú rozdielne

Problémom ratingových agentúr pri historických dátach je, že sú veľmi nepresné, nie je jasná metodológia ako sú dáta zbierané, a hlavne sú veľmi vyhladzované. Z matematického hľadiska majú ešte navyše nevýhodu, že sú diskrétné. Na odstránenie diskretnosti a prechod do spojitého času použijeme známy Markovov prístup. V praxi to pre nás znamená, že použijeme migračnú maticu Standard & Poor's, kde sú uvedené ratingy a jednotlivé pravdepodobnosti, že produkt s ratingom napr. AAA klesne na B a pod., takzvaný migračný prístup.

Začnime s jednoročnou migračnou maticou od Standard & Poor's. Máme nulovú pravdepodobnosť, že rating AAA zlyhá. Predpokladajme, že máme stochastickú migračnú maticu takú, že súčet riadkov je vždy 1. Ďalej znormalizujeme riadky migračnej matice od Standard & Poor's. Ako výsledok dostaneme jednoročnú migračnú maticu $M=(m_{ij})$ $i, j=1, \dots, 8$, ktorá je v nasledujúcej tabuľke .

Initial rating	Final rating								
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	NR
AAA	85,53	7,70	0,46	0,09	0,09	0,00	0,00	0,00	3,15
AA	0,60	87,50	7,33	0,54	0,06	0,10	0,02	0,01	3,84
A	0,04	2,07	87,21	5,36	0,39	0,16	0,03	0,06	4,67
BBB	0,01	0,17	3,96	84,13	4,03	0,72	0,16	0,23	6,61
BB	0,02	0,05	0,21	5,32	75,62	7,15	0,78	1,00	9,84
B	0,00	0,05	0,16	0,28	5,92	73,00	3,96	4,57	12,05
CCC/C	0,00	0,00	0,24	0,36	1,02	11,74	47,38	25,59	13,67

Tabuľka 3.8.2 : Modifikovaná S&P 1-ročná migračná matica kalibrovaná na rating

Rating	Time horizon									
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8	Y9	Y10
AAA	0,00	0,00	0,03	0,06	0,10	0,17	0,24	0,36	0,41	0,45
AA	0,01	0,04	0,09	0,19	0,30	0,41	0,54	0,64	0,74	0,85
A	0,04	0,13	0,24	0,40	0,61	0,84	1,11	1,34	1,63	1,94
BBB	0,29	0,81	1,40	2,19	2,99	3,73	4,34	4,95	5,50	6,10
BB	1,20	3,58	6,39	8,97	11,25	13,47	15,25	16,75	18,16	19,20
B	5,71	12,49	18,09	22,37	25,40	27,77	29,76	31,32	32,54	33,75
CCC/C	28,83	37,97	43,52	47,44	50,85	52,13	53,39	54,05	55,56	56,45

Tabuľka 3.8.3 : S&P historické default dáta pre obdobie 1 až 10 rokov pre kategóriu dlhopisov

Ďalej potrebujeme nasledujúcu vetu.

Veta: Ak migračná matica $M=(m_{ij})$ $i,j=1,\dots,8$ je striktne diagonálne dominantná, teda $m_{ij} > \frac{1}{2}$ pre každé i , potom log - expanzia $\tilde{Q} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(M-I)^k}{k}$ ($n \in N$) konverguje

k matici $\tilde{Q} = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,8}$, spĺňajúc nasledujúce podmienky:

1. $\sum_{j=1}^8 q_{ij} = 0$, pre všetky $i = 1, \dots, 8$
2. $\exp(\tilde{Q}) = M$.

Dôkaz : Pre náročnosť a dĺžku dôkazu odkazujeme čitateľa na knihu Israel R., Rosenthal J. Wei J., :Finding Generator for Markov Chains via Empirical Transition Matrices with Application to Credit Ratings, 245-265 (2001).

Poznámka 1: Poznamenajme, že generátor spojitého Markovovho reťazca je daný takzvanou Q maticou $Q = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq 8}$ splňujúcou tieto podmienky :

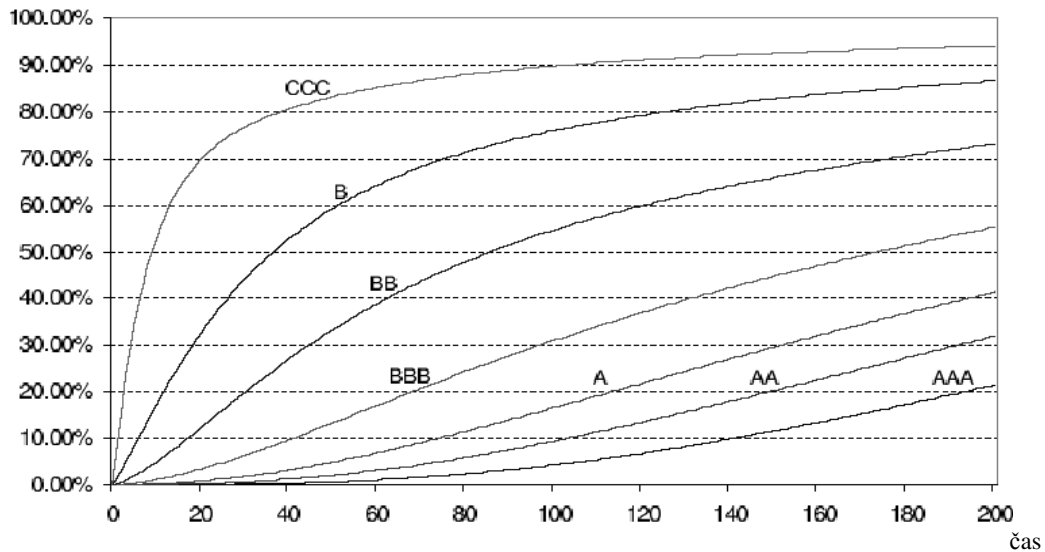
- 1) $\sum_{j=1}^8 q_{ij} = 0$, pre všetky $i = 1, \dots, 8$;
- 2) $0 \leq -q_{ii} \leq \infty$, pre všetky $i = 1, \dots, 8$;
- 3) $q_{ij} \geq 0$, pre všetky $i, j = 1, \dots, 8$, kde $i \neq j$

Veta: Nasledujúce dve tvrdenia sú rovnocenné pre $Q \in R^{8 \times 8}$:

- a) Q spĺňa podmienky 1 až 3 hore uvedenej poznámky 1.
- b) $\exp(tQ)$ je náhodná matica pre každý $t \geq 0$

Dôkaz : Dôkaz nájde čitateľ v knihe NORIS, J.; Markov Chains: Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics; Cambridge University Press (1998) strana 23.

Posledné dve vety nám otvárajú veľmi elegantnú cestu, ako zostrojiť kreditnú krivku, ktorá je v súlade s tabuľkou 3.8.1 . Na jej výpočet sme použili Matlab a dole je aj graf s výsledkami. V prípade, ak niektorý riadok matice Q nespĺňa súčet 0, použili sme takzvaný diagonálny ťah a diagonálne hodnoty sme upravili tak, aby súčet riadkov bol 0. Dostali sme takto generujúcu maticu $Q = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,8}$. V podstate sme skončili a máme hotové spojité kreditné krivky. Môžeme napísať, že sme získali $p_t^{(R)} = (e^{tQ})_{i(R),8}$, kde $i(R)$ označuje transakčnú maticu korešpondujúcu pre daný rating R . V nasledujúcom grafe je vidieť výsledok po nakalibrovaní z historických dát od Standard & Poor's. Je vidieť klasický efekt, že pre AAA rating krivka rastie pomaly a rýchlosť rastu sa časom zvyšuje. Pre ratingy ako je CCC je rýchlosť rastu zo začiatku veľká a potom postupne klesá až sa takmer zastavuje. Vysvetlenie je nasledujúce. Ak je firma dobrá, prežije krátke obdobie relatívne ľahko, ale s časom sa jej stav môže zhoršovať, a preto pravdepodobnosť zlyhania rastie rýchlejšie časom. Ak je firma v zlej ekonomickej situácii hneď na začiatku a prežije určité obdobie, potom je pravdepodobnosť, že aj v budúcnosti prežije, a preto pravdepodobnosť rastie s časom už pomalšie.



Obrázok 3.8.4: Kalibrované spojité kreditné krivky pre $(p_t^{(R)})_{t \geq 0}$. Kumulatívne pravdepodobnosti defaultu v čase pre jednotlivé ratingové triedy. x-os čas v štvrtrokoch.

Ak predpokladáme, že naše kreditné krivky pre $(p_t^{(R)})_{t \geq 0}$ sú správne a teda dávajú nám kumulatívnu default pravdepodobnosť pre akýkoľvek rating R v čase $[0, t]$, potom je iba jedna cesta ako definovať default distribúciu pre R -ratovaný cenný papier.

Veta: Pre danú kreditnú krivku $(p_t^{(R)})_{t \geq 0}$ pre rating R , existuje jedinečná distribúcia default časov pre cenný papier s ratingom R .

Dôkaz: položíme $F_R(t) = (p_t^{(R)})_{t \geq 0}$ pre $t \geq 0$. Definujme náhodnú premennú $\tau^{(R)}$

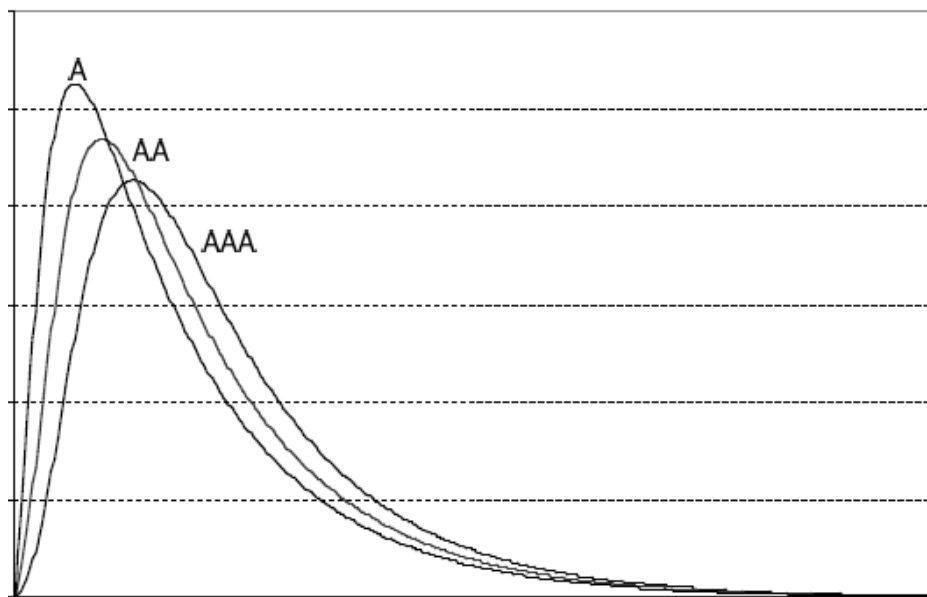
s hodnotami v $[0, \infty)$ a distribučnou funkciou $F_\tau^{(R)}$ takou, že

$$F_\tau^{(R)}(t) = P[\tau^{(R)} \leq t] = F_R(t) = p_t^{(R)}. \text{ Napríklad. } \tau^{(R)} = F_R^{-1}(X) \text{ s } X \sim U[0,1]. \square$$

Na základe $F_\tau^{(R)}(t) = P[\tau^{(R)} \leq t] = F_R(t) = p_t^{(R)}$, môžeme **hustotu** pre distribučnú funkciu času defaultov pre cenný papier s ratingom R napísať ako

$$f_\tau^{(R)}(t) = \frac{d}{dt} F_\tau^{(R)}(t).$$

Nasledujúci obrázok nám ukazuje distribučné funkcie pre kreditné krivky $R=(AAA, AA, A)$



Obrázok 3.8.5 : Hustota pre kalibrované spojité kreditné krivky pre $(p_t^{(R)})_{t \geq 0}$, pre $R=(AAA, AA, A)$.

Ďalej môžeme vypočítať štandardnú odchýlku a strednú hodnotu, alebo inak povedané očakávanie pre default čas pre jednotlivé ratingy z množiny R pre zostrojené kreditné krivky.

$$E[\tau^R] = \int_0^{\infty} t f_{\tau^R}(t) dt \text{ a obdobne aj } \sigma[\tau^R].$$

V nasledujúcej tabuľke porovnáваме vypočítané hodnoty.

v rokoch	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
E	103	90	80	64	43	25	12
σ	69	68	66	64	56	43	31
σ/E	67%	75%	83%	99%	128%	174%	266%

Tabuľka 3.8.1 : Stredné hodnoty/ zlyhania uvedené v rokoch pre jednotlivé ratingy a ich štandardná odchýlka.

Ako je vidieť v uvedenej tabuľke odvodenej z našich kriviek, napríklad pre rating AAA očakávame zlyhanie až po 103 rokoch pre rating B už po 25 a pre CCC po 12 rokoch. Avšak ak sa pozrieme súčasne aj na σ , tak vidíme, že pre CCC je to po 12 rokoch, ale s volatilitou 31 rokov, a pre AA 90 rokov ale s σ 68 rokov. Z toho vidieť, že je veľmi skresľujúce pozerat' sa len na očakávaný čas zlyhania. Musíme pozerat' aj na σ nášho očakávania. Preto v tabuľke je pridaný ešte jeden riadok a to podiel σ/E , kde môžeme vidieť viac súvislostí. Pri tomto pomere vidíme, že pre ratingy investičných stupňov od AAA po BBB je tento pomer pod 100% a pre neinvestičné stupne je to nad 100%. Práve sa to láme na ratingu BBB, čo je v skutočnosti posledný investičný rating a prvý neinvestičný. Môžeme ubezpečiť čitateľa, že to nie je náhoda. Práve na základe takýchto analýz sa rozdelili ratingy do dvoch skupín. Na investičné a neinvestičné alebo rizikové. Jeden z dôvodov je aj to, že pri týchto neinvestičných ratingoch sú naše očakávania menšie ako ich samotná volatilita. Teda uvedený pomer je ďaleko nad 100%.

Sumárne teda môžeme povedať, že rating CCC podľa našich očakávaní prežije 12 rokov avšak s pravdepodobnosťou viac ako 30% neprežije ani jeden rok. Pripomeňme si, že naše kreditné krivky sme dostali z historických dát a teda sú to trhové dáta. Preto každé zlyhanie ratingu AAA vyvolá na trhu veľmi veľkú vlnu špekulácii a negatívnych reakcií, keďže všetci investori očakávajú od ratingu AAA čas prežitia až na úrovni okolo 40 rokov.

3.9 Hazard rate funkcia.

Teraz sa ešte stručne oboznámime s pojmom funkcia *hazard rate* a budeme hovoriť o pravdepodobnosti zlyhania v čase.

Uvažujme pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s filtráciou $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, súvisiacou s časom τ kedy nastane zlyhanie. Označme distribučnú funkciu času zlyhania $F(t) = \mathbb{P}(\tau \leq t)$ a príslušnú funkciu hustoty $f(t)$.

Model predpokladá, že zlyhanie môže nastať v každom čase, a preto je potrebné poznať nielen pravdepodobnosť zlyhania v čase splatnosti, ale potrebujeme poznať čas výskytu zlyhania. Pravdepodobnosť výskytu zlyhania v časovom intervale $[t, t + \Delta t]$ je

$$h(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

$o(\Delta t)$ je nepatrný čas vzhľadom k Δt .

Pravdepodobnosti prežitia je pravdepodobnosť, že kreditná udalosť nenastane v intervale $[t, t + \Delta t]$

$$1 - [h(t)\Delta t + o(\Delta t)]$$

Ďalej predpokladáme, že výskyt zlyhania v danom časovom intervale nezávisí od minulosti a teda pravdepodobnosti výskytu v disjunktných intervaloch sú nezávislé. Interval rozdelíme na n častí dĺžky Δt a pravdepodobnosť výskytu udalosti na intervale $[0; t]$ vyjadríme pomocou pravdepodobností udalostí na intervaloch

$$[0; t_1); [t_1; t_2); \dots; [t_{n-1}; t]; t_k = k \Delta t.$$

Použitím aproximácie $\ln(1 + x) \sim x$ pre x blízke 0 dostávame

$$\ln \prod_{k=1}^n (1 - h(t_k)\Delta t) = \sum_{k=1}^n \ln(1 - h(t_k)\Delta t) = - \sum_{k=1}^n h(t_k)\Delta t + o(\Delta t)$$

pre malé $\Delta t \rightarrow 0$ platí

$$\ln \prod_{k=1}^n (1 - h(t_k)\Delta t) = \sum_{k=1}^n \ln(1 - h(t_k)\Delta t) \rightarrow - \int_0^t h(s) ds$$

to znamená, že pre pravdepodobnosť prežitia na intervale $[0; t]$ je

$$\exp\left(- \int_0^t h(s) ds\right).$$

Definícia : Hazard rate funkciu $h(t)$ definujeme nasledovne:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{P}(t < \tau \leq t + \Delta t \mid \tau > t),$$

kde $\mathbb{P}(t < \tau \leq t + \Delta t \mid \tau > t)$ vyjadruje pravdepodobnosť, že zlyhanie sa vyskytne v časovom intervale $(t, t + \Delta t)$, za predpokladu, že daná firma prežije do času t .

Ak sa pozrieme na rovnicu podrobnejšie, vidíme, že

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(t < \tau \leq t + \Delta t, \tau > t)}{\mathbb{P}(\tau > t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} f(u) du}{\int_t^{\infty} f(u) du} \\ &= \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} F(t)}{1-F(t)} = -\frac{\partial}{\partial t} \log(1-F(t)). \end{aligned}$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice dostávame vzťahy medzi distribučnou funkciou, hustotou a hazard rate funkciou:

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - \exp\left(-\int_0^t h(u) du\right), \\ f(t) &= h(t) \exp\left(-\int_0^t h(u) du\right). \end{aligned}$$

Ak označíme **funkciu prežitia (survival)** $S(t) = 1 - F(t) = \mathbb{P}(\tau > t)$ dostaneme:

$$\begin{aligned} S(t) &= \exp\left(-\int_0^t h(u) du\right) \\ \text{a teda } F(t) &= 1 - \exp\left(-\int_0^t h(u) du\right) = 1 - S(t). \end{aligned}$$

Kapitola 4

Jednofaktorové modely a korelácia

V tejto kapitole si predstavíme triedu jednofaktorových modelov. Ďalej sa hlavne budeme zaoberať koreláciou aktív a koreláciou zlyhaní. Aký je vplyv medzi týmito koreláciami a dajú sa merať? Na túto otázku sa pokúsime odpovedať s využitím metód matematickej štatistiky. Predstavíme si jednotlivé spôsoby ako merať koreláciu na trhu a čo je to implikovaná korelácia iTraxu. Taktiež si ukážeme ako prispieva diverzifikácia aktív v portfóliu CDO k zníženiu počtu defaultov-zlyhaní firiem. Porovnáme koreláciu akcií firiem v jednotlivých sektoroch v indexe S&P 500 .

