

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Aplikácia modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou
funkciou dopytu v strategickom rozhodovaní

DIZERTAČNÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Aplikácia modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou
funkciou dopytu v strategickom rozhodovaní

DIZERTAČNÁ PRÁCA

Študijný program: Aplikovaná matematika

Odbor doktorandského štúdia: matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: doc. RNDr. Ján Pekár PhD.

Bratislava 2020

Mgr. Róbert Patejdl



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Mgr. Róbert Patejdl
Študijný program: aplikovaná matematika (Jednoodborové štúdium, doktorandské III. st., externá forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: dizertačná
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Aplikácia modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu v strategickom rozhodovaní
Application of the model with quasilinear utility function of demand in strategic decision making

Anotácia: Producenti pôsobiaci na trhu substitučných produktov využívajú strategické rozhodovanie na dosiahnutie stanovených cieľov v oblasti zisku a podielu na trhu. Analytický prístup v strategickom rozhodovaní vedie k racionálnejším očakávaniam producenta a tým k efektívnejším strategickým rozhodnutiam v porovnaní s expertným prístupom. Základom analytického prístupu v strategickom rozhodovaní je výber modelu, ktorý dokáže dostatočne správne popísať trh, na ktorom producent pôsobí.

Cieľ: Cieľom dizertačnej práce je definovať model aplikovateľný na široké spektrum reálnych trhov a to ako v zmysle jeho správnosti, tak aj v zmysle interpretácie jeho parametrov a komplexnosti výpočtu výstupov. Na overenie správnosti výberu modelu práca porovnáva teoretické výstupy modelu identifikované postupmi teórie hier s pozorovanými výstupmi reálnych trhov.

Školiteľ: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.
Katedra: FMFIKAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce:
bez obmedzenia

Dátum zadania: 01.09.2011

Dátum schválenia: 30.09.2020

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
školiteľ

Týmto by som sa chcel poďakovať môjmu školiťovi doc. RNDr. Jánovi Pekárovi PhD. za jeho trpezlivosť, čas, ochotu a cenné rady a pripomienky počas môjho štúdia a počas tvorby dizertačnej práce. Ďakujem aj mojim zamestnávateľom, v ktorých som pôsobil počas môjho doktorandského štúdia a bez porozumenia ktorých by táto práca nemohla vzniknúť.

V neposlednom rade ďakujem svojej rodine a najmä mojej manželke Patrícii za trpezlivosť, podporu a vytvorenie podmienok, bez ktorých by som dizertačnú prácu úspešne nedokončil.

Abstrakt

Dizertačná práca definuje model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu ako model vhodný na analýzu výstupov strategických rozhodnutí producenta pôsobiaceho na reálnom trhu substitučných produktov.

Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu vychádza z modelu s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu, ktorý sa štandardne využíva na analýzu trhu dokonalo substitučných produktov, no obohacuje tento model o člen komplementárnosti substitučných produktov v úžitkovej funkcii dopytu, čím oslabuje predpoklad ich dokonalej substitúcie, no zároveň umožňuje výstupy, ktoré je možné pozorovať na reálnych trhoch.

Práca na identifikáciu výstupov modelov využíva prostriedky teórie hier, pričom v prípade modelu s lineárnou úžitkovou funkciou poskytuje dva dôkazy výstupov s rovnakými výsledkami, jeden pomocou modelovania racionálneho uvažovania producentov a druhý pomocou prostriedkov teórie hier, čím vytvára myšlienkový most medzi týmito dvoma prístupmi.

Práca má štyri hlavné časti. V prvej časti práca predstavuje modely využívané v súčasnosti na analýzu konkurenčných trhov. V druhej časti sa práca venuje modelu s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu, pričom identifikuje jeho výstup, ktorý je v rozpore s pozorovaniami na reálnych trhoch. V tretej časti sa práca venuje modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu, ako modifikácii modelu s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu, pričom ju obohacuje o člen komplementárnosti substitučných produktov v úžitkovej funkcii dopytu. Práca na príklade duopolu identifikuje výstup z modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu, ktorý na rozdiel od modelu s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu nie je v rozpore s pozorovaniami na reálnych trhoch. Následne práca prechádza k náznaku výstupu modelu oligopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu vo všeobecnom riešení a to konkrétne na príklade triopolu. Vo štvrtej časti práca diskutuje výstupy modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu a jeho aplikáciu v strategickom rozhodovaní producenta na reálnom trhu substitučných produktov. V tejto časti práca zároveň diskutuje výhody aplikácie modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu z hľadiska vhodnosti modelu a podmienok jeho reálnej aplikácie, komplexnosti výpočtu, zrozumiteľnosti parametrov a možnosti aplikácie vývoja parametrov (interných a externých, implicitne a explicitne obsiahnutých v modeli) v čase.

Kľúčové slova: kvázi-lineárna úžitková funkcia, lineárna úžitková funkcia, oligopol, duopol, substitučné produkty, strategické rozhodovanie

Abstract

This thesis defines the model with quasilinear utility function of demand as the model suitable for the analysis of the outputs of strategic decisions of a company operating on the real market of substitute products.

The model with quasilinear utility function of demand is based on the model with linear utility function of demand, which is standardly used for market analysis of perfectly substitute products. The model with quasilinear utility function of demand introduces the element of the complementarity of the substitute products what makes the assumption of the perfect substitution of the products weaker. But this modification leads to the outputs that can be observed on real markets.

We use game theory tools to identify the outputs of the models. In the case of the model with linear utility function we provide two proofs of the outputs, one by modeling the rational thinking of producers and the other by the game theory tools, what creates a bridge of ideas between these two approaches.

This theses has four main parts. In the first part, we present the models currently used for the analysis of competitive markets. In the second part, we deal with the model with linear utility function of demand, while identifying its output, which is in contradiction with the observations on real markets. In the third part, we deal with the model with quasilinear utility function of demand, as a modification of the model with linear utility function of demand, while enriching it with the element of the complementarity of substitute products in the utility function of demand. We identify the output of the model with quasilinear utility function of demand on the example of a duopoly, which, unlike the model with a linear utility function of demand, does not contradict the observations on real markets. Subsequently, we indicate the output of the oligopoly model with quasilinear utility function of demand in the general solution, specifically on the example of a triopoly. In the fourth part, the theses discusses the outputs of the model with quasilinear utility function of demand and its application in the strategic decision making of the company on the real market of substitute products. In this part, we also discuss the advantages of applying the model with quasilinear utility function of demand in terms of suitability of the model and conditions of its real application, computational complexity, comprehensibility of the parameters and application of the development in parameters (internal and external, implicit and explicit) over time.

Keywords: quasilinear utility function, linear utility function, oligopoly, duopoly, substitute products, strategic decision making

Predhovor

Na začiatku môjho záujmu o teóriu hier boli prednášky pána doc. RNDr. Jána Pekára, PhD. predmetu Teória hier počas môjho bakalárskeho štúdia programu Manažérska matematika na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky na Univerzite Komenského v Bratislave a konkrétne paradoxný výstup z populárnej hry teórie hier nazvanej Vážnova dilemma.

O ekonómii som sa zaujímal už skôr, inak by som sa po mojom štúdiu na gymnázium Jána Papánka na Vazovovej ulici v Bratislave nehlásil na ekonomicky zamerané programy fakúlt univerzít v Bratislave, na ktoré ma úspešne prijali, no musím priznať, že výber najtechnickejšieho z nich bol v danom čase čisto z mojej osobnej zvedavosti.

Vážnova dilemma je často považovaná za diskretný prípad Cournotovho duopolu. A Bertrandov model trhu vznikol ako kritika Cournotovho modelu trhu v zmysle prístupu, či cenu určuje dopyt, alebo ponuka.

Podobne ako Bertrand sa vo svojich vlastných úvahách skôr prikláňam k názoru, že producenti ľahšie stanovia cenu svojho produktu a až následne dopyt určí množstvo, ktoré za danú cenu je ochotný spotrebovať.

No na rozdiel od Bertrandovho modelu v reálnom svete producenti nepredávajú svoje produkty za cenu na úrovni svojich variabilných nákladov (čo by pri predpoklade existencie fixných nákladov znamenalo negatívny profit pre producentov), ale na vyššej úrovni, pretože sú schopní dlhodobo produkovať, čo by nebolo možné v prípade, ak by dlhodobo dosahovali iba negatívne profity.

V tomto sa viac na realitu podobá Cournotov model, ktorý umožňuje pozitívny profit pre producentov, no nedovoľuje producentom stanovovať cenu produktu, ale len množstvo produkcie.

Ambíciou mojej dizertačnej práce bolo priblížiť sa čo možno najviac k realite trhu, pričom som predpokladal správnosť mojej domnienky, že producenti stanovujú cenu a nie objem produkcie, no v takom prípade bola predmetom môjho výskumu otázka, ako je možné, že sú schopní dosahovať dlhodobo profit, pokiaľ konkurujú na trhu substitučných produktov.

Zároveň bolo ambíciou mojej dizertačnej práce identifikovať taký model, ktorý umožní producentom správne odhadovať dopady svojich strategických rozhodnutí.

Musím poznamenať, že v počiatkoch mojej práce som nedokázal obsiahnuť dosahy, ktoré môže v budúcnosti mať. Počas môjho doktorandského štúdia som zároveň zastával pozície profesie oceňovacieho analytika v komerčných spoločnostiach (mimo iného v neživotnom poistení) a v štátnych organizáciach, ktoré ma doviedli k presvedčeniu, že výstupy z mojej dizertačnej práce môžu byť aplikované producentami na reálnych trhoch.

Obsah

Predhovor	1
Úvod	6
A. Cieľ práce	9
B. Súčasný stav riešenej problematiky	11
Analytický a expertný prístup v strategickom rozhodovaní	11
Model a podmienky na jeho aplikáciu	12
Cournotov oligopol	13
Bertrandov oligopol	15
Modely oligopolu založené na úžitkových funkciách dopytu	17
Model s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu	21
Model s Cobb-Douglasovou úžitkovou funkciou dopytu	23
Model s CES úžitkovou funkciou dopytu	25
Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu	28
C. Metodika práce a metódy skúmania	34
1. Model s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu – trh dokonalých substitútov	36
1.1 Duopol s lineárnou úžitkovou funkciou	36
1.1.1 Lineárna úžitková funkcia (LUF) na trhu duopolu	37
1.1.2 Dopytové funkcie na trhu duopolu s LUF	39
1.1.3 Funkcie najlepšej odpovede na trhu duopolu s LUF	40
1.1.4 Uvažovanie producentov – cesta k ekvilibriu na trhu duopolu s LUF	43
1.1.5 Ekvilibrium na trhu duopolu s lineárnou úžitkovou funkciou	73
1.1.6 Opakovaná interakcia producentov na trhu duopolu s LUF	80
1.2 Oligopol s lineárnou úžitkovou funkciou	92
1.2.1 Lineárna úžitková funkcia (LUF) na trhu oligopolu	93
1.2.2 Dopytové funkcie na trhu oligopolu s LUF	95
1.2.3 Funkcie najlepšej odpovede na trhu oligopolu s LUF	97

1.2.4	Uvažovanie producentov – cesta k ekvilibriu na trhu oligopolu s LUF.....	98
1.2.5	Ekvilibrium na trhu oligopolu s lineárnou úžitkovou funkciou	100
1.2.6	Opakovaná interakcia producentov na trhu oligopolu s LUF	108
2.	Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu – trh nedokonalých substitútov ..	119
2.1	Duopol s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou	122
2.1.1	Kvázi-lineárna úžitková funkcia (QLUF) na trhu duopolu.....	123
2.1.2	Dopytové funkcie na trhu duopolu s QLUF	125
2.1.3	Funkcie najlepšej odpovede na trhu duopolu s QLUF	127
2.1.4	Dôkaz ekvilibria na trhu duopolu s QLUF	133
2.1.5	Ekvilibrium na trhu duopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou	145
2.1.6	Opakovaná interakcia producentov na trhu duopolu s QLUF.....	147
2.2	Oligopol s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou	158
2.2.1	Kvázi-lineárna úžitková funkcia (QLUF) na trhu triopolu	159
2.2.2	Náznak dopytových funkcií na trhu triopolu s QLUF a motivácia modifikácie QLUF v prípade oligopolu	162
2.2.3	Modifikovaná kvázi-lineárna úžitková funkcia (MQLUF) na trhu triopolu	165
2.2.4	Náznak lokálnych dopytových funkcií na trhu triopolu s MQLUF	168
2.2.5	Výstupy z oligopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou	171
D.	Výsledky práce a diskusia	173
	Model s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu.....	173
	Diskusia o predpokladoch modelu s LUF	173
	Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu.....	177
	Výstupy z modelu s QLUF.....	179
	Interpretácia parametrov a komplexnosť modelu s QLUF	179
	Správnosť výstupov modelu s QLUF	180
	Aplikácia modelu s QLUF v strategickom rozhodovaní	183
	Cena produktu	183

Kvalita produktu, marketing, dostupnosť produktu	184
Fixné a variabilné náklady	186
Externé faktory	188
Sumár diskusie o aplikácii modelu s QLUF v strategickom rozhodovaní	189
Záver.....	191
Literatúra	194

Úvod

Trhová ekonomika je v súčasnosti najrozšírenejším ekonomickým zriadením a okrem niekoľkých výnimiek ju vo viac, či menej regulovanej forme môžeme pozorovať vo všetkých krajinách sveta a aj v medzinárodnom obchode.

Je to zriadenie, v ktorom producenti slobodne ponúkajú svoje tovary a služby za slobodne stanovené ceny spotrebiteľom, ktorí sa slobodne rozhodujú o ich kúpe. Miesto, ak aj virtuálne, na ktorom sa kúpa realizuje, nazývame trh. Pojem slobodne tu nie je využitý vo svojom absolútnom význame, v realite trhových ekonomík existujú regulátori trhov, ktorí určujú pravidlá daného trhu tak, aby ochránili vybraných účastníkov trhu, prípadne predišli určitým zlyháním trhu vo svojej funkcii.

Konkurenčná súťaž je jedným z hlavných znakov trhovej ekonomiky. Rozlišujeme tri typy konkurenčnej súťaže, konkurencia medzi ponukou a dopytom, konkurencia na strane dopytu a konkurencia na strane ponuky. V tejto práci sa budeme priamo venovať konkurencii na strane ponuky.

Ponuka je v trhovej ekonomike tvorená producentami ponúkajúcimi svoje tovary a služby spotrebiteľom. Pokiaľ existuje viac producentov, ktorí ponúkajú produkt (tovar, alebo službu), ktorý napĺňa určitú konkrétnu potrebu spotrebiteľov na rovnakom trhu, potom sú títo producenti v konkurenčnej súťaži o dopyt po ich produkte. Spotrebiteľia (dopyt) sa slobodne rozhodujú, ktorý produkt kúpia na uspokojenie svojej potreby. Spotrebiteľia prirodzene nemajú neobmedzené finančné prostriedky, preto musia uskutočniť výber z ponúkaných produktov.

Primárnym cieľom producentov je maximalizácia zisku, čo je rozdiel medzi ich výnosmi a nákladmi za určité časové obdobie.

Existujú producenti na reálnych trhoch, ktorých primárny cieľ nemusí byť nutne iba maximalizácia zisku, či dokonca majú iný primárny cieľ, no ako takí boli vytvorení na špecifický účel. Práca sa však bude venovať štandardným producentom pôsobiacim v trhovom hospodárstve, ktorých primárny cieľ je spomínaná maximalizácia zisku.

Pri definícii primárneho cieľa producentov pôsobiacich v trhovom hospodárstve schválne nešpecifikujeme časový horizont, v ktorom sa producenti maximálny zisk snažia dosiahnuť. Pravdou je, že časový horizont v ktorom reálni producenti vnímajú maximalizáciu zisku ako ich primárny cieľ, sa od producenta k producentovi môže líšiť. Ide totiž o ich najdôležitejšie strategické rozhodnutie, ktoré je podmienené očakávaniami ich vlastníkov, napríklad akcionárov. Sú akcionári, ktorí očakávajú dosiahnutie výnosu zo svojej investície

v krátkodobom horizonte, sú však aj takí, ktorí sú ochotní počkať si na výnos dlhšie obdobie s ohľadom na očakávaný vyšší výnos. Manažment producenta, ktorý nedokáže naplniť očakávania vlastníka producenta, býva nahradený.

Strategické rozhodnutia manažmentu producenta (prípadne len producenta) sú rozhodnutia, ktoré by mali viesť k dosiahnutiu strategických cieľov. Strategické ciele sú jasne definované úrovne kvantifikovateľných veličín, ktoré sa producent rozhodol dosiahnuť za určité obdobie, prípadne v určitom čase. Príkladom strategických cieľov je najmä samotný zisk za určité obdobie, ale aj ziskovosť (podiel výnosov na nákladoch), trhový podiel vyjadrený v počtoch kusov produktu, alebo vyjadrený finančnými prostriedkami dopytu alokovaných na daný trh a podobne.

Strategické rozhodnutia sú rozhodnutia v oblasti cien produktu, kvality produktu, marketingu, dostupnosti produktu pre spotrebiteľov a nákladov. Sú to práve tie rozhodnutia, ktoré definujú aký produkt bude producent spotrebiteľom ponúkať, za akú cenu, v akej kvalite, aké distribučné kanály využije, ako bude produkt propagovať a ako bude predaj inak podporovať, akú technológiu pri produkcii použije, aké vstupné faktory bude využívať a ako bude optimalizovať svoje náklady a procesy.

Hospodársky vývoj, informatizácia spoločnosti a globalizácia trhov vytvárajú čoraz väčší tlak na manažment producenta v konkurenčnej súťaži v zmysle efektivity jeho strategických rozhodnutí. Väčší počet konkurenčných spoločností a lepšia dostupnosť ich produktov, spolu s lepšou informovanosťou spotrebiteľa spôsobujú, že spotrebiteľia dokážu realizovať svoj výber čoraz efektívnejšie, čím sa neefektívnym producentom čoraz ťažšie na konkurenčnom trhu presadzuje.

Na druhej strane vývoj analytických prostriedkov v každej oblasti produkcie a strategického rozhodovania umožňuje producentom lepšie a detailnejšie porozumieť javom na trhu, alebo aj v ich technológii, čo im umožňuje lepšie manažovať svoje očakávania o ich výstupoch z trhu. Napriek napredovaniu vývoja analytických prostriedkov existujú reálni producenti, ktorí nevyužívajú analytický prístup v takej miere, ako sa im ponúka. Táto skutočnosť môže byť spôsobená neexistenciou skúsenosti producenta s analytickým prístupom v minulosti, viera v expertný úsudok manažérov a expertov producenta, čo dokopy môže znamenať nedôveru v analytický prístup, alebo táto skutočnosť môže byť spôsobená z dôvodu nedostupnosti analytikov na trhu práce, nedostupnosti vhodných modelov, či potrebných software, prípadne nedostatku kapitálu producenta na ich zaobstaranie.

Môžeme však pozorovať, že producenti, ktorí vo väčšej miere využívajú analytický prístup

pri svojich strategických rozhodnutiach ako ich konkurencia, dokážu svoje rozhodnutia určovať efektívnejšie a s presnejšími očakávaniami.

Práca má ambíciu navrhnúť model, ktorý by dokázal predpovedať výstupy strategických rozhodnutí producenta pôsobiaceho na konkurenčnom trhu, čím by producent získal možnosť lepšej voľby svojich rozhodnutí, ako keby sa spoliehal len na expertný úsudok svojho manažmentu.

Tento model má ambíciu sa stať pomocným nástrojom manažmentu pri strategických rozhodnutiach, pričom neurčuje samotné rozhodnutia, určuje iba ich dopady. Výber strategických rozhodnutí je naďalej nutne v rukách samotného manažmentu producenta, avšak aplikácia modelu manažmentu umožní lepšie manažovať svoje očakávania a tým umožňuje efektívnejšiu tvorbu rozhodnutí s ohľadom na požiadavky vlastníka producenta.

A. Cieľ práce

Dizertačná práca si dáva za cieľ identifikovať a popísať model trhu substitučných produktov, ktorý by bol aplikovateľný pri strategickom rozhodovaní producenta v oblasti cenovej politiky, investícií do kvality produktu, marketingu a predajnej siete (distribúcie) a optimalizácii nákladov, s ohľadom na jeho strategické ciele v oblasti zisku a trhového podielu.

Trhy môžeme podľa ich štruktúry (počtu producentov) rozdeliť na tri základné typy: dokonalú konkurenciu, monopol a oligopol.¹

Dokonalá konkurencia je tvorená veľkým počtom malých producentov², z ktorých žiaden producent nedokáže individuálne ovplyvniť cenu na trhu, teda považuje trhovú cenu za danú.³ Naopak monopol je tvorený jediným producentom, ktorý má absolútny vplyv na trhovú cenu a teda určuje trhovú cenu tak, aby maximalizoval svoj profit.⁴

Avšak asi najčastejším typom trhu v reálnom svete je typ tretí, oligopol. Ponuka na trhu oligopolu je tvorená menším počtom producentov, ktorí sú dostatočne „veľkí“ na to, aby dokázali ovplyvňovať trhovú cenu, avšak nemajú absolútny vplyv na trhovú cenu ako v prípade monopolu. Rozhodovanie o výške ceny konkrétneho produktu je tak ovplyvnené rozhodnutiami ostatných producentov na trhu. Alebo inak povedané, dopyt po konkrétnom tovare nezávisí iba od ceny samotného produktu, ale aj od cien iných produktov, ktoré dopyt vníma ako substitučné produkty k danému produktu.

Práca sa bude venovať tretiemu typu trhov, oligopolu. Pod pojmom trh substitučných produktov budeme rozumieť trh všetkých takých produktov, ktoré dokážu uspokojiť nejakú konkrétnu potrebu dopytu. Pretože sú v napĺňaní tejto potreby z pohľadu dopytu produkty zameniteľné, budeme tieto produkty nazývať substitúty.

V práci, ako aj vyššie, využívame pojem producent v širšom slova zmysle. To znamená, že pod pojmom producent nebudeme rozumieť iba subjekt, ktorý vytvára konkrétny fyzický

¹ (Varian, 1995)

² „Malých“ v zmysle objemu produkcie.