4.1 Jednofaktorový model

Jeden z prístupov ako oceňovať kreditné riziko je skupina modelov zaoberajúca sa zmenou trhovej hodnoty firmy. Je to klasický Mertonovský prístup. Ak napríklad trhovú hodnotu aktív firmy klesne pod celkovú jej zadlženosť, potom hodnota akcií tejto firmy je blízka nule, a môžeme hovoriť o bankrote. Sú to tzv. trigger modely. Ak chceme modelovať kreditné udalosti firiem, musíme najprv modelovať vývoj ich aktív. Definujme si najprv hranicu zlyhania θ . Ak znormujeme výnos aktív firmy, potom pravdepodobnosť zlyhania za pomoci hranice zlyhania môže byť jednoducho zapísaná v tvare :

$$P(Z_i \leq \theta_i) = N(\theta_i) = p_{i,def}$$

$$\theta_i = N^{-1}(p_{i,def}) ,$$

kde Z_i je normalizovaná návratnosť aktív firmy i a $p_{i,def}$ je jej pravdepodobnosť zlyhania. Poznamenajme, že predpoklady normality tu nie sú až také silné, akoby sa mohlo na prvý pohľad zdať. Ďalej zadefinujeme normalizovanú návratnosť trhu Z_m .

Každé aktívum obchodované na jednotnom trhu je korelované s trhovou návratnosťou cez svoju prepojenosť na trh cez trhovú faktor. Vo všeobecnosti túto myšlienku môžeme vyjadriť v tvare :

$$Z_i = \rho_i Z_m + \sqrt{1 - \rho_i^2} \varepsilon_i,$$

kde ε_i a Z_m je z rozdelenia $N(0,1)$, a Z_m , ε_i a ε_j sú nezávislé pre $i \neq j$.

Z_m a ε_i reprezentujú systematické riziko respektíve idiosynkratické riziko. ρ_i kontroluje veľkosť systematického rizika. Ak $\rho_i=1$, obligor i je vystavený len systematickému riziku, a v opačnom extrémne, ak $\rho_i=0$, obligor má iba idiosynkratické riziko.

Pre dané ρ_i a trhovú realizáciu Z_m môžeme vypočítať podmienenú pravdepodobnosť zlyhania ako :

$$\begin{aligned} P(i, \text{def} | Z_m) &= P(Z_i \leq \theta_i | Z_m) \\ &= P(\rho_i Z_m + \sqrt{1 - \rho_i^2} \varepsilon_i \leq \theta_i) \\ &= P(\varepsilon_i \leq \frac{\theta_i - \rho_i Z_m}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}) = N\left(\frac{\theta_i - \rho_i Z_m}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}\right) \end{aligned}$$

Z rovnice vyplýva, že ak $\rho_i > 0$, potom pravdepodobnosť zlyhania sa znižuje ak sa Z_m zväčšuje a obrátene. Model tiež predpokladá, že pre dané Z_m je pre jednotlivé firmy ich návratnosť podmienená nezávislá. Ak všetky firmy majú rovnakú pravdepodobnosť zlyhania pre dané Z_m , potom počet zlyhaní v portfóliu sa redukuje na binomické rozdelenie. Práve tento predpoklad vo svojich modeloch použila agentúra Moodys a vybudovala komplexný model oceňovania CDO pomocou binomického rozdelenia. Bohužiaľ trh si tento model neosvojil práve pre predpoklad, že firmy majú rovnakú pravdepodobnosť zlyhania.

Modelovanie CDO je veľmi závislé na vývoji aktív počas života jednotlivých firiem, a nielen na kumulatívnych zlyhaniach pri splatnosti. Preto je dôležitá táto citlivosť na zlyhanie na začiatku obdobia alebo na konci, podchytiť v modelovaní. Je tiež dôležitá podchytiť koreláciu zlyhaní v čase. Tak napríklad, ak sa firme darí dobre v prvom časovom období, model by mal pravdepodobnosť zlyhania tejto firmy v ďalšom časovom okamihu zlepšiť. To sa dosahuje v praxi pomocou transakčných matíc.

Pripomeňme si, že

$$Z_i = \rho_i Z_m + \sqrt{1 - \rho_i^2} \varepsilon_i$$

Ďalej môžeme napísať, že $\theta_{i,R,X} = N^{-1}(p_{i,R,X})$, kde R.X je rating aktíva i.

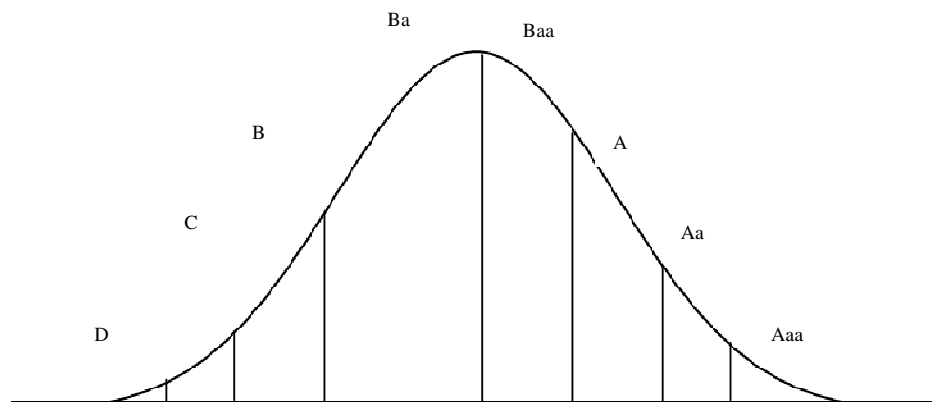
Pre dané ρ_i a Z_m , potom môžeme vypočítať podmienenú pravdepodobnosť zlyhania ako:

$$\begin{aligned} P(i,R \mid Z_m) &= P(Z_i \leq \theta_{i,R,X} \mid Z_m) \\ &= N\left(\frac{\theta_{i,R,X} - \rho_i Z_m}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}\right) \end{aligned}$$

Z čoho môžeme vypočítať tiež podmienenú transakčnú maticu:

$$P(i, \text{pre rating } X \mid Z_m) = N\left(\frac{\theta_{i,R,X} - \rho_i Z_m}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}\right) - N\left(\frac{\theta_{i,R,(X-1)} - \rho_i Z_m}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}\right)$$

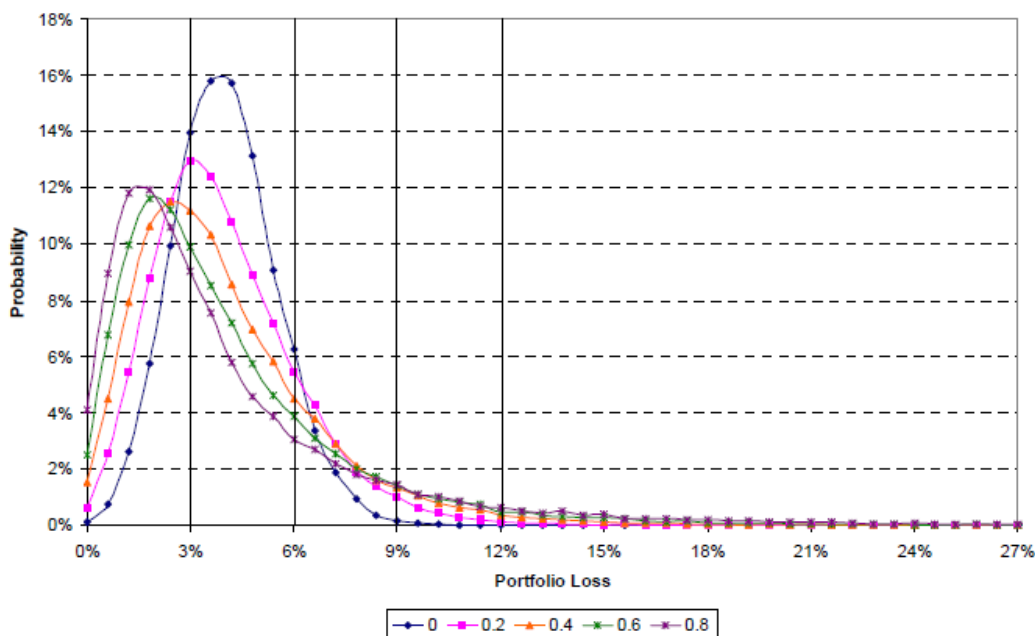
kde, rating (X-1) je nasledujúca ratingová trieda prislúchajúca X.



Obrázok 4.1 : Rozdelenie grafu hustoty ratingovým kategóriám

4.2. Korelácia hodnoty aktív.

V tomto type modelov je jeden z hlavných faktorov určenie korelácie hodnoty aktív, ktorá nám definuje volatilitu defaultov portfólia. Najcitlivejšia na tento parameter je vždy equity tranža. Je veľa prístupov, ako tento parameter určiť. Jeden z nich je historické vypočítanie sektorovej (industry) korelácie zlyhania. Alternatívne je možné pozrieť sa na historický vývoj akciových trhov. Tento prístup je v praxi často používaný pre firmy, ktoré majú nízky trhový pomer ku kapitálu, pretože cena ich akcií a hodnota aktív budú veľmi korelované. Existuje taktiež možnosť použiť parametre odporúčané ratingovými agentúrami, ktoré sú vypočítané z ich pozorovaní.



Obrázok 4.2 : Závislosť hustoty pravdepodobnosti zlyhania od veľkosti korelácie zlyhania portfólia. Rast korelácie z 0% po 80%.

Z obrázka 4.2 je vidieť ako vplýva veľkosť korelácie na hustotu rozloženia strát. Koreláciu v modelovom príklade sme menili od 0% po 80% s veľkosťou skoku 20%. Z obrázka je zrejmé, že najväčšia citlivosť sa odohráva na chvoste hustoty a v špičke hustoty. V praxi to znamená, že equity tranža bude menej často zasiahnutá celá pri vysokej korelácií a senior tranža bude častejšie zasiahnutá maličkou stratou, aj pri väčšom chvoste. Naopak pri nízkych hodnotách korelácie stredná hodnota hustoty sa posunie k nižším hodnotám a teda equity tranža bude horšie ocenená. Chvost padne dole a teda senior tranža získa na príťažlivosti.

4.3. Korelácia zlyhania / defaultu.

Ďalší krok je odvodiť koreláciu zlyhania z korelácie hodnoty aktív. Pre danú koreláciu hodnoty aktív medzi firmami i a j , $\rho_{i,j}$, za predpokladu normálnosti rozloženia výnosov, implikovaná korelácia zlyhania je

$$\text{Corr}(i_{def}, j_{def}) = \frac{\Phi(\theta_i, \theta_j, \rho_{i,j}) - p_i p_j}{\sqrt{(p_i - p_i^2)(p_j - p_j^2)}},$$

kde Φ je kumulatívna funkcia hustoty štandardného normálneho rozdelenia, p je pravdepodobnosť zlyhania a θ je hranica prislúchajúca k zlyhaniu.

Takýto prístup však nezachytáva diverzifikačný efekt portfólia. Nástroj na odstránenie tohto defektu je multi faktorový model zachytávajúci systematické riziko.

A) Najprv si zdefinujeme multi faktorový model pre každý sektor k ,

$$Z_k = \rho_k Z_m + \sqrt{1 - \rho_k^2} \cdot \varepsilon_k, \text{ kde } \rho_k \text{ je korelácia výnosov pre } k\text{-tý sektor a trh, a } \varepsilon_k$$

je systematické riziko pre k -tý sektor. Pre každú firmu máme:

$$\begin{aligned} Z_i &= \alpha + \sum \rho_i(k) \cdot Z_k + r_i \cdot \varepsilon_i = \\ &= \alpha + \left[\sum \rho_i(k) \cdot \rho_k \right] Z_m + \sum \rho_i(k) \cdot \sqrt{1 - \rho_k^2} \cdot \varepsilon_k + \sqrt{1 - \left[\sum \rho_i(k) \cdot \rho_k \right]^2 - \sum \rho_i(k)^2 (1 - \rho_k^2)} \cdot \varepsilon_i \end{aligned}$$

kde $\rho_i(k)$ je korelácia výnosov medzi firmou i a sektorom k .

r_i sme vybrali tak, aby volatilita Z_i ostala rovná 1. Potom korelácia výnosov medzi i a j firmami môže byť odvodená ako :

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} &= \text{corr}(Z_i, Z_j) = \frac{\text{Var}(Z_i + Z_j) - \text{Var}(Z_i) - \text{Var}(Z_j)}{2\sigma_i\sigma_j} = \\ &= \frac{\text{Var}\left(\left[\sum(\rho_i(k) + \rho_j(k))\rho_k\right]Z_m + \sum(\rho_i(k) + \rho_j(k)) \cdot \sqrt{1 - \rho_k^2} \cdot \varepsilon_k + r_i\varepsilon_i + r_j\varepsilon_j\right) - 2}{2} \\ &= \frac{\left[\sum(\rho_i(k) + \rho_j(k))\rho_k\right]^2 + \sum(\rho_i(k) + \rho_j(k))^2 \cdot (1 - \rho_k^2) + 1 - \left[\sum\rho_i(k) \cdot \rho_k\right]^2 - \sum\rho_i(k)^2(1 - \rho_k^2) + 1 - \left[\sum\rho_j(k) \cdot \rho_k\right]^2 - \sum\rho_j(k)^2(1 - \rho_k^2) - 2}{2} \\ &= \left[\sum\rho_i(k)\rho_k\right] \cdot \left[\sum\rho_j(k)\rho_k\right] + \sum\rho_i(k)\rho_j(k) \cdot (1 - \rho_k^2) \end{aligned}$$

ďalej predpokladám, že $\rho_i(k) = \rho$ ak firma i je z k sektora a 0 inak.

Potom $\rho_{i,j} = \rho^2 \rho_k^2 + \rho^2 (1 - \rho_k^2) = \rho^2$, ak i a j sú z rovnakého sektora k
 a $\rho_{i,j} = \rho^2 \rho_k \rho_l$, ak sú z rôznych sektorov.

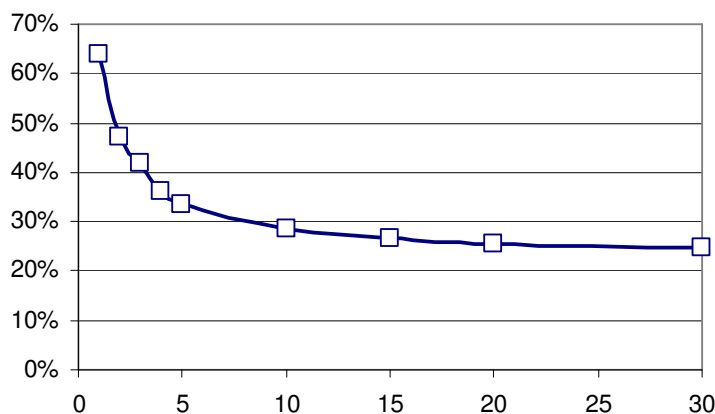
B) Pre firmu i , ktorá má pravdepodobnosť zlyhania p_i a recovery r_i
 očakávaná strata je $p_i N_i (1 - r_i)$, kde N_i je hodnota nominálu.

Rozptyl strát je $s_i = p_i (1 - p_i) (N_i (1 - r_i))^2$

Pre portfólio firiem očakávaná strata je $\sum p_i N_i (1 - r_i)$, a rozptyl

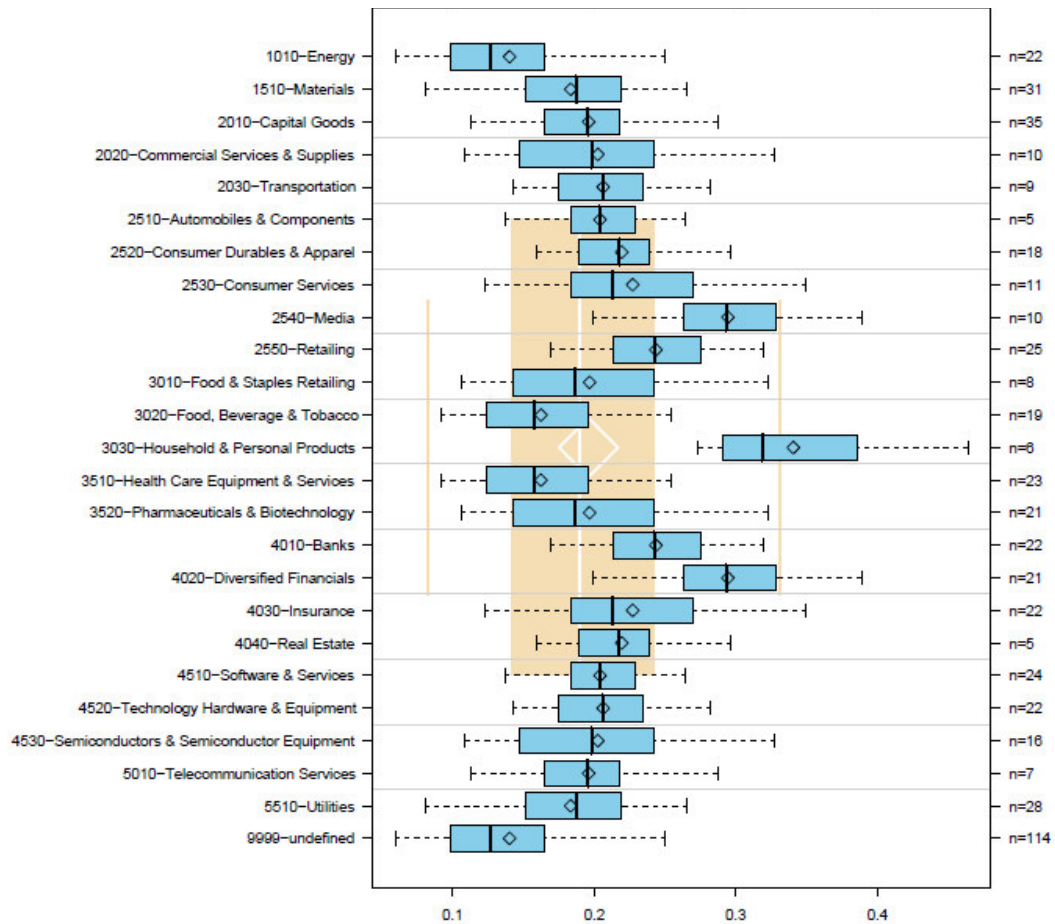
$$Var(PortfolioLoss) = [s_1 \quad \dots \quad s_n] \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2}^{def} & \dots & \dots & \rho_{1,n}^{def} \\ \rho_{2,1}^{def} & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n,1}^{def} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ s_n \end{bmatrix}$$

V nasledujúcom grafe môžeme vidieť efekt diverzifikácie portfólia na výnosnosť portfólia v priemere. Začali sme so 100 firmami vloženými do jedného sektora / industry. Postupne ako sme pridávali počet sektorov, priemerná korelácia portfólia sa znížila takmer úplne. Napokon sa ustálila pri hodnote sektorov 20.



Obrázok 4.3.1 : Závislosť priemernej korelácie portfólia od počtu sektorov.

Už z obrázka je vidieť, že diverzifikácia je veľmi dôležitý fakt portfólia. Je veľmi dôležité to podchytiť cez koreláciu. V praxi sa osvedčil prístup S&P agentúry: mať dve rôzne korelácie. Jedna medzi sektormi spravidla nižšia 12% a jedna v rámci jedného sektora vyššia 30%. Tieto hodnoty vychádzajú z ich pozorovaní finančných trhov.



Obrázok 4.3.2 : Korelácia medzi akciami 24 sektorov, ktoré rozlišuje Moodys.

Na obrázku je vidieť koreláciu na akciovom trhu medzi jednotlivými sektormi. Žltý boxplot v pozadí ako korelácia trhu a v rámci jedného sektora modré boxploty v popredí. Napravo je hodnota n , ktorá znamená počet sledovaných akcií v danom sektore.

Pri generovaní jednofaktorového modelu položíme náhodné premenné x_i

$$x_i = \rho_i M + \sqrt{1 - \rho_i^2} Z_i,$$

$i = 1, 2, \dots, N$, kde M a Z_i sú nezávislé náhodné premenné so strednou hodnotou rovnou nule a varianciou rovnou jedna a koeficienty ρ_i sú z intervalu $[0, 1)$. Potom

$x_i = \rho_i M + \sqrt{1 - \rho_i^2} Z_i$ definuje korelačnú štruktúru medzi x_i indukovanú lineárnou závislosťou premenných x_i na jednom spoločnom trhovom faktore M . Korelácia premenných x_i a x_j , $i \neq j$, je rovná $\rho_i \rho_j$. Sústavu, ktorú sme vytvorili, má korelačnú

maticu, ktorú môžeme zapísať ako $\rho\rho^T$, kde $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N)^T$, pričom matica \mathbf{R} je silno diagonálna $\text{diag}(\mathbf{R}) := \mathbf{1}$, $\mathbf{R} = \rho\rho^T$. Označme Q_i kumulatívnu distribučnú funkciu náhodnej premennej x_i a F_i kumulatívnu distribučnú funkciu τ_i . Ďalej označme H_i ako kumulatívnu distribučnú funkciu náhodnej premennej Z_i . Z rovnice $x_i = \rho_i M + \sqrt{1 - \rho_i^2} Z_i$ vyplýva, podmienenosť trhového faktora M

$$P(x_i < x | M) = H_i \left(\frac{x - \rho_i M}{\sqrt{1 - \rho_i^2}} \right).$$

Predpokladáme ďalej, že realizácie $x_i = x$ a $\tau_i = t$ sú previazané $t = F_i^{-1}(Q_i(x))$.

Ak aj $x = Q_i^{-1}(F_i(t))$, potom $Q_i(x) = F_i(t)$, teda $P(x_i < x) = P(\tau_i < t)$,

a teda :

$$P(\tau_i < t | M) = H_i \left(\frac{Q_i^{-1}[F_i(t)] - \rho_i M}{\sqrt{1 - \rho_i^2}} \right).$$

Ak označíme $S_i(T | M)$ podmienenú pravdepodobnosť, **funkciu prežitia**, že i -tá firma prežije do času maturity T , dostaneme

$$S_i(T | M) = 1 - H_i \left(\frac{Q_i^{-1}[F_i(T)] - \rho_i M}{\sqrt{1 - \rho_i^2}} \right).$$

Zatiaľ sme nepovedali, aké pravdepodobnostné rozdelenie majú náhodné premenné M a Z_i . Voľbou rozdelení týchto premenných definujeme totiž copula funkciu a teda aj jeden z hlavných parametrov modelu.

Ak predpokladáme, že trhový faktor M a rovnako Z_i majú normované normálne rozdelenie, tak aj všetky x_i majú normované normálne rozdelenie a dostávame model založený na **Gaussovej jednofaktorovej copule**. Potom funkcia prežitia pre náš model má podobu

$$S_i(T | M) = 1 - \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}[F_i(T)] - \rho_i M}{\sqrt{1 - \rho_i^2}} \right),$$

kde Φ je distribučnú funkciu normovaného normálneho rozdelenia a Φ^{-1} je jej inverzná funkcia. Označme si teraz $\pi_T(k)$ pravdepodobnosť, že v portfóliu nastane práve k zlyhaní do času maturity T a $\pi_T(k | M)$ pravdepodobnosť výskytu práve k -

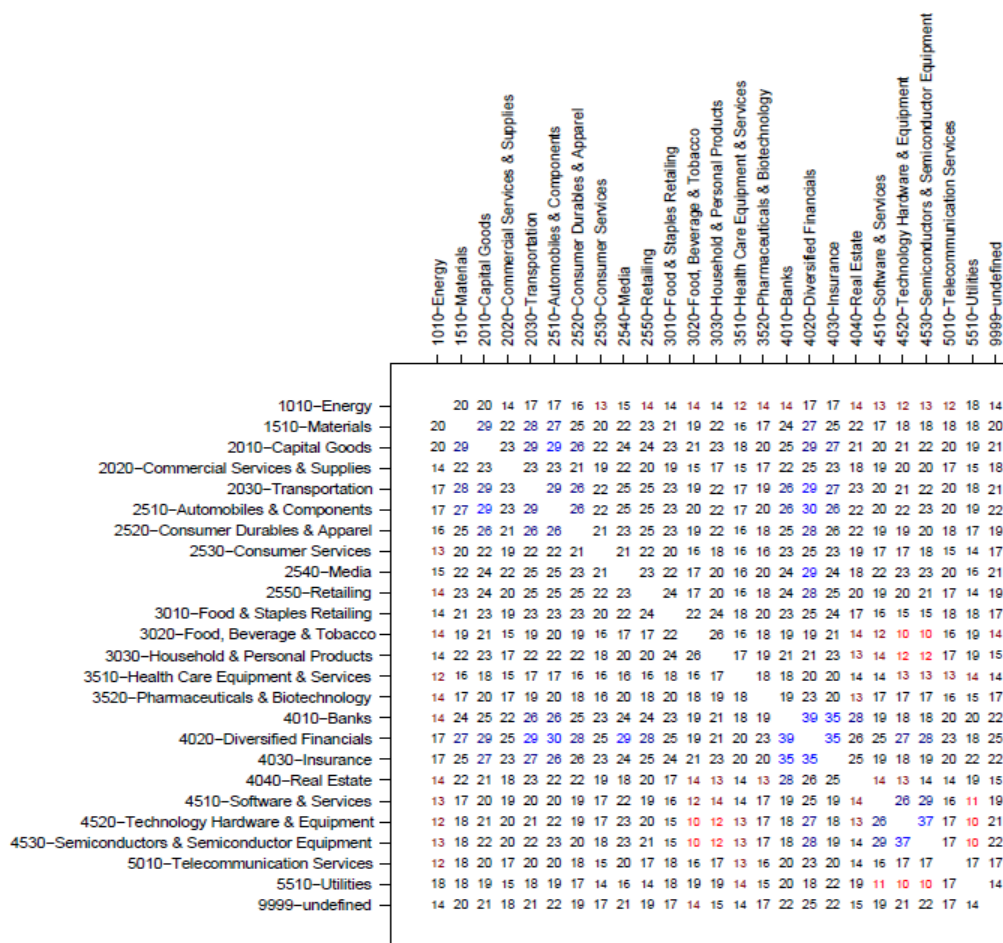
zlyhaní na trhu M . Platí, že premenné x_i , a rovnako časy zlyhaní τ_i , sú nezávislé náhodné premenné.

Podľa vzorca pre úplnú pravdepodobnosť môžeme pravdepodobnosť $\pi_T(k)$, že nastane práve k -zlyhaní do času T , vypočítať integrovaním $\pi_T(k|M)$ cez rozdelenie faktora M , teda

$$\pi_T(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi_T(k|M) g(M) dM,$$

kde $g(m)$ je hustota rozdelenia faktora M .

Pripomíname, že pre nami uvažovaný model je funkcia g hustota normovaného normálneho rozdelenia (v prípade Gaussovej copuly).



Obrázok 4.3.3 : Priemerná medzi sektorová korelácia firiem z rôznych párov sektorov.

Medzi sektorová korelácia: každá hodnota predstavuje priemer z $m \times n$ korelačných koeficientov medzi m firmami jedného sektora a n firmami druhého sektora.

Kapitola 5

Oceňovanie CDO pomocou simulácií Monte Carlo

Ako sme sa už zmienili, modely oceňovania CDO používajúce simulácie Monte Carlo sú, v porovnaní s inými modelmi, jednoduchšie a prehľadnejšie. Avšak ich výpočtová náročnosť je veľká. Jasnou nevýhodou tohto prístupu je dlhý procesný čas potrebný na výpočty súvisiace s veľkým počtom simulácií. Veľký počet simulácií je potrebný na dosiahnutie štatistickej presnosti. Teraz popíšeme model, ktorým budeme generovať časy zlyhaní pre portfólio aktív. Predstavíme alternatívy, ktoré sa líšia voľbou parametrov, napríklad copula funkcie.

5.1 Simulácia Monte Carlo

Táto simulačná metóda je určená na imitovanie reálneho systému. Hlavným cieľom simulácie je pochopenie vnútorných vzťahov v systéme korelácii aktív. Využíva sa v situáciách, keď iné analýzy sú matematicky príliš náročné, keď neexistuje analytické riešenie.

Pri simuláciách sa hodnoty náhodných premenných imitujú vygenerovaním veľkého počtu realizácií danej náhodnej premennej. Takto získané hodnoty o správaní sa portfólia, sa ďalej štatisticky spracovávajú. Tento postup má svoju odvoditeľnosť v zákonoch veľkých čísel.

Kvôli chvostovej závislosti, ktorú sme spomínali v kapitole 3 použijeme Gaussovú copulu, o ktorej sme sa zmienili tiež v kapitole 3.

Označenie, ktoré budeme ďalej používať:

- RR_i je hodnota recovery rate i -teho aktíva,

- T je splatnosť kontraktu meraná v rokoch,
- τ_i je čas zlyhania i -teho aktíva,
- n je počet aktív uvažovaného portfólia,
- N_i je nominálna hodnota i -teho aktíva,
- \mathbf{R} je korelačná matica pravdepodobností zlyhania aktív portfólia,
- $p_i(t)$ pravdepodobnosť zlyhania i -tej firmy,

Postup výpočtov predkladaného modelu rozdelíme na päť častí:

A. Príprava vstupných údajov

Výpočet korelačnej matice \mathbf{R} nebudeme v tejto práci podrobne rozoberať, pretože obsahom a veľkosťou témy je to na ďalšiu prácu. Pravdepodobnosť zlyhania $p_i(t)$ pomocou hazard rate funkcie z historických dát sme popísali v predchádzajúcej kapitole. Tieto výpočty nebudeme na tomto mieste opäť rozoberať, preto ich súhrnne označíme ako prípravu vstupných údajov. Hodnoty \mathbf{R} a $p_i(t)$ sme určili z trhových dát.

V ďalšom kroku si dopredu vypočítame Choleského rozklad \mathbf{A} korelačnej matice \mathbf{R} , t.j. dolnú trojuholníkovú maticu \mathbf{A} takú, že $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$.

Choleského dekompozícia (Choleského rozklad) je metóda rozloženia symetrickej pozitívne definitnej štvorcovej matice \mathbf{A} na súčin dolnej a hornej trojuholníkovej matice, pričom jedna trojuholníková matica je transponovaná matica druhej. V ďalšom kroku uvidíme, načo nám bude tento rozklad užitočný.

Pre každú simuláciu k budeme teraz opakovať nasledujúce kroky B, C a D.

B. Generovanie realizácie N -rozmerného vektora korelovaných náhodných premenných

Naša alternatíva bude určená voľbou Gaussovej copuly, pre ktorú sme sa na začiatku rozhodli kvôli chvostovej závislosti. V tomto kroku uvádzame, ako postupovať pri generovaní realizácie vektora korelovaných premenných s vlastnosťami požadovanými pri voľbe Gaussovej copuly s korelačnou maticou \mathbf{R} .

a) Gaussova copula

- 1) náhodne generujeme konkrétne hodnoty $Z = (z_1, z_2, \dots, z_N)^T$ N -rozmerného vektora nekorelovaných náhodných premenných z normovaného normálneho rozdelenia, $Z \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.
- 2) vypočítame $\mathbf{x} := \mathbf{A}Z$, kde \mathbf{A} je Choleského rozklad korelačnej matice \mathbf{R} , vytvoríme požadovaný vektor s korelovanými zložkami.

Veta: Platí, že ak máme vektor nekorelovaných náhodných premenných $Z \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, môžeme z neho vytvoriť vektor \mathbf{x} korelovaných náhodných premenných s korelačnou maticou \mathbf{R} pomocou Choleského dekompozície \mathbf{A} matice \mathbf{R} tak, že položíme $\mathbf{x} := \mathbf{A}Z$.

Dôkaz:

$$\text{Máme } \mathbb{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = \mathbf{R} = \mathbb{E}[\mathbf{A}\mathbf{z}(\mathbf{A}\mathbf{z})^T] = \mathbb{E}[\mathbf{A}\mathbf{z}\mathbf{z}^T\mathbf{A}^T] = \mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{z}\mathbf{z}^T]\mathbf{A}^T,$$

a keďže \mathbf{Z} je vektor nekorelovaných náhodných premenných, teda vieme, že $\mathbb{E}[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T] = \mathbf{I}_N$, dostávame z predošlej rovnice: $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Teda \mathbf{A} je skutočne dolná trojuholníková matica s kladnými prvkami na diagonále, ktorá predstavuje Choleského rozklad matice \mathbf{R} . \square

- 3) Zmeňme vektor \mathbf{x} na vektor \mathbf{u} korelovaných náhodných premenných rozložených na intervale $[0,1]$ tak, že položíme $\mathbf{u} := (\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_N))$, kde $\Phi(x)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia.

Takto definujeme Gaussovu copula funkciu $\mathbf{u} \sim C_{\mathbf{R}}^{Gauss}$.

b) ukážme si aj alternatívny prístup pri výbere **Studentovej t copula**

- 1) vygenerujeme $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T \sim N(0,1)$ n -rozmerného vektora nekorelovaných náhodných premenných z normovaného normálneho rozdelenia; $\mathbf{z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{1})$
- 2) položíme $\mathbf{x} := \mathbf{A}\mathbf{z}$, kde \mathbf{A} je opäť Choleského rozklad korelačnej matice \mathbf{R} , čím vytvoríme požadovaný vektor s korelovanými zložkami

- 3) vygenerujeme náhodnú premennú $s \sim \chi_v^2$ rozdelenia s v stupňami voľnosti, ktorá je nezávislá
- 4) vytvoríme vektor s v stupňami voľnosti $\mathbf{y} := \mathbf{x} \sqrt{\frac{v}{s}}$ korelovaných náhodných premenných zo Studentovho t rozdelenia
- 5) zmeňme vektor \mathbf{y} na vektor \mathbf{u} náhodných korelovaných premenných rozložených na intervale $[0,1]$ tak, že položíme $\mathbf{u} := (t_v(y_1), \dots, t_v(y_N))$, kde $t_v(y)$ je distribučná funkcia s v stupňami voľnosti Studentovho t rozdelenia

Takto definujeme Studentovu copula funkciu $\mathbf{u} \sim C_{\mathbf{R},v}^{Student}$.

C. Výpočet časov zlyhania jednotlivých aktív.

Pre každé aktívum i , $i = 1, \dots, n$, uvažujme náhodnú premennú $N_i(t)$ tak, ako sme to už popísali v predchádzajúcej kapitole. Pre survival funkciu S_i času zlyhania i -teho aktíva sme v predchádzajúcej kapitole odvodil vzťah $S_i(t) = \exp\left(-\int_0^t h_i(u) du\right)$.

V tomto kroku spravíme nasledovné:

- i) Pre každé aktívum i zadefinujeme $\gamma_i(t) := \ln S_i(t) = -\int_0^t h_i(s) ds$.
- ii) Čas zlyhania jednotlivých aktív, použivúc zložky vektora $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$ môžeme určiť ako $\tau_i := \inf\{t > 0: \gamma_i(t) \leq \ln u_i\}$.

Dokonca ak položíme $\tilde{\tau}_i := \inf\{t > 0: \gamma_i(t) = \ln u_i\}$, dá sa ukázať, že takto zadefinované časy zlyhania τ_i a $\tilde{\tau}_i$ majú rovnaké pravdepodobnostné rozdelenie.

Simulované časy zlyhania jednotlivých aktív teda definujeme nasledovne:

$$\tau_i := \inf\{t > 0: \gamma_i(t) = \ln u_i\}.$$

D. Výpočet strát portfólia a premenných v rovnici oceňovania CDO.

Ako náhle sa v k -tej simulácii vypočíta vektor τ^k časov zlyhania aktív portfólia, pravdepodobnostné rozdelenie počtu zlyhaní, výpočet strát tranží pri oceňovaní CDO je už jednoduché. Ako sme už písali, zaujímajú nás predovšetkým straty v portfóliu a pravdepodobnosti počtu zlyhaní. Odvodenie rovnice pre výpočet týchto prémie a jej použitie pri metódach využívajúcich simulácie Monte Carlo je podrobne popísané v práci Galiani S. (2003): *Copula Functions and their Application in Pricing and Risk Managing Multiname Credit Derivative Products*, working paper, Department of Mathematics, King's College, London.

V tomto kroku, na základe konkrétnej realizácie τ^k , $k \in \{1, \dots, n \in N\}$ spravíme nasledovné:

1) Z τ^k n -rozmerného vektora vyberieme vektor $\mathbf{Y}^k = (\tau_{p_1}^k, \tau_{p_2}^k, \dots, \tau_{p_{r^k}}^k)$ pričom

$\tau_{p_i}^k < T \quad \forall p_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i = 1, 2, \dots, r^k \leq n$, kde p_i sú indexy aktív, ktoré zlyhajú pred splatnosťou kontraktu T .

Vytvoríme pomocný vektor $d^k = (d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k)$, kde $d_i^k := 1_{\{\tau_i^k < T\}}$,

$$\text{t.j. } d_i^k = \begin{cases} 1 & \text{ak } \tau_i^k < T \\ 0 & \text{ak } \tau_i^k \geq T \end{cases}.$$

Teda do vektora d_i^k priradíme pre i -tého aktívum 0 ak prežije v k simulácii a 1 ak zlyhá do času T teda do splatnosti. Ak zlyhá po splatnosti CDO, to nás už nezaujíma, keďže celý cashflow je už ukončený.

2) Celkovú stratu portfólia v k -tej simulácii $Loss^k(T)$

vypočítame pomocou vzťahu

$$Loss^k(T) = \sum_{i=1}^n (1 - RR_i) N_i q_i^k, \text{ kde } N_i \text{ je nominálna hodnota } i\text{-tého cenného papiera}$$

RR_i je zostatková (recovery rate) hodnota v prípade zlyhania i -tého cenného papiera

2) V poslednej fáze si vypočítame všetky ukazovatele a štatistiky, ktoré nás zaujímajú z rozdelenia strát ako je VaR, PV, DAS, IRR, rating, a podobne.

E. Finálny výpočet očakávaných strát a prémieí.

Body B, C a D opakujeme pre každú simuláciu k a uložíme si hodnoty τ^k , d^k , $Loss^k(T)$ v pomocných premenných.

Keďže sa jedná o nevychýlený odhad v poslednom kroku aritmetickým priemerom týchto štatistik získame celkovú očakávanú stratu portfólia ($\overline{Loss(T)}$). Pri nevychýlených odhadoch je očakávaná strata rovná aritmetickému priemeru. Taktiež očakávaný počet zlyhaní ($\overline{\#def}$), rozdelenie pravdepodobnosti počtu zlyhaní a ďalšie veličiny, ktoré štatisticky vyhodnocujeme. Taktiež premenné, pomocou ktorých vypočítame prémie jednotlivých tranží CDO ako DAS.