³ Individuálny producent/dodávateľ nedokáže ovplyvniť trhovú cenu na trhu dokonalkej konkurencie, pretože je príliš „malý“ v porovnaní s celým dopytom, zároveň pri dokonalkej konkurencii neexistujú bariéry vstupu na trh a teda ľubovoľný potencionálny producent/dodávateľ, ktorý ešte nepôsobí na trhu, dokáže vstúpiť na daný trh, pokiaľ by identifikoval príležitosť zisku. Zároveň pri dokonalkej konkurencii platí predpoklad dokonalkej informácie, teda každý agent na trhu (producent/dodávateľ, ale aj spotrebiteľ) pozná všetky aspekty trhu, teda aj cenu všetkých producentov/dodávateľov. Predpoklad o dokonalkej informácii je možné rozšíriť aj na samotnú technológiu produkcie, čím sa harmonizujú náklady producentov na rovnakú úroveň.

⁴ Monopolista samozrejme nestanovuje cenu úplne voľne, pretože pri štandardných tovaroch dopyt zvyšovaním trhovej ceny klesá. No pokiaľ monopolista pozná, alebo dokáže správne odhadnúť dopytovú funkciu (závislosť dopytu od ceny), potom dokáže maximalizovať svoj profit stanovením optimálnej ceny.

produkt, ale aj firmu, spoločnosť, či organizáciu s cieľom maximalizácie zisku napríklad aj v oblasti služieb, alebo dodávateľ a daného tovaru, či služieb. Pojem producent v tejto práci pomenúva akýkoľvek subjekt trhu vytvárajúci aspoň časť ponuky.

B. Súčasný stav riešenej problematiky

Analytický a expertný prístup v strategickom rozhodovaní

V reálnom svete producenti pri svojich krátkodobých, alebo aj dlhodobých strategických rozhodnutiach nesiahajú vždy po analytickom prístupe a teda odhade dopadu svojich strategických rozhodnutí pomocou dopadových štúdií, ktoré využívajú modely na kvantifikáciu výstupov.⁵

Tento fakt je spôsobený rôznymi skutočnosťami od neexistencie využitia analytického prístupu v minulosti producenta, nedostupnosti vhodných modelov, nedostupnosti analytikov na trhu práce, nedostatočné technické vybavenie producenta (analytický software), dôvera v expertný úsudok manažérov producenta a iné dôvody.

Analytický prístup, teda tvorba dopadových štúdií na základe vhodne zvolených a nastavených modelov pri strategickom rozhodovaní producenta, ale dokáže presnejšie identifikovať možnosti producenta a možné dopady jednotlivých rozhodnutí, na rozdiel od toho, keby sa spoliehal iba na expertné úsudky svojho manažmentu.

Každý producent prirodzene cieľi maximalizáciu svojho zisku, a túto maximalizáciu cieľi v určitom časovom horizonte. V niektorých odvetviach je maximalizácia zisku podmienená dosiahnutím určitého trhového podielu⁶, preto producenti často okrem výšky zisku plánujú aj trhovú podiel, ktorý si želajú dosiahnuť.

Prirodzenou požiadavkou vlastníkov⁷ producenta je tak zvyšovanie zisku a zároveň zvyšovanie trhového podielu, čo však v konkurenčnom prostredí môže znamenať protichodný tlak na strategické rozhodnutia. Producent najjednoduchšie zvyšuje svoju ziskovosť (podiel výnosov ku nákladom) zvyšovaním ceny svojho produktu. No to v konkurenčnom prostredí znamená znižovanie podielu na trhu. Naopak, znižovanie ceny produktu vo všeobecnosti vedie k zvyšovaniu podielu na trhu, no zároveň vedie k znižovaniu ziskovosti, čo môže znamenať zníženie zisku.

Producent tak musí strategicky voľiť správnu úroveň ceny svojho produktu tak, aby dosiahol želanú úroveň zisku a podielu na trhu. Skúsenosti manažérov producenta dokážu túto úroveň cien definovať iba na základe ich vlastných skúseností a pozorovaní, prípadne na základe

⁵ Autor toto dokáže tvrdiť na základe jeho osobnej skúsenosti počas jeho kariérneho pôsobenia v spoločnostiach poskytujúcich neživotné poistenie. Môžeme však predpokladať, že táto prax je prítomná aj v iných odvetviach a aj v iných geografických oblastiach.

⁶ Napríklad úspora z rozsahu produkcie, teda znižovanie nákladov, ale aj fakt, že vyšší trhovú podiel umožňuje výraznejší vplyv na trhovú cenu.

⁷ Napríklad akcionári.

vlastného presvedčenia, čo však vystavuje samotného producenta určitému riziku, či želané úrovne zisku a podielu na trhu získa (pripomeňme si, že výstupy z trhu oligopolu substitučných produktov sú ovplyvňované rozhodnutiami ostatných producentov). Zapojenie analytického prístupu, teda tvorba dopadových štúdií na základe matematických a ekonomických modelov, dokáže mieru neistoty producenta (a teda toto riziko) znížiť. Reálni producenti využívajúci analytický prístup pri strategickom rozhodovaní majú racionálnejšie očakávania o výstupoch svojich rozhodnutí a dokážu identifikovať lepšie svoje hrozby a príležitosti, prípadne alokáciu potrebného kapitálu na dosiahnutie želaných cieľov.

Model a podmienky na jeho aplikáciu

Základom analytického prístupu je voľba správneho modelu, ktorý dokáže správne odhadovať výstupy strategických rozhodnutí. Model sám o sebe nedefinuje strategické rozhodnutia, ale iba popisuje stav, ktorý možno pozorovať v realite.

Teda prvom podmienkou správnosti modelu je, že musí správne, respektíve dostatočne správne popisovať realitu.

Od modelu totiž nemôžeme očakávať dokonalú presnosť predpovede, pretože model je „zjednodušenou reprezentáciou reality. Predstavme si, ako zbytočná by bola mapa v mierke jedna ku jednej. To isté platí aj pre ekonomický model, ktorý by sa snažil opísať každý aspekt reality.“⁸

Pri voľbe správneho modelu je dôležité dbať na to, aby dostatočne správne opisoval realitu tak, aby bol využiteľný na svoj účel, avšak požiadavka na jeho dokonalú presnosť by znamenala významné zvýšenie komplexnosti. V konkurenčnom prostredí manažment producenta nemôže čakať niekoľko rokov, kým mu jeho analytické oddelenie dodá dopadové štúdie jedného rozhodnutia, ale práveže tieto štúdie očakáva za relatívne krátky čas.

Pokiaľ však model produkuje výstupy, ktoré sa nestotožňujú s pozorovaniami v reálnom svete, potom tento model nie je aplikovateľný na dopadovú štúdiu daného fenoménu (za podmienky zamýšľaného strategického rozhodnutia producenta).

Ak však producent disponuje dostatočne správnym modelom trhu, na ktorom pôsobí, potom dokáže optimalizovať svoje ciele pomocou zmeny strategických premenných, akými sú cena produktu, investície do kvality produktu, marketingu a predajnej siete. Takýto prístup môžeme potom nazvať analytickým prístupom v strategickom rozhodovaní producenta.

⁸ (Varian, 1995)

Cournotov oligopol

V roku 1838 Antoine Augustin Cournot publikoval dielo *Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses* v ktorom vytvoril model popisujúci oligopol nekooperatívnych racionálnych producentov produkujúcich homogénny produkt (teda nie len dokonalo substitučné produkty, ale navyše totožné produkty z pohľadu dopytu).^{9 10}

Cournotov oligopol využíva inverznú funkciu dopytu, teda funkciu, ktorá na základe dostupného množstva produktov vyjadruje cenu, za ktorú je dopyt ochotný produkt kúpiť.

Producenti v Cournotovom oligopole teda nevolia cenu, za ktorú budú svoj produkt predávať, ale množstvo, ktoré dodajú na trh, čím implicitne cez inverznú funkciu dopytu určujú cenovú úroveň na trhu.

Producenti sa rozhodujú simultánne o množstve produkcie, teda v momente svojho rozhodovania nepoznajú objem produkcie svojich konkurentov. Keďže sú však producenti racionálni a poznajú inverznú funkciu dopytu na trhu na ktorom pôsobia (predpoklady Cournotovho oligopolu), potom dokážu optimalizovať svoje rozhodnutie o objeme produkcie v zmysle maximalizácie profitu, pričom berú do úvahy racionalitu svojich konkurentov, ktorí rozmýšľajú rovnako. Kombináciou optimálnych rozhodnutí všetkých producentov v zmysle ich profitu potom dostávame optimálne úrovne produkcie jednotlivých producentov, z ktorej sa žiadnemu producentovi neoplatí jednostranne vychýliť, teda ekvilibrium.

Matematicky zapísané, majme $n \in \mathbb{N}, n > 1$ producentov produkujúcich homogénny produkt, označme množinu všetkých týchto producentov I a označme produkované množstvo producenta $i \in I$ x_i . Nech je inverzná funkcia dopytu

$$p_M = P(x_1 + x_2 + \dots + x_n),$$

pričom $P(x)$ je rýdzo klesajúca funkcia v závislosti od x , teda celkového množstva produktov na trhu.¹¹

Každý producent $i \in I$ potom rieši optimalizačnú úlohu

$$\max \pi_i(x_i) = P(x_1 + x_2 + \dots + x_n)x_i - cx_i,$$

⁹ (Varian, 1995)

¹⁰ (Cournot, 1838)

¹¹ Rýdzo klesajúca inverzná funkcia dopytu je vyjadrením štandardných statkov, pri ktorých s rastúcim množstvom cena klesá.

kde c sú jednotkové variabilné náklady na produkciu jednotky produktu a v Cournotovom oligopole sú tieto jednotkové variabilné náklady rovnaké pre všetkých producentov.

Riešením sústavy optimalizačných úloh $\max \pi_i(x_i) = P(x_1 + x_2 + \dots + x_n)x_i - cx_i \quad \forall i \in I$ dostávame ekvilibriové úrovne produkcie všetkých producentov $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ a teda za podmienky $c_i = c \quad \forall i \in I$ je táto úroveň pre všetkých producentov rovnaká $x_1^* = x_2^* = \dots = x_n^*$.

Výška zisku producentov je potom determinovaná tvarom inverznej dopytovej funkcie $P(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, jednotkovými variabilnými nákladmi c , prípadne fixnými nákladmi producentov.

Cournotov oligopol možno rozšíriť vynechaním podmienky rovnosti variabilných nákladov jednotlivých producentov, no riešenie je analogické.

Základnými predpokladmi Cournotovho oligopolu, ako modelu, je racionalita producentov v zmysle maximalizácie zisku, homogénny produkt, inverzná dopytová funkcia a neobmedzený objem produkcie producentov.

Racionalita agentov je v ekonomických modeloch štandardným predpokladom. Racionalitu producentov môžeme predpokladať aj v reálnom svete, no pretože model je zjednodušením a teda neberie do úvahy všetky aspekty reality, môže sa predpoklad racionality v modeli od racionality v reálnom svete líšiť¹². Napriek tomu, predpoklad racionality je vo všeobecnosti pri ekonomických modeloch považovaný za správny.¹³

Predpoklad homogenity produktov je reštriktívny v zmysle aplikácie modelu na reálne situácie. Existujú reálne trhy, na ktorých skutočne dopyt považuje všetky produkty každého producenta za homogénne a neprisudzuje im žiadnu osobitú atraktivitu. No zároveň existujú reálne trhy, na ktorých dopyt prisudzuje rôznym produktom rôznu úroveň atraktivity. Na takéto trhy sa Cournotov oligopol dá aplikovať iba v obmedzenej miere a ak vôbec. Samotný Cournot opisuje svoj oligopol na základe príkladu trhu pramenitých vôd, pričom v jeho dobe pramenité vody neboli balené do rôznych obalov a predpokladal rovnakú lokálnu dostupnosť všetkých produktov pre dopyt. Pri iných reálnych trhoch by však Cournotov oligopol mohol vo svojej opisnej funkcii zlyhať, teda v tomto predpoklade tam, kde dopyt prisudzuje rôznym produktom rôznu atraktivitu.

¹² Napríklad keď producent nie je motivovaný iba svojim ziskom, ale aj napríklad verejnou službou spoločnosti, prípadne keď model neberie do úvahy dlhodobé hľadisko existencie trhu.

¹³ Predpoklad racionality v ekonomických modeloch zoslabuje behaviorálny prístup, ktorému sa venuje behaviorálna ekonómia.

Inverzná dopytová funkcia predpokladá absolútny prehľad dopytu o objeme ponúkaných produktov na trhu, čím definuje trhovú cenu. Tento predpoklad je možno najslabším miestom Cournotovho oligopolu ako modelu. Preto bol aj podrobený kritike zo strany Joseph Louis François Bertranda v roku 1883 v recenzii Cournotovho diela. Bertrandovu kritiku a model uvedieme v ďalšej časti práce.

Neobmedzený objem produkcie producentov nie je vo svojej podstate až tak problematickým predpokladom, ako sa na prvý pohľad javí. Samozrejme, v reálnom svete prakticky neexistuje trh, na ktorom by tento predpoklad bol v platnosti. Cournot svojim modelom opisoval trh pramenitých vôd, na ktorom tento predpoklad nie je až tak nereálny, no určite je obmedzený výdatnosťou prameňov producentov a ich technológiou. Na iných reálnych trhoch ale určite existujú technologické obmedzenia, ktoré túto podmienku negujú. No pri platnosti klesajúcej inverznej funkcie dopytu v závislosti od objemu produktov na trhu platí, že racionálni producenti nebudú motivovaní produkovať obrovské množstvá, pretože by tým znižovali cenu svojho produktu, čím by znižovali svoj profit. Racionálni producenti sú motivovaní práveže znižovať v takejto situácii svoju produkciu pri dosahovaní maximálneho zisku. Objem produkcie a teda následný profit je determinovaný tvarom inverznej funkcie dopytu. Ak však model opisuje reálnu situáciu, ktorou je funkčný trh, potom sú producenti schopní produkovať požadované množstvá, inak povedané, ich technológia im to umožňuje. Nekonečné, respektíve nereálne vysoké objemy produkcie nedefinuje ani výstup z modelu a teda je to len hypotetický predpoklad, ktorý nutne neovplyvňuje výstupy z modelu, preto je tento predpoklad aplikovateľný na určitých typoch reálnych trhov.

Bertrandov oligopol

V roku 1883 Joseph Louis François Bertrand vo svojej recenzii Cournotovho oligopolu prichádza s myšlienkou modelu oligopolu, ktorý na rozdiel od Cournotovho oligopolu nevyužíva inverznú funkciu dopytu, ale samotnú dopytovú funkciu.^{14 15}

Dopytová funkcia na rozdiel od inverznej funkcie dopytu vyjadruje dopytované množstvo produktu v závislosti od jeho ceny a ceny ostatných produktov. Bertrand totiž vo svojej recenzii namieta, že producenti v reálnom svete nestanovujú objemy produkcie a následne trh odvodzuje cenu, ale práveže stanovujú cenu svojich produktov, na čo reaguje dopyt požadovaným objemom produktov. Bertrand neformuluje samotný model, ten formuloval až

¹⁴ (Varian, 1995)

¹⁵ (Bertrand, 1883)

neskôr v roku 1889 Francis Ysidro Edgeworth vo svojej práci The pure theory of monopoly¹⁶, no model je pomenovaný po Bertrandovi.

Majme $n \in \mathbb{N}, n > 1$ producentov produkujúcich homogénny produkt, označme množinu všetkých týchto producentov I . Nech je funkcia dopytu po produkte i

$$x_i = X_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = \begin{cases} 0 & \text{ak } p_i > \min_{j \in I, j \neq i} p_j \\ \frac{I_M}{m p_i} & \text{ak } p_i = \min_{j \in I, j \neq i} p_j, m = |M|, M \subset I, \forall k \in M: p_k = \min_{j \in I} p_j, \\ \frac{I_M}{p_i} & \text{ak } p_i < \min_{j \in I, j \neq i} p_j \end{cases}$$

kde p_i je cena produktu $i \in I$ a I_M sú finančné zdroje dopytu alokované na nami skúmaný trh.

Dá sa dokázať a tiež v tejto práci dokazujeme v časti C. Metodika práce a metódy skúmania, v kapitole 1. Model s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu – trh dokonalých substitútov v prípadoch, kedy je atraktivita jednotlivých produktov rovnaká a súčasne sú jednotkové variabilné náklady všetkých producentov rovnaké (predpoklady homogenity produktov a rovnosť nákladov producentov), že pokiaľ racionálni producenti produkujú na trhu, kde je dopyt prezentovaný vyššie uvedenou dopytovou funkciou, potom cena produktov každého producenta je rovná jeho hraničným nákladom (variabilným nákladom) c .

Základným rozdielom medzi Cournotovým oligopolom a Bertrandovým oligopolom je v ich výstupe, ekvilibriách. Pokiaľ využívame rovnaké predpoklady a analogické funkcie - inverznú funkciu dopytu pri Cournotovom oligopole a funkciu dopytu pri Bertrandovom oligopole, potom Cournotov oligopol vedie k vyššej cene na trhu, ako sú hraničné náklady producentov. Naopak Bertrandov oligopol vedie k trhovej cene na úrovni hraničných nákladov producentov.

Využitie dopytovej funkcie a predpokladu, že racionálny dopyt si vždy vyberie lacnejší produkt (za predpokladu ich homogenity), totiž vedie k motivácii producentov znižovať cenu až na úroveň svojich hraničných nákladov, pretože aj pri minimálnom jednostrannom znížení ceny daný producent získa celý dopyt.

Autor práce sa stotožňuje s Bertrandovou kritikou Cournota v tom, že v praktickej aplikácii v reálnom svete vo väčšine prípadov producenti nastavujú cenu svojho produktu a až následne je trhom odvodzovaný dopyt po ich produktoch.

No pri praktickej aplikácii Bertrandovho modelu, pokiaľ predpokladáme štruktúru nákladov

¹⁶ (Edgeworth, 1889)

producenta vo forme fixných nákladov a jednotkových variabilných nákladov, dostávame rovnosť hraničných nákladov jednotkovým variabilným nákladom, čo implikuje negatívny profit pre producenta, ak sú fixné náklady kladné. Tento výstup je prezentovaný v časti C. Metodika práce a metódy skúmania, v kapitole 1. Model s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu – trh dokonalých substitútov v prípadoch, kedy je atraktivita jednotlivých produktov rovnaká a súčasne sú jednotkové variabilné náklady všetkých producentov rovnaké (predpoklady homogenity produktov a rovnosť nákladov producentov).

To je však v rozpore s pozorovaniami v reálnom svete, v ktorom existujú trhy substitučných produktov dlhodobo. Dlhodobo totiž žiadny racionálny producent v zmysle maximalizácie profitu nebude akceptovať negatívny profit a z trhu odíde.

Modely oligopolu založené na úžitkových funkciách dopytu

V predchádzajúcich odstavcoch sme prezentovali modely oligopolu založené na dopytových, alebo inverzných dopytových funkciách. Dopyt má však základ v motivácii spotrebiteľov daný produkt kúpiť. Táto motivácia je v ekonomických výskumoch vyjadrovaná konceptom úžitku spotrebiteľov, respektíve celého dopytu, alebo presnejšie preferenciami spotrebiteľov (dopytu).

Pokiaľ postavíme model na základe dopytovej, alebo inverznej dopytovej funkcie, ktorú odhadneme napríklad z historických pozorovaní trhu, môžeme zanedbať javy, ktoré k daným dopytovým funkciám vedú, čím môžeme oslabiť predikčnú schopnosť modelu.

Pre dopadové štúdie strategických rozhodnutí producentov môže byť vhodnejšie získať pri analýze trhu o úroveň hlbšie, a to práve na úroveň preferencií dopytu. Ak totiž lepšie poznáme motiváciu spotrebiteľov, potom lepšie rozumieme javom, ktoré k samotnému dopytu vedú a dokážeme tak lepšie odhadovať reakcie trhu na strategické rozhodnutia.

Príkladom môže byť preferencia spotrebiteľov medzi rôznymi produktmi. Pri tvorbe dopytovej funkcie z historických pozorovaní nemusíme správne identifikovať preferencie spotrebiteľov, pretože v danej funkcii musia vystupovať ako samostatné parametre.

Strategické rozhodnutia sa však môžu týkať úpravy preferencií dopytu v čase, napríklad cez marketing, čo však priamo vytvorená dopytová funkcia nemusí umožňovať.

Je teda vhodné pri analýze trhu začať analýzou úžitku, respektíve preferencií dopytu a na základe nej odvodzovať samotný dopyt. Tento prístup umožňuje lepšie a adresnejšie porozumenie sledovaným javom.

Úžitok je práve tá veličina, ktorú sa spotrebiteľia (dopyt) snažia maximalizovať výberom dostupných produktov za svoje dostupné finančné zdroje. Je však zrejmé, že úžitok je rýdzo

subjektívna veličina, ktorú je matematicky v podstate nemožné vyjadriť. Každý spotrebiteľ totiž prisudzuje rôznym produktom rôzny úžitok a teda jeho zovšeobecnenie na celkový úžitok dopytu je prakticky nemožné.

Ekonomovia preto preformulovali teóriu spotrebiteľa pomocou spotrebiteľských preferencií a samotný úžitok z nich odvodzujú ako prejavované preferencie.¹⁷

Aby sme preferencie spotrebiteľa (dopytu) formalizovali, využijeme pojem spotrebiteľský kôš. Spotrebiteľský kôš je kompletný zoznam produktov a ich množstiev, ktoré sú predmetom výberu spotrebiteľa a môžeme ho zapísať ako n -ticu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde x_i vyjadruje počet vybraných jednotiek produktu $i \in I$, kde $I = \{1, 2, \dots, n\}$ je množina všetkých produktov, ktoré sú predmetom výberu spotrebiteľa.¹⁸

Môžeme predpokladať, že spotrebiteľ dokáže určiť pri porovnávaní ľubovoľných dvoch spotrebných košov, ktorý z týchto dvoch spotrebných košov preferuje, prípadne, že je medzi výberom týchto dvoch košov indiferentný.

Na to, aby boli preferencie spotrebiteľa konzistentné, musia spĺňať podmienku porovnateľnosti (akékoľvek dva spotrebné koše môžu byť spotrebiteľom porovnávané), reflexivity (akýkoľvek spotrebný kôš je aspoň tak dobrý, ako ten istý spotrebný kôš) a tranzitivity (pokiaľ spotrebiteľ považuje spotrebný kôš A za aspoň tak dobrý ako spotrebný kôš B a zároveň považuje spotrebný kôš B za aspoň tak dobrý ako spotrebným kôš C, potom spotrebiteľ považuje spotrebný kôš A za aspoň tak dobrý ako spotrebný kôš C).

Množinu spotrebných košov, ktoré spotrebiteľ považuje za rovnako dobré (teda je medzi ich výberom indiferentný) nazývame indiferentnou krivkou.¹⁹

Od preferencií spotrebiteľa môžeme požadovať ďalšie dve vlastnosti, aby sme mohli hovoriť o správne sa prejavujúcich sa preferenciách. Monotónnosť, čo vyjadruje preferencie v zmysle viac je lepšie (akýkoľvek spotrebný kôš, ktorý obsahuje aspoň rovnaké množstvo produktov a v minimálne jednom produkte o niečo viac, ako iný spotrebný kôš, je spotrebiteľom považovaný za lepší, ako tento iný spotrebný kôš) a konvexnosť (priemery sú preferované pred extrémami, prípadne indiferentné), teda že vážený priemer ľubovoľných dvoch spotrebných košov bude aspoň tak dobrý, ako každý z pôvodných dvoch spotrebných košov. Doteraz sme formalizovali preferencie jedného spotrebiteľa, avšak podobným prístupom je možné nazerať na preferencie celého dopytu. Na preferencie celého dopytu môžeme nazerať ako na zovšeobecnené preferencie všetkých jednotlivých spotrebiteľov tvoriacich dopyt,

¹⁷ (Varian, 1995)

¹⁸ (Varian, 1995)

¹⁹ (Varian, 1995)

respektíve ako na vyjadrenie preferencií priemerného spotrebiteľa tvoriaceho celkový dopyt. Pokiaľ preferencie celého dopytu spĺňajú podmienky konzistentnosti a správne sa prejavujúcich preferencií, potom je možné tieto preferencie vyjadriť pomocou úžitkovej funkcie.²⁰

Úžitková funkcia dopytu je funkcia, ktorá priradí číselnú hodnotu každému spotrebnému košu tak, aby zachovala poradie preferencií dopytu medzi všetkými spotrebnými košmi. Je zrejmé, že neexistuje výlučne jediná úžitková funkcia vyjadrujúca preferencie konkrétneho dopytu.

Pokiaľ sme identifikovali akúkoľvek úžitkovú funkciu, ktorá vyjadruje preferencie konkrétneho dopytu, potom akákoľvek lineárna transformácia tejto funkcie je tiež úžitkovou funkciou daného dopytu. Jedinečnosť úžitkovej funkcie teda nie je nutná, dokonca je v situácii konzistentných a správne sa prejavujúcich preferencií nereálna.

Úžitková funkcia určuje len poradie spotrebných košov v preferenciách spotrebiteľa.

Ak teda budeme hovoriť o úžitku spotrebiteľa (dopytu), potom budeme mať na mysli číselnú hodnotu nami definovanej úžitkovej funkcie.²¹

Spotrebiteľia (a teda aj dopyt) sú však vo svojom výbere optimálneho spotrebného koša obmedzení. Jednoducho povedané, môžu si vyberať iba z tých spotrebných košov, ktoré si môžu dovoliť za svoje finančné prostriedky - rozpočet. Pokiaľ predpokladáme konzistentné a správne sa prejavujúce preferencie, potom by spotrebiteľia bez svojho rozpočtového obmedzenia volili nekonečné množstvá všetkých produktov, čo by maximalizovalo ich úžitok. Avšak finančné prostriedky spotrebiteľov nie sú neobmedzené.

Vo všeobecnosti pokiaľ analyzujeme konkrétny trh, môžeme predpokladať, že spotrebiteľia (a teda aj dopyt) alokujú na tento trh relatívne konkrétnu časť svojich finančných prostriedkov. Tento predpoklad je vo svojej podstate diskutabilný, avšak našim záujmom je vytvoriť model, teda ho vo svojich úvahách, aspoň na začiatok, môžeme prijať.

Ak však dopyt už urobil rozhodnutie o tom, koľko finančných prostriedkov alokuje na nami skúmaný trh (respektíve dokážeme relatívne dobre odhadnúť finančné prostriedky dopytu alokované na tento trh), potom môžeme predpokladať, že dopyt tieto finančné prostriedky na nami skúmanom trhu aj minie. Tým dostávame konštantnú hodnotu finančných prostriedkov, ktoré trh míňa na nami skúmanom trhu.²² Finančné prostriedky dopytu, alebo aj rozpočet

²⁰ (Varian, 1995)

²¹ (Varian, 1995)

²² V tomto momente odhliadnuc od možnosti zmeny výšky finančných prostriedkov, ktoré trh míňa na nami skúmanom trhu v čase.

dopytu, nám tak definujú rozpočtovú hranicu, čo je množina všetkých spotrebných košov dopytu, pri ktorých sa cena v súčte za každý produkt a jeho množstvo rovná rozpočtu dopytu.

Keďže predpokladáme konzistentné a správne sa prejavujúce preferencie, spotrebiteľ a teda aj dopyt maximalizuje svoj úžitok na rozpočtovej hranici. To znamená, že vyberá taký spotrebný koš, ktorý sa nachádza na spotrebnej hranici a súčasne mu prináša maximálny úžitok, teda je definovaný maximálnou hodnotou úžitkovej funkcie na rozpočtovej hranici.

Pokiaľ sú preferencie spotrebiteľa navyše rýdzo konvexné, potom pre každú hodnotu rozpočtu spotrebiteľa existuje práve jeden taký bod na rozpočtovej hranici, ktorý spĺňa podmienku maximalizácie úžitku.

Takýmto prístupom je následne možné definovať dopytovú funkciu dopytu po každom produkte, vychádzajúcu z úžitkovej funkcie dopytu a rozpočtu dopytu.

Na to, aby sme boli schopní definovať dopytovú funkciu po každom produkte nie je nutné, aby boli preferencie dopytu rýdzo konvexné. Pokiaľ prijmeme racionálne predpoklady o rozhodovaní dopytu pri výbere spotrebných košov na rozpočtovej hranici, ktoré majú súčasne rovnakú hodnotu úžitkovej funkcie (v prípade konvexných, ale nie rýdzo konvexných preferenciách), potom sme tiež schopní definovať dopytové funkcie po jednotlivých produktoch.

Modely oligopolu založené na úžitkových funkciách teda definujú dopytovú funkciu pomocou predpokladanej úžitkovej funkcie dopytu a rozpočtovej hranice dopytu. Pokiaľ však dokážu definovať dopytové funkcie po jednotlivých produktoch, potom dokážu definovať funkcie najlepšej odpovede producentov na ľubovoľné hodnoty cien produktov ich konkurentov. Funkcie najlepšej odpovede definujú také úrovne cien produktu, ktoré maximalizujú zisk pre producenta za podmienky cien ostatných produktov.

V tomto momente poznamenáme, že aj modely založené na úžitkových funkciách predpokladajú racionalitu producentov v zmysle maximalizácie zisku.

Funkcia zisku producenta je zrejmá, je to rozdiel výnosov a nákladov. Výnosy a náklady sú funkcie závislé od objemu produkcie a predaja produktu.²³ Ak je objem produkcie a predaja funkciou závislou na cene samotného produktu a cene konkurenčných produktov, potom optimalizáciou funkcie zisku cez cenu samotného produktu pri nemenných cenách

²³ Keďže vytvárame model, môžeme predpokladať, že je producent schopný optimalizovať svoju produkciu na výšku dopytovaného množstva.

konkurenčného produktu dostávame funkciu optimálnych cien samotného produktu – funkciu najlepšej odpovede.

Následne modely oligopolu založené na úžitkových funkciách dopytu definujú výstup trhu ako kombináciu funkcií najlepších odpovedí všetkých producentov, čím definujú také úrovne cien každého producenta, z ktorých sa žiadnemu z nich neoplatí jednostranne vychýliť.

Takto definovaný výstup trhu spĺňa predpoklady Nashovho ekvilibria v čistých stratégiách, teda ekvilibria definovanom pomocou funkcií najlepších odpovedí racionálnych nekooperujúcich, ale interaktívnych subjektov.

Kľúčovým aspektom modelu oligopolu založenom na úžitkovej funkcii dopytu je správna voľba úžitkovej funkcie trhu, ktorý má model ambíciu analyzovať.

Na druhej strane je vítanou vlastnosťou modelu, pokiaľ nevedie k príliš komplexným riešeniam a výpočtom, pretože pri aplikácii príliš komplexného modelu pri strategickom rozhodovaní reálneho producenta je čas poskytnutia informácie limitovaný.

Tretím dôležitým aspektom modelu, ktorý má ambíciu byť využívaný v praxi, je interpretovateľnosť a zrozumiteľnosť vstupných a výstupných parametrov modelu. Model, ktorý bude dosahovať výborné výsledky v zmysle jeho schopnosti predpovedať skúmaný jav, no jeho vstupné parametre nebudú pre analytika, či dokonca manažment producenta zrozumiteľné, nie je v praxi použiteľný, pretože mu jednoducho manažment nebude veriť.

Model s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu

Lineárna úžitková funkcia dopytu je snáď najjednoduchšou, no zároveň aj najlepšie interpretovateľnou úžitkovou funkciou dopytu, pokiaľ analyzujeme trh substitučných produktov.

Naprieč ekonomickou literatúrou je lineárna úžitková funkcia dopytu v jej rôznych tvaroch a rozšíreniach využívaná ako funkcia generujúca dopyt na trhu dokonalo substitučných produktov.²⁴

Ak analyzujeme trh $n \in \mathbb{N}, n > 1$ substitučných produktov, ktoré považujeme za dokonalo substitučné²⁵, potom môžeme zdefinovať úžitkovú funkciu dopytu ako lineárnu funkciu v tvare

²⁴ (Varian, 1995), (Nechyba, 2010)

²⁵ Produkty nemusia byť nutne homogénne, dokonalo substitučné znamená, že určité množstvo jedného produktu dokáže dokonalo nahradiť určité množstvo akéhokoľvek iného produktu z pohľadu úžitku dopytu.

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n,$$

kde x_i je počet/objem produktu $i \in I$, kde I je množina všetkých substitučných produktov ponúkaných na nami analyzovanom trhu a A_i je určitý koeficient atraktivity/preferencie produktu $i \in I$ pre dopyt.

Finančné prostriedky dopytu sú prirodzene limitované a pokiaľ predpokladáme, že dopyt mína na nami analyzovanom trhu konštantné finančné prostriedky m^{26} , potom získavame rozpočtovú hranicu dopytu

$$m = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n,$$

kde p_i je cena jednotky produktu $i \in I$.

Dopyt prirodzene maximalizuje úžitok sa svojej rozpočtovej hranici, čím vytvára dopytové funkcie po jednotlivých produktoch v závislosti na cenách všetkých produktoch na trhu. Na odvodenie dopytových funkcií je možné využiť napríklad Lagrangeovu metódu neurčitých koeficientov pre hľadanie lokálneho extrému (maxima) funkcie s rovnostným obmedzením²⁷.

Dopytové funkcie modelu oligopolu s lineárnou funkciou dopytu uvádzame v časti C.

Metodika práce a metódy skúmania, v kapitole 1. Model s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu – trh dokonalých substitútov v podkapitole 1.2.2. Dopytové funkcie na trhu oligopolu s LUF.

Pokiaľ však máme dopytové funkcie po jednotlivých produktoch, potom môžeme odvodiť funkcie najlepšej odpovede pre jednotlivých producentov pri stanovovaní cien, ako reakciu na ľubovoľné úrovne cien konkurenčných producentov. Tie uvádzame v rovnakej časti a kapitole práce v podkapitole 1.2.3 Funkcie najlepšej odpovede na trhu oligopolu s LUF.

Ak však disponujeme funkciami najlepšej odpovede všetkých producentov, potom sme v prípade modelu s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu schopný (napríklad pomocou konceptu Nashovho ekvilibria v čistých stratégiách) definovať optimálne úrovne cien všetkých producentov, teda stav, z ktorého sa žiadnemu producentovi neoplatí jednostranne vychýliť. A keďže predpokladáme racionálnosť producentov, potom je takto definované ekvilibrium výstupom nami analyzovaného trhu.

²⁶ Pretože vytvárame model, môžeme zaviesť tento predpoklad, hoci vieme, že nie je nutne reálny. Pri aplikácii modelu je možné tento predpoklad zoslabiť a predpokladať rôzne úrovne parametra m v čase.

²⁷ (Dixit, 1990)

Toto ekvilibrium uvádzame v podkapitole 1.2.5 Ekvilibrium na trhu oligopolu s lineárnou úžitkovou funkciou v časti C. Metodika práce a metódy skúmania.

Veľkou výhodou lineárnej úžitkovej funkcie je jej interpretácia. Je totiž relatívne ľahké interpretovať koeficienty atraktivity jednotlivých produktov a zároveň ich aj štatisticky merať (v porovnaní s inými koeficientami iných úžitkových funkcií, ktoré predstavíme). V podstate podiel koeficientov atraktivity dvoch produktov pri lineárnej úžitkovej funkcii dopytu vyjadruje koľko krát dopyt preferuje jeden produkt pred druhým.

Výhodou je aj relatívne nízka komplexnosť z nej vyplývajúcich dopytových funkcií a funkcií najlepších odpovedí a následne ekvilibrií, teda je možné pri jej aplikácii dodať výstupy (dopadové štúdie) relatívne rýchlo.

No nevýhodou modelu s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu je povaha jeho výstupu – ekvilibria. Ako konštatujú podkapitoly 1.1.4, 1.1.5, 1.1.6, 1.2.4, 1.2.5, 1.2.6 časti C. Metodika práce a výstupy skúmania, aplikácia modelu s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu vedie k výstupu, pri ktorom maximálne jeden z producentov dokáže dosahovať kladný profit. Ostatní producenti, prípadne všetci producenti nutne v modeli s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu dosahujú negatívny profit. To je ale v rozpore s pozorovaním v reálnom svete v prípade, ak trh existuje dlhšie obdobie. Môžeme poznamenať, že za určitých okolností opakovaný model s lineárnou funkciou dopytu môže viesť ku kladnému profitu pre všetkých producentov, no to iba v prípade, že producenti prisudzujú budúcim interakciám dostatočne vysokú váhu a zároveň existuje medzi producentmi vedomý, či nevedomý kartel. Na reálnych trhoch ale existujú bariéry proti vzniku kartelu a teda v takýchto prípadoch model oligopolu s lineárnou funkciou dopytu nie je aplikovateľný, pretože neopisuje správne samotnú realitu.

Aplikácia modelu s lineárnou funkciou dopytu je tak limitovaná na špecifické trhy substitučných produktov a teda nie na akýkoľvek trh.

Týmito špecifickými trhmi môžu byť jednorazové trhy, alebo trhy, v ktorých je možné medzi producentmi vytvoriť vedomý, alebo nevedomý kartel.

Model s Cobb-Douglasovou úžitkovou funkciou dopytu

Ďalšou populárnou úžitkovou funkciou dopytu v ekonomickej literatúre je Cobb-Douglasova úžitková funkcia.²⁸

²⁸ (Varian, 1995), (Nechyba, 2010)

Cobb-Douglasova úžitková funkcia je pomenovaná podľa matematika a ekonóma Charlesa Wigginsa Cobba a ekonóma a politika Paula Howarda Douglasa. Cobb a Douglas publikovali v roku 1928 článok A Theory of Production²⁹, v ktorom definovali funkciu produkcie producenta ako závislosť výstupu produkcie od vstupov, ako sú kapitál a pracovná sila. Teda Cobb-Douglasova funkcia bola pôvodne navrhnutá ako produkčná funkcia producenta, no neskôr bola aplikovaná aj ako úžitková funkcia dopytu, kde samozrejme pôvodný výstup z funkcie – objem produkcie, bol nahradený úžitkom dopytu a vstupy produkcie boli nahradené objemom spotrebovaných produktov dopytom.

V prípade oligopolu s $n \in \mathbb{N}, n > 1$ produktov má Cobb-Douglasova úžitková funkcia tvar

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} * x_2^{\alpha_2} * \dots * x_n^{\alpha_n},$$

kde x_i je počet/objem produktu $i \in I$, kde I je množina všetkých produktov ponúkaných na nami analyzovanom trhu a α_i je určitý koeficient atraktivity/preferencie produktu $i \in I$ pre dopyt.

Indiferenčné krivky³⁰ Cobb-Douglasovej úžitkovej funkcie sú striktne konvexné a monotónne, teda práve také, aké očakávame od správne sa prejavujúcich preferencií.³¹

Problémom Cobb-Douglasovej úžitkovej funkcie môže byť interpretácia koeficientov atraktivity α_i . Na rozdiel od lineárnej úžitkovej funkcie, kde interpretácia koeficientov atraktivity A_i je relatívne priamočiara, pri Cobb-Douglasovej úžitkovej funkcii toto neplatí. Navyše, ak sa však zamyslíme nad tvarom Cobb-Douglasovej úžitkovej funkcie, potom si všimneme, že v prípade, ak dopyt nespotrebuje aspoň minimálne množstvo z každého z produktov, potom je úžitok dopytu nulový. To však nereprezentuje vzťah substitučných produktov ale práveže komplementárnych produktov. Cieľom práce je analyzovať trh substitučných produktov, preto sa aplikácia Cobb-Douglasovej úžitkovej funkcie pri tejto úlohe nejaví ako správna. Nemusí to byť však pravda.

Spomínali sme, že neexistuje výlučne jediná úžitková funkcia vyjadrujúca preferencie konkrétneho dopytu. Akákoľvek lineárna transformácia danej úžitkovej funkcie je totiž tiež úžitkovou funkciou vyjadrujúcou preferencie daného dopytu. Na vyjadrenie rovnakých

²⁹ (Cobb, Douglas, 1928)

³⁰ Indiferenčná krivka je množina všetkých spotrebných košov, ktoré sú z pohľadu preferencií dopytu indiferentné.

³¹ (Varian, 1995)

preferencii dopytu teda môžeme využiť lineárnu transformáciu Cobb-Douglasovej úžitkovej funkcie, napríklad

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln(x_1^{\alpha_1} * x_2^{\alpha_2} * \dots * x_n^{\alpha_n}) = \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \dots + \alpha_n \ln x_n.$$

Získali sme tak novú úžitkovú funkciu, vyjadrujúcu rovnaké preferencie ako Cobb-Douglasova úžitková funkcia. No na rozdiel od pôvodnej Cobb-Douglasovej úžitkovej funkcie, jej lineárna transformácia má lineárny tvar v závislosti od prirodzených logaritmov objemu spotrebovaných produktov. Teda získavame substitučný vzťah prirodzených logaritmov množstiev produktov v preferenciách dopytu. Zároveň aj koeficienty atraktivity α_i Cobb-Douglasovej funkcie získavajú čitateľnejší význam, keďže v novom tvare sú analogickými ku koeficientom atraktivity A_i lineárnej úžitkovej funkcie, no v zmysle prirodzených logaritmov množstva spotrebovaných produktov.

Problémom takejto lineárnej transformácie Cobb-Douglasovej úžitkovej funkcie vedúcej k substitučnému vzťahu prirodzených logaritmov množstiev produktov je však interpretácia koeficientov atraktivity α_i . Spotrebiteľia, alebo inak dopyt, predsa neporovnávajú atraktivitu produktov v zmysle prirodzených logaritmov ich množstiev. Štatistický odhad koeficientov α_i je síce možný (pri analýze trhu na ktorom predpokladáme Cobb-Douglasove preferencie dopytu), no nie priamočiaro interpretateľný. Narážame teda na problém interpretácie výstupov dopadových štúdií pre manažment, čo môže byť kľúčová úloha.

Navyše, od odpadových štúdií môžeme požadovať zmenu atraktivít produktu v čase, či už nášho produktu, alebo produktov konkurencie. Čiastkovým cieľom, či vstupom pre dopadové štúdiu, môže byť aj odhad vývoja koeficientov atraktivity pomocou určitej funkcie v závislosti od investícií do produktu, marketingu, či distribúcie. Pri viazaní atraktivity produktov na prirodzený logaritmus množstiev produktov nám vzniká komplexnejší problém odhadu funkcie atraktivity, v porovnaní s lineárnou úžitkovou funkciou.

Model s CES úžitkovou funkciou dopytu

Populárnou úžitkovou funkciou v ekonomickej literatúre je tiež CES úžitková funkcia, kde CES je skratkou anglického constant elasticity of substitution, teda úžitková funkcia s konštantnou elasticitou substitúcie.³²

Ak hovoríme o CES úžitkovej funkcii, v podstate hovoríme o skupine funkcií, ktoré boli prvý krát popísané Kennethom J. Arrowom, Hollisom B. Chenerym, Bagicha S. Minhasom a

³² (Varian, 1992)

Robertom M. Solowom v článku Capital-labor substitution and economic efficiency³³.

Podobne ako pri Cobb-Douglasovej úžitkovej funkcii išlo najprv o triedu funkcií produkcie producenta ako závislosť výstupu produkcie od vstupov, ako sú napríklad kapitál a pracovná sila a až následne bola táto trieda funkcií preformulovaná aj na triedu úžitkových funkcií.

Koncept konštantnej elasticity substitúcie vychádza z konceptu elasticity substitúcie, ktorou je elasticita podielu dvoch vstupov k produkčnej (alebo úžitkovej) funkcii vzhľadom na hraničný produkt (úžitok).³⁴

Zadefinujme si elasticitu substitúcie formálnejšie. Pri definícii elasticity substitúcie využijeme hraničnú mieru substitúcie produktov v zmysle úžitku dopytu.

Hraničná miera substitúcie vyjadruje mieru, pri ktorej je spotrebiteľ ochotný sa vzdať určitého množstva jedného produktu výmenou za iný produkt pri zachovaní rovnakej úrovne úžitku.