Pomocou idealizovaných pravdepodobnosti dokážeme prideliť na základe veľkosti očakávanej straty rating a tak porovnať, či rating pre danú tranžu od ratingovej agentúry korešponduje s očakávanou stratou alebo nie. V neposlednom rade aj výsledky IC/OC testov o ktorých sa budeme ešte viac baviť neskôr.

Kapitola 6

Kalibrácia modelu na trhové dáta

Ukázali sme aký matematicky prístup použijeme na oceňovanie CDO. Teraz ukážeme, ako náš model nakalibrovať na trhové dáta a vypočítame cenu jedného reálneho produktu. Neskôr porovnáme vypočítanú cenu s trhovou cenou a pokúsime sa prísť na príčinu rozdielov a teda zhodnotiť predložený model.

6.1 Oceňovanie

Ako sme v práci uviedli, pomocou copula metodológie vieme využitím nástroja Monte Carlo vypočítať čas zlyhania jednotlivých aktív diverzifikovaného portfólia CDO. Ak už máme vypočítané časy zlyhania, potom už vieme jednoducho vypočítať aj očakávanú stratu na jednotlivých tranžiaciach (expected loss). Pomocou tejto straty vieme potom následne určiť DAS, teda default adjusted spread. Pomocou DAS, môžeme vypočítať súčasnú hodnotu transakcie, teda PV. Takto jednoducho vieme oceniť každú transakciu. Avšak je tu jeden problém. A to otázka, ako oceniť danú transakciu na aktuálny trh. V postupe, ktorý sme opísali v práci sme používali tabuľky histórie zlyhaní od ratingových agentúr. Taktiež sme si zvolili fixne danú koreláciu, a ako vstupný parameter našej analýzy sme použili predpoklad o recovery rate a spread, ktorý naša tranža vynáša.

Ako však oceniť aktuálne trhové riziko ? Dá sa vôbec oceniť aktuálna pravdepodobnosť zlyhania, recovery rate či korelácia, keď pozorovaní zlyhaní je tak málo ?

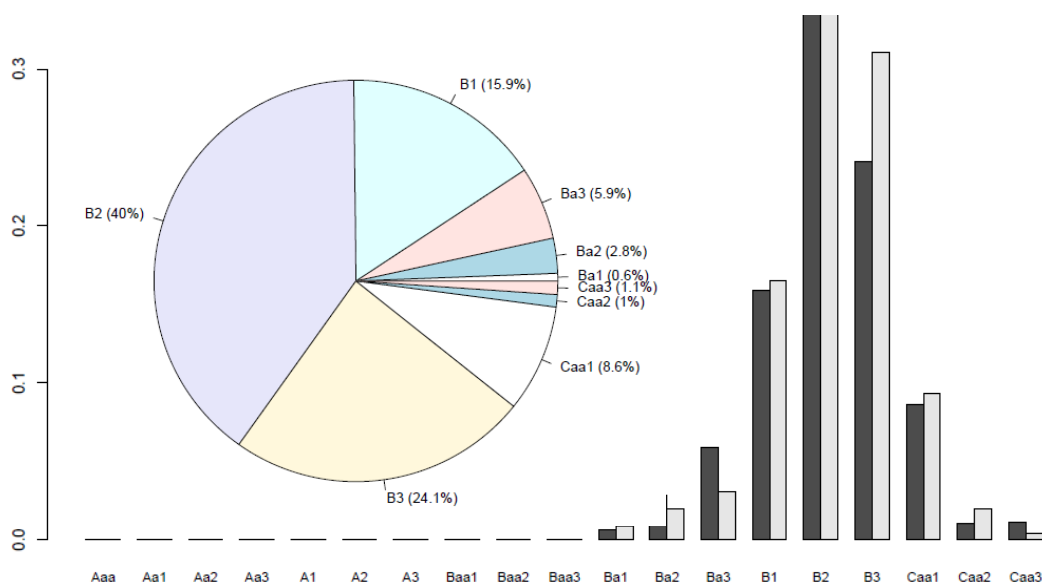
Odpoveď je, áno. Cieľom je nakalibrovať model tak, aby vstupné dáta, ktoré použijeme obsahovali v sebe informáciu o aktuálnom ocenení rizika zlyhania, či aktuálnej trhovej korelácie.

6.2 Definícia príkladu

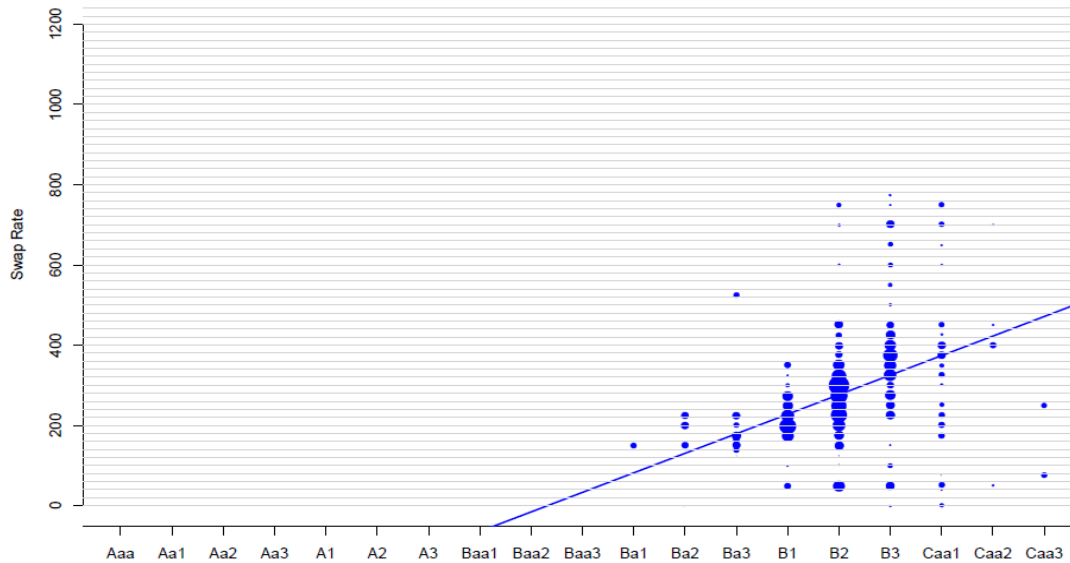
Predpokladajme, že máme za úlohu oceniť americké CLO Navigator. CLO vzniklo v roku 2004 ako potreba sekuritizácie banky BNP Pariba Paríž. Ako kolaterál manažera si vybrala Antares Asset Management Inc. Začiatkom roka banka vytvorila SPV s názvom Navigator a presunula doň aktíva, úvery firiem zo svojej bilancie v celkovom objeme 476m EUR. Aby mohla vyfinancovať tento presun SPV Navigator emitoval v rovnakom objeme pasíva, ktoré rozdelil do ôsmich rizikových skupín. Teda vznikla vybilancovaná súvaha o veľkosti 476m EUR. Keď sa pozrieme viac na stranu aktív, teda na diverzifikované portfólio úverov, tak môžeme povedať:

- Počet úverov, ktoré boli presunuté bol 460
- Priemerná splatnosť do splatnosti celého portfólia bola 6,3 roka
- Priemerná marža na úveroch bola 2,84%
- Priemerný rating celého portfólia vypočítaný pomocou idealizovaných pravdepodobností bol B3. Prislúchajúca priemerná pravdepodobnosť zlyhania portfólia bola 29%
- Portfólio sa správalo ako keby bolo tvorené len 20 nezávislými entitami, teda od jednej firmy tam bolo aj viacero úverov a zároveň firmy boli vzájomne prepájané

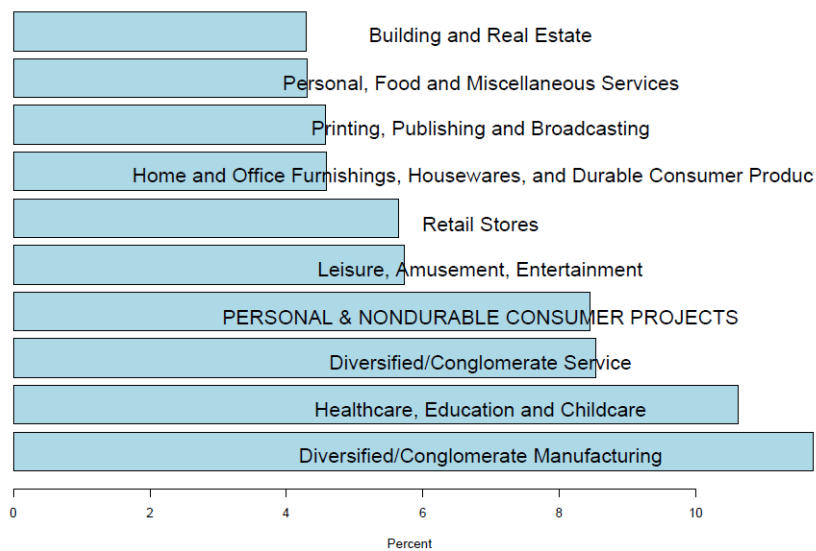
Na ďalších obrázkoch môžeme vidieť niektoré štatistiky portfólia.



Obrázok 6.2.1 : Rozdelenie ratingov portfólia podľa objemu čierny stĺpec/ podľa početnosti šedý stĺpec.



Obrázok 6.2.2 : Závislosť marže na úveroch od ratingu, preložené lineárnou krivkou.



Obrázok 6.2.3 : Najväčšie koncentrácie v sektoroch.

Už z doterajších informácií vidíme, že portfólio aktív je veľmi granulórne, ale málo diverzifikované. Viac ako 10% portfólia je v jednom sektore a je tam len 20 nezávislých entít.

Teraz sa pozrime na pasíva produktu. Banka sa rozhodla emitovať osem rôznych typov tranží. Equity tranža reprezentovala až 8,5% pasív, čo je 40,5m EUR. Je to pomerne dosť hrubá first loss tranža, teda je potrebné, aby zlyhalo až 8,5% portfólia aktív, aby

prvá Mez tranža bola postihnutá. Nasledujúca tabuľka nám dáva prehľad ako vyzerali jednotlivé tranže a aký rating sa im podarilo získať od Moodys ratingovej agentúry.

Tranche	Size	Size.pc	Sub.pc	Spread	Rating
Revolver	15.5	3.26%	96.74%	35	Aaa
Aaa.sen	262.5	55.15%	41.60%	33	Aaa
Aaa.jun	54	11.34%	30.25%	55	Aaa
Aa2	33	6.93%	23.32%	65	Aa2
A2	30	6.30%	17.02%	115	A2
Baa2	28.5	5.99%	11.03%	210	Baa2
Ba2	12	2.52%	8.51%	550	Ba2
Equity	40.5	8.51%	0%	0	NR
Summary	476			63.77	

Tabuľka 6.2.1 : Prehľad emitovaných pasív

Ako vidíme aj pasíva sú relatívne dosť granulórne. Emitentovi sa podarilo za portfólio s priemerným ratingom B3 získať až na 70% pasív rating Aaa, čo mu výrazne znížilo náklady, ktoré musí vyplácať.

Marža na týchto tranžiaciach dosahovala výnos do 0,5% pričom priemerná marža na aktívach bola až 2,8%. Niekde v týchto číslach je aj odpoveď, prečo si emitent vybral takúto zložitú štruktúru pasív. Na ďalších 20% pasív získal rating do Baa2 čo je stále o dosť lepší rating, ako na celom portfóliu aktív. Celkom úspešne sa podarila optimalizácia nákladov. Zaujímavé, ale nie prekvapujúce je, že len na 2,5% pasív platí emitent viac ako vynáša portfólio. V tabuľke hore, štvrtý stĺpec Sub.pc znamená aká veľká je subordinácia jednotlivých tranží. Spread je marža na 3m Libor, ktorú platí investorom emitent. Keďže cieľom je transfer kreditného rizika, všetky ostatné trhové riziká sú zahedgovane na strane pasív aj na strane aktív.

Okrem už spomínaných aktív a pasív sa v danej transakcii nachádzajú aj poplatky.

V našom prípade sú to:

- vstupný poplatok 4,8% z hodnoty aktív , pre všetkých
- trustee poplatok 4bp ročne z celkového portfólia aktív
- administratívny poplatok 4bp ročne z celkového portfólia aktív
- manažérsky poplatok 1,2% ročne z celkového portfólia aktív
- výnosový poplatok vo výške 25% z výnosu nad 8% p.a. pre všetkých

O tieto poplatky sa znižuje cashflow, ktorý ostáva pre držiteľov equity tranže a tiež rovnosť aktív a emitovaných pasív, pretože vstupný poplatok sa prirába k pasívam. Okrem toho, pre správne ocenenie, musíme mať ešte zadefinované takzvané testy krytia. V našom prípade sú to IC a OC testy.

Tranche	oc.trigger	ic.trigger
Revolver	0	0
Aaa.sen	0	0
Aaa.jun	0	0
Aa2	112.9	125
A2	106.6	120
Baa2	103.9	115
Ba2	101.4	110
Equity	0	0

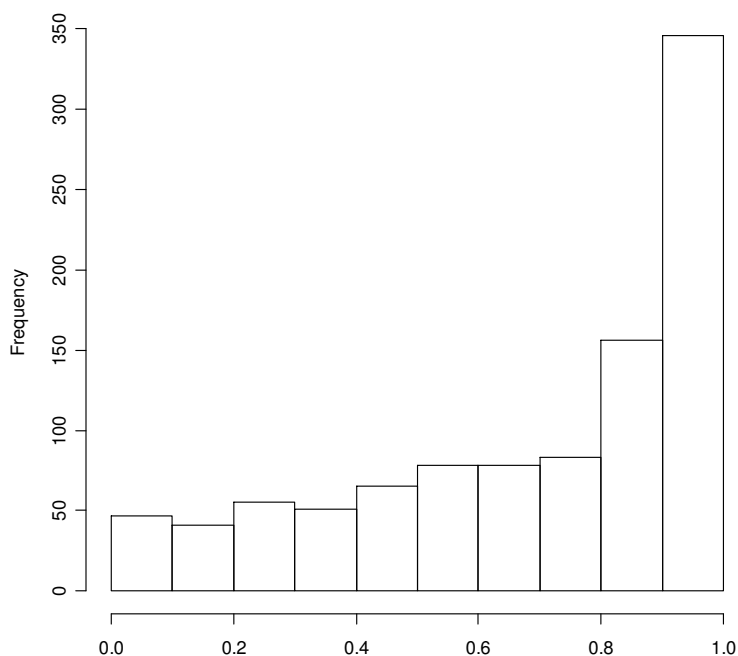
Tabuľka 6.2.2 : Prehľad IC, OC testov emitovaných pasív.

Pripomeňme, že IC test pre tranžu A2, 125 znamená, že výnos z aktív musí stále byť aspoň 125%, čiže väčší ako výnos potrebný pre tranže senior až A2. Ak tomu tak nie je, spúšťa sa redemácia senior tranže až pokiaľ táto podmienka nie je splnená opäť. To isté aj pre OC test. Ak pre danú tranžu nie je splnené krytie kolaterálom, tak automaticky sa redemuje štruktúra podľa seniority. Testy slúžia na ochranu senior a mez investorov a sú dosť bolestivé pre equity investorov.

6.3 Kalibrácia na trh

Jedna z ciest ako môžeme model nakalibrovať na trh je použiť stress faktor. V tomto prípade si zafixujem korelačnú maticu, konkrétne použijeme koreláciu, ktorú používa S&P agentúra. To znamená 30% koreláciu v rámci jedného sektora a 12% koreláciu medzi sektormi.

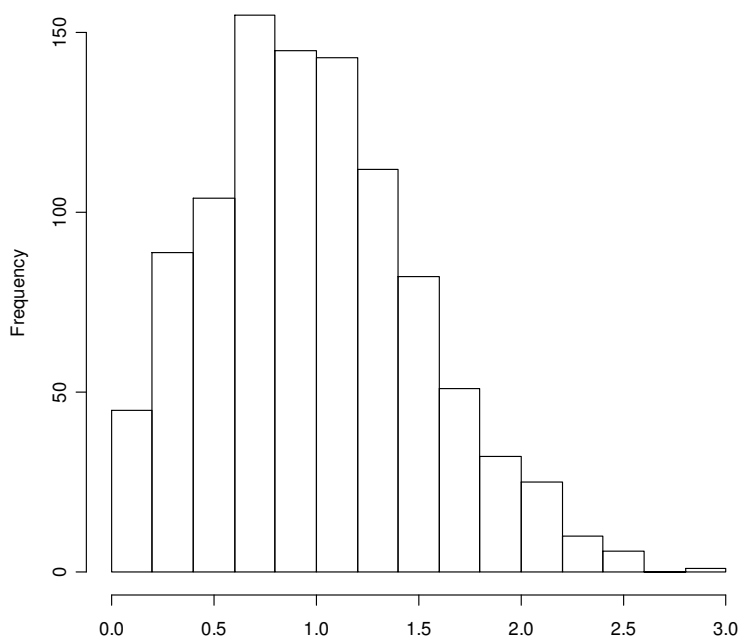
Taktiež si zafixujeme recovery rate. Na to použijeme historické dáta Moodys, aká bola priemerná návratnosť pri zlyhaní firmy v jednotlivých krajinách a typov aktív (bond, Equity, sub debt). Tabuľky s týmito dátami sú v prílohe. V našom prípade to bude očakávaná recovery hodnota 69% s volatilitou 29%. Pre generovanie recovery sme sa rozhodli použiť beta rozdelenie práve s týmito štatistikami. Použijeme beta rozdelenie pretože z analýz historických dát zlyhaní od agentúry Moodys pomocou testov hypotéz o zhode rozdelení, nám vyšlo ako najlepšie fitujúce. Viac o dôvodoch prečo beta rozdelenie najlepšie fituje recovery rate nájde čitateľ v práci : “Why Beta-Distribution – demand/supply theory of recovery rates“, Alexander Morozovskiy, working paper 2007.



Obrázok 6.3.1 : Histogram recovery rate so štatistikami 0,69 a 0,29.

Keď už máme recovery rate, tak ešte potrebujeme vedieť, kedy sa čiastka recovery vráti. Predpokladajme v našom modeli, že ak sa recovery vráti, bude sa investovať proporčne do ostatných aktív. Akoby sa nanovo doinvestovalo, ale za úplne

rovnakých podmienok ako na začiatku transakcie. Ak je v portfóliu veľa zlyhaní, tak v závere máme veľmi homogénne portfólio. To je asi najväčšie riziko tohto prístupu. Ale takýto prístup zvyšuje riziko zlyhania, takže nenadhodnocuje cenu transakcie. Na modelovanie časov platieb recovery použijeme rozdelenie weibull so štatistikami 1 a 2. To znamená, že platba sa môže uskutočniť v intervale od vzniku zlyhania do 2 rokov. Opäť sme zvolili toto rozdelenie, lebo sa javí ako najlepšie. Pomocou štatistických testov na typ rozdelenia sme analyzovali historické dáta, a toto rozdelenie sa ukázalo ako najlepšie fitujúce na historické dáta.



Obrázok 6.3.2 : Histogram Weibull rozdelenia so štatistikami 1 a 2.

Pre úplnú informáciu ešte uvedieme, že model, ktorý sme zvolili a prispôbili v prípade CLO používa aj predpoklady o prepaymentoch, teda o predčasnom splatení aktív. Je to určitý typ rizika transakcie, pretože ak sa veľká časť portfólia splatí predčasne na strane aktív, tak je tu veľký nesúlad splatností. To rieši takzvané doinvestovanie portfólia. Avšak tento prístup v sebe nesie riziko nových aktív. V našom modeli budeme predpokladať, že všetko čo sa splatí sa preroluje opäť do rovnakých aktív. Teda nebudeme uvažovať, že portfólio sa počas života bude dopĺňať novými aktívami.

K oceneniu našej transakcie Navigator budeme potrebovať ešte ďalšie informácie ako sú úrokové sadzby a diskontné faktory. Keďže sa jedná len o transfer kreditného rizika, trhové riziká sú zahedgované. Stačí nám teda mať úrokové swapy

aktuálne a z nich vypočítame implikované forwardy do budúcnosti a diskontné faktory, pomocou ktorých vypočítame súčasnú hodnotu. Trhové dáta sme použili zo systému Bloomberg a všetky precenenia v práci sme robili k dňu 20.2.2006. Tento deň sme si vybrali, lebo k danému dňu máme ceny CLO z troch nezávislých zdrojov a môžeme ich porovnať. Môžeme teda urobiť kvalitnú komparatívnu analýzu.

Zadefinujme si teraz stress faktor ako hodnotu, ktorá nám pravdepodobnosť prežitia zmení. Teda $S_i(t)^{stress} = (\exp(-\int_0^t h_i(u) du))^{stress}$ inak povedané pomocou tohto faktora vieme modifikovať naše nakalibrované kreditné krivky na aktuálne trhové dáta. Ak chceme model nakalibrovať na aktuálne kótované korelácie zlyhania na trhu jediná možnosť, ako to získať, je iTraxx index. Je to jediný nástroj kótovania korelácie zlyhaní trhov.

iTraxx je index, ktorý je tvorený podkladovými aktívami najobchodovanejších (najlikvidnejších) spoločností. Tento index sa však nekótuje ako akcie, ale ako CDS. Aký musí kupujúci zaplatiť spread za to, že dané spoločnosti neskrachujú.

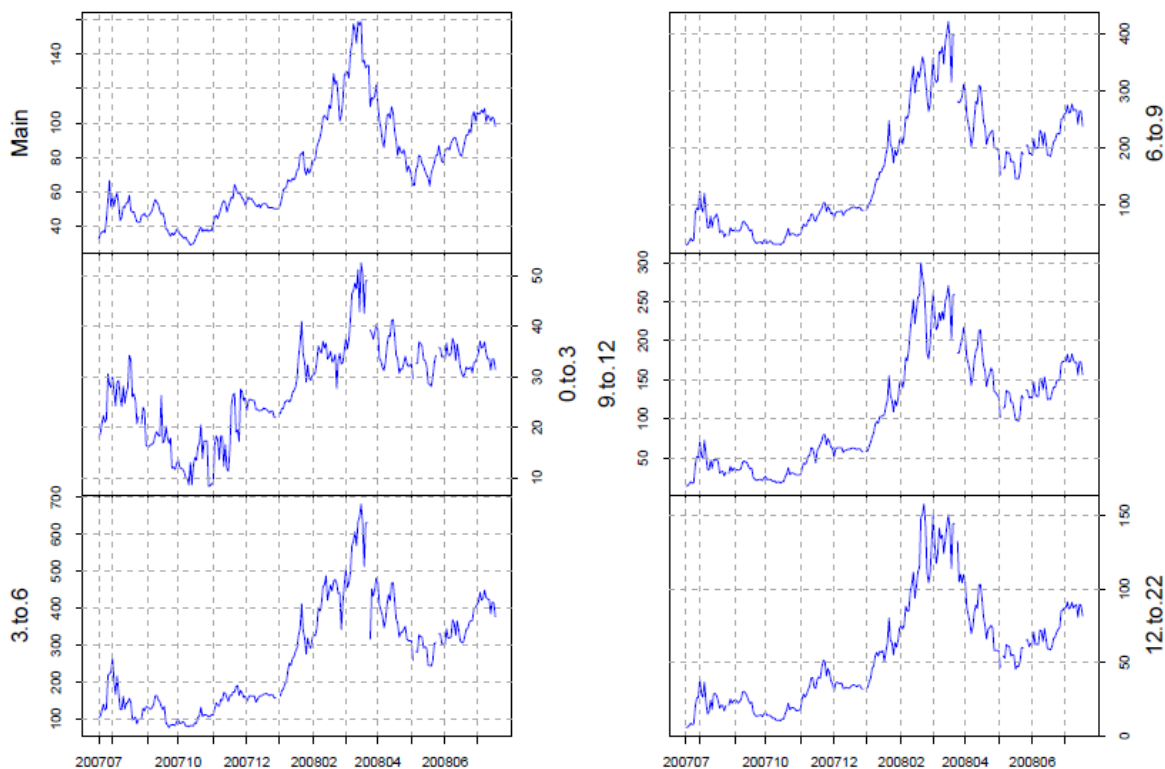


Obrázok 6.3.3 : Graf vývoja indexov iTraxx Main a CDX Main

Jedna sa iba čisto o kreditný risk. Navyše sa nad týmto indexom kótuju aj štandardizované tranže a to 0%-3%, 3%- 6%, 6%- 9%, 9%-12% a 12%-22%. Na trhu je možné nájsť online cenu na tieto tranže.

Dosadíme teraz do modelu za portfólio iTraxx portfólio a ako tranže kótované tranže. Spustením modelu a ocenením jednotlivých tranží získame ich ceny. Budeme iteráciami hľadať taký stress faktor, že pri daných recovery rate platí rovnica

$$\text{trhová cena iTraxx tranže } 0\%-3\% - PV [\text{model} / (\text{historické default rate})^{\text{stress}}] = 0$$



Obrázok 6.3.4 : Graf vývoja tranžovaných indexov iTraxx Main

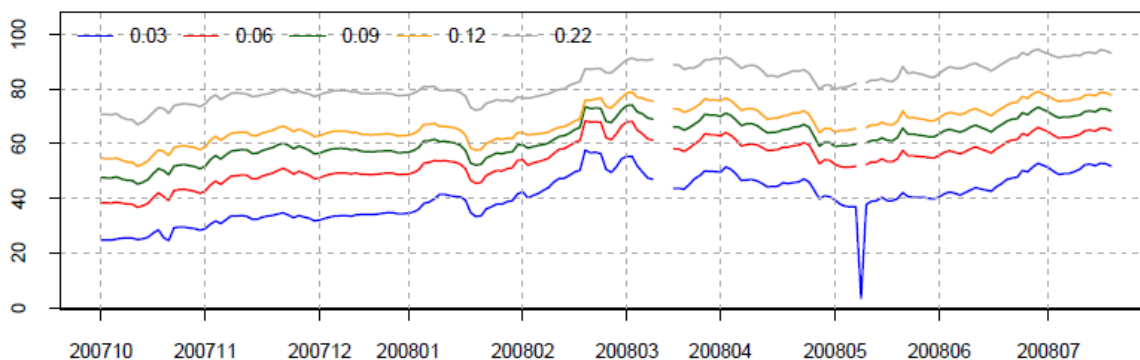
To iste urobíme pre ostatné kótované tranže. Tým získame vektor stress faktorov, ktoré prislúchajú k jednotlivým kótovaným tranžiam. Takto nepriamo na kalibrujeme náš model na trhovú koreláciu jednotlivých tranží. Na ďalšom obrázku je vidieť kotácie korelácie iTraxu v daný deň.

10Y	Reference 58		
Losses	Bid	Offer	Base Corr
0-3%	500+57.75%	500+58.50%	7.4%
3-6%	522	532	13.8%
6-9%	98	101	25.5%
9-12%	42	45	35.3%
12-22%	22	24	58.8%

Obrázok 6.3.5 : Kótované tranže na Bloombergu.

Hlavnou výhodou tohto prístupu je, čím väčší je stress faktor, tým horšie sú výsledky všetkých tranží. Je to jednoduchšie ako pri stresovaní korelácie, kde existuje takzvaný korelačný smile ako pri volatilitate opcii. Teda vysvetlenie zmien je jednoduchšie.

Ďalší krok, ktorý je potrebné urobiť pri modelovaní iTraxov je nebrať do úvahy ich oficiálny rating a na základe toho počítať straty, ale takzvaný implikovaný rating , ktorý sme vypočítali z aktuálnych kótovaných CDS na jednotlivé podkladové mena.



Obrázok 6.3.6 : Vývoj base korelácie tranží iTraxx kótovanej na Bloomburgu.

Vzali sme aktuálne riziko zlyhania entít, tak ako ich vidí trh, a nie ratingová agentúra. Získali sme takto implikované stress faktory, ktoré uvádzame v nasledujúcej tabuľke :

tranche	Implied Stress	Implied Fitch Rating
12-22%	1.45	NR
9-12%	0.91	AAA
6-9%	0.75	AA+
3-6%	0.55	BBB+
0-3%	0.87	NR

Tabuľka 6.3.7 :Vypočítané implikované stress faktory.

Pre jednoduchosť budeme oceňovať len dve tranže z našej transakcie. Konkrétne tranžu Aa2 a tranžu A2. Implikovaný rating pomocou idealizovaných pravdepodobnosti pre iTraxx mi vyšiel pre tranžu 6-9% AA+. Naša prvá tranža je Aa2 , čo je o jeden stupeň menej ako AA+ a teda musíme použiť interpoláciu.

Použijeme lineárnu interpoláciu a dostávame pre Aa2 stress faktor :

$0,75 - (0,75 - 0,55) / 6 = 0,717$. Teda pre tranžu Aa2 je implikovaný stress faktor **0,717**.

Pre tranžu A2 obdobne interpoláciou získame $0,75 - 4 * (0,75 - 0,55) / 6 = \mathbf{0,617}$.

Ako je vidieť aj z tabuľky, v danom období sa kótovalo väčšie riziko senior tranži ako je historické a pre junior naopak. Zaujímavé poznanie, očakávali by sme presný opak.

Následne môžeme vypočítať cenu tranže z rovnice

$$\left(\frac{Cena}{100} - 1\right) * veľkosť.tranže = ((spread.tranže - DAS) * annuita) * veľkosť.tranže ,$$

a úpravou dostaneme $Cena = [1 - (DAS - spread.tranže) * Annuita] * 100$.

Kapitola 7

Dosiahnuté výsledky. Porovnanie s trhom

Keďže už máme náš model nakalibrovaný na trh, môžeme teraz porovnať naše výsledky s trhom. Pozrieme sa aj na senzitivitu na vstupne dáta. Zhodnotíme či model generuje realistické dáta a či sa dajú použiť pri investičných rozhodnutiach. V závere si pripomenieme prečo vznikla súčasná kríza a povieme aký ma následok na súčasné banky.

7.1 Výsledky

Pozrime sa najprv , čo to znamená pre náš príklad. Tranže Aa2 a A2 boli v danom období 20.2.06 ocenené trhom za priemernú cenu 99,56% respektíve 98,58% . To znamená , že ak pôvodne tranže mali výnos 3m Libor + 65bp pre tranžu Aa2 pri cene 99,56 je to už 3m Libor + 72bp p.a. a pre A2 z pôvodných 115bp trh očakával až 123bp pri cene 98,58. Teda trh už 20.2.06 očakával väčšie straty na portfóliu ako pri vydávaní transakcie. Navyše sa skrátila aj splatnosť produktu o 2 roky, takže aj cena kreditného riziko sa mala znížiť. Pochopiteľne neberieme do úvahy bid/ask spread a transakčné náklady.

Podme sa teraz pozrieť, aké ceny nám vypočítal model, keď sme ho nakalibrovali cez stress faktor na aktuálne iTraxx korelácie.

Tranche	Size	PVpc.95	PVpc.99	VaR.95	VaR.99	Exp.loss	Sharpe	Duration	DAS	Loss.prol	Rating	IRR
Aa2	33	99.349	99.163	-0.224	-0.288	0.158	0.51	6.74	62.39	0.3	A1	5.11
A2	30	96.239	44.205	-1.2	-17.802	1.48	0.219	7.174	87.15	4	Baa2	5.12

Tabuľka 7.1.1 :Výsledky simulácie s historickými dátami zlyhaní.

Ak by sme predpokladali, že historické dáta dobre popisovali situáciu na trhu v danom období, modelom sme získali tieto výsledky:

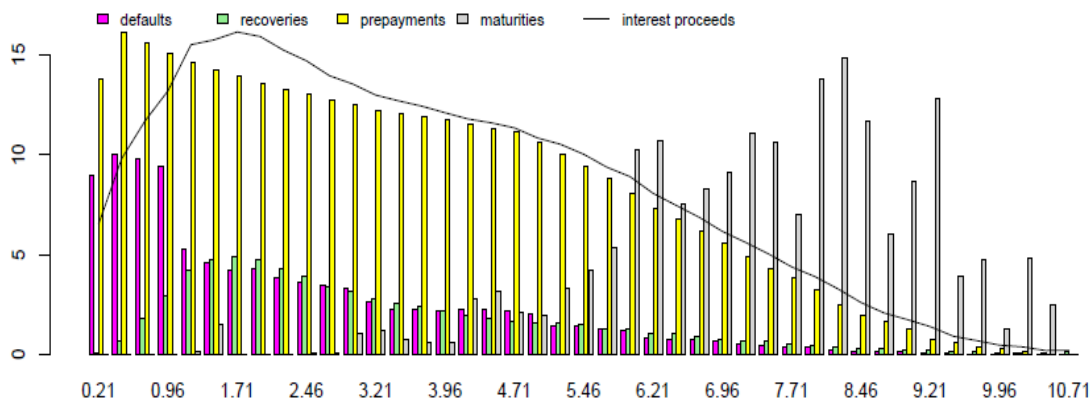
- pre tranžu Aa2 sme vypočítali PV= 99,349% s 95% -ou istotou
- pre tranžu A2 bola hodnota PV =96,23% s 95% -ou istotou spoľahlivosti.

Model ocenil dané tranže pod par, čo znamená, že výnos, ktorý bol poskytnutý investorom už v danom období, teda 2 roky po emisii, nekompensoval riziká spojené s portfóliom. Model je založený na simuláciách MC a v našom prípade sme urobili 10 000 simulácii kvôli zníženiu štatistickej chyby. Z rozdelenia PV môžeme vypočítať aj VaR 95%.

Ako môžeme vidieť, z výsledkov pre A2 tranžu je VaR99% až 17m, čo predstavuje viac ako 50% strát jej hodnoty. Môžeme povedať, že daná tranža je veľmi citlivá na extrémne hodnoty.

Očakávaná strata pre A2 tranžu vyšla 1,48% a pre Aa2 0.15%. Z týchto očakávaných strát sme pomocou idealizovaných pravdepodobností určili aj rating tranži. Pre Aa2 nám vyšiel rating A1 a pre A2 až Baa2. Teda vyšiel nám dosť veľký nesúlad s ratingovými agentúrami. Ďalšie údaje si môžeme pozrieť priamo v tabuľke 7.1.1.

Nepodarilo sa nám pomocou historických dát potvrdiť externe pridelený rating. Dôvodom je, že sa zhoršila kvalita portfólia. Počas dvoch rokov sa historické dáta zmenili o pozorovania počas týchto dvoch rokov a v neposlednom rade aj prístup ratingovej agentúry pri prideľovaní externého ratingu. Tieto faktory spoločne mali za následok, že našim modelom za pomoci len historických. dát sme získali pre tranžu Aa2 rating o dva stupne horší a pre tranžu A2 o tri stupne horší rating.



Obrázok 7.1.2 Stĺpcový graf všetkých cashflow transakcie. Časový priebeh zlyhaní, prepaymentov splatností portfólia aktív a priatych kupónov na strane aktív.

Na obrázku 7.1.2 môžeme vidieť časovú štruktúru prepaymentov. Od začiatku postupne, takmer lineárne klesajú až k 0 v splatnosti. Dôvod je jasný, znižovanie objemu aktív portfólia o papiere zlyhané a predčasné umorovanie pre testy krytia.

Čo sa týka zlyhaní, tak môžeme vidieť, že najviac ich nastalo v období prvého roka a potom sa postupne znižujú taktiež k 0. Dôvodom najväčšieho zlyhania papierov v prvom roku je ich rating, keďže ten je veľmi nízky. Pravdepodobnejšie je, že ak papier nezlyhá hneď, tak potom už pravdepodobnosť zlyhania s časom rastie veľmi pomaly. Vyplýva to z vlastnosti distribúcie hustôt našich kreditných kriviek.

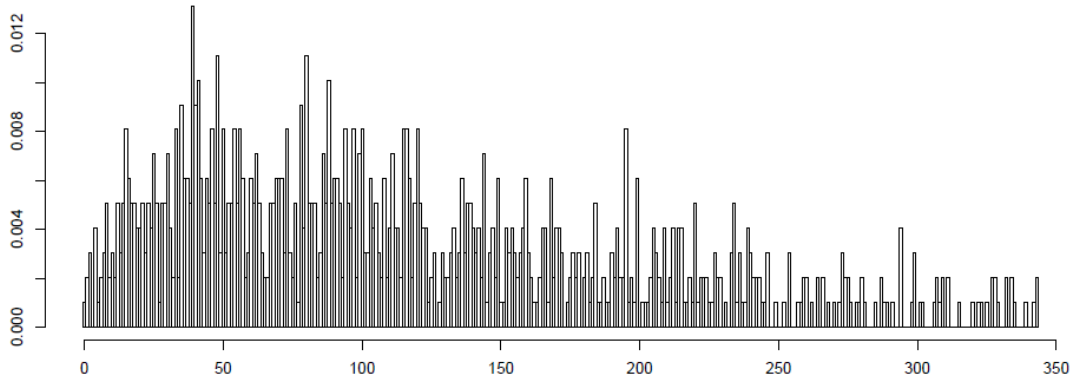
Recovery rate nastupuje oneskorene od prvého roka a vrchol dosahuje v treťom štvrtroku druhého roka. Je to spôsobené oneskorením vyplácania recovery cez Weibull distribúciu so štatistikami 1 a 2.

Teraz sa pozrime na výsledky nakalibrovaného modelu pomocou stress faktorov pre Aa2, A2 tranže 0,717 resp. 0,617.

Tranche	Size	PVpc.95	PVpc.99	VaR.95	VaR.99	Exp.loss	Sharpe	Duration	DAS	Loss.prob	Rating	IRR
Aa2	33	99.212	99.038	-0.272	-0.332	0.018	1.018	6.926	64.06	0.3	Aa2	5.19
A2	30	98.561	94.732	-0.466	-1.707	0.114	0.49	7.3	107.2	0.7	A2	5.6

Tabuľka 7.1.3 :Výsledky simulácie s nakalibrovaným modelom pomocou stress faktora.

Keď sa pozrieme na výsledky a porovnáme so stress = 1 vidíme , že pomocou stress faktora sme potvrdili externý ratingy tranži. Vďaka stress faktorom klesla očakávaná strata pre tranžu Aa2 z pôvodných 0,15% na 0,018% čomu už prislúcha rating Aa2 pre A2 z 1,48% na 0,114%.



Obrázok 7.1.4 : Histogram zlyhaní portfólia pri stress faktore 0,717.