Štandardne sa v literatúre vyskytuje pod skratkou MRS z anglického marginal rate of substitution a môžeme ju vyjadriť v zmysle produktov $i, j \in I$, kde I je množina substitučných produktov ponúkaných na nami analyzovanom trhu, a ich množstiev x_i a x_j ako

$$MRS_{i,j} = \frac{dx_j}{dx_i} = - \frac{\frac{\partial u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j}},$$

kde $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je úžitková funkcia dopytu.³⁵

Následne pre elasticitu substitúcie σ dostaneme

$$\sigma = \frac{MRS_{i,j}}{(x_j/x_i)} \frac{d(x_j/x_i)}{dMRS_{i,j}}. \quad 36$$

CES úžitková funkcia má pre oligopol $n \in \mathbb{N}, n > 1$ produktov vo všeobecnosti tvar

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{\sigma}} x_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

kde x_i je množstvo spotrebovaného produktu $i \in I$, kde I je množina všetkých substitučných produktov ponúkaných na nami analyzovanom trhu, koeficienty $a_i \forall i \in I$ môžeme považovať za koeficienty atraktivity produktu $i \in I$ a koeficient σ je elasticita substitúcie.³⁷

³³ (Arrow, Chenery, Minhas, Solow, 1961)

³⁴ (Sydsaeter, Hammond, 1995)

³⁵ (Varian, 1992)

³⁶ (Varian, 1992)

³⁷ (Armington, 1969)

Zaujímavosť CES úžitkovej funkcie je, že je možné pomocou nej definovať úžitkové funkcie, ktoré sme už skôr uviedli ako kandidátov na definíciu modelu oligopolu substitučných produktov. Teda predchádzajúce modely oligopolu sú špeciálnymi prípadmi modelu s CES úžitkovou funkciou pre konkrétnu hodnotu σ .³⁸

Pokiaľ totiž položíme $\sigma = \infty$, respektíve ak pošleme σ limitne k ∞ , potom dostávame tvar indiferečných kriviek dokonalých substitútov, teda preferencie definované lineárnou úžitkovou funkciou.

Ak položíme $\sigma = 1$, potom dostávame Cobb-Douglasovu úžitkovú funkciu a ňou definovaný model oligopolu.

Navyše, pokiaľ je elasticita substitúcie na trhu medzi produktmi nulová pri uvažovaní CES úžitkovej funkcie, teda $\sigma = 0$, respektíve ak pošleme σ limitne k 0, potom dostávame trh dokonalých komplementov, avšak taký trh neleží v záujme tejto práce.

Veľkou výhodou použitia CES úžitkovej funkcie v modeli pri analýze oligopolu substitučných produktov je jej veľká miera všeobecnosti. Modelu s CES úžitkovou funkciou postačí predpoklad konštantnej elasticity substitúcie a následne umožňuje veľkú mieru variability, čím umožňuje presnejší popis javov na nami analyzovanom trhu.

Na rozdiel od modelu s Cobb-Douglasovou úžitkovou funkciou nedefinuje nutne komplementárny vzťah produktov, teda nutne aspoň minimálnu spotrebu každého z produktov na nami analyzovanom trhu pre dosiahnutie nenulového úžitku dopytu.

No nevýhodou modelu s CES úžitkovou funkciou je samotný odhad jej parametrov. Na určenie elasticity substitúcie na nami analyzovanom trhu by bolo nutné využitie štatistických metód, pričom evidencia potrebných vstupných pozorovaní nemusí byť dostupná. Použitie expertných odhadov parametrov CES úžitkovej funkcie by bolo príliš diskutabilné.

Navyše je veľmi pravdepodobné, že interpretácia parametrov CES úžitkovej funkcie by bola pre manažment producenta málo čitateľná, čím by sa viera manažmentu vo výstupy takéhoto modelu znižovala.

Ďalšou slabinou modelu s CES úžitkovou funkciou by bola pravdepodobne aj časová náročnosť dodania výstupov pre manažment.

Z týchto dôvodov sa javí aplikácia CES úžitkovej funkcie vhodnejšia viac pre akademické účely, ako pre praktické použitie v strategickom rozhodovaní reálneho producenta.

³⁸ (Varian, 1992)

Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu

Modely založené na úžitkových funkciách, ktoré sme uviedli v predchádzajúcich odstavcoch, vychádzali zo samotnej podstaty substitúcie produktov (lineárna úžitková funkcia – dokonalé substitúty), alebo boli odvodené a preformulované z pôvodných produkčných funkcií (Cobb-Douglasova, CES).

Výhodou modelu s lineárnou úžitkovou funkciou bola interpretovateľnosť jeho parametrov, no nevýhodou je jeho výstup, ekvilibrium, ktoré definuje negatívny profit pre minimálne všetkých producentov, až na jedného³⁹. To eliminuje aplikáciu modelu na trhy existujúce dlhšie časové obdobie.

Modely vychádzajúce z pôvodne produkčných funkcií (Cobb-Douglasova, CES) majú na prvý pohľad nevýhodu v tom, že vyžadujú spotrebu aspoň minimálneho množstva z každého z produktov na dosiahnutie nenulového úžitku⁴⁰. Je ale pravda, že túto nevýhodu pre aplikáciu na trh substitučných produktov vieme eliminovať pomocou lineárnej transformácie. No naďalej pri týchto modeloch musíme čeliť nie veľmi jednoduchej interpretovateľnosti parametrov, čo môže byť v praktickej aplikácii problém.

Práca sa venuje trhu substitučných produktov, teda želanou vlastnosťou úžitkovej funkcie by malo byť dosiahnutie nenulového úžitku pre dopyt aj v prípade, keď nie je spotrebovaný niektorý z produktov, teda práca neanalyzuje trhy komplementov. A keďže si práca dáva za cieľ identifikáciu takého modelu, ktorý by bol v praxi aplikovateľný, želanou vlastnosťou modelu je jeho relatívne nízka komplexnosť. Najjednoduchšou úžitkovou funkciou, ktorá nám zabezpečuje substitučný vzťah spotreby produktov, je lineárna úžitková funkcia.

Existuje teda motivácia na úpravu lineárnej úžitkovej funkcie, ktorá by zachovala substitučnú vlastnosť produktov v zmysle úžitku, ale zároveň by eliminovala neželané ekvilibrium modelu s lineárnou úžitkovou funkciou.

Týmto nám vzniká nová trieda úžitkových funkcií, ktoré nazývame kvázi-lineárne, ktoré vznikli úpravou lineárnej úžitkovej funkcie pridaním určitého nelineárneho prvku, prípadne prvkov, ktoré vedú ku striktnej konvexnosti preferencií.

Kvázi-lineárna úžitková funkcia s jednoduchým členom komplementárnosti

Príkladom kvázi-lineárnej úžitkovej funkcie môže byť funkcia, ktorá vznikne z lineárnej funkcie pridaním člena zabezpečujúceho rýdzu konvexnosť preferencií a vyjadrujúceho

³⁹ Uvedené dokazujeme v časti C. Metodika práce a metódy skúmania, v kapitole 1. Model s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu – trh dokonalých substitútov.

⁴⁰ Pri produkcii môžeme vo väčšine prípadov predpokladať potrebu aspoň minimálneho množstva z každého zo vstupov.

komplementárny vzťah produktov na nami analyzovanom trhu. Takejto funkcii, motivácii jej vzniku a jej interpretácii sa venujeme v časti C. Metodika práce a metódy skúmania, v kapitole 2. Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu – trh nedokonalých substitútov.

Uvedieme dva typy takej funkcie, prvá vyjadrujúca komplementárny vzťah všetkých produktov na nami analyzovanom trhu a druhá vyjadrujúca komplementárny vzťah produktov na nami analyzovanom trhu po pároch.

Predpokladajme $n \in \mathbb{N}, n > 1$ produktov na nami analyzovanom trhu, potom kvázi-lineárna úžitková funkcia s jednoduchým členom komplementárnosti všetkých produktov bude mať tvar

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + C(x_1 * x_2 * \dots * x_n),$$

kde podobne ako pri lineárnej úžitkovej funkcii x_i je počet/objem produktu $i \in I$, kde I je množina všetkých substitučných produktov ponúkaných na nami analyzovanom trhu, A_i je určitý koeficient atraktivity/preferencie produktu $i \in I$ pre dopyt a C je koeficient komplementárnosti produktov z pohľadu dopytu.

Nevýhodou takejto úžitkovej funkcie je, že úžitok z komplementárnosti produktov sa dostaví iba v prípade, pokiaľ je spotrebované aspoň minimálne množstvo z každého produktov.

Netvrdíme, že trhy s takouto vlastnosťou neexistujú, avšak je pravdepodobné, že sa v realite častejšie stretneme s druhým typom kvázi-lineárnej úžitkovej funkcie s jednoduchým členom komplementárnosti, komplementárnosť po pároch produktov.

Ak teda opäť predpokladáme $n \in \mathbb{N}, n > 1$ produktov na nami analyzovanom trhu, potom kvázi-lineárna úžitková funkcia s jednoduchým členom komplementárnosti po pároch produktov bude mať tvar

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + C(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1, k \neq j}^n x_j x_k),$$

kde x_i je počet/objem produktu $i \in I$, kde I je množina všetkých substitučných produktov ponúkaných na nami analyzovanom trhu, A_i je určitý koeficient atraktivity/preferencie produktu $i \in I$ pre dopyt a C je koeficient komplementárnosti produktov po pároch z pohľadu dopytu.

Uvedený je najjednoduchší tvar kvázi-lineárnej úžitkovej funkcie s jednoduchým členom komplementárnosti po pároch produktov, kde je koeficient komplementárnosti C rovnaký pre všetky páry produktov. Pokiaľ na trhu predpokladáme rôzne úrovne komplementárnosti párov

produktov na trhu, potom týmto párom produktov je možné priradiť rôzne koeficienty komplementárnosti, no na ilustráciu tejto úžitkovej funkcie jej najjednoduchší tvar postačí.

Ako sme uviedli vyššie, modelom s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu s jednoduchým členom komplementárnosti a ich výstupom a aplikáciám sa venujeme v časti C. Metodika práce a metódy skúmania, v kapitole 2. Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu – trh nedokonalých substitútov.

Kvázi-lineárna kvadratická úžitková funkcia

V ekonomickej literatúre sa stretneme s modelom s kvázi-lineárnou kvadratickou úžitkovou funkciou⁴¹.

Kvázi-lineárna kvadratická úžitková funkcia je využívaná ekonómami a matematikmi na odvodenie lineárneho dopytu oligopolu diferencovaných produktov⁴².

Ako konštatujú Choné a Linnemer⁴³, pôvod kvázi-lineárnej kvadratickej úžitkovej funkcie nie je jednoznačný, je ho možné vystopovať do začiatku 60tych rokov 20teho storočia, kedy Martin Shubik začal spolupracovať s Richardom E. Levitanom v IBM. Ich spolupráca začala využívaním lineárneho dopytu po diferencovaných produktoch v oligopole, neskôr tento dopyt začali odvodzovať od kvázi-lineárnej úžitkovej funkcie. No samotní Choné a Linnemer tiež konštatujú, že prvky kvázi-lineárnej kvadratickej úžitkovej funkcie je možné nájsť aj v skoršej literatúre, konkrétne v Bowleyho *The Mathematical Groundwork of Economics: An Introductory Treatise* z roku 1924⁴⁴.

Ak predpokladáme $n \in \mathbb{N}, n > 1$ produktov na nami analyzovanom trhu, potom kvázi-lineárnu kvadratickú úžitkovú funkciu môžeme zapísať ako

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1, k \neq j}^n C_{j,k}x_jx_k - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n B_j x_j^2,$$

pričom ak označíme $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $\mathbf{B}$ $n \times n$ rozmernú kladne definitnú maticu, kde koeficienty B_j z predchádzajúceho zápisu tvoria diagonálu a $C_{j,k}$ ostatné prislúchajúce členy matice, potom môžeme kvázi-lineárnu kvadratickú úžitkovú funkciu zapísať v maticovom tvare

$$U(\mathbf{x}) = \mathbf{A}'\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x}.$$

⁴¹ (Choné, Linnemer, 2019)

⁴² (Amir, Erickson, Jin, 2015)

⁴³ (Choné, Linnemer, 2019)

⁴⁴ (Bowley, 1924)

Pre oba zápisy platí, že x_i je počet/objem produktu $i \in I$, kde I je množina všetkých substitučných produktov ponúkaných na nami analyzovanom trhu, A_i je určitý koeficient atraktivity/preferencie produktu $i \in I$ pre dopyt, koeficienty $C_{j,k}$ sú určité koeficienty komplementarity párov produktov a B_i je koeficient vzťahujúci sa na druhú mocninu spotreby produktu $i \in I$ v zmysle danej úžitkovej funkcie.

Podmienka, že matica $\mathbf{B}$ je kladne definitná nám však obmedzuje aplikáciu tejto funkcie na správne sa prejavujúce preferencie. Od správne sa prejavujúcich preferencií totiž očakávame ich konvexnosť. Keďže je však $\mathbf{B}$ kladne definitná, potom je táto podmienka porušená.

Naskytuje sa teda otázka, prečo ekonómovia a matematici využívajú pri modelovaní oligopolu diferencovaných produktov úžitkovú funkciu, ktorá nereprezentuje správne sa prejavujúce preferencie.

Aby sme túto otázku zodpovedali, vrátime sa k prvotnej definícii kvázi-lineárnej kvadratickej funkcie, ktorá bola odvodená od lineárneho dopytu.

Ešte predtým si uveďme predpoklad o dopyte nazývaný aj Zákon dopytu, ktorý definuje klesajúcu závislosť dopytu po produktoch od ich cien⁴⁵. Je to niečo, čo prirodzene očakávame od dopytu, že v prípade rastu cien dopyt po produktoch klesá a naopak⁴⁶.

Predpokladajme lineárne inverzné funkcie dopytu po dvojici produktov v prípade duopolu, spĺňajúcu Zákon dopytu, najskôr bez ohľadu na jej podkladovú úžitkovú funkciu,

$$p_1(x_1, x_2) = A_1 - B_1x_1 - Cx_2,$$

$$p_2(x_1, x_2) = A_2 - B_2x_2 - Cx_1.^{47}$$

Tieto inverzné funkcie dopytu majú práve tú vlastnosť, ktorú očakávame od inverzných dopytových funkcií spĺňajúcich Zákon dopytu, teda že s rastom produkcie jedného, alebo druhého produktu cena týchto produktov klesá (za podmienky, že všetky koeficienty A_i, B_i, C sú kladné $\forall i \in \{1,2\}$).

Ak však pre uvedené lineárne inverzné dopytové funkcie hľadáme podkladovú úžitkovú funkciu, potom získame

⁴⁵ (Amir, Erickson, Jin, 2015)

⁴⁶ V ekonomickej literatúre sú popísané aj statky, pri ktorých Zákon dopytu neplatí, diskutuje ich napríklad aj (Varian, 1995), takéto statky sa nazývajú Giffenove statky, avšak tie nie sú predmetom tejto práce.

⁴⁷ (Dixit, 1979)

$$U(x_1, x_2) = A_1x_1 + A_2x_2 - \frac{1}{2}(B_1x_1^2 + 2Cx_1x_2 + B_2x_2^2),$$

čo je kvázi-lineárna kvadratická úžitková funkcia v prípade dvoch produktov – duopolu.

Uvedené lineárne inverzné dopytové funkcie sú teda riešením prvých podmienok optimalizácie kvázi-lineárnej kvadratickej úžitkovej funkcie v prípade duopolu. Uvedené je možné dokázať aj pre akýkoľvek počet $n \in \mathbb{N}, n > 1$ produktov⁴⁸.

Výhodou modelu využívajúceho kvázi-lineárnu kvadratickú úžitkovú funkciu na analýzu oligopolu je, že z nej vyplývajúce parciálne dopytové funkcie sú lineárne a teda je identifikácia ekvilibrií relatívne jednoduchá⁴⁹.

Nevýhodou je však odklonenie sa od správne sa prejavujúcich preferencií dopytu.

Komplementárny vzťah produktov je v nej negatívny, čiže spotreba kombinácie produktov vedie k menšiemu úžitku, ako spotreba jediného z nich. Uvedené diskutujeme na príklade duopolu v úvode kapitoly 2. Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu – trh nedokonalých substitútov, kde nezavrhujeme možnosť existencie trhu, kde kombinácia spotreby vedie k nižšiemu úžitku, ako spotreba jediného z produktov, no v našich úvahách je pravdepodobnejší opak. Teda že kombinácia produktov v spotrebe vedie práve k vyššiemu úžitku dopytu, teda vlastnosť konvexnosti preferencií sa nám v reálnom svete javí ako pravdepodobnejšia.

Navyše, interpretácia jednotlivých parametrov kvázi-lineárnej kvadratickej úžitkovej funkcie nie je priamočiara, čo môže znamenať problém v prípade jej aplikácie v reálnom svete pri prezentácii výstupov modelu manažmentu.

Iné formy kvázi-lineárnej úžitkovej funkcie

Keďže pod pojmom kvázi-lineárnej úžitkovej funkcie môžeme rozumieť rôzne úžitkové funkcie s lineárnym prvkom, v literatúre sa stretneme aj s inými formami týchto úžitkových funkcií⁵⁰.

Keďže však práci ide o identifikáciu relatívne jednoducho interpretovateľného modelu, no s ohľadom na podkladovú úžitkovú funkciu vyjadrujúcu správne sa prejavujúce preferencie, ako najvhodnejší kandidát sa javí model oligopolu využívajúci kvázi-lineárnu úžitkovú funkciu s jednoduchým členom komplementárnosti, ktorý sme načrtli v tejto časti práce

⁴⁸ (Amir, Erickson, Jin, 2015)

⁴⁹ (Choné, Linnemer, 2019)

⁵⁰ (Varian, 1992), (Varian, 1995)

a detailnejšie analyzujeme v časti C. Metodika práce a metódy skúmania v kapitole 2. Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu – trh nedokonalých substitútov.

C. Metodika práce a metódy skúmania

Cieľom práce je identifikácia modelu trhu substitučných produktov v podmienkach oligopolu, ktorý by bol aplikovateľný pri strategickom rozhodovaní reálnych producentov.

Takýto model by mal spĺňať dve základné podmienky, a to

- mal by mať schopnosť dostatočne správne popísať analyzovaný trh,
- mal by mať vlastnosť relatívne jednoduchšej interpretácie, s čím je spojená aj vlastnosť relatívne jednoduchého odhadu jeho parametrov, či možnosť odhadu vývoja jeho parametrov v čase.

Práca v prvom rade analyzuje najjednoduchší, no zároveň aj najjednoduchšie interpretovateľný model oligopolu substitučných produktov založený na lineárnej úžitkovej funkcii. Najskôr analyzuje model duopolu, neskôr rozširuje svoje skúmanie na oligopol. Práca identifikuje výstupy takéhoto modelu, najskôr využitím modelovania racionálnych rozhodnutí producentov, neskôr využitím prostriedkov teórie hier.

Keďže oba prístupy vedú k rovnakým výstupom, práca tak vytvára myšlienkový most medzi oboma prístupmi.

Keďže výstupy z modelu oligopolu s lineárnou úžitkovou funkciou sú aplikovateľné iba na určité typy trhov, práca pokračuje vo svojom skúmaní ďalej, pričom obohacuje pôvodnú lineárnu úžitkovú funkciu modelu o prvok komplementárnosti produktov, čím vytvára kvázi-lineárnu úžitkovú funkciu a na nej založený model.

Na príklade duopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu práca dokazuje širšiu aplikáciu takto zvoleného modelu oproti modelu s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu. Výstupy modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu totiž identifikujú ekvilibriá, ktoré už nemajú vlastnosť krátkodobej existencie trhu tak, ako to je pri ekvilibriách modelu s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu.

Výstupy modelu sú identifikované pomocou prostriedkov teórie hier.

Práca neskôr naznačuje všeobecné riešenie modelu triopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou, pričom konštatuje vysokú komplexnosť pri všeobecnom riešení.

Zároveň však konštatuje, že v prípade reálnej situácie/analýzy konkrétneho strategického rozhodnutia je aplikácia modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou možná aj pre počet producentov vyšší ako 2.

Navyše práca konštatuje aj možnosť aplikácie modelu duopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu aj v situáciách, kde je počet producentov vyšší ako 2, pričom reálny

producent môže využiť tento model tak, že všetkých svojich konkurentov zovšeobecní na jediného. Týmto dokáže eliminovať komplexnosť riešení oligopolného modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu.

1. Model s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu – trh dokonalých substitútov

1.1 Duopol s lineárnou úžitkovou funkciou

Duopol je jedna zo základných a najjednoduchších foriem konkurencie na trhu. Je to situácia, v ktorej dvaja konkurenční producenti produkujú dva produkty, ktoré uspokojujú konkrétnu potrebu dopytu (populácie) a tieto produkty sú jedinými produktami, ktoré dokážu túto potrebu dopytu uspokojiť. Inými slovami nazývame tieto produkty substitútmi a pokiaľ tieto dva substitúty sú jediné produkty, ktoré dokážu uspokojiť konkrétnu potrebu dopytu, potom trh týchto produktov nazývame duopol.

Dopyt má limitované zdroje, ktoré mína na trhu duopolu, preto producenti súťažia so svojimi produktami o limitovaný dopyt. Táto súťaž je zvyčajne vedená cenou produktov, pretože dopyt tvorí svoje rozhodnutia o spotrebe na základe cien jednotlivých produktov.

Prirodzene očakávame, že spotreba niektorého z produktov poklesne pokiaľ jeho cena vzrastie, pretože si dopyt môže dovoliť menej daného produktu za svoje obmedzené zdroje, prípadne bude dopyt zvyšovať spotrebu relatívne zlacneného konkurenčného produktu.

Naopak, pokiaľ cena niektorého z produktov poklesne, potom prirodzene očakávame nárast spotreby daného produktu, pretože si dopyt bude môcť dovoliť kúpiť viac daného produktu za svoje obmedzené zdroje, prípadne dopyt zníži spotrebu relatívne zdraženého konkurenčného produktu.

Navyše je racionálne očakávať, že spotreba oboch produktov (respektíve celková spotreba produktov na trhu duopolu) poklesne, pokiaľ oba produkty zdražujú a naopak.⁵¹

Obmedzené zdroje dopytu sa často nazývajú rozpočet dopytu a množinu všetkých kombinácií množstiev spotreby jednotlivých produktov, ktoré sú predmetom výberu spotrebiteľa (alebo celého dopytu), pri ktorých sa rozpočet dopytu rovná sume množstiev produktov krát ich jednotkové ceny, nazývame rozpočtová hranica.