Keď sa pozrieme na PV tranží vidíme , že sme sa dostali veľmi blízko k trhovým cenám. Pre Aa2 tranžu sme pomocou historických dát dostali PV 95% = 99,34 a po nakalibrování o niečo menej 99,212. Priemerná trhová cena v tom čase bola 99,56% , čo je o trochu viac.

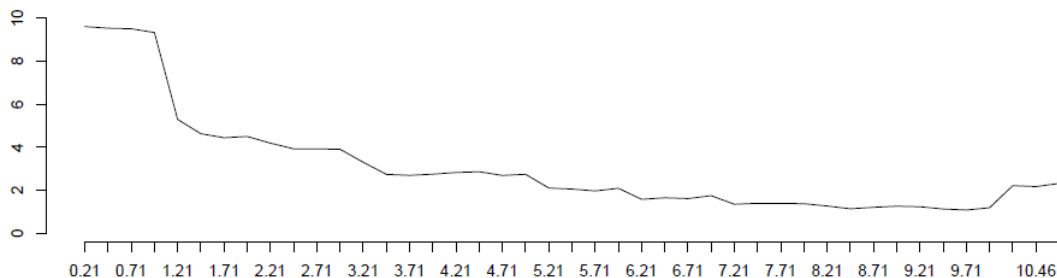
Keď sa pozrieme na A2 tranžu, tak pomocou historických dát sme dostali PV 95% = 96,23 a po nakalibrování 98,56. Priemerná trhová cena v tom čase bola 98,58%.

Teda nakalibrovaný model pomerne presne ocenil danú tranžu. Keď sa pozrieme na DAS, taktiež je možné vidieť zlepšenie z 87bp na 107bp. Čo sa týka IRR, tak stresovaním sme dostali IRR o 0,5% lepši. Zaujímavé je, ako veľmi kleslo VaR. Z tohto môžeme usúdiť, že model je veľmi citlivý na nakalibrovanie a aj menšie zmeny v stress faktore alebo korelácii, spôsobujú relatívne veľkú zmenu VaR teda extrémnych hodnôt.

Pre ľahšie porovnanie oboch prístupov sme vypočítali aj Sharpe ratio. Pre Aa2 sa zlepšilo kalibráciou o 0,5 a pre A2 o 0,2. Celkový rizikový profil, o čom nám hovorí Sharpe ratio, sa zlepšil.

Ak zosumarizujeme výsledky modelu, tak tranžu A2 môžeme predat' za trhovú cenu, pretože je to cena, ktorá prislúcha aktuálnej cene rizika. Tranžu Aa2 musíme jednoznačne predat', pretože trh momentálne nadhodnocuje jej cenu o 0,3% a teda je tu priestor na arbitráž.

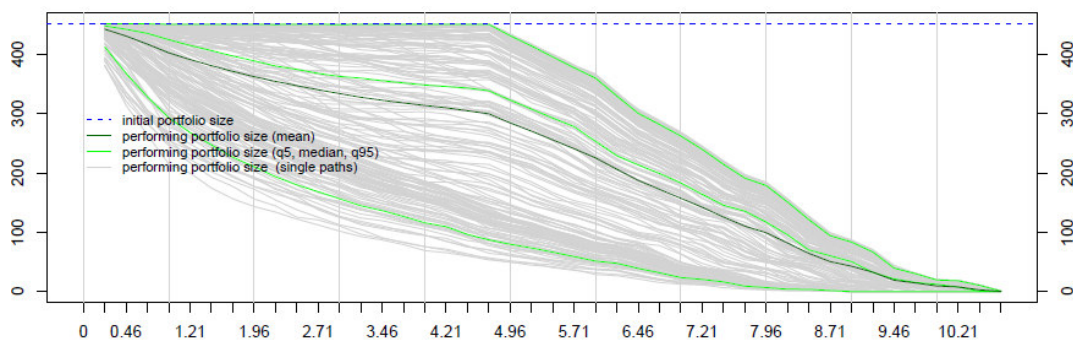
Ďalej ešte prikladáme niekoľko zaujímavých grafov z analýz.



Obrázok 7.1.5 :Priemerný počet zlyhaných firiem z celkového počtu v % v jednotlivých časových úsekoch .

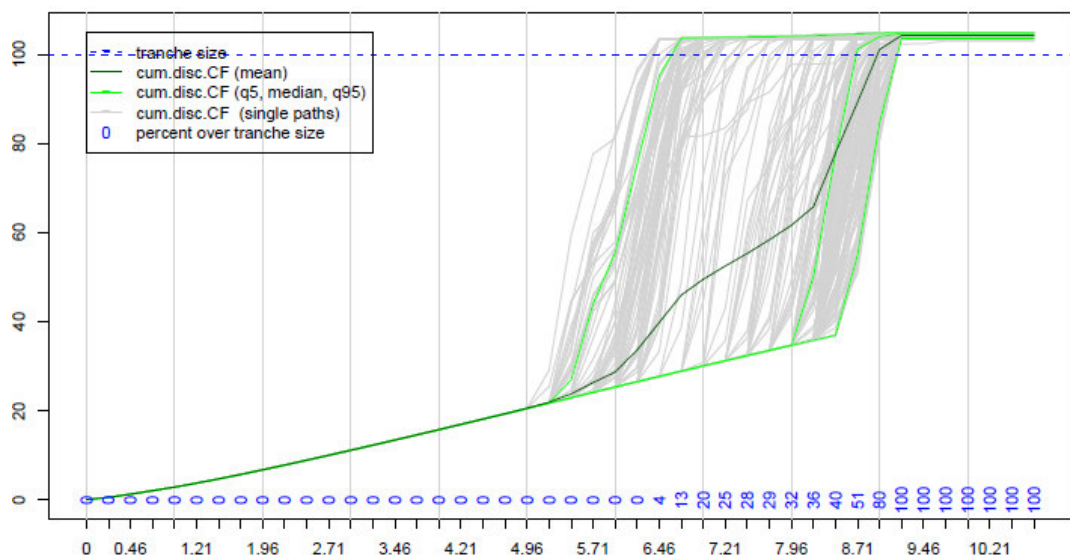
Tento obrázok zobrazuje vývoj početnosti zlyhania v čase. Je to neobjemové porovnanie, keďže náš model je od objemu aktív nezávislý. Generuje len zlyhanie ratingov. Až následne pri výpočte cashflow sa prejavuje aj diverzifikácia objemov.

Zaujímavé na grafe je, že početnosť zlyhaní klesá skokovite na začiatku a v závere v roku 10 naopak opäť hore. Dôvodom môže byť, že v závere je už takmer celé portfólio homogénne a naraz zlyháva väčší počet aktív. Nie je známy iný matematicky dôvod pre tento často sa opakujúci jav.



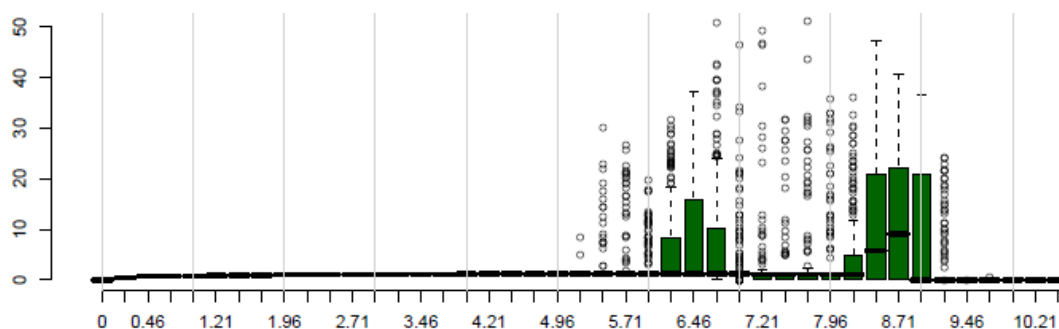
Obrázok 7.1.6 : Graf ciest vývoja trhovej hodnoty portfólia a jednotlivé štatistiky.

Quantily a priemerne hodnoty portfólia nám hovoria ako sa portfólio správa počas života. Z grafu je možné vidieť volatilitu simulovaných ciest. Najväčšia volatilita sa realizovala v priebehu 3 až 6 roka života transakcie. Taktiež je veľmi pekne vidieť amortizačný profil transakcie, za ktorým stojí profil splatnosti a IC / OC testy.



Obrázok. 7.1.7 : Graf ciest vývoja trhovej hodnoty tranže Aa2 a jednotlivé štatistiky. Quantil 95% a priemerné hodnoty PV⁷.

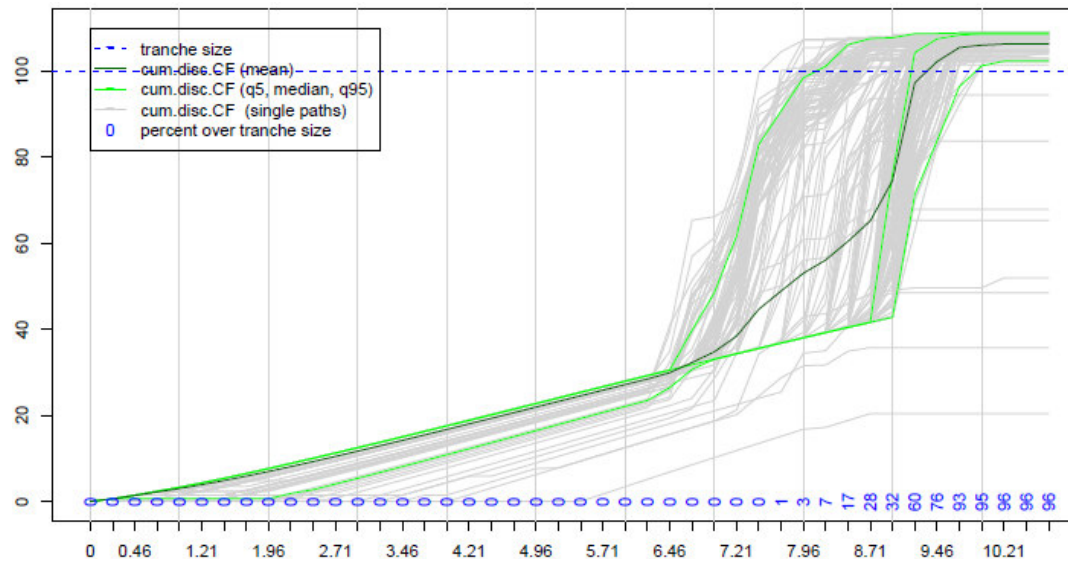
Z grafu je možné vidieť volatilitu simulovaných ciest PV tranže Aa2. Oproti grafu PV portfólia je vidieť rozdiel v tom, že do roku 5 boli straty z portfólia menšie ako je subordinácia tranže. V období 5 až 9 roka bola tranža najviac volatilná. Je to spôsobené jej subordináciou, IC a OC testami, kde ak nastal zlom, začala sa predčasne umorovať daná tranža. Záver je, že danú tranžu je najlepšie predáť do piateho roka života. Po piatom roku je tranža veľmi volatilná a je pravdepodobné, že sa bude rýchlo umorovať, teda aj jej výnos bude alikvotne klesať.



Obrázok 7.1.8 :Boxplot jednotlivých cashflow pre tranžu Aa2.

⁷ PV – súčasná hodnota, present value

Opäť je vidieť, že najvolatilnejšie obdobie je 6,5 a 8,7 roka života tranže. Analýza cez boxpot grafy nám ukázala, že v čase 7,21 roka sa objavilo veľa extrémnych hodnôt zlyhaní. To nám ukazujú extrémne hodnoty outlierov ale gro cashflow bolo relatívne stabilne.



Obrázok 7.1.9 : Graf ciest vývoja trhovej hodnoty tranže A2 a jednotlivé štatistiky. Quantil 95% a priemerne hodnoty.

S tranžou A2 je to iné a jasne sa tu prejavuje nižšia subordinácia o 6%. Tranža je volatilná už od začiatku simulácie. To znamená, že extrémne hodnoty zlyhaní ju už zasahujú od 1. roka. Opäť je vidieť, že väčšina tranže sa amortizuje v období 6,5 až 8,7 roka. Teda v tomto období nám kreditné riziko tranže veľmi rýchlo klesá. Ku grafom sme ešte pridali, pre ľahšiu analýzu, aj percentá, koľko % z tranže sa splatí v danom čase. Tieto percentá sú kumulatívne pre ľahšie porovnanie. Pri tranži A2 vidíme, že počas roka 8 sa v priemere splatí, umorí, až 28% tranže. Na porovnanie s tranžou Aa2 je to o 12% menej.

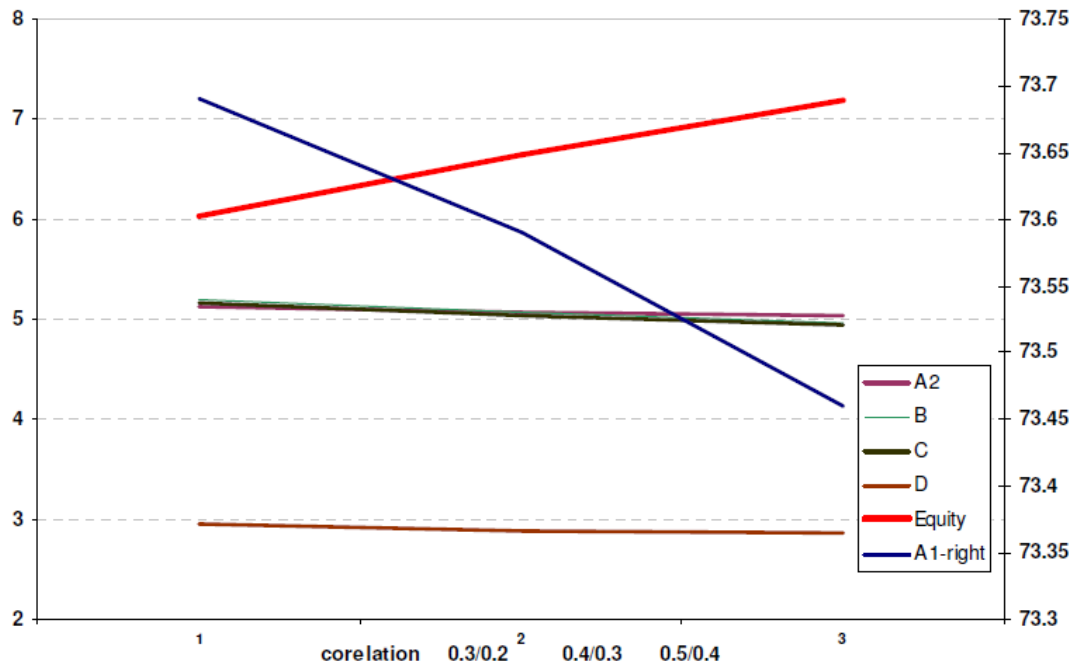
Ďalším zo spôsobov, ako kalibrovať model na trh, je ponechať historické kreditné krivky bezo zmien, to znamená nemeniť stress faktor, ale modifikovať koreláciu.

Obdobne sme na to použili iTraxx. Teda riešili sme rovnicu :

$$\text{trhová cena } i\text{Traxx tranža}_i - PV [\text{model} / r_i] = 0,$$

kde r_i je korelácia pre tranžu i , ktorá rieši príslušnú rovnicu. Opäť použijeme newtonovu iteračnú metódu na jej vyriešenie. Takýmto spôsobom získame implikovaný korelačný

smile. Musíme však podotknúť, že táto metóda je veľmi náročná na interpretáciu výsledkov. Keďže sa jedná o nelinearitu modelu, pre equity tranže je vyššia korelácia pozitívna z pohľadu zlyhaní. Vyššia korelácia spôsobuje menšiu stratu equity tranže. Pre mezanin tranžu je vyššia korelácia problém, pretože zvyšuje početnosť extrémnych strát a pre senior tranže je to najhoršie. Ak zvýšime celkovú koreláciu nadhodnotíme Equity tranžu a podhodnotíme senior tranžu. Celé si to môžeme vysvetliť na nasledujúcom grafe.



Obrázok 7.1.10 : Príklad grafu senzitivity PV tranží na zmenu korelácie jednotlivých tranží, pre lepšiu názornosť je A1 na pravej y-osi.

Ako je vidieť z grafu pre equity tranžu je veľká korelácia z pohľadu PV pozitívna a pre mez a senior tranže je to presne naopak. Hlavne pre super senior tranže to má veľký vplyv na zmenu PV. Celý tento jav je spôsobený nelinearitou korelácie a nevychylenosťou odhadov.

Model sme kalibrovali pomocou rôznych korelácií a počítali hodnotu tranží iTraxx. Použili sme portfólio iTraxx a počítali sme hodnotu tranží pre jednotlivé korelácie. V tabuľke je v prvom riadku tranža, potom ako bola v daný deň ohodnotená trhom (zdroj dát bol Bloomberg). Pre tranžu 0-3% trhovú cenu 27,6% znamená, že kupujúci tranže dostane 27,6% ročne maržu. Obdobne pre ostatné tranže, ale v bp a nie v %. Ďalej sme zafixovali všetky ostatné parametre a menili sme len koreláciu zlyhaní.

V jednotlivých stĺpcoch je možné vidieť, ako model ocenil jednotlivé tranže pri rôznych koreláciách. Pre koreláciu 0 vyšla cena tranže 0-3% 43,7% pričom trh ju hodnotil 27.6%. Keď sme zvýšili koreláciu na 25%, už sme dostali výsledok blízko trhu. Takto sme vypočítali implikované korelácie pre jednotlivé tranže. Problémom však zostáva, ktorú koreláciu dať do modelu na ocenenie? Keďže model má na vstupe len jednu korelačnú maticu a tá je od tranži nezávislá.

Tranže	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%
Trhove ceny	27.60%	168	70	43	20
Korelacia	Ocenenie model				
0%	43.70%	66	0	0	0
5%	41.00%	107	9	3	1
10%	37.90%	133	23	10	4
15%	34.80%	150	37	18	8
20%	31.70%	161	49	26	13
25%	28.60%	167	60	35	18
30%	25.50%	171	69	42	23
40%	19.50%	173	84	56	34
Implikovaná korelacia	27%	26%	30%	30%	27%

Tabuľka 7.1.11 :Výsledky simulácie pri zmene korelácie pre iTraxx tranži.

Keď vezmeme ako vstupnú koreláciu 30%, najväčšiu, nenadhodnotíme equity tranžu? A naopak, ak vezmeme 27%, nenadhodnotíme senior tranžu? Odpovede na tieto otázky neexistujú a každý, kto zostrojuje model na oceňovanie, si musí vybrať sám. Často sa používa takzvaný inžiniersky prístup. Výberom sa samozrejme dopúšťa určitej chyby, ale práve tá vytvára priestor na trhové arbitráže. Práve pre túto nejednoznačnosť sa tento prístup v praxi veľmi neuchytil, respektíve používa sa ako kontrola výsledkov z iných modelov.

Keď sa teraz pozrieme na výsledky, tak vidíme, že pre naše tranže vyšla implikovaná korelácia 30% a teda vlastne výpočet so stress faktor rovný 1 je identický. Náš prvý prípad. Ak to zosumarizujeme, prístup cez implikované korelácie nám dáva horšie výsledky ako sme dostali pomocou prístupu stresovania historickej pravdepodobnosti zlyhania. Inak povedané, takýto prístup sa javí ako konzervatívnejší pre tranže.

Pre ľahšie porovnanie ukážeme ešte raz výsledky pre obe metódy.

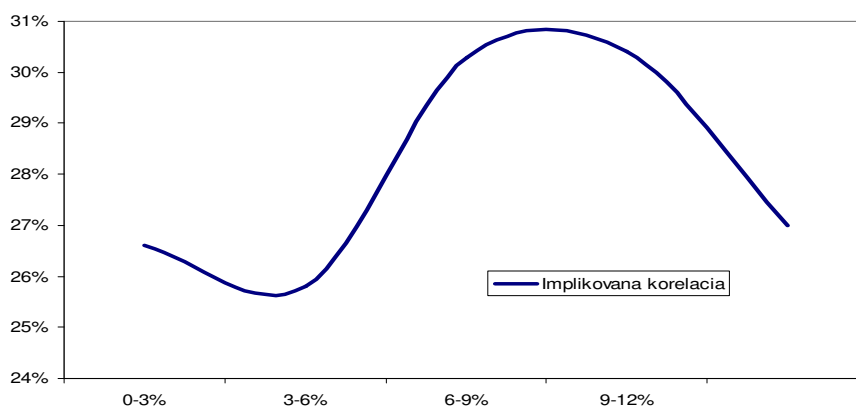
Tranche	Size	PVpc.95	PVpc.99	VaR.95	VaR.99	Exp.loss	Sharpe	Duration	DAS	Loss.prol	Rating	IRR
Aa2	33	99.349	99.163	-0.224	-0.288	0.158	0.51	6.74	62.39	0.3	A1	5.11
A2	30	96.239	44.205	-1.2	-17.802	1.48	0.219	7.174	87.15	4	Baa2	5.12

Tabuľka 7.1.12 :Výsledky simulácie s implikovanou koreláciou

Tranche	Size	PVpc.95	PVpc.99	VaR.95	VaR.99	Exp.loss	Sharpe	Duration	DAS	Loss.prob	Rating	IRR
Aa2	33	99.212	99.038	-0.272	-0.332	0.018	1.018	6.926	64.06	0.3	Aa2	5.19
A2	30	98.561	94.732	-0.466	-1.707	0.114	0.49	7.3	107.2	0.7	A2	5.6

Tabuľka 7.1.13 :Výsledky simulácie s implikovaným stress faktorom

Na záver ešte ukážeme korelačný smile implikovanej korelácie iTraxxu.



Obrázok 7.1.14 :Graf korelačný smile pre iTraxx .

Z grafu je vidieť, že to nie je ideálny smile ale skôr vlnka. Je to spôsobené tým, že super senior tranža, z dôvodov nízkej likvidity nie je „najlepšie ocenená“. Určitá deformovanosť je spôsobená tým, že trh nevidí zmysel obchodovať toto nelikvidné senior riziko trhovu ale skôr mimotrhovu.

Bolo to vidieť aj na najväčšej poisťovni AIG, ktorá v roku 2008 takmer skrachovala práve kvôli obchodovaniu s takýmito super senior tranžami, „takmer“ bez rizika, ktoré nedokázala správne oceniť. Tieto tranže sú z matematického hľadiska „takmer“ bez rizika, avšak obsahujú v sebe veľký leverage a aj pri menšej zmene trhových podmienok ich MtM, precenenia na trh, spraví viditeľnú zmenu. Keď sa to spojí s ich veľkým objemom má to za následok veľké materiálne zmeny v precenení. Práve to bol aj jeden z hlavných dôvodov, prečo tento asset class už v súčasnosti neexistuje.

Nie je totiž možné zostrojiť jeden model , ktorý by bol všeobecne uznaný ako univerzálny pre tak zložité produkty. Čím častejšie sa do povedomia investorov dostávali kritické články o oceňovaní CDO a hlavne otázky určenia korelácií zlyhaní, až to nakoniec viedlo k úplnej nedôvere investorov k tejto triede aktív. To spôsobilo nechuť investovať a následne katastrofálny zvrat v likvidite týchto produktov. Kým ešte v roku 2008 boli tieto štruktúry ako tak likvidné, v roku 2009 sa stali úplne nelikvidnými a jediný, kto ich kupoval, bol už len FED (US federal reserve systém). Ten však použil na oceňovanie aukciu, kto ponúkol najnižšiu cenu predal. Keďže objem na odkúpenie týchto aktív bol fixne daný USA- senátom malo to na ceny rýchlu reakciu. A tak v priebehu jedného roka sa všetky investície do týchto nástrojov zmenili z trading assets na buy and hold assets, teda zo špekulatívnych cenných papierov na papiere držané do splatnosti a priemerná cena týchto aktív klesla z 80% z roku 2008 na slabých 30% koncom roku 2009. Teda trhy odpísali viac ako 2/3 hodnoty svojich investícií do týchto aktív.

7.2 Citlivosť výsledkov na vstupné dáta

V tabuľke 7.2.1 sú výsledky nášho modelu pri jednotlivých scenároch. Model sme spúšťali pre tri typy scenárov. Prvá skupina bola korelácia. V tabuľke môžeme vidieť vplyv zmeny korelácie na PV jednotlivých tranží. Pre ľahšie porovnanie sme znormovali výsledky vzhľadom na prvý tzv. base scenár. Je vidieť, že s rastúcou koreláciou klesá PV pre tranže Aa2 a A2 a naopak rastie pre equity.

PV [%] normované	Aa2	A2	Equity
korelácia 30%, stress=1,RR=50%	100,00%	100,00%	100,00%
korelácia 40%	99,03%	97,88%	110,12%
korelácia 50%	98,25%	95,57%	119,07%
Recovery rate mean =55%	100,78%	101,54%	105,97%
Recovery rate mean =60%	100,97%	101,93%	113,60%
Recovery rate mean =65%	101,17%	103,28%	120,23%
Stress hist. default rate =2	93,37%	83,43%	39,97%
Stress hist. default rate =3	83,63%	62,81%	16,58%
Stress hist. default rate =4	72,71%	46,24%	6,47%

Tabuľka. 7.2.1 :Výsledky simulácie s implikovaným stress faktorom

Pri zvýšení korelácie o 10% PV tranže Aa2 poklesla o 0.97% a A2 o 2.22% čo je takmer 3-krát viac. Dôvodom je postavenie tranže v štruktúre pasív, teda rôzna subordinácia. Naopak pre equity tranžu pri raste korelácie o 10% stúpila PV o 10,12%.

Teraz sa pozrieme ako reagovali tranže na zmenu recovery rate. Menili sme recovery rate od 50% s prírastkom 5% po 65%. Pre všetky tranže to malo pozitívny efekt. Najviac profitovala equity tranža pri zmene RR o 10% PV sa zvýšila o 20% ale pri Aa2 tranži len o 1.17% .

Ako reagovali tranže na stress faktor? Ten sme menili od 1 po 4. Teda ako by sme 4-násobne zväčšili historické pozorovania zlyhaní. PV všetkých tranží prudko klesali. Pre faktor 4 tranža Aa2 stratila na PV o 22,3% pričom equity tranža až 93,53% teda takmer celú hodnotu. Ak by sa historické default rate zhoršili viac ako 4 násobne, equity tranža by nemala žiadnu hodnotu podľa nášho modelu. Teda ak porovnáme len obrazne, že trh s touto triedou aktív poklesol o 2/3 hodnoty v priemere to znamená, že trh očakával viac ako 4 násobne zhoršenie kreditnej kvality všetkých aktív. Skutočne počas krízy vrchol iTraxu dosiahol hodnotu okolo 1200bp z pôvodných 100bp a neskôr sa stabilizoval okolo hodnôt 400-600bp. Teda trh si myslel , že každá druhá spoločnosť počas najbližších 5 rokov skrachuje.

Z tejto tabuľky môžeme záverom konštatovať, že náš model je najcitlivejší na historické zlyhania, ďalej na koreláciu a najmenej na recovery rate. Urobili sme aj niekoľko scenárov na prepayments, ale na tieto bol model ešte menej citlivý ako na zmenu recovery rate.

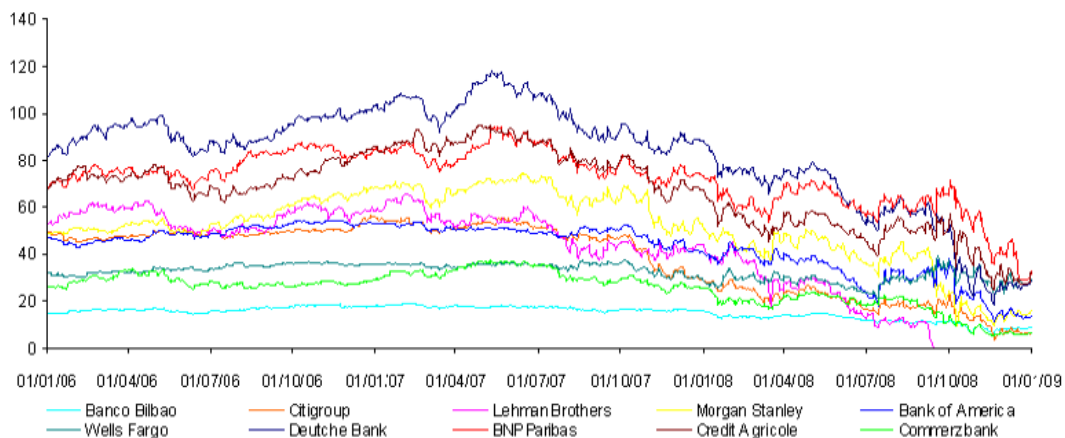
K hlavným príčinám súčasnej krízy podľa NBS patria:

- nízke úrokové sadzby v USA a nezvládnutie prechodu na nový ekonomický cyklus
- rozvoj hybridných cenných papierov naviazaných na nebonitné hypotéky
- presúvanie kreditného rizika z banky na iný subjekt - banku, fond a podobne
- poskytovanie hypotekárnych úverov v USA nízko príjmovým skupinám
- nechť prijať nové regulačné pravidla bankového sektora v USA
- netransparentný postup ratingových agentúr

- podcenenie rizika likvidity pri štruktúrovaných cenných papierov bankami

Nízke úrokové miery v USA v posledných rokoch podnietili nízkopríjmové skupiny obyvateľstva k prijímaniu úverov, ktoré si pri takomto úroku mohli dovoliť. Nezdravú situáciu na amerických finančných trhoch si mnohí začali uvedomovať po tom, ako sa do problémov dostala banka Lehman Brothers. Lehman Brothers vyhlásila bankrot v septembri 2008, Fannie Mae a Freddie Mac boli zoštátnené. Takýmto krokom by ešte v roku 2007 nikto neuveril. Problémy nevynechali ani najväčšiu poisťovňu AIG a zaistovňu Hanover Re. Týmto sa úplne podlomila dôvera v základy finančného systému súčasnej doby. AIG dostala finančnú pomoc od štátu približne 85 miliárd dolárov na záchranu pred krachom, ktorý by spôsobil lavínový efekt krachovania najväčších bank sveta. Investičnú banku Merrill Lynch po problémoch odkúpila pološtátna Bank of America. Dôvera k bankám sa zmenila na dôveru v štát. A niekde tu začala druhá vlna krízy, keď dôvera v štát sa stratila. Na pokraj zlyhania sa dostali Island, Grécko a Írsko. Americký dolár prežil len vďaka tomu, že v súčasnosti nie je iná alternatíva. S dolárom prežila aj americká ekonomika.

Dlhodobé ceny nehnuteľností rástli a v prípade, že dlžník nebol schopný splácať svoj dlh, predajom nehnuteľnosti získal vyššiu čiastku ako bola hodnota poskytnutého úveru a teda dokázal splatiť hypotéku. Avšak v čase krízy ceny domov klesli o viac ako 60% v niektorých častiach sveta. Ak teda dlžník nebol schopný splácať úver tak pri exekúcii pohľadávky bola banka v strate. Vyústilo to až do zlyhania 130 bank v USA. Regulačnou požiadavkou národných regulátorov, napríklad v Španielsku, bolo precenenie real estate portfólia bank a jeho zníženie o 30%. Dôsledkom bolo podkapitalizovanie bánk a pád ich akcií.



Obrázok 7.2.2 : Graf vývoja cien akcií najobchodovanejších bank .

Záver

V tejto práci sme sa snažili objasniť, prečo vznikli kreditné deriváty, aké boli motívy jednotlivých subjektov, ako sa vyvíjal trh kreditných derivátov. Ukázali sme ako funguje základný kreditný derivát – CDS a podstatnú časť práce sme venovali oceňovaniu CDO. Keďže samotné oceňovanie produktu ako je CDO, podľa nás, nie je len matematickou disciplínou, ale skôr matematicko - ekonomickou disciplínou preto je aj práca písaná v tomto duchu. Snažili sme sa matematicky pozerat' na problémy oceňovania CDO produktov, ktoré nastali počas mojej praxe s touto problematikou.

V časti o CDO sme opísali základné druhy, viaceré pohľady na CDO z kvalitatívneho hľadiska a hlavne kvantitatívne hľadiská oceňovania opcií. Predložili sme model, ktorý som osobne používal na oceňovanie CDO štruktúr počas mojej sedem ročnej praxe s CDO štruktúrami. Snažili sme sa, čo najviac priblížiť k praxi a zachytiť všetky úskalía oceňovania v reálnom živote. Opísať problematiku a hlavne čo najzrozumiteľnejšie vysvetliť získane výsledky.

Cieľom tejto práce bolo poskytnúť čitateľovi prehľad rôznych prístupov k oceňovaniu CDO a navrhnúť metódu, ktorá by preceňovala CDO produkty, čo najreálnejšie k aktuálnemu trhu. Je ťažké zvoliť jeden správny model a ostatné jednoducho zavrhnúť. Bolo by veľmi zaujímavé pri porovnávaní našich modelov odhadnúť všetky vstupné údaje priamo z trhových dát firiem, podieľajúcich sa na obchodovaní, vypočítať prémie jednotlivých tranží a na základe ich porovnania, s hodnotami indexov, vybrať ten najvhodnejší model. Verím, že toto dielo čitateľa zaujme a môže byť východiskom pre ďalšie práce v danej oblasti hlavne čo sa týka recovery rate.

Na záver by som ešte napísal pár slov k rozumnému modelovaniu zlyhaní. Hustota výskytu zlyhaní sa znižuje s rastúcou senioritou, pričom veľkosť extrémnych strát je vedená hlavne koreláciou. Tento fakt odráža aj graf rozdelenia strát pre jednotlivé tranže.

Zaujímavý je fakt, že straty na equity tranži sa vzťahujú k celému spektru prebytočného spreadu, od nulového až po maximum. Mezz tranža znáša riziko „druhej“ straty, ale nepodieľa sa už na prebytočnom spreade. Preto k ich hodnoteniu treba

pristupovať obzvlášť obozretne. Tiež treba dávať pozor na to, že obmieňanie copul, prípadne zmeny v lineárnych koreláciách, menia dynamiku v čase úverového zlyhania a nie len výslednú stratu. Nesmieme zabúdať, že pri oceňovaní takýchto nástrojov sa nestačí pozeráť len na cenu, ale aj na časový priebeh a volatilitu strát. Príslušný rating nám hovorí o kreditnej kvalite, ale nie o volatilitate kreditnej kvality.

Najväčším nedostatkom všetkých modelov je, že ani jeden sa nezaobrá rizikom likvidity. Práve to bolo najviac podhodnotené v oceňovaní CDO. V roku 2008, keď začali rýchlo padať ceny CDO, nikto nevedel prečo. Začala panika a jediné čo sa dalo rýchlo urobiť bolo zahedgovať sa cez index iTraxx. To ale spôsobilo jeho extrémny rast a následne explóziu implikovanej korelácie. Špirála sa roztočila a keď priemerná cena A tranže bola v roku 2007 okolo 98% , v roku 2009 to bolo už len 30%. Spolu viac ako 13 triliónov USD odpisov na týchto produktoch. Samozrejme, ak podkladové aktíva neskrachujú a štruktúry neboli z iných dôvodov rozviazane, investor sa môže tešiť veľkým výnosom do splatnosti.

Záverom môžeme len konštatovať, že model, ktorý sme predložili a nakalibrovali na trhové dáta, dával v danom čase relatívne presné trhové ocenenie. Môžeme usúdiť, že na trhu sa používajú podobné modely alebo metódy ich kalibrácie. Tento predpoklad je asi aj odpoveďou, prečo tieto nástroje od svojho vzniku až po začiatok krízy boli jedny z najstabilnejších, čo sa týka cien. Aj preto boli tak obľúbené u investorov.