Jednotlivé množstvá spotreby jednotlivých produktov, ktoré sú predmetom výberu spotrebiteľa (alebo celého dopytu), sa nazývajú spotrebné koše.^{52 53}

⁵¹ Tento predpoklad o dopyte sa nazýva aj Zákon dopytu (Amir, Erickson, Jin, 2015).

⁵² (Varian, 1995)

⁵³ (Varian, 1992)

Ekonomovia zvyčajne vyjadrujú motiváciu dopytu pri určovaní ideálneho spotrebného koša pomocou úžitkovej funkcie. Úžitková funkcia je funkcia, ktorá priradí číselnú hodnotu každému spotrebnému košu tak, aby zachovala poradie preferencií dopytu medzi všetkými spotrebnými košmi.

Preferencie sú vyjadrenia názoru spotrebiteľa (alebo celého dopytu), ktorý spotrebný kôš preferuje, keď porovnáva dva akékoľvek spotrebné koše.^{54 55}

Pokiaľ máme definovanú úžitkovú funkciu a rozpočtovú hranicu dopytu, potom sme schopný odvodiť dopytovú funkciu po jednotlivých produktoch v závislosti od ich cien, ako maximalizáciu úžitku pre dopyt (maximalizáciu úžitkovej funkcie) na rozpočtovej hranici.

Keďže má práca ambíciu aplikácie v reálnom svete, všetky číselné parametre a výstupy, ktoré budeme používať, budú z množiny reálnych čísiel.

1.1.1 Lineárna úžitková funkcia (LUF) na trhu duopolu

Uvažujme dvoch konkurenčných producentov $I = \{1, 2\}$, ktorí produkujú dva substitučné produkty a predpokladajme, že tieto dva produkty (označme ich produkt 1 ako produkt, ktorý produkuje producent 1 a produkt 2 ako produkt, ktorý produkuje producent 2, teda množina produktov bude rovnaká ako množina producentov $I = \{1, 2\}$) sú jedinými produktami, ktoré dokážu uspokojiť nejakú konkrétnu potrebu dopytu.

Nazvime túto konkrétnu potrebu dopytu, spotrebu predmetných produktov a produkciu týchto produktov trhom M .

Nech $x_i \geq 0$ je počet jednotiek produktu $i \in I$, nech $f_i > 0$ ⁵⁶ sú fixné náklady producenta $i \in I$, nech $c_i > 0$ ⁵⁷ sú variabilné náklady producenta $i \in I$ na jednotku produktu i a nech $p_i \geq 0$ je jednotková cena produktu $i \in I$.

Predpokladajme, že sa producenti zaujímajú iba o maximalizáciu ich profitu a nech profit je definovaný ako $\pi_i = p_i x_i - f_i - c_i x_i$ pre všetkých producentov $i \in I$.

Vidíme, že pre akékoľvek dané x_i , f_i and c_i profit producenta i , $\pi_i \geq -f_i \Leftrightarrow p_i \geq c_i$.

Ak $p_i < c_i$, tak pre akékoľvek dané $x_i > 0$, $f_i, c_i > 0$ profit producenta i $\pi_i < -f_i$, čiže je racionálne predpokladať $p_i \geq c_i, \forall i \in I$.

⁵⁴ (Varian, 1995)

⁵⁵ (Varian, 1992)

⁵⁶ Toto je relatívne prirodzená požiadavka, pretože štandardne majú producenti aspoň minimálne fixné náklady, pokiaľ chcú produkovať.

⁵⁷ Toto je racionálna požiadavka, pretože pokiaľ by boli pre niektorého producenta variabilné náklady na jednotku produktu rovné nule, potom by mohol producent stanoviť cenu produktu na nulovej úrovni, čo by viedlo k nekonečnej spotrebe tohto produktu a trh M by zanikol.

Dovoľíme zjemniť predpoklad, že producenti sa zaujímajú iba o maximalizáciu ich profitu v prípade, keď $p_i = c_i$ pre ľubovoľné $i \in I$. V takom prípade predpokladajme, že producent $i \in I$ bude produkovať dopytom požadované množstvo produktu $i \in I$, napriek tomu, že pri zachovaní požiadavky by bol producent indiferentný medzi produkovaním a neprodukovaním.⁵⁸

Uvažujme a označme celkové finančné zdroje dopytu $I_T > 0$.

Nech $x_0 \geq 0$ je počet jednotiek všetkých ostatných produktov mimo trhu M, ktoré naplňajú akúkoľvek inú potrebu dopytu, nech sú jednotky x_0 ekvivalentné k jednotkám x_i , $i \in I$.

Nech $p_0 \geq 0$ je cena jednotky x_0 a teda môžeme tvrdiť, že p_0 je vážený priemer cien produktov mimo trh M, v zmysle ekvivalentných jednotiek trhu M.

Predpokladajme, že p_0 a x_0 nereagujú na situáciu na trhu M, teda z pohľadu trhu M ide o konštanty.

To znamená, že súčin $p_0 * x_0$ definuje finančné zdroje, ktoré dopyt míňa mimo trh M.

To znamená, že rozdiel $I_T - p_0 x_0 = I_M$ definuje finančné zdroje, ktoré dopyt míňa na trhu M a požadujeme $I_M > 0$, čo znamená $p_0 x_0 < I_T$.

Keďže považujeme produkty 1 a 2 za substitúty, predpokladajme, že sú dokonalými substitútmi, teda predpokladajme, že úžitková funkcia dopytu na trhu M je lineárna^{59 60}:

$$U_L(x_1, x_2) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + D x_0,$$

$$\text{s rozpočtovým obmedzením } I_M = p_1 x_1 + p_2 x_2, \quad (1.1.1.1)$$

za podmienok

$$A_i > 0, D > 0, x_i \geq 0, c_i > 0, p_i \geq c_i, x_0 \geq 0, p_0 \geq 0, I_T > 0, I_M = I_T - p_0 x_0 > 0 \quad \forall i \in I,$$

⁵⁸ V prípade, keď $p_i = c_i$, $i \in I$, môžeme predpokladať, že napriek tomu, že je producent $i \in I$ indiferentný medzi produkovaním a neprodukovaním v zmysle jeho profitu π_i , producent $i \in I$ môže preferovať produkciu, pretože toto rozhodnutie producenta môže zachovať prax jeho pracovnej sily. V opačnom prípade pracovná sila producenta môže stratiť svoju prax, čo môže byť nákladnejšie pre producenta, pokiaľ by sa producent vrátil do produkcie pri výhodnejších podmienkach na trhu M. Tento slabý predpoklad môže byť podporený predpokladom, že variabilné náklady c_i obsahujú všetky variabilné náklady producenta pri produkcii jednotky produktu i , vrátane údržby a opráv plynúcich z opotrebenia spôsobeného produkciou produktu i .

⁵⁹ V ekonomickej literatúre, napríklad (Nechyba, 2010) sa úžitková funkcia dokonalých substitútov v duopole často vyjadruje ako lineárna funkcia $U_L = x_1 + x_2$.

Dodaním koeficientov atraktivity produktov A_i umožňujeme nazerať na situáciu vo väčšej všeobecnosti, analyzovať zmeny na trhu M pri zmene atraktivity produktov 1 a 2.

Doplnenie komponentu $D x_0$ nevedie k zmene pri výpočte výstupov trhu M, pokiaľ uvažujeme efektívny duopol na trhu M. Avšak komponent $D x_0$ nám môže umožniť analýzu situácie (za určitých predpokladov), keď sa efektívny duopol z trhu M vytráti, keď napríklad niektorý z producentov získa na trhu M monopolné postavenie.

⁶⁰ (Varian, 1995)

kde $A_i > 0$ ⁶¹ je atraktivita produktu $i \in I$ z pohľadu dopytu, $D > 0$ ⁶² je atraktivita produktov mimo trh M a $I_M = p_1x_1 + p_2x_2$ je rozpočtová hranica dopytu na trhu M.

Koeficient atraktivity A_i vyjadruje akúkoľvek atraktivitu ako napríklad kvalita, marketing, alebo dostupnosť a známosť produktu $i \in I$ v jednom koeficiente.

Predpoklad, že produkty 1 a 2 sú dokonalé substitúty znamená, že hoci by A_1 a A_2 neboli rovnaké, určité množstvo produktu 1 má z pohľadu dopytu rovnaký úžitok, ako určité množstvo produktu 2 a naopak.

1.1.2 Dopytové funkcie na trhu duopolu s LUF

Predpokladajme, že producenti na trhu M sú schopní vyrábať akékoľvek dopytom požadované množstvo ich produktov. To znamená, že v našej analýze nebudú žiadne produkčné obmedzenia. Čiže producenti $i \in I$ môžu úplne slobodne stanovovať cenu $p_i \geq c_i, \forall i \in I$.

Odvodíme teraz dopytové funkcie po produktoch 1 a 2 pomocou maximalizácie úžitkovej funkcie dopytu za podmienky rozpočtovej hranice. Využijeme na to Lagrangeovu metódu neurčitých koeficientov pre hľadanie lokálneho extrému (maxima) funkcie s rovnostným obmedzením⁶³. Lagrangeova funkcia pre lineárnu úžitkovú funkciu (1.1.1.1) je

$$\mathcal{L}_L(x_1, x_2, \lambda) = A_1x_1 + A_2x_2 + Dx_0 + \lambda[I_M - p_1x_1 - p_2x_2], \quad (1.1.2.1)$$

kde λ je Lagrangeov multiplikátor.

Lagrangeova metóda definuje tri podmienky pre lokálny extrém, ktoré musia byť splnené súčasne:

$$\frac{d\mathcal{L}_L}{dx_1} = A_1 - \lambda p_1 = 0, \quad (1.1.2.2)$$

$$\frac{d\mathcal{L}_L}{dx_2} = A_2 - \lambda p_2 = 0, \quad (1.1.2.3)$$

⁶¹ Budeme požadovať, aby atraktivity produktov boli väčšie ako 0, pretože v prípade, keď je atraktivita niektorého z produktov nulová, potom tento produkt už nepatrí do trhu M. V jednom špeciálnom prípade umožníme atraktivite niektorého z produktov, aby bol rovný 0, ale to bude iba v prípade, keď niektorý z produktov stratí svoju atraktivitu na trhu M (napríklad v prípade diferenciacie konkurenčného produktu, k čomu by viedli významné investície do kvality produktu zo strany konkurenta), čo by znamenalo zmenu trhu M z duopolu na monopol.

⁶² Budeme požadovať, aby atraktivita produktov mimo trh M bola väčšia ako 0, pretože v opačnom prípade by trh M bol trhom všetkých potrieb dopytu.

⁶³ (Dixit, 1990)

$$\frac{d\mathcal{L}_I}{d\lambda} = I_M - p_1x_1 - p_2x_2 = 0. \quad (1.1.2.4)$$

Pokiaľ budeme najprv uvažovať iba (1.1.2.2) a (1.1.2.3), potom dostaneme

$$p_1 = \frac{A_1}{A_2}p_2, \text{ or } p_2 = \frac{A_2}{A_1}p_1. \quad (1.1.2.5)$$

Podmienke (1.1.2.5) môžeme rozumieť tak, že dopyt bude deliť svoju spotrebu na trhu M medzi produkty 1 a 2 v zmysle $x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \Leftrightarrow (1.1.2.5)$. V opačnom prípade jedno z nasledujúcich tvrdení bude pravdivé $x_1 = 0$ alebo $x_2 = 0$, čo implikuje v prípade $x_1 = 0$, že $x_2 = \frac{I_M}{p_2}$, alebo v prípade $x_2 = 0$, že $x_1 = \frac{I_M}{p_1}$, pretože dopyt použije svoje finančné zdroje alokované na trh M iba na relatívne lacnejší produkt v zmysle ceny a atraktivity. To znamená, že ak $p_1 > \frac{A_1}{A_2}p_2$ potom $x_1 = 0$ a ak $p_2 > \frac{A_2}{A_1}p_1$ potom $x_2 = 0$.

Z predchádzajúcich úvah a z Lagrangeovej metódy pre hľadanie lokálneho extrému dostaneme dopytové funkcie:

$$x_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{ak } p_1 > \frac{A_1}{A_2}p_2 \\ \frac{I_M}{2p_1} = \frac{A_2 I_M}{2A_1 p_2} & \text{ak } p_1 = \frac{A_1}{A_2}p_2, \\ \frac{I_M}{p_1} & \text{ak } p_1 < \frac{A_1}{A_2}p_2 \end{cases} \quad (1.1.2.6)$$

$$x_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{ak } p_2 > \frac{A_2}{A_1}p_1 \\ \frac{I_M}{2p_2} = \frac{A_1 I_M}{2A_2 p_1} & \text{ak } p_2 = \frac{A_2}{A_1}p_1 \\ \frac{I_M}{p_2} & \text{ak } p_2 < \frac{A_2}{A_1}p_1 \end{cases} \quad (1.1.2.7)$$

1.1.3 Funkcie najlepšej odpovede na trhu duopolu s LUF

Predpokladajme, že producenti na trhu M sú racionálni a že ich jedinou motiváciou je maximalizácia ich zisku, s jedným zjemnením tohto predpokladu, ktoré bolo uvedené pri definovaní lineárnej úžitkovej funkcie duopolu a teda, že producenti budú produkovať akékoľvek požadované množstvo dopytom.

Doplňme ešte ďalší predpoklad, že obaja producenti majú úplnú informáciu o hodnotách A_i , D , I_M , f_i , $c_i \forall i \in I$, čiže obaja poznajú (1.1.2.6) a (1.1.2.7) a že dokážu pozorovať $p_i \forall i \in I$.

Pozrime sa na problém maximalizácie profitu oboch producentov, čo znamená $\forall i \in I$:

$$\max \pi_i(p_i) = p_i x_i - f_i - c_i x_i. \quad (1.1.3.1)$$

Ak zafixujeme $p_2 = p_2^{fix}$, producent 1 nikdy nestanoví $p_1 > \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$, pokiaľ $c_1 > \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$,

kedy producent 1 stanoví $p_1 = c_1$.⁶⁴ Totiž stanovenie $p_1 > \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$ by znamenalo nulový

dopyt po produkte 1, teda $x_1 = 0$, čo by znamenalo minimálny profit pre producenta 1.

Ak $c_1 > \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$, potom producent 1 stanovuje $p_1 = c_1$, hoci je v takom prípade nulový dopyt po produkte 1, pretože to je minimálna cena, kedy je producent 1 ešte ochotný produkovať.⁶⁵

Rovnako môžeme uvažovať o producentovi 2, ak sa snaží stanoviť $p_2 > \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix}$, keď máme

fixovanú $p_1 = p_1^{fix}$. Producent 2 nikdy nestanoví $p_2 > \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix}$ (iba v prípade, keď $c_2 >$

$\frac{A_2}{A_1} p_1^{fix}$ a v takom prípade stanoví $p_2 = c_2$ z čoho vyplýva $x_2 = 0$), pretože to by viedlo k

nulovému dopytu po produkte 2 ($x_2 = 0$), čo by znamenalo minimálny profit pre producenta 2 ($\pi_2 = -f_2$).

Predpokladajme teraz, že producent 1 (keď je p_2 fixované) stanoví $p_1 = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$, za

podmienky $c_1 \leq \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$.⁶⁶ V tomto prípade je dopyt rozdelený medzi produkty 1 a 2 (čo

znamená $x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$) a $\pi_1 = \frac{p_1 - c_1}{2p_1} I_M - f_1$. Pre $p_1 > c_1$ producent 1 dosiahne profit

$\pi_1 > -f_1$, teda rozhodnutím $p_1 = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$ producent 1 môže dosiahnuť vyšší ako minimálny profit.

Analogicky, ak producent 2 (keď je p_1 fixované) stanoví $p_2 = \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix}$ za podmienky $c_2 \leq$

$\frac{A_2}{A_1} p_1^{fix}$, potom $\pi_2 = \frac{p_2 - c_2}{2p_2} I_M - f_2$. Pre $p_2 > c_2$ producent 2 dosiahne $\pi_2 > -f_2$, teda

rozhodnutím $p_2 = \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix}$ producent 2 môže dosiahnuť vyšší ako minimálny profit.

Opätovne zafixujme p_2 a predpokladajme, že producent 1 stanoví $p_1 < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$. Pamätajme,

že p_1 je racionálne iba ak $p_1 \geq c_1$. Ak sú oba predpoklady platné, potom $x_1 = \frac{I_M}{p_1}$, teda $\pi_1 =$

⁶⁴ Predpoklad, že producent 1 stanoví $p_1 = c_1$ v prípade ak $c_1 > \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$ vychádza z podmienky $p_1 \geq c_1$

a z predpokladu, že ak $p_1 = c_1$ producent 1 preferuje produkovať dopytované množstvo produktu 1, hoci je producent 1 indiferentný medzi produkovaním a neprodukovaním v zmysle jeho profitu π_1 .

⁶⁵ Vychádza z predpokladu, že producent 1 preferuje produkovať akékoľvek požadované množstvo $x_1 \geq 0$ v prípade, keď $p_1 = c_1$, hoci producent 1 je indiferentný medzi produkovaním a neprodukovaním v zmysle profitu π_1 .

⁶⁶ V prípade ak $c_1 > \frac{A_1}{A_2} p_2$ producent 1 nemôže stanoviť $p_1 = \frac{A_1}{A_2} p_2$, pretože by vtedy platilo $p_1 < c_1$, čo je v protiklade s podmienkou $p_1 \geq c_1$, teda producent 1 môže stanoviť $p_1 = \frac{A_1}{A_2} p_2$, iba ak $c_1 \leq \frac{A_1}{A_2} p_2$.

$\frac{p_1 - c_1}{p_1} I_M - f_1$ a ak $p_1 > c_1$ potom $\pi_1 > -f_1$. Čiže rozhodnutie $p_1 < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$ môže viesť

k väčšiemu ako minimálnemu profitu pre producenta 1.

Analogicky, ak producent 2 (keď je p_1 fixované) stanoví $p_2 < \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix}$ za podmienky $p_2 \geq c_2$,

potom $\pi_2 = \frac{p_2 - c_2}{p_2} I_M - f_2$ a ak $p_2 > c_2$ potom $\pi_2 > -f_2$. Teda rozhodnutie $p_2 < \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix}$

producenta 2 môže viesť k vyššiemu ako minimálnemu profitu.

Čo je však racionálne pre producenta 1? Stanoviť $p_1 = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$ alebo $p_1 < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$?

Pretransformujme túto otázku na otázku, kedy je pre producenta 1 výhodnejšie stanoviť $p_1 < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$.

Označme $p_1^* = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$ a $\pi_1^*(p_1^*) = \frac{p_1^* - c_1}{2p_1^*} I_M - f_1$ a uveďme $\Delta > 0$. Potom definujme pre cenu

$p_1^L < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$ vzťah $p_1^L = p_1^* - \Delta$, teda Δ dokáže definovať akúkoľvek cenu $p_1^L < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$.

Potom profit π_1^L producenta 1 za podmienky $p_1^L < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$, $p_1^L = p_1^* - \Delta$ sa dá prepísať na

$\pi_1^L = \frac{p_1^* - \Delta - c_1}{p_1^* - \Delta} I_M - f_1$. Čiže sme sa dostali k otázke, kedy $\pi_1^L > \pi_1^*$, alebo

$$\frac{p_1^* - \Delta - c_1}{p_1^* - \Delta} I_M - f_1 > \frac{p_1^* - c_1}{2p_1^*} I_M - f_1, \quad (1.1.3.2)$$

z čoho dostávame

$$\Delta < \frac{\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} \left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - c_1 \right)}{\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + c_1}. \quad (1.1.3.3)$$

Kombináciou (1.1.3.3) a $p_1^L < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$ dostávame podmienku existencie ceny $p_1^L < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$,

ktorá je preferovaná producentom 1 pred cenou $p_1^* = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$, teda z

$$\frac{2 \frac{A_1}{A_2} c_1 p_2^{fix}}{\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + c_1} < p_1^L < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix},$$

dostaneme

$$\frac{2 \frac{A_1}{A_2} c_1 p_2^{fix}}{\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + c_1} < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix},$$

čiže dostaneme

$$c_1 < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}. \quad (1.1.3.4)$$

Teda ak platí (1.1.3.4), potom existuje cena $p_1^L < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$, ktorá je striktne preferovaná producentom 1 pre cenou $p_1^* = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$, keď je dané p_2^{fix} .

Teda ak platí (1.1.3.4), potom akákoľvek cena p_1 , ktorá spĺňa $p_1 > \frac{2\frac{A_1}{A_2}c_1p_2^{fix}}{\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix}+c_1} \wedge p_1 < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$ je preferovaná producentom 1 pred cenou $p_1^* = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$, keď je dané p_2^{fix} .

Analogické úvahy o rozhodovaní producenta 2 medzi stanovením ceny $p_2^L < \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix}$, alebo $p_2^* = \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix}$, keď je p_1^{fix} dané, nás privedú k nasledovnému: pokiaľ $c_2 < \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix}$, potom

akákoľvek cena p_2 taká, že spĺňa $p_2 > \frac{2\frac{A_2}{A_1}c_2p_1^{fix}}{\frac{A_2}{A_1}p_1^{fix}+c_2} \wedge p_2 < \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix}$ je preferovaná producentom 2 pred cenou $p_2^* = \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix}$.

Ak $c_1 = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$, pri danom p_2^{fix} , potom producent 1 stanoví $p_1 = c_1 = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix}$ a analogicky, ak $c_2 = \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix}$, pri danom p_1^{fix} , potom producent 2 stanoví $p_2 = c_2 = \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix}$.

Z vyššie uvedeného odvodíme funkciu najlepšej odpovede producenta 1 ako

$$p_1(p_2) = \begin{cases} c_1 & \text{ak } c_1 > \frac{A_1}{A_2} p_2 \\ c_1 = \frac{A_1}{A_2} p_2 & \text{ak } c_1 = \frac{A_1}{A_2} p_2 \\ \frac{A_1}{A_2} p_2 - \Delta_1, \Delta_1 > 0 \wedge \Delta_1 < \frac{\frac{A_1}{A_2} p_2 (\frac{A_1}{A_2} p_2 - c_1)}{\frac{A_1}{A_2} p_2 + c_1} & \text{ak } c_1 < \frac{A_1}{A_2} p_2 \end{cases} \quad (1.1.3.5)$$

a funkciu najlepšej odpovede producenta 2 ako

$$p_2(p_1) = \begin{cases} c_2 & \text{ak } c_2 > \frac{A_2}{A_1} p_1 \\ c_2 = \frac{A_2}{A_1} p_1 & \text{ak } c_2 = \frac{A_2}{A_1} p_1 \\ \frac{A_2}{A_1} p_1 - \Delta_2, \Delta_2 > 0 \wedge \Delta_2 < \frac{\frac{A_2}{A_1} p_1 (\frac{A_2}{A_1} p_1 - c_2)}{\frac{A_2}{A_1} p_1 + c_2} & \text{ak } c_2 < \frac{A_2}{A_1} p_1 \end{cases} \quad (1.1.3.6)$$

1.1.4 Uvažovanie producentov – cesta k ekvilibriu na trhu duopolu s LUF

V predchádzajúcich úvahách sme považovali p_2 ako dané, pri rozhodovaní producenta 1 a naopak. Toto prirodzene nie je pravda, pretože obaja producenti sa snažia maximalizovať svoj

profit súčasne, teda súčasne stanovujú ceny, čo im teda nedovoľuje pozorovať cenu ich konkurenta a až následne spraviť rozhodnutie o cene vlastného produktu⁶⁷.

Avšak, producenti môžu predpokladať rozhodnutia svojho konkurenta. Predpokladáme, že producenti sú racionálni a že všetky informácie sú úplne známe každému z producentov. Teda základom uvažovania producenta 1 je, že pre akúkoľvek cenu p_2 , ktorú zvolí producent 2, má producent 1 najlepšiu odpoveď, ktorá stanoví p_1 tak, že maximalizuje svoj profit. Analogicky pre producenta 2.

Dajme uvažovanie jednotlivých producentov do krokov.

Krok 1

Začnime producentom 1. Prirodzene, vyššia cena pri konštantnom dopyte vedie k vyššiemu profitu⁶⁸. Nech prvý predpoklad producenta 1 je, že producent 2 stanovuje $p_2^{E1} = I_M$ ⁶⁹, teda producent 1 očakáva, že producent 2 si želá predávať svoj produkt 2 za „veľmi vysokú“ cenu, aby dosiahol „veľmi vysoký“ profit π_2 . Na základe tohto očakávania producent 1 môže reagovať stanovením p_1 tak, aby maximalizoval svoj profit π_1 .

Predpokladajme $c_1 < \frac{A_1}{A_2} I_M$ ⁷⁰. Teda producent 1 s očakávaním $p_2^{E1} = I_M$ stanoví $p_1 = \frac{A_1}{A_2} I_M -$

$$\Delta_{S1}, \text{ kde } \Delta_{S1} > 0 \wedge \Delta_{S1} < \frac{\frac{A_1}{A_2} I_M (\frac{A_1}{A_2} I_M - c_1)}{\frac{A_1}{A_2} I_M + c_1}.^{71}$$

Krok 2

Druhý krok v uvažovaní producentov bude na strane producenta 2. Producent 2 dokáže očakávať uvažovanie producenta 1 v kroku 1. Teda racionálny producent 2 už nie je motivovaný stanoviť $p_2 = I_M$ (pretože to by viedlo k $x_2^{E2} = 0$ pri očakávaní producenta 2 $p_1^{E2} = \frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1}$, čo by implikovalo minimálny profit pre producenta 2), ale teda producent 2 bude stanovovať cenu svojho produktu s očakávaním $p_1^{E2} = \frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1}$, kde $\Delta_{S1} > 0 \wedge$

⁶⁷ V reálnom svete cena konkurenta nie je pre producenta známa až do momentu realizácie trhu M.

⁶⁸ Predstavme si, že x_i je konštantný dopyt po produkte i a teda profit $\pi_i^+ = p_i^+ x_i - f_i - c_i x_i > \pi_i^- = p_i^- x_i - f_i - c_i x_i \Leftrightarrow p_i^+ > p_i^-$, čo je pravda $\forall i \in I$.

⁶⁹ Predpokladáme, že prvé očakávanie v uvažovaní producentov je, že konkurent daného producenta si želá stanoviť cenu na “veľmi vysokej” úrovni. Ukážeme neskôr, že prvé očakávanie v uvažovaní producentov nevyplýva na výsledné výstupy – ekvilibriá na trhu M.

⁷⁰ c_1 nič neobmedzuje, aby bolo vyššie, alebo rovné ako $\frac{A_1}{A_2} I_M$, ale v prvom kroku budeme očakávať $c_1 < \frac{A_1}{A_2} I_M$, aby sme dostali viac krokov uvažovaní producentov, čo však na výstupoch trhu M – ekvilibriách nič nemení.

⁷¹ Vychádza z (1.1.3.5).

$$\Delta_{S1} < \frac{\frac{A_1}{A_2} I_M \left(\frac{A_1}{A_2} I_M - c_1 \right)}{\frac{A_1}{A_2} I_M + c_1}.$$

Analyzujeme podmienky pre c_2 z (1.1.3.6) v tomto kroku uvažovania producenta 2.

Ak $c_2 > I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1}$, potom producent 2 stanoví $p_2 = c_2$. V ďalšom kroku uvažovaní producentov by producent 1 očakával $p_2^{E3} = c_2$, čiže producent 1 by stanovil p_1 tak, aby maximalizoval svoj profit. Avšak z $c_2 > I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1}$ a $c_1 \leq \frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1}$ (čo musí platiť, keďže producent 1 stanovil v kroku 1 $p_1 = \frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1}$) dostávame $c_1 < \frac{A_1}{A_2} c_2$. Pretože $c_1 < \frac{A_1}{A_2} c_2$ je vyjadrením podmienky z (1.1.3.5), keďže producent 2 v kroku 2 stanovil $p_2 = c_2$, producent 1 v kroku 3 stanoví $p_1 = \frac{A_1}{A_2} c_2 - \Delta_{S3}$, $\Delta_{S3} > 0 \wedge \Delta_{S3} < \frac{\frac{A_1}{A_2} c_2 \left(\frac{A_1}{A_2} c_2 - c_1 \right)}{\frac{A_1}{A_2} c_2 + c_1}$. Producent 2 už v kroku 2 stanovil svoju minimálnu cenu, čiže v kroku 4 producent 2 môže stanoviť iba rovnakú cenu $p_2 = c_2$, čiže sme dostali ekvilibrium, teda situáciu, z ktorej sa žiadnemu producentovi neoplatí jednostranne vychýliť, $p_1 = \frac{A_1}{A_2} c_2 - \Delta_{S3}$, $\Delta_{S3} > 0 \wedge \Delta_{S3} < \frac{\frac{A_1}{A_2} c_2 \left(\frac{A_1}{A_2} c_2 - c_1 \right)}{\frac{A_1}{A_2} c_2 + c_1}$, $p_2 = c_2$ za podmienky $c_2 > I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1}$, čo znamená $c_1 < \frac{A_1}{A_2} c_2$, pričom producent 1 získa celý dopyt trhu M a teda $x_2 = 0$.

Ak $c_2 = I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1}$, potom producent 2 stanoví $p_2 = c_2$. Ak $c_2 = I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1}$, potom z $c_1 \leq \frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1}$ (čo musí platiť, keďže producent 1 stanovil v kroku 1 $p_1 = \frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1}$) platí $c_1 \leq \frac{A_1}{A_2} c_2$.

Ak teda $c_1 = \frac{A_1}{A_2} c_2$, potom producent 1 v kroku 3 stanovuje $p_1 = c_1$. Producent 2 už stanovil svoju minimálnu cenu v kroku 2 a z podmienky $c_1 = \frac{A_1}{A_2} c_2$ dostávame $c_2 = \frac{A_2}{A_1} c_1$, teda opätovne v kroku 4 by producent 2 stanovil $p_2 = c_2$. Čiže dostávame ekvilibrium $p_1 = c_1$, $p_2 = c_2$, ak $c_1 = \frac{A_1}{A_2} c_2$ za podmienky $c_1 = \frac{A_1}{A_2} c_2$ a producenti si delia dopyt na trhu tak, že $x_1 = \frac{I_M}{2c_1}$ and $x_2 = \frac{I_M}{2c_2}$.

Ak ale $c_1 < \frac{A_1}{A_2} c_2$ a z kroku 2 producent 1 očakáva $p_2^{E3} = c_2$, potom producent 1 stanoví $p_1 = \frac{A_1}{A_2} c_2 - \Delta_{S3}$, $\Delta_{S3} > 0 \wedge \Delta_{S3} < \frac{\frac{A_1}{A_2} c_2 \left(\frac{A_1}{A_2} c_2 - c_1 \right)}{\frac{A_1}{A_2} c_2 + c_1}$. V následnom kroku producent 2 musí stanoviť $p_2 =$

c_2 a teda dostávame iné ekvilibrium, $p_1 = \frac{A_1}{A_2} c_2 - \Delta_{S3}$, $\Delta_{S3} > 0 \wedge \Delta_{S3} < \frac{\frac{A_1}{A_2} c_2 (\frac{A_1}{A_2} c_2 - c_1)}{\frac{A_1}{A_2} c_2 + c_1}$, $p_2 = c_2$

za podmienky $c_1 < \frac{A_1}{A_2} c_2$, pričom producent 1 získa celý dopyt trhu M a teda $x_2 = 0$.

Ak $c_2 < I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1}$ potom producent 2 stanoví v kroku 2 $p_2 = I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} - \Delta_{S2}$, $\Delta_{S2} > 0 \wedge$
 $\Delta_{S2} < \frac{(I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1})(I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} - c_2)}{I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} + c_2}$.

Krok 3

Čiastočne sme analyzovali krok 3 v kroku 2 ako uvažovanie producenta 1, pokiaľ $c_2 > I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1}$, alebo $c_2 = I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1}$. Teraz sa pozrieme na situáciu, keď $c_2 < I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1}$, čiže

producent 2 stanovuje v kroku 2 $p_2 = I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} - \Delta_{S2}$, $\Delta_{S2} > 0 \wedge \Delta_{S2} <$

$\frac{(I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1})(I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} - c_2)}{I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} + c_2}$. Racionálny producent 1 toto očakáva za danej podmienky, preto

producent 1 v kroku 3 reaguje tak, ako mu hovorí jeho funkcia najlepšej odpovede (1.1.3.5).

Pokiaľ $c_1 > \frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1} - \frac{A_1}{A_2} \Delta_{S2}$, potom producent 1 stanovuje $p_1 = c_1$. Z $c_1 > \frac{A_1}{A_2} I_M -$

$\Delta_{S1} - \frac{A_1}{A_2} \Delta_{S2}$ a z $c_2 \leq I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} - \Delta_{S2}$ vieme, že $c_2 < \frac{A_2}{A_1} c_1$. Preto producent 2 by za

podmienky $c_1 > \frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1} - \frac{A_1}{A_2} \Delta_{S2}$ stanovil v kroku 4 $p_2 = \frac{A_2}{A_1} c_1 - \Delta_{S4}$, $\Delta_{S4} > 0 \wedge \Delta_{S4} <$

$\frac{\frac{A_2}{A_1} c_1 (\frac{A_2}{A_1} c_1 - c_2)}{\frac{A_2}{A_1} c_1 + c_2}$. Producent 1 sa už s cenou nemôže posunúť nižšie, preto by aj v kroku 5 zostal

na $p_1 = c_1$, teda dostávame ekvilibrium $p_1 = c_1$, $p_2 = \frac{A_2}{A_1} c_1 - \Delta_{S4}$, $\Delta_{S4} > 0 \wedge \Delta_{S4} <$

$\frac{\frac{A_2}{A_1} c_1 (\frac{A_2}{A_1} c_1 - c_2)}{\frac{A_2}{A_1} c_1 + c_2}$, za podmienky $c_2 < \frac{A_2}{A_1} c_1$ a producent 2 získa celý dopyt trhu M, pričom $x_1 = 0$.

Pokiaľ $c_1 = \frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1} - \frac{A_1}{A_2} \Delta_{S2}$, potom producent 1 stanovuje $p_1 = c_1$ a keď $c_2 \leq I_M -$

$\frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} - \Delta_{S2}$ dostávame $c_2 \leq \frac{A_2}{A_1} c_1$.

Ak teda $c_2 = \frac{A_2}{A_1} c_1$, keď $c_1 = \frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1} - \frac{A_1}{A_2} \Delta_{S2}$, potom producent 2 stanoví v kroku 4 $p_2 =$

c_2 . Pre producenta 1 v kroku 5 potom platí $c_1 = \frac{A_1}{A_2} c_2$ a teda stanoví opäťovne $p_1 = c_1$. Čiže

dostávame ekvilibrium $p_1 = c_1$, $p_2 = c_2$, za podmienky $c_2 = \frac{A_2}{A_1} c_1$ a producenti si delia dopyt

na trhu M tak, že $x_1 = \frac{I_M}{2c_1}$ and $x_2 = \frac{I_M}{2c_2}$.

Ak $c_1 = \frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1} - \frac{A_1}{A_2} \Delta_{S2}$ a súčasne $c_2 < \frac{A_2}{A_1} c_1$, potom producent 2 stanoví v kroku 4 $p_2 =$

$\frac{A_2}{A_1} c_1 - \Delta_{S4}, \Delta_{S4} > 0 \wedge \Delta_{S4} < \frac{\frac{A_2}{A_1} c_1 (\frac{A_2}{A_1} c_1 - c_2)}{\frac{A_2}{A_1} c_1 + c_2}$. Producent 1 musí opäťovne stanoviť v kroku 5 $p_1 =$

c_1 a teda dostávame ekvilibrium $p_1 = c_1, p_2 = \frac{A_2}{A_1} c_1 - \Delta_{S4}, \Delta_{S4} > 0 \wedge \Delta_{S4} < \frac{\frac{A_2}{A_1} c_1 (\frac{A_2}{A_1} c_1 - c_2)}{\frac{A_2}{A_1} c_1 + c_2}$ za

podmienky $c_2 < \frac{A_2}{A_1} c_1$ a producent 2 získa celý dopyt trhu M, pričom $x_1 = 0$.

Ak $c_1 < \frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1} - \frac{A_1}{A_2} \Delta_{S2}$, potom producent 1 stanoví v kroku 3 $p_1 = \frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1} -$

$\frac{A_1}{A_2} \Delta_{S2} - \Delta_{S3}, \Delta_{S3} > 0 \wedge \Delta_{S3} < \frac{(\frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1} - \frac{A_1}{A_2} \Delta_{S2})(\frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1} - \frac{A_1}{A_2} \Delta_{S2} - c_1)}{\frac{A_1}{A_2} I_M - \Delta_{S1} - \frac{A_1}{A_2} \Delta_{S2} + c_1}$.

Krok 4

Analogicky, ako v predchádzajúcich krokoch uvažovania producentov môžeme ukázať, že

pokiaľ $c_2 > I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} - \Delta_{S2} - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S3}$, potom $c_1 < \frac{A_1}{A_2} c_2$ a producent 2 v kroku 4 stanovuje

$p_2 = c_2$, čo definuje ekvilibrium $p_1 = \frac{A_1}{A_2} c_2 - \Delta_{S5}, \Delta_{S5} > 0 \wedge \Delta_{S5} < \frac{\frac{A_1}{A_2} c_2 (\frac{A_1}{A_2} c_2 - c_1)}{\frac{A_1}{A_2} c_2 + c_1}$, $p_2 = c_2$,

pričom producent 1 získa celý dopyt trhu M a teda $x_2 = 0$.

Podobne analogicky môžeme ukázať, že ak $c_2 = I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} - \Delta_{S2} - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S3}$ a $c_1 = \frac{A_1}{A_2} c_2$,

potom dostávame ekvilibrium $p_1 = c_1, p_2 = c_2$ a producenti si delia dopyt na trhu M tak, že

$x_1 = \frac{I_M}{2c_1}$ and $x_2 = \frac{I_M}{2c_2}$.

Pokiaľ $c_2 = I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} - \Delta_{S2} - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S3}$ a ak $c_1 < \frac{A_1}{A_2} c_2$, potom dostávame ekvilibrium $p_1 =$

$\frac{A_1}{A_2} c_2 - \Delta_{S5}, \Delta_{S5} > 0 \wedge \Delta_{S5} < \frac{\frac{A_1}{A_2} c_2 (\frac{A_1}{A_2} c_2 - c_1)}{\frac{A_1}{A_2} c_2 + c_1}$, $p_2 = c_2$, pričom producent 1 získa celý dopyt trhu

M a teda $x_2 = 0$.

Nakoniec, ak $c_2 < I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} - \Delta_{S2} - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S3}$, potom producent 2 stanoví v kroku 4 $p_2 =$

$I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} - \Delta_{S2} - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S3} - \Delta_{S4}, \Delta_{S4} > 0 \wedge \Delta_{S4} <$

$\frac{(I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} - \Delta_{S2} - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S3} - \Delta_{S4})(I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} - \Delta_{S2} - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S3} - \Delta_{S4} - c_2)}{I_M - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S1} - \Delta_{S2} - \frac{A_2}{A_1} \Delta_{S3} - \Delta_{S4} + c_2}$.

Dôkaz ekvilibria na trhu duopolu s LUF

Mohli sme vidieť, že v každom kroku uvažovania producentov, pokiaľ c_i niektorého z producentov $i \in I$ boli nižšie ako očakávaná „relatívna cena“ konkurenčného produktu, čo je očakávaná cena konkurenčného produktu krát „relatívna atraktivita“ produktu i , čo je podiel medzi atraktivitou produktu i a atraktivitou konkurenčného produktu, producenti boli motivovaní stanoviť cenu svojho produktu nižšie ako bola „relatívna cena“ konkurenčného produktu.

Keď sa c_i niektorého z producentov $i \in I$ rovnali očakávanej „relatívnej cene“ konkurenčného produktu, potom najlepšia reakcia na tento predpoklad bolo stanovenie ceny p_i na úroveň očakávanej „relatívnej ceny“ konkurenčného produktu, teda $p_i = c_i$. Ak sa navyše jednotkové variabilné náklady konkurenta, ktorého označme $-i \in I$, $c_{-i} = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i$, potom sme dostali

ekvilibrium $p_i = c_i$, $p_{-i} = c_{-i}$ a producenti si rozdelili dopyt na trhu M tak, že $x_i = \frac{I_M}{2c_i}$ and $x_{-i} = \frac{I_M}{2c_{-i}}$.

Ak sa c_i niektorého z producentov $i \in I$ rovnali očakávanej „relatívnej cene“ konkurenčného produktu a jednotkové variabilné náklady konkurenta $-i$ $c_{-i} < \frac{A_{-i}}{A_i} c_i$, potom sme dostali

ekvilibrium $p_i = c_i$, $p_{-i} = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i - \Delta_{-i}$, $\Delta_{-i} > 0 \wedge \Delta_{-i} < \frac{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i \left(\frac{A_{-i}}{A_i} c_i - c_{-i} \right)}{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i + c_{-i}}$, pričom $x_i = 0$ a

konkurent $-i$ získal celý dopyt trhu M.

Každý krok uvažovania producentov nás viedol k nižšej cene produktov, až pokým „relatívna cena“ konkurenčného produktu nedosiahla úroveň jednotkových variabilných nákladov c_i niektorého z producentov $i \in I$, pričom v takej situácii sme dosiahli ekvilibrium na trhu M.

V analýze uvažovania producentov sme dosiahli tri typy ekvilibríí, každé definované vzťahmi

$c_i < \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, $c_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ a $c_i > \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, z pohľadu ľubovoľného producenta $i \in I$.

Pokiaľ $c_i < \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ niektorého z producentov $i \in I$, čo je to isté ako $c_{-i} > \frac{A_{-i}}{A_i} c_i$, potom

ekvilibrium malo tvar $p_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - \Delta_i$, $\Delta_i > 0 \wedge \Delta_i < \frac{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - c_i \right)}{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} + c_i}$, $p_{-i} = c_{-i}$ a dopyty po produktoch boli $x_i = \frac{I_M}{p_i}$, $x_{-i} = 0$.

Pokiaľ $c_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, čo je aj $c_{-i} = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i$, potom ekvilibrium malo tvar $p_i = c_i$, $p_{-i} = c_{-i}$ a

dopyty po produktoch boli $x_i = \frac{I_M}{2c_i}$, $x_{-i} = \frac{I_M}{2c_{-i}}$.

Pokiaľ $c_i > \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, čo je to isté ako $c_{-i} < \frac{A_{-i}}{A_i} c_i$, potom ekvilibrium malo tvar $p_i = c_i$, $p_{-i} =$

$$\frac{A_{-i}}{A_i} c_i - \Delta_{-i}, \Delta_{-i} > 0 \wedge \Delta_{-i} < \frac{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i \left(\frac{A_{-i}}{A_i} c_i - c_{-i} \right)}{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i + c_{-i}} \text{ a dopyty po produktoch boli } x_i = 0, x_{-i} = \frac{I_M}{p_{-i}}.$$

Z predchádzajúcich úvah môžeme predpokladať, že po všetkých úvahách producentov dosiahneme niektoré z vyššie uvedených ekvilibrií a to, ktoré ekvilibrium dosiahneme, je definované vzťahmi $c_i < \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, $c_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, alebo $c_i > \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$.

Zavedme pojmy „relatívne nižšie“ a „relatívne vyššie“ jednotkové variabilné náklady producenta i , čo je iba slovné vyjádrenie vzťahov $c_i < \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ a $c_i > \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ z pohľadu producenta i vo vzťahu k jednotkovým variabilným nákladom jeho konkurenta $-i$.

„Relatívne rovnaké“ jednotkové variabilné náklady z pohľadu producenta i bude slovné vyjadrenie vzťahu $c_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ vo vzťahu k jednotkovým variabilným nákladom jeho konkurenta $-i$.

Budeme chcieť dokázať, že pokiaľ má niektorý producent i „relatívne nižšie“ jednotkové variabilné náklady, potom ekvilibrium na trhu M bude mať tvar $p_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - \Delta_i, \Delta_i > 0 \wedge$

$$\Delta_i < \frac{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - c_i \right)}{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} + c_i}, p_{-i} = c_{-i}, \text{ potom pokiaľ niektorý producent } i \text{ bude mať „relatívne}$$

rovnaké“ jednotkové variabilné náklady, potom ekvilibrium na trhu M bude mať tvar $p_i = c_i$, $p_{-i} = c_{-i}$ a pokiaľ niektorý producent i bude mať „relatívne vyššie“ jednotkové variabilné náklady, potom ekvilibrium na trhu M bude mať tvar $p_i = c_i$, $p_{-i} = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i - \Delta_{-i}, \Delta_{-i} > 0 \wedge$

$$\Delta_{-i} < \frac{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i \left(\frac{A_{-i}}{A_i} c_i - c_{-i} \right)}{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i + c_{-i}}.$$

Na dôkaz vyššie uvedeného predpokladu postačí dokázať, že cena produktu producenta s „relatívne vyššími“, alebo s „relatívne rovnakými“ jednotkovými variabilnými nákladmi bude po všetkých uvažovaniach producentov rovná jednotkovým variabilným nákladom tohto producenta.

Označme teraz producenta s „relatívne vyššími“, alebo s „relatívne rovnakými“ jednotkovými variabilnými nákladmi, $i \in I$ a konkurenta tohto producenta ako $-i \in I$.

Predpokladajme, že producent $-i$ je producent, ktorý je na rade v prvom kroku uvažovania producentov.⁷²

Označme konečnú cenu produktu producenta i $p_i^* = I_M - \Delta_i^*$, kde I_M sú finančné zdroje, ktoré dopyt mína na trhu M a v dôkaze ich budeme používať ako prvotné očakávanie producenta $-i$ o cene produktu i v prvom kroku uvažovania producentov, teda producent $-i$ v prvom kroku uvažovania očakáva $p_i^{S1} = I_M$.⁷³

Nech

$$\Delta_i^* = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j, j \in \mathbb{N}, \Delta_j > 0 \wedge \Delta_j < \frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^j+1}{2} \right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^j+1}{2} \right) c_i} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (1.1.4.1)$$

kde Δ_i^* je deduktívne skonštruovaná konečná delta, ktorá definuje na konci uvažovania producentov zníženie ceny produktu i pod počiatkové očakávanie $p_i^{S1} = I_M$ a slovné vyjadrenie „po všetkých uvažovaniach producentov“ je tu transformované do nekonečného počtu uvažovaní.

Ak budeme schopný dokázať

$$\Delta_i^* = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j = I_M - c_i, \quad (1.1.4.2)$$

za podmienok $\Delta_j > 0 \wedge \Delta_j <$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k \right) \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^j+1}{2} \right) c_i \right)}{\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^j+1}{2} \right) c_i} \quad \forall j \in \mathbb{N} \text{ a}$$

$c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, potom dokážeme $p_i^* = c_i$ za podmienky $c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$.

Pre dôkaz rozlišujeme tri situácie: $A_i > A_{-i}$, $A_i = A_{-i}$ a $A_i < A_{-i}$.

Ekvilibrium na trhu duopolu s LUF s rovnakými atraktivitami produktov

Ak $A_i = A_{-i}$, potom (1.1.4.1) môžeme prepísať na

⁷² Neskôr ukážeme, že nie je podstatné, ktorý producent je tým, ktorý je na rade v prvom kroku uvažovania.

⁷³ Neskôr ukážeme, že prvotné očakávanie o cene konkurenčného produktu producenta, ktorý je na rade v prvom kroku uvažovania producentov, neovplyvňuje výstupy trhu M, teda ekvilibrium.

$$\Delta_i^* = \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j, j \in \mathbb{N}, \Delta_j > 0 \wedge \Delta_j < \frac{(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k) \left(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^j+1}{2} \right) c_i \right)}{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^j+1}{2} \right) c_i} \forall j \in \mathbb{N}. \quad (1.1.4.3)$$

Ak dokážeme, že $\sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j$ je konvergentný a že $\sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j = I_M - c_i$, potom dokážeme $p_i^* = c_i$, za podmienok $A_i = A_{-i}$, $c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, teda $c_i \geq c_{-i}$.

Najprv dokážme, že $\sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j$ je konvergentný. Z definície $\Delta_j > 0 \wedge \Delta_j <$

$$\frac{(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k) \left(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^j+1}{2} \right) c_i \right)}{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^j+1}{2} \right) c_i} \forall j \in \mathbb{N}, \text{ teda}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k) \left(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^j+1}{2} \right) c_i \right)}{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^j+1}{2} \right) c_i}, j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$$

$$\frac{(I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l) \left(I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^k+1}{2} \right) c_i \right)}{I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2} \right) c_i} \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.1.4.4)$$

je majorantný k (1.1.4.3).

Ak dokážeme, že (1.1.4.4) je konvergentný, potom dokážeme, že aj (1.1.4.3) je konvergentný pomocou porovnávacieho kritéria konvergenzie nekonečného radu, ktorý podmieňuje, ak je majorantný nekonečný rad konvergentný, potom je aj minorantný nekonečný rad k tomuto nekonečnému radu konvergentný.⁷⁴

Je možné dokázať, že (1.1.4.4) je konvergentný pomocou d'Alembertovho podielového

kritéria, ktoré definuje $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, kde a_n a a_{n+1} sú členy nejakého nekonečného radu

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a ak $L < 1$ potom nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný.⁷⁵

Teda (1.1.4.3) je konvergentný, potom však

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_j = 0, \Delta_j > 0 \wedge \Delta_j < \frac{(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k) \left(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^j+1}{2} \right) c_i \right)}{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^j+1}{2} \right) c_i} \forall j \in \mathbb{N}.^{76} \quad (1.1.4.5)$$

Uvažujme nekonečný rad

⁷⁴ (Ayres, 1999)

⁷⁵ (d'Alembert, 1768)

⁷⁶ Z nutnej podmienky konvergenzie nekonečného radu.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k)(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k - c_i)}{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k + c_i}, j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k < \frac{(I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l)(I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right)c_{-i} - \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)c_i)}{I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right)c_{-i} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)c_i} \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.1.4.6)$$

Pretože $c_i \geq c_{-i}$, (1.1.4.4) je majorantný nekonečný rad k (1.1.4.6) a my vieme, že (1.1.4.4) je konvergentný, teda (1.1.4.6) je konvergentný.⁷⁷

Ale teda ak (1.1.4.6) je konvergentný, potom

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k)(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k - c_i)}{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k + c_i} = 0, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k < \frac{(I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l)(I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right)c_{-i} - \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)c_i)}{I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right)c_{-i} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)c_i} \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.1.4.7)$$

Vieme, že $\sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k = \sum_{k=1}^j \Delta_k - \Delta_j \forall j \in \mathbb{N}$, teda (1.1.4.7) môžeme prepísať na

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(I_M - \sum_{k=1}^j \Delta_k + \Delta_j)(I_M - \sum_{k=1}^j \Delta_k + \Delta_j - c_i)}{I_M - \sum_{k=1}^j \Delta_k + \Delta_j + c_i} = 0, \Delta_j > 0 \wedge \Delta_j < \frac{(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k)(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right)c_{-i} - \left(\frac{(-1)^j+1}{2}\right)c_i)}{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right)c_{-i} + \left(\frac{(-1)^j+1}{2}\right)c_i} \forall j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k < \frac{(I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l)(I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right)c_{-i} - \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)c_i)}{I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right)c_{-i} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)c_i} \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.1.4.8)$$

Z (1.1.4.8), dostávame

$$\frac{(I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k + \lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_j)(I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k + \lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_j - c_i)}{I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k + \lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_j + c_i} = 0, \Delta_j > 0 \wedge \Delta_j < \frac{(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k)(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right)c_{-i} - \left(\frac{(-1)^j+1}{2}\right)c_i)}{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right)c_{-i} + \left(\frac{(-1)^j+1}{2}\right)c_i} \forall j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k < \frac{(I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l)(I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right)c_{-i} - \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)c_i)}{I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right)c_{-i} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)c_i} \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.1.4.9)$$

Z (1.1.4.5) vieme $\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_j = 0$, teda z (1.1.4.9) and (1.1.4.5) dostaneme

⁷⁷ Porovnávacie kritérium konvergence nekonečného radu.

⁷⁸ Z nutnej podmienky konvergence nekonečného radu.

$$\frac{(I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k) (I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k - c_i)}{I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k + c_i} = 0, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$$

$$\frac{(I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l) (I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i)}{I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.1.4.10)$$

Vieme, že (1.1.4.4) je konvergentný, teda $\sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k$.

Pretože sme skonštruovali $p_i^* = I_M - \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j$, vieme, že $p_i^* \geq c_i > 0$, teda $I_M - \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j \geq c_i > 0$, teda menovateľ v (1.1.4.10) $I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k + c_i > 0$.

Teda (1.1.4.10) je pravdivé, ak $I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k = 0 \vee I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k - c_i = 0$. Ale

$I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k > 0$, teda $I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k \neq 0$.

Teda (1.1.4.10) je pravdivé, ak $I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k - c_i = 0$, odkiaľ dostávame $I_M -$

$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k = c_i$ a teda $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k = I_M - c_i$.

Z konverencie (1.1.4.3) vieme, že $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k = \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j$, teda $\sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j = I_M - c_i$ a to je práve to, čo sme chceli dokázať, že $p_i = c_i$.

Ale (1.1.4.6) nie je jediný nekonečný rad, ktorý dokáže definovať hodnotu $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k$, keď poznáme (1.1.4.5). Napríklad sme ukázali, že (1.1.4.4) je konvergentný, teda

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k) (I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k - c_{-i})}{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k + c_{-i}} = 0, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$$

$$\frac{(I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l) (I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i)}{I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i} \quad \forall k \in \mathbb{N}.^{79} \quad (1.1.4.11)$$

Podobne, ako keď sme využili (1.1.4.7) dostaneme z (1.1.4.11) $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k = I_M - c_{-i}$, čo by implikovalo $p_i = c_{-i}$.

Avšak musí platiť $p_i \geq c_i$, pričom sme podmienili $c_i \geq c_{-i}$. Pre $c_i > c_{-i}$ dostávame spor s podmienkou $p_i \geq c_i$, ak $p_i = c_{-i}$. Napriek tomu, že sme dokázali nájsť konvergentný nekonečný rad, ktorý dokáže definovať $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k$ cez nutnú podmienku konverencie

⁷⁹ Z nutnej podmienky konverencie nekonečného radu.

nekonečného radu, dostali sme hodnotu $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k$, ktorá je v spore so základnou podmienkou $p_i \geq c_i$.

Výstupu z (1.1.4.11) pre definovanie hodnoty $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k$, $p_i = c_{-i}$, môžeme rozumieť tak, že pokiaľ by producent i mohol stanoviť $p_i = c_{-i}$, čím by porušil svoju racionalitu, potom by tak spravil. Avšak producent i je racionálny, teda nikdy nezvolí $p_i < c_i$.

Je nekonečne veľa nekonečných radov ako (1.1.4.6), ktoré dokážu definovať $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \Delta_k$.

Použijeme teraz lemu z vety o konvergencii monotónnych postupností: ak je rastúca postupnosť reálnych čísel zhora ohraničená, potom suprénum tejto postupnosti je jej limitou.⁸⁰

Postupnosť čiastkových súčtov nekonečného radu (1.1.4.3) je postupnosťou reálnych čísel a pretože $\Delta_j > 0 \forall j \in \mathbb{N}$, potom je táto postupnosť rastúca.

Vieme, že čiastkové súčty tohto nekonečného radu sú zhora ohraničené, pretože $p_i^* = I_M - \Delta_i^* \geq c_i$, teda $\Delta_i^* = \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j \leq I_M - c_i$, ale pretože $\Delta_j > 0 \forall j \in \mathbb{N}$, potom $\sum_{j=1}^N \Delta_j \leq I_M - c_i \forall N \in \mathbb{N}$.

Dokázali sme, že (1.1.4.3) je konvergentný, teda existuje konečná limita jeho čiastkových súčtov, ktorá sa rovná sume nekonečného radu (1.1.4.3).

Teda limita postupnosti čiastkových súčtov sa rovná nekonečnému radu (1.1.4.3).

Ukázali sme, že táto postupnosť dokáže nadobudnúť svoje horné ohraničenie, $I_M - c_i$. Ak nejaká rastúca postupnosť dokáže nadobudnúť svoje horné ohraničenie, potom toto horné ohraničenie je maximum tejto rastúcej postupnosti a ak rastúca postupnosť dokáže nadobudnúť svoje maximum, potom toto maximum je suprénum tejto rastúcej postupnosti. Teda suprénum postupnosti čiastkových súčtov nekonečného radu (1.1.4.3) je $I_M - c_i$, teda limita tejto postupnosti je $I_M - c_i$. Konečne postupnosť čiastkových súčtov dokáže nadobudnúť svoju limitu a limita tejto postupnosti sa rovná sume nekonečného radu (1.1.4.3), teda suma nekonečného radu $\sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j = I_M - c_i$.

Teda konečná cena produktu producenta i s „relatívne vyššími“, alebo s „relatívne rovnakými“ jednotkovými variabilnými nákladmi po všetkých uvažovaniach producentov na trhu M s rovnakou atraktivitou produktov je rovná jednotkovým variabilným nákladom producenta i , čo znamená $p_i = c_i$.

⁸⁰ (Bibby, 1974)

Ekvilíbrio trhu M za týchto podmienok dostaneme z funkcie najlepšej odpovede producenta $-i$. Producent $-i$ teda pozná konečnú cenu produktu i a teda túto informáciu použije vo svojej funkcii najlepšej odpovede, ktorá je jedna z (1.1.3.5), alebo (1.1.3.6).

Teda ak $c_{-i} = c_i$ (vieme, že $A_i = A_{-i}$), najlepšia odpoveď producenta $-i$ je stanoviť $p_{-i} = c_{-i}$ a dostávame ekvilíbrio $p_i = c_i, p_{-i} = c_{-i}$ s jednotlivými dopytmi po produktoch $x_i = \frac{I_M}{2c_i}, x_{-i} = \frac{I_M}{2c_{-i}}$.

Ak $c_{-i} < c_i$ (vieme, že $A_i = A_{-i}$), najlepšia odpoveď producenta $-i$ je stanoviť $p_{-i} = c_i - \Delta_{-i}^*, \Delta_{-i}^* > 0 \wedge \Delta_{-i}^* < \frac{c_i(c_i - c_{-i})}{c_i + c_{-i}}$ a dostávame ekvilíbrio $p_i = c_i, p_{-i} = c_i - \Delta_{-i}^*, \Delta_{-i}^* > 0 \wedge$

$\Delta_{-i}^* < \frac{c_i(c_i - c_{-i})}{c_i + c_{-i}}$ s jednotlivými dopytmi po produktoch $x_i = 0, x_{-i} = \frac{I_M}{c_i - \Delta_{-i}^*}, \Delta_{-i}^* > 0 \wedge \Delta_{-i}^* < \frac{c_i(c_i - c_{-i})}{c_i + c_{-i}}$.

Pretože sme nešpecifikovali producenta i s „relatívne vyššími“, alebo s „relatívne rovnakými“ jednotkovými variabilnými nákladmi, môže to byť ktorýkoľvek producent $i \in I$. Ako môžeme vidieť, ekvilíbria sú definované nezávisle od počiatočného očakávania v kroku 1 o cene konkurenčného produktu, teda nezávisle od I_M . Teda prvé očakávanie o cene konkurenta v kroku 1 uvažovania producentov nemá vplyv na úroveň ekvilírií a teda výstupov z trhu M. Navyše toto implikuje, že nie je dôležité, ktorý producent je tým producentom, ktorý je na rade v kroku 1 uvažovania producentov, nemá to vplyv na úroveň ekvilírií, teda výstupov z trhu M.

Ekvilíbrio na trhu duopolu s LUF, keď produkt s vyššími jednotkovými nákladmi má menšiu atraktivitu

Majme opäť producenta i s „relatívne vyššími“, alebo s „relatívne rovnakými“ jednotkovými variabilnými nákladmi a predpokladajme, že $A_i < A_{-i}$, teda, že atraktivita produktu i je menšia, ako atraktivita produktu $-i$.

Opäť predpokladajme, že producent $-i \in I$ je producentom, ktorý je v prvom kroku rozhodovania producentov na rade.

Teda Δ_i^* z konštrukcie $p_i^* = I_M - \Delta_i^*$ si zachováva svoj pôvodný tvar

$$\Delta_i^* = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j, j \in \mathbb{N}, \Delta_j > 0 \wedge \Delta_j < \frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-(-1)^k}{2}}} \Delta_k \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-(-1)^k}{2}}} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-(-1)^k}{2}}} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

ale s predpokladom $A_i < A_{-i}$, za podmienky $c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$. (1.1.4.12)

Ak budeme schopný dokázať

$$\Delta_i^* = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j = I_M - c_i, \quad (1.1.4.13)$$

za podmienok $\Delta_j > 0 \wedge \Delta_j <$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{\frac{(-1)^{j-(-1)^k}{2}}} \Delta_k \right) \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{\frac{(-1)^{j-(-1)^k}{2}}} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i \right)}{\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{\frac{(-1)^{j-(-1)^k}{2}}} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

$c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ a $A_i < A_{-i}$, potom dokážeme, že $p_i^* = c_i$ za podmienok $c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ and $A_i < A_{-i}$.

Z podmienky $A_i < A_{-i}$ vieme, že

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j, j \in \mathbb{N}, \Delta_j > 0 \wedge \Delta_j < \frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-(-1)^k}{2}}} \Delta_k \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-(-1)^k}{2}}} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-(-1)^k}{2}}} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (1.1.4.14)$$

je majorantný k (1.1.4.12).

Z definície (1.1.4.14) dostaneme

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-(-1)^k}{2}}} \Delta_k \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-(-1)^k}{2}}} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-(-1)^k}{2}}} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i}, j \in$$

$\mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l}\right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i\right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.1.4.15)$$

ako majorantný rad k (1.1.4.14).

Pre akékoľvek $A_1, A_2, B, C > 0$, také, že $A_1 - B \geq C$ a $A_1 \leq A_2$, teda $A_2 - B \geq C$:

$$\frac{(A_1-B)(A_1-B-C)}{A_1-B+C} \leq \frac{(A_2-B)(A_2-B-C)}{A_2-B+C} \quad 81$$

Pretože $A_i < A_{-i}$, potom $\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \geq 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ a $\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right) > 1$, so $\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_M \leq$

$\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right) I_M \quad \forall j \in \mathbb{N}$ potom

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k}\right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2}\right) c_i\right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2}\right) c_i} \leq$$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right) I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k}\right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right) I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2}\right) c_i\right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right) I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2}\right) c_i} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \text{ teda}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right) I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k}\right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right) I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2}\right) c_i\right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right) I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2}\right) c_i}, \quad j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge$$

$$\Delta_k <$$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l}\right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i\right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.1.4.16)$$

je majorantný k (1.1.4.15).

81 Z $\frac{(A_1-B)(A_1-B-C)}{A_1-B+C} \leq \frac{(A_2-B)(A_2-B-C)}{A_2-B+C}$ dostaneme $\frac{(A_2-A_1)((A_2-B)(A_1-B)+C(A_2-B+A_1-B)-C^2)}{(A_2-B)(A_1-B)+C(A_2-B)+C(A_1-B)+C^2} \geq 0$. Menovateľ je kladný. A čitateľ je nezáporný ak $C(A_2-B+A_1-B)-C^2 \geq 0$, teda ak $A_2-B+A_1-B-C \geq 0$, respektíve ak $A_2-B+A_1-B \geq C$, čo je pravdivé tvrdenie.

Pre akékoľvek dané $A, B_1, B_2, C > 0$, také, že $A - B_1 \geq C$ a $B_1 \geq B_2$, teda $A - B_2 \geq C$:

$$\frac{(A-B_1)(A-B_1-C)}{A-B_1+C} \leq \frac{(A-B_2)(A-B_2-C)}{A-B_2+C} \quad 82$$

Pretože $A_i < A_{-i}$, potom $\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^j - (-1)^k}{2}} \leq 1 \quad \forall j, k \in \mathbb{N}$ a $\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right) < 1$, teda $\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^j - (-1)^k}{2}} \Delta_k \geq \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right) \Delta_k \quad \forall j, k \in \mathbb{N}$ potom

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)_{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)}\right)^{\frac{(-1)^j - (-1)^k}{2}} \Delta_k \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)_{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)}\right)^{\frac{(-1)^j - (-1)^k}{2}} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1} + 1}{2}\right)_{c_{-i} - \left(\frac{(-1)^j + 1}{2}\right)_{c_i}}}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)_{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1} + 1}{2}\right)_{c_{-i} + \left(\frac{(-1)^j + 1}{2}\right)_{c_i}}} \leq \frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)_{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)}\right) \Delta_k \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)_{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)}\right) \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1} + 1}{2}\right)_{c_{-i} - \left(\frac{(-1)^j + 1}{2}\right)_{c_i}}}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)_{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1} + 1}{2}\right)_{c_{-i} + \left(\frac{(-1)^j + 1}{2}\right)_{c_i}}} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \text{ teda}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)_{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)}\right) \Delta_k \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)_{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)}\right) \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1} + 1}{2}\right)_{c_{-i} - \left(\frac{(-1)^j + 1}{2}\right)_{c_i}}}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)_{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1} + 1}{2}\right)_{c_{-i} + \left(\frac{(-1)^j + 1}{2}\right)_{c_i}}}, \quad j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1} + 1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^k - (-1)^l}{2}} \Delta_l\right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1} + 1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^k - (-1)^l}{2}} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1} + 1}{2}\right)_{c_{-i} - \left(\frac{(-1)^k + 1}{2}\right)_{c_i}}\right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1} + 1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^k - (-1)^l}{2}} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1} + 1}{2}\right)_{c_{-i} + \left(\frac{(-1)^k + 1}{2}\right)_{c_i}}} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.1.4.17)$$

je majorantný k (1.1.4.16).

Z podmienok $c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, $A_i < A_{-i}$ a $A_i, A_{-i} > 0$ dostávame $\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} \leq c_i$ a $\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} \leq c_{-i}$, teda

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)_{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)}\right) \Delta_k \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)_{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)}\right) \Delta_k - \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)_{c_{-i}}}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)_{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)} \Delta_k + \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)_{c_{-i}}}, \quad j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1} + 1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^k - (-1)^l}{2}} \Delta_l\right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1} + 1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^k - (-1)^l}{2}} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1} + 1}{2}\right)_{c_{-i} - \left(\frac{(-1)^k + 1}{2}\right)_{c_i}}\right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1} + 1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1}}\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^k - (-1)^l}{2}} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1} + 1}{2}\right)_{c_{-i} + \left(\frac{(-1)^k + 1}{2}\right)_{c_i}}} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.1.4.18)$$

je majorantný k (1.1.4.17).

⁸² Z $\frac{(A-B_1)(A-B_1-C)}{A-B_1+C} \leq \frac{(A-B_2)(A-B_2-C)}{A-B_2+C}$ dostaneme $\frac{(B_1-B_2)((A-B_2)(A-B_1)+C(A-B_2+A-B_1)-C^2)}{(A-B_2)(A-B_1)+C(A-B_2)+C(A-B_1)+C^2} \geq 0$. Menovateľ je kladný. A čitateľ je nezáporný, ak $C(A-B_2+A-B_1)-C^2 \geq 0$, teda ak $A-B_2+A-B_1-C \geq 0$, respektíve ak $A-B_2+A-B_1 \geq C$, čo je pravdivé tvrdenie.

Ak dokážeme, že (1.1.4.18) je konvergentný, potom dokážeme, že aj (1.1.4.12) je konvergentný pomocou porovnávacieho kritéria konvergenzie nekonečného radu.

Je možné dokázať, že (1.1.4.18) je konvergentný pomocou d'Alembertovho podielového kritéria.⁸³

Teda (1.1.4.12) je konvergentný, potom však

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j = 0,^{84} \quad (1.1.4.19)$$

$j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}} \Delta_l} \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}} \Delta_l} - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}} \Delta_l} + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_i} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

if $A_i < A_{-i}$.

Uvažujme nekonečný rad

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k} \right) \left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k} - c_{-i} \right)}{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k} + c_{-i}}, j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}} \Delta_l} \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}} \Delta_l} - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}} \Delta_l} + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_i} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.1.4.20)$$

Vieme, že $c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, teda

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k} \right) \left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k} - \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right) c_{-i} \right)}{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k} + \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right) c_{-i}}, j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}} \Delta_l} \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}} \Delta_l} - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}} \Delta_l} + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_i} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.1.4.21)$$

⁸³ (d'Alembert, 1768)

⁸⁴ Z nutnej podmienky konvergenzie nekonečného radu.

je majorantný k (1.1.4.20).

Pre akékoľvek dané $A_1, A_2, B, C > 0$, také, že $A_1 - B \geq C$ a $A_1 < A_2$, teda $A_2 - B > C$:

$$\frac{(A_1-B)(A_1-B-C)}{A_1-B+C} < \frac{(A_2-B)(A_2-B-C)}{A_2-B+C}.^{85}$$

Teda (1.1.4.18) je majorantný k (1.1.4.21) a my vieme, že (1.1.4.18) je konvergentný, preto aj (1.1.4.21) je konvergentný⁸⁶, teda aj (1.1.4.20) je konvergentný⁸⁷ a teda

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k} \right) \left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_{k-c_i}} \right)}{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_{k+c_i}}} = 0,^{88} \quad (1.1.4.21)$$

$j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_i} \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_i}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Použitím $\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k = \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j$ sa dá (1.1.4.21)

prepísať na

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\left(I_{M-\sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j} \right) \left(I_{M-\sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_{j-c_i}} \right)}{I_{M-\sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_{j+c_i}}} = 0, \quad (1.1.4.22)$$

$j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_i} \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_i}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Z (1.1.4.22) dostaneme

⁸⁵ Z $\frac{(A_1-B)(A_1-B-C)}{A_1-B+C} < \frac{(A_2-B)(A_2-B-C)}{A_2-B+C}$ dostaneme $\frac{(A_2-A_1)((A_2-B)(A_1-B)+C(A_2-B+A_1-B)-C^2)}{(A_2-B)(A_1-B)+C(A_2-B)+C(A_1-B)+C^2} > 0$. Menovateľ je kladný. A čitateľ je pozitívny, ak $C(A_2-B+A_1-B)-C^2 > 0$, teda ak $A_2-B+A_1-B-C > 0$, respektíve ak $A_2-B+A_1-B > C$, čo je pravdivé tvrdenie.

⁸⁶ Porovnávacie kritérium konvergenie nekonečného radu.

⁸⁷ Porovnávacie kritérium konvergenie nekonečného radu.

⁸⁸ Z nutnej podmienky konvergenie nekonečného radu.

$$\frac{\left(I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j \right) \left(I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_{j-c_i} \right)}{I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_{j+c_i}} = 0,$$

$$j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_l \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_i} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Z (1.1.4.19) vieme, že $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k = 0$, ak $A_i < A_{-i}$, teda dostávame

$$\frac{\left(I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k \right) \left(I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_{k-c_i} \right)}{I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_{k+c_i}} = 0, \quad (1.1.4.23)$$

$$j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_l \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_i} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pretože sme skonštruovali $p_i^* = I_M - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j$, $p_i^* \geq c_i > 0$ a $\left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j >$

$0 \forall j \in \mathbb{N}$, potom $I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k > 0$. Pretože $I_M -$

$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k > 0$ a $c_i > 0$, potom $I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + c_i > 0$.

Teda (1.1.4.23) môže byť pravdivé, iba ak $I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k - c_i = 0$. Z toho

dostávame $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k = I_M - c_i$. A pretože (1.1.4.12) je konvergentný,

potom $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j = I_M - c_i = \Delta_i^*$ za podmienok $\Delta_j >$

$0 \wedge \Delta_j <$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{\frac{(-1)^j - (-1)^k}{2}} \Delta_k \right) \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{\frac{(-1)^j - (-1)^k}{2}} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^j+1}{2} \right) c_i}{\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{\frac{(-1)^j - (-1)^k}{2}} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^j+1}{2} \right) c_i} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

$$c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} \text{ a } A_i < A_{-i}.$$

Teda $p_i^* = c_i$ za podmienok $c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ a $A_i < A_{-i}$.

Použime teraz lemu z vety o konvergencii monotónnych postupností: ak je rastúca postupnosť reálnych čísel zhora ohraničená, potom supréum tejto postupnosti je jej limitou.⁸⁹

Postupnosť čiastkových súčtov nekonečného radu (1.1.4.12) je postupnosťou reálnych čísel

a pretože $\left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$, potom je táto postupnosť rastúca.

Vieme, že čiastkové súčty tohto nekonečného radu sú zhora ohraničené, pretože $p_i^* = I_M -$

$\Delta_i^* \geq c_i$, teda $\Delta_i^* = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j \leq I_M - c_i$, ale pretože $\left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$,

potom $\sum_{j=1}^N \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j \leq I_M - c_i \quad \forall N \in \mathbb{N}$.

Dokázali sme, že (1.1.4.12) je konvergentný, teda existuje konečná limita jeho čiastkových súčtov, ktorá sa rovná sume nekonečného radu (1.1.4.12).

Teda limita postupnosti čiastkových súčtov sa rovná nekonečnému radu (1.1.4.12).

Ukázali sme, že táto postupnosť dokáže nadobudnúť svoje horné ohraničenie, $I_M - c_i$. Ak nejaká rastúca postupnosť dokáže nadobudnúť svoje horné ohraničenie, potom toto horné ohraničenie je maximum tejto rastúcej postupnosti a ak rastúca postupnosť dokáže nadobudnúť svoje maximum, potom toto maximum je supréum tejto rastúcej postupnosti.

Teda supréum postupnosti čiastkových súčtov nekonečného radu (1.1.4.12) je $I_M - c_i$, teda limita tejto postupnosti je $I_M - c_i$. Konečne postupnosť čiastkových súčtov dokáže nadobudnúť svoju limitu a limita tejto postupnosti sa rovná sume nekonečného radu

(1.1.4.12), teda suma nekonečného radu $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j = I_M - c_i$.

Teda konečná cena produktu producenta i s „relatívne vyššími“, alebo s „relatívne rovnakými“ jednotkovými variabilnými nákladmi a s produktom s menšou atraktivitou po

⁸⁹ (Bibby, 1974)

všetkých uvažovaniach producentov na trhu M je rovná jednotkovým variabilným nákladom producenta i , čo znamená $p_i = c_i$.

Ekvilibrium trhu M za týchto podmienok dostaneme z funkcie najlepšej odpovede producenta $-i$. Producent $-i$ teda pozná konečnú cenu produktu i a teda túto informáciu použije vo svojej funkcii najlepšej odpovede, ktorá je jedna z (1.1.3.5), alebo (1.1.3.6).

Ak $c_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, potom $c_{-i} = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i$, teda producent $-i$ stanoví $p_{-i} = c_{-i} = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i$ a dostávame ekvilibrium $p_i = c_i$, $p_{-i} = c_{-i}$ s jednotlivými dopytmi po produktoch $x_i = \frac{I_M}{2c_i}$, $x_{-i} = \frac{I_M}{2c_{-i}}$.

Ak $c_i > \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, potom $c_{-i} < \frac{A_{-i}}{A_i} c_i$, teda producent $-i$ stanoví $p_{-i} = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i - \Delta_{-i}^*$, $\Delta_{-i}^* > 0 \wedge$

$\Delta_{-i}^* < \frac{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i \left(\frac{A_{-i}}{A_i} c_i - c_{-i} \right)}{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i + c_{-i}}$ a dostávame ekvilibrium $p_i = c_i$, $p_{-i} = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i - \Delta_{-i}^*$, $\Delta_{-i}^* > 0 \wedge \Delta_{-i}^* <$

$\frac{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i \left(\frac{A_{-i}}{A_i} c_i - c_{-i} \right)}{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i + c_{-i}}$ s jednotlivými dopytmi po produktoch $x_i = 0$, $x_{-i} = \frac{I_M}{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i - \Delta_{-i}^*}$, $\Delta_{-i}^* > 0 \wedge \Delta_{-i}^* <$

$\frac{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i \left(\frac{A_{-i}}{A_i} c_i - c_{-i} \right)}{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i + c_{-i}}$.

Pretože sme nešpecifikovali producenta i s „relatívne vyššími“, alebo s „relatívne rovnakými“ jednotkovými variabilnými nákladmi, môže to byť ktorýkoľvek producent $i \in I$. Ako môžeme vidieť, ekvilibria sú definované nezávisle od počiatočného očakávania v kroku 1 o cene konkurenčného produktu, teda nezávisle od I_M . Teda prvé očakávanie o cene konkurenta v kroku 1 uvažovania producentov nemá vplyv na úroveň ekvibríí a teda výstupov z trhu M. Navyše toto implikuje, že nie je dôležité, ktorý producent je tým producentom, ktorý je na rade v kroku 1 uvažovania producentov, nemá to vplyv na úroveň ekvibríí, teda výstupov z trhu M.

Ekvilibrium na trhu duopolu s LUF, keď produkt s vyššími jednotkovými nákladmi má väčšiu atraktivitu

Poslednou situáciou, ktorú sme doteraz neanalyzovali, je situácia, keď producent s „relatívne vyššími“, alebo s „relatívne rovnakými“ jednotkovými variabilnými nákladmi produkuje produkt s väčšou atraktivitou, teda keď $c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ a $A_i > A_{-i}$.

Opäť predpokladajme, že producent $-i \in I$ je producentom, ktorý je v prvom kroku rozhodovania producentov na rade.

Teda Δ_i^* z konštrukcie $p_i^* = I_M - \Delta_i^*$ si zachováva svoj pôvodný tvar

$$\Delta_i^* = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j, j \in \mathbb{N}, \Delta_j > 0 \wedge \Delta_j < \frac{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

ale s predpokladom $A_i > A_{-i}$, za podmienky $c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$. (1.1.4.24)

Ak budeme schopný dokázať

$$\Delta_i^* = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j = I_M - c_i, \quad (1.1.4.25)$$

za podmienok $\Delta_j > 0 \wedge \Delta_j <$

$$\frac{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

$c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ a $A_i > A_{-i}$, potom dokážeme, že $p_i^* = c_i$ za podmienok $c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ and $A_i > A_{-i}$.

Ak $A_i > A_{-i}$, potom

$$\Delta_i^* = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right) \Delta_j, j \in \mathbb{N}, \Delta_j > 0 \wedge \Delta_j < \frac{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (1.1.4.26)$$

je majorantný k (1.1.4.24).

Z definície (1.1.4.26) vidíme, že

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right) \frac{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_i} , j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} c_i\right)\right)\right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} c_i\right)\right)} \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.1.4.27)$$

je majorantný k (1.1.4.26).

Pre akékoľvek dané $A_1, A_2, B, C > 0$, také, že $A_1 - B \geq C$ a $A_1 \leq A_2$, teda $A_2 - B \geq C$:

$$\frac{(A_1-B)(A_1-B-C)}{A_1-B+C} \leq \frac{(A_2-B)(A_2-B-C)}{A_2-B+C}.$$

Pretože $A_i > A_{-i}$, potom $\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \leq 1 \forall j \in \mathbb{N}$ a teda

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right) \frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_k}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_k}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} c_i\right)\right)\right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_k}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} c_i\right)\right)} \leq \\ & \frac{\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right) \frac{\left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_k}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} c_i\right)\right)\right)}{\left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_k}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} c_i\right)\right)} \right)}{\left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_k}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} c_i\right)\right)} \right)} \forall j \in \mathbb{N}, \text{ teda} \\ & \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right) \frac{\left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_k}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} c_i\right)\right)\right)}{\left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_k}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} c_i\right)\right)} \right)}{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_k}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k} + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} c_i\right)\right)}, j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k < \\ & \frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} c_i\right)\right)\right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} c_i\right)\right)} \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1.1.4.28)$$

je majorantný k (1.1.4.27).

⁹⁰ Z $\frac{(A_1-B)(A_1-B-C)}{A_1-B+C} \leq \frac{(A_2-B)(A_2-B-C)}{A_2-B+C}$ dostaneme $\frac{(A_2-A_1)((A_2-B)(A_1-B)+C(A_2-B+A_1-B)-C^2)}{(A_2-B)(A_1-B)+C(A_2-B)+C(A_1-B)+C^2} \geq 0$. Menovateľ je kladný. A čitateľ je nezáporný, ak $C(A_2-B+A_1-B)-C^2 \geq 0$, teda ak $A_2-B+A_1-B-C \geq 0$, respektíve ak $A_2-B+A_1-B \geq C$, čo je pravdivé tvrdenie.

Pre akékoľvek dané $A, B_1, B_2, C > 0$, také, že $A - B_1 \geq C$ a $B_1 \geq B_2$, teda $A - B_2 \geq C$:

$$\frac{(A-B_1)(A-B_1-C)}{A-B_1+C} \leq \frac{(A-B_2)(A-B_2-C)}{A-B_2+C}.^{91}$$

Pretože $A_i > A_{-i}$, potom $\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^j - (-1)^k}{2}} \geq 1 \forall j, k \in \mathbb{N}$ a teda

$$\begin{aligned} & \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^j - (-1)^k}{2}} \frac{\left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^j - (-1)^k}{2}} \Delta_k\right) \left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^j - (-1)^k}{2}} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^j+1}{2}\right) c_i\right)}{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^j - (-1)^k}{2}} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^j+1}{2}\right) c_i}\right) \leq \\ & \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^j - (-1)^k}{2}} \frac{\left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k\right) \left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^j+1}{2}\right) c_i\right)}{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^j+1}{2}\right) c_i}\right) \forall j \in \mathbb{N}, \text{ teda} \\ & \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^j - (-1)^k}{2}} \frac{\left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k\right) \left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^j+1}{2}\right) c_i\right)}{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^j+1}{2}\right) c_i}\right), j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k < \\ & \frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^k - (-1)^l}{2}} \Delta_l\right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^k - (-1)^l}{2}} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right) c_i\right)}{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^k - (-1)^l}{2}} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right) c_i\right)} \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1.1.4.29)$$

je majorantný k (1.1.4.28).

Z podmienok $c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, $A_i > A_{-i}$ a $A_i, A_{-i} > 0$ dostávame $c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} > c_{-i}$, teda

$$\left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right) c_{-i} = c_{-i} \leq \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right) c_i \forall k \in \mathbb{N} \text{ a teda}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^j - (-1)^k}{2}} \frac{\left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k\right) \left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k - c_{-i}}\right)}{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k + c_{-i}}}, j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k < \\ & \frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^k - (-1)^l}{2}} \Delta_l\right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^k - (-1)^l}{2}} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right) c_i\right)}{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^k - (-1)^l}{2}} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right) c_i\right)} \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1.1.4.30)$$

je majorantný k (1.1.4.29).

⁹¹ Z $\frac{(A-B_1)(A-B_1-C)}{A-B_1+C} \leq \frac{(A-B_2)(A-B_2-C)}{A-B_2+C}$ dostaneme $\frac{(B_1-B_2)((A-B_2)(A-B_1)+C(A-B_2+A-B_1)-C^2)}{(A-B_2)(A-B_1)+C(A-B_2)+C(A-B_1)+C^2} \geq 0$. Menovateľ je kladný. A čitateľ je nezáporný, ak $C(A-B_2+A-B_1)-C^2 \geq 0$, teda ak $A-B_2+A-B_1-C \geq 0$, respektíve ak $A-B_2+A-B_1 \geq C$, čo je pravdivé tvrdenie.

Ak dokážeme, že (1.1.4.30) je konvergentný, potom dokážeme, že aj (1.1.4.24) je konvergentný pomocou porovnávacieho kritéria konvergenzie nekonečného radu.

Je možné dokázať, že (1.1.4.30) je konvergentný pomocou d'Alembertovho podielového kritéria.⁹²

Teda (1.1.4.24) je konvergentný, potom však

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{A_j}{A_{-j}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j = 0,^{93} \quad (1.1.4.31)$$

$$j \in \mathbb{N}, \Delta_j > 0 \wedge \Delta_j <$$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-j}}{A_j} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_k}{A_{-k}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_l} \right) \left(\left(\frac{A_{-j}}{A_j} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_k}{A_{-k}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-l} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_l} \right)}{\left(\frac{A_{-j}}{A_j} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_k}{A_{-k}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2} \right) c_{-l} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \right) c_l}} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

ak $A_j > A_{-j}$.

Uvažujme nekonečný rad

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_k}{A_{-k}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k} \right) \left(I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_k}{A_{-k}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k - c_l} \right)}{I_{M-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_k}{A_{-k}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + c_l}}, j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-j}}{A_j} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-l}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} \right) \left(\left(\frac{A_{-j}}{A_j} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-l}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-l} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_l} \right)}{\left(\frac{A_{-j}}{A_j} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_l}{A_{-l}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} \right) c_{-l} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} \right) c_l}} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.1.4.32)$$

Pre akékoľvek dané $A_1, A_2, B, C > 0$, také, že $A_1 - B \geq C$ a $A_1 < A_2$, teda $A_2 - B > C$:

$$\frac{(A_1-B)(A_1-B-C)}{A_1-B+C} < \frac{(A_2-B)(A_2-B-C)}{A_2-B+C}.^{94}$$

Pretože $A_j > A_{-j}$, dostávame $\frac{A_j}{A_{-j}} > 1$, teda

⁹² (d'Alembert, 1768)

⁹³ Z nutnej podmienky konvergenzie nekonečného radu.

⁹⁴ Z $\frac{(A_1-B)(A_1-B-C)}{A_1-B+C} < \frac{(A_2-B)(A_2-B-C)}{A_2-B+C}$ dostaneme $\frac{(A_2-A_1)((A_2-B)(A_1-B)+C(A_2-B+A_1-B)-C^2)}{(A_2-B)(A_1-B)+C(A_2-B)+C(A_1-B)+C^2} > 0$. Menovateľ je kladný. A čitateľ je kladný, ak $C(A_2 - B + A_1 - B) - C^2 > 0$, teda ak $A_2 - B + A_1 - B - C > 0$, respektíve ak $A_2 - B + A_1 - B > C$, čo je pravdivé tvrdenie.

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)_{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k \right) \left(\left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)_{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_{k-c_i} \right)}{\left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)_{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_{k+c_i}}, j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k < \\
& \frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_l} \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} c_i \right)} \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} c_i \right)} \right)} \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{1.1.4.33}$$

je majorantný k (1.1.4.32).

Vieme, že $c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, teda

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)_{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k \right) \left(\left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)_{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_{k - \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right) c_{-i}} \right)}{\left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)_{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right) c_{-i}}, j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k < \\
& \frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_l} \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} c_i \right)} \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} c_i \right)} \right)} \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{1.1.4.34}$$

je majorantný k (1.1.4.33).

(1.1.4.34) môžeme prepísať na

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)_{I_M - \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right) \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k+1}}{2}} \Delta_k} \right) \left(\left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)_{I_M - \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right) \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k+1}}{2}} \Delta_{k - \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right) c_{-i}} \right)}{\left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)_{I_M - \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right) \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k+1}}{2}} \Delta_k + \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right) c_{-i}}, j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k < \\
& \frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_l} \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} c_i \right)} \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2} c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2} c_i \right)} \right)} \forall k \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{1.1.4.35}$$

Pre akékoľvek dané $A, B_1, B_2, C > 0$, také, že $A - B_1 \geq C$ a $B_1 \geq B_2$, teda $A - B_2 \geq C$:

$$\frac{(A-B_1)(A-B_1-C)}{A-B_1+C} \leq \frac{(A-B_2)(A-B_2-C)}{A-B_2+C}.^{95}$$

Pretože $A_i > A_{-i}$ dostávame $\frac{A_{-i}}{A_i} < 1$, teda $\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k+1}}{2}} \Delta_k \leq \Delta_k \forall k \in \mathbb{N}$, potom

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)_{I_M - \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right) \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k}\right) \left(\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)_{I_M - \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right) \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k - \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{c_{-i}}}\right)}{\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)_{I_M - \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right) \sum_{k=1}^{j-1} \Delta_k + \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{c_{-i}}}}, j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k < \frac{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}} \Delta