Apendix:

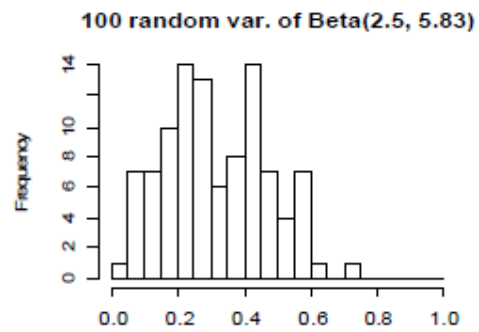
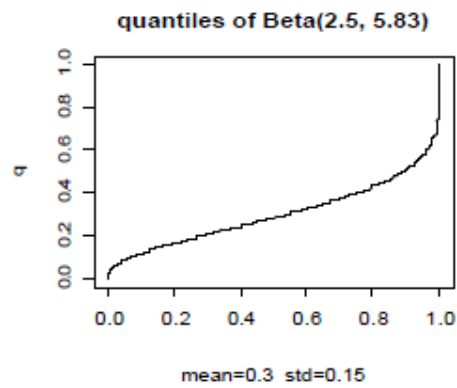
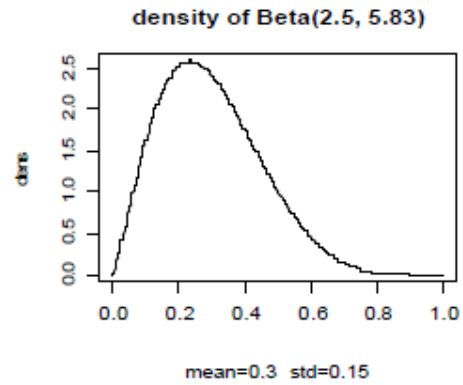
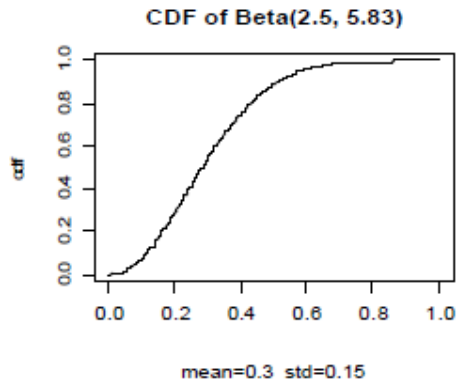
Recovery Rates

Recovery rate a jeho štandardná odchýlka podľa agentúry Moodys závisí na type kreditu a krajine, odkiaľ pochádza kredit. Nasledujúce tabuľky nám ukazujú historické dáta použité v modeli , priemerne recovery rate podľa typu aktív a krajiny:

Country	CTier
Other	A
Holland	A
UK & Chanel Islands	A
Germany	B
Ireland	B
Sweden	B
Switzerland	B
Austria	C
Belgium	C
Denmark	C
Finland	C
France	C
Iceland	C
Liechtenstein	C
Luxembourg	C
Norway	C
Spain	C
Greece	D
Italy	D
Portugal	D
USA	H
Japan	E
Australia	A
Canada	A

Mean	Bonds	Loans_Unsecured	Loans_Mezzanine	Loans_Secured
Tier_A	0.2	0.25	0.6	0.75
Tier_B	0.4	0.45	0.55	0.65
Tier_C	0.3	0.35	0.45	0.5
Tier_D	0.2	0.25	0.3	0.35
Tier_E	0.15	0.15	0.15	0.15
Tier_F	0.15	0.15	0.15	0.15
Tier_G	0.35	0.35	0.35	0.35
Tier_H	0.45	0.45	0.45	0.45

Príklad štatistik pri generovaní Recovery Rate pomocou beta funkcie so štatistikami mean=30% a std=15%



Zdrojový kód hlavnej funkcie v R

```
CDO.navigator
function (
  tranches=navigator.tranches,
  defaults=defaultSimu(
    pf=navigator.pf,
    nSim=1,
    stress=1,
    timing=dateSeq(2006, years=12, freq=4),
    dt=list(method="Copula", cor.in=0.3, cor.out=0.12),
    rt=list(method="weibull", mean=1.0, shape=2.0),
    rr=list(method="beta", mean=0.6957, std=0.2932),
    pr=list(method="const", rate=10*pc),
    rf=list(method="const", cc="US", date=2006211)
  ),

  reinvest.years      = 6,      ## PP are reinvested for so long
  trusteeFees        = 4.0*bp,  ## Trustee's fees
  adminFees          = 3.8*bp,  ## Administrator (=Co-Issuer) fees
  adminFeesCap       = 150000,  ## cap for "-", p.a
  seniorFees         = 10*bp,   ## senior management fee
  senSubFees         = 10*bp,   ## base (senior subord.) management fee
  subFees            = 30*bp,   ## subordinate management fee
  hurdles            = 12*pc,   ## equity gets 12% IRR before inc.mng.fees are paid
  hurdleFees         = 25*bp,   ## incentive management fees, perc. of pf-size
  intReinvTest       = 103.4,   ## interest diversion (reinvestment) test tranche D
  percReinvTest      = 50*pc,   ## perc. reinvested
  print = 0,          ##
  PCA0=0
) {

  ##### assign interest rate simulations ###
  curr.rf <- RF$curr.rf
  curr.rate <- currRates(RF, tranches=tranches)
  disc.rf <- discount(RF)

  orig.pf <- pf

  k <- nrow(tranches)
  tnames <- rownames(tranches)
  n <- nrow(pf)

  ### initialize time series: ###
  feeNames <- c("Upfront", "Trustee", "Administration",
    "SeniorManagement", "SeniorSubManagement", "SubManagement", "Incentive")

  allCF <- array(0, dim=c(nSim, k, nPer),
    dimnames=list(1:nSim, tnames, 1:nPer))
```

```

feeCF <- array(0, dim=c(nSim, length(feeNames), nPer),
  dimnames=list(1:nSim, feeNames, 1:nPer))

seriesNames <- c("IP", "def", "rec", "mat", "pre", "pfSize", "tests")
testNames <- c(paste("IC", tnames), paste("OC", tnames), "interest Diversion D")
series <- array(0, dim=c(nSim, length(seriesNames), nPer),
  dimnames=list(1:nSim, seriesNames, 1:nPer))

##### SIMULATION LOOP #####

for(iSim in 1:nSim) {
  timeForecast(iSim, nSim, 10)

  pf <- orig.pf ## not in all deals needed, but ...

  dtimes <- DT[iSim, ]
  rtimes <- RT[iSim, ]
  rrates <- RR[iSim, ]
  rectimes <- 1 - (dtimes<=years) + pmin(dtimes+rtimes, years)

  remain.size <- tranches$Size
  all.def <- all.rec <- all.mat <- rep(FALSE, n)

  deferred <- rep(0, k) ## cumulative deferred interest (of pikable tranches)
  payTrust <- payAdmin <- paySen <- paySenSub <- paySub <- payInc <- 0

  nHurdle <- length(hurdles) ## number hurdles for "FL"
  paidFL.irr <- rep(0, nHurdle) ## PV discounted by (1+hurdles) for "FL" (equity)

  ## initialize the interest reserve account
  interestReserve <- 1.8 * mm

  feeCF[iSim, "Upfront", 1] <- sum(tranches$Size) - sum(pf$Notional) - interestReserve

  for (i in 1:nPer) {

    t0 <- CDC[i] ## start time of this period
    t1 <- CDC[i+1] ## end time of this period

    ## interest compound rate for unpaid fees etc. ...
    ir <- ifelse(i==1, 1, (1 + curr.rf[iSim, i-1]*bp) ^ DC[i-1])

    ### the factor which is >1 for pikable Mezz (often pf$Notional is multiplied by this):
    pikMulti <- (1 + pf$SwapRatePIK*bp) ^ t0

    new.def <- (dtimes >= t0 & dtimes < t1 & !all.mat)
    all.def <- (all.def | new.def)

    new.rec <- (rectimes > t0 & rectimes <= t1 & !all.mat)

```



```

all.rec <- (all.rec | new.rec)

new.mat <- (pf$Maturity > t0 & pf$Maturity <= t1 & !all.def)
all.mat <- (all.mat | new.mat)

perf <- !(all.def | all.mat)  ## performing == not defaulted nor matured (indicator)

##### CASH IN #####

### interest proceeds from portfolio
IP <- interest(pf, ind=!all.def & (!all.mat | new.mat), rf=crr.rf[iSim,i], DC=DC[i], multi=pikMulti)

### interest reserve account is paid during ramp up ... (too simple)
if(i > 1) {
  pay <- min(interestReserve, 1.8*mm * DC[i])
  IP <- IP + pay
  interestReserve <- interestReserve - pay
}

### only for further interest
pp.def <- sum(pikMulti[new.def] * pf$Notional[new.def])

### principal proceeds from recoveries
PP.rec <- sum(pikMulti[new.rec] * pf$Notional[new.rec] * rrates[new.rec])

### principal proceeds from maturities
PP.mat <- sum(pikMulti[new.mat] * pf$Notional[new.mat])

### principal proceeds from prepayments
PP.pre <- sum(pikMulti[perf] * pf$Notional[perf]) * PR[iSim, i] * DC[i]
pf$Notional[perf] <- pf$Notional[perf] * (1 - PR[iSim, i] * DC[i])

### !!!! attention on these definitions:
PP <- PP.mat + PP.pre
if(i == 1)
  PP <- PP + PCA0
IP <- IP + PP.rec
AP <- PP + IP

##### COUPONS for tranches (including from pik's) #####
coupons <- (remain.size + deferred) * curr.rate[iSim, i, ]*bp * DC[i]
coupons[k] <- Inf  ## equity
pfSize <- sum(pf$Notional[perf]) + PP  ## nominal portfolio size PLUS PP!!!!

### save values for summary information

series[iSim, 1:6, i] <- c(IP, pp.def, PP.rec, PP.mat, PP.pre, pfSize)

##### INTEREST AND PRINCIPAL WATERFALL #####
### trustee fees ###

```

```

payTrust <- payTrust + trusteeFees * pfSize * DC[i]
pay <- min(AP, payTrust)
payTrust <- payTrust - pay
feeCF[iSim, "Trustee", i] <- pay
AP <- AP - pay

### administrator fees ###

newFee <- adminFees * pfSize * DC[i]
pay <- min(AP, payAdmin * ir + min(newFee, adminFeesCap))    ## part over cap is paid after "D"
payAdmin <- payAdmin * ir + newFee - pay
feeCF[iSim, "Administration", i] <- pay
AP <- AP - pay

### senior management fees ###

paySen <- paySen * ir + seniorFees * pfSize * DC[i]
pay <- min(AP, paySen)
paySen <- paySen - pay
feeCF[iSim, "SeniorManagement", i] <- pay
AP <- AP - pay

IP4IC <- max(0, AP - PP.mat - PP.pre)

shortfall <- rep(0, k)    ## current shortfall
OC.OK <- IC.OK <- rep(TRUE, k) ## indicates if one of the tranches failed

##### loop for tranches 1 to k-1 #####

for (j in 1:(k-1)) {

    ### senior subordinated management fees ###
    if(j == 5) {
        paySenSub <- paySenSub * ir + senSubFees * pfSize * DC[i]
        pay <- min(AP, paySenSub)
        paySenSub <- paySenSub - pay
        feeCF[iSim, "SeniorSubManagement", i] <- pay
        AP <- AP - pay
    }

    ### pay coupon of tranche j ###
    pay <- min(AP, coupons[j])
    AP <- AP - pay
    allCF[iSim, j, i] <- allCF[iSim, j, i] + pay

    ### accumulate deferred interest, if pikable and not all the coupon paid

    if (tranches$Pikable[j]) {

```

```

shortfall[j] <- coupons[j] - pay
deferred[j] <- deferred[j] + shortfall[j]
}

### OC and IC test of tranche

resIC <- IC(tranches, currSize=remain.size+deferred,
           rates=curr.rate[iSim, i]*bp, CF=IP4IC, nr=j, DC=DC[i])
resOC <- OC(tranches, currSize=remain.size+deferred-shortfall, pfSize=pfSize, nr=j)

redeem <- max(0, resOC$redeem, resIC$redeem, na.rm=TRUE)

if (redeem > 0) {
  if(j <= 5 || !all(c(OC.OK, IC.OK)) || resOC==0) {
    ## redeem as usual starting with most senior, with IP+PP
    pay <- min(redeem, AP)
    AP <- AP - pay

    redeem <- waterfall(remain.size, pay)
    remain.size <- remain.size - redeem
    allCF[iSim, , i] <- allCF[iSim, , i] + redeem
  } else {
    ## Class C, D Turbo Pay (only IP)
    ## pay first tranche C or D, then from most senior...
    IP <- max(0, AP - PP.mat - PP.pre)
    pay.j <- min(redeem, remain.size[j], IP)
    pay.all <- min(redeem, IP)
    AP <- AP - pay.all

    ## pay first only IP to this tranche
    remain.size[j] <- remain.size[j] - pay.j
    allCF[iSim, j, i] <- allCF[iSim, j, i] + pay.j

    ## if test not satisfied, redeem from most senior
    redeem <- waterfall(remain.size, pay.all - pay.j)
    remain.size <- remain.size - redeem
    allCF[iSim, , i] <- allCF[iSim, , i] + redeem
  }
  OC.OK[j] <- (resOC$redeem == 0)
  IC.OK[j] <- (resIC$redeem == 0)
}
}

##### after the tranches 1 to k-1 #####

reinvest <- 0

IP <- max(0, AP - PP.mat - PP.pre)

```

```

PP <- AP - IP

### with all PP: reinvest or redeem tranches ###
if(t1 < reinvest.years) {
  reinvest <- reinvest + PP
  PP <- 0
} else {
  ### redemption of tranches
  redeem <- min(PP, sum(remain.size[1:(k-1)]))
  PP <- PP - redeem
  payment <- waterfall(remain.size, redeem)
  remain.size <- remain.size - payment
  allCF[iSim, , i] <- allCF[iSim, , i] + payment
}
AP <- IP + PP

### pay back deferred interest of pikable tranche
for(jj in 1:(k-1))
  if(deferred[jj] > 0) {
    pay <- min(AP-PP, deferred[jj])
    deferred[jj] <- deferred[jj] - pay
    allCF[iSim, jj, i] <- allCF[iSim, jj, i] + pay
    AP <- AP - pay
  }

### subordinated management fees ###

paySub <- paySub * ir + subFees * pfSize * DC[i]
pay <- min(AP, paySub)
paySub <- paySub - pay
feeCF[iSim, "SubManagement", i] <- pay
AP <- AP - pay

### interest reinvestment test class D, before equity ###
RT.OK <- TRUE      ## indicator for info
if(t1 < reinvest.years) {
  max.size.OC <- (pfSize)
  curr.size <- sum( (remain.size+deferred-shortfall) [1:(k-1)] ) * (intReinvTest/100)
  redeem <- max(curr.size - max.size.OC, 0)
  if(redeem > 0) {
    reinvD <- min(redeem, percReinvTest * (AP-PP)) ## additional reinvestment
    reinvest <- reinvest + reinvD
    AP <- AP - reinvD
    RT.OK <- FALSE
  }
}
}

```

```

## for summary information only:
tests <- c(IC.OK, OC.OK, RT.OK)
series[iSim, "tests", i] <- other2dec(tests, 2)    ## compress binary vector to scalar

### reinvestment (manipulation of portfolio ...) ###
if(reinvest > 0) {
  ### reinvestment in remaining(*) names
  notional <- sum((pf$Notional * pikMulti)[perf])    ## sum notional + pik
  invest.ratio <- 1 + reinvest / notional

  pf$Notional[perf] <- pf$Notional[perf] * invest.ratio
  time2maturity <- pf$Maturity[perf] - t1
  new.time2maturity <- (time2maturity + (invest.ratio - 1) *
    pf$Maturity[perf]) / invest.ratio
  pf$Maturity[perf] <- new.time2maturity + t1
}
### pay any due and unpaid fees ###

pay <- min(AP, payAdmin)
payAdmin <- payAdmin - pay
feeCF[iSim, "Administration", i] <- feeCF[iSim, "Administration", i] + pay
AP <- AP - pay

### hurdles & incentive fees ###

if (nHurdle > 0) {
  ## calculate current hurdles:
  currHurdle <- (1 + hurdles) ^ t1

  payFL.irr <- rep(AP, nHurdle)

  for (iHurdle in 1:nHurdle) {

    ## pay to FL until hurdle is reached:
    dueFL <- max(0, tranches$Size[k] * currHurdle[iHurdle] - paidFL.irr[iHurdle])
    payFL <- min(AP, dueFL)
    AP <- AP - payFL
    allCF[iSim, k, i] <- allCF[iSim, k, i] + payFL

    ## cumulate incentive fees due
    payInc <- payInc + pfSize * hurdleFees[iHurdle] * DC[i]    ## fees are % of pfSize!

    ## pay incentive fees (unpaid, too, but without interest!)
    pay <- min(AP, payInc)
    payInc <- payInc - pay
    AP <- AP - pay
    feeCF[iSim, "Incentive", i] <- feeCF[iSim, "Incentive", i] + pay
    payFL.irr[-(1:iHurdle)] <- payFL.irr[-(1:iHurdle)] - pay
  }
}

```

```

        paidFL.irr <- (paidFL.irr + payFL.irr) * (1 + hurdles) ^ DC[i]
    }

    ## pay remaining CF to FL
    allCF[iSim, k, i] <- allCF[iSim, k, i] + AP
}

##### Pay back bonds, that have not yet matured ###
PP <- sum(pf$Notional[perf] * pikMulti[perf])
pay <- waterfall(remain.size, PP)
allCF[iSim, , i] <- allCF[iSim, , i] + pay
}

### Create object ###
obj <- list(
  tranches = tranches,      ## input parameter
  defaults = defaults,     ## input parameter

  CF = allCF,              ## cash flows per (simulation,tranche,period)
  CF.fees = feeCF,        ## cash flows per (sim.,fee-account,period)

  series=series,          ## series of interesting statistics (PP, IP, pfSize, ...)
  testNames=testNames,   ## names of the items in series[, "tests", ]

  indTranches = 1:k       ## tranches which should be evaluated
)

class(obj) <- c("cdocf", "cdo")
invisible(summary(obj, print=print))
}

```

Literatúra

- [1] Arturo C., O'Connor G.: The Binomial Expansion Method Applied to CBO/CLO Analysis, 2000
- [2] Barnaby M., Batchvarov A.: Single Tranche Synthetic CDOs, 2003
- [3] Bluhm Ch.: CDO Modeling: Techniques, Examples and Applications, HypoVereinsbank Munich, 2003
- [4] Buil C.: FitchRatings, Structured Finance, ABS/Germany , 2002
- [5] Burtschell X., Gregory J., Laurent J.P.: A comparative analysis of CDO pricing models, ISFA Actuarial School, University of Lyon & BNP-Paribas 2005
- [6] Cai D.: Lecture on Derivatives: Roles of Simulation in Finance, Department of Mathematics, New York University, 2004
- [7] David Li. : On Default Correlation: A Copula Function Approach, Journal of Fixed Income, 2000.
- [8] Default and Recovery Rates of European Corporate Bond Issuers: 1985-2004, Moody's Investors Service, 2003
- [9] Elizalde A.: Credit Risk Models IV: Understanding and pricing CDOs, CEMFI and Universidad Pública de Navarra, Madrid, 2005
- [10] Embrechts P., Lindskog F., McNeil A.: Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, working paper, Department of Mathematics, ETHZ, Zurich, 2001
- [11] Galiani S.: Copula Functions and their Application in Pricing and Risk Managing Multiname Credit Derivative Products, Department of Mathematics, King's College, London, 2003
- [12] Holík A.: Modelovanie defaultu v portfóliu bondov pomocou copula funkcie, diplomová práca , 2006
- [13] Hull J., White A: Valuation of a CDO and an n-th to Default CDS Without Monte Carlo Simulation, Joseph L. Rotman School of Management, University of Toronto , 2003
- [14] ISRAEL, R., ROSENTHAL, J., WEI, J.: Finding Generators for Markov Chains via Empirical Transition Matrices with Application to Credit Ratings, Mathematical Finance 11 , 2001
- [15] Ján Pataky : CDO - kreditný derivát model, FEI STU Bratislava, 2004

- [16] Joe Xu ,J.J : The Estimation Method of Inference Function for Margins for Multivariate Models, Dept. of Statistics, University of British Columbia, Technical Report, 166.
- [17] Jouanin J.F., Riboulet G., Roncalli T.: A Critical Approach to the Copula Model for Credit Derivatives, Groupe de Recherche Operationnelle Credit Lyonnais, Journée Risque de Credit, Evry, 2003
- [18] Lang Gibson, Erin McCutcheon: Addressing CDO Downgrades and Evaluating Rating Methodologies, Bank of America, 2002
- [19] Laurent J.P.: Gregory J. Basket Default Swaps, CDO's and Factor Copulas, ISFA Actuarial School, University of Lyon & BNP-Paribas, 2003
- [20] Lee McGinty and Rishad Ahluwala : A Model for Base Correlation Calculation, 2004.
- [21] Madan D., Konikov M., Marinescu M: Credit and Basket Default Swaps, Robert H. Smith School of Business and Bloomberg LP, New York, 2004
- [22] Marshal, R: Beyond Correlation : Extreme Comovements Between Financial assets, working paper, Columbia Graduate School of Business, 2002
- [23] Michael K.Ong: Credit Ratings, Risk Waters Group Ltd, 2002
- [24] New Standard & Poor's: Artemus Strategic Asian Credit Fund Ltd., Standard & Poor's, Structured Finance, 2003
- [25] Norris J., Markov Chains: Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press,1998
- [26] Picone D. :Collateralised Debt Obligations, City University Business School, London, 2004
- [27] Schmid W. : Pricing Default Baskets, I. RISK 15, 2002
- [28] Standard and Poors: Global Cash Flow and Synthetic CDO Criteria, 2002
- [29] The Quantitative Credit Analyst, Fixed Income Quantitative Research, CitiGroup, May 2003
- [30] VASICEK O. A : Loan Loss Distribution, KMV Corporation, 2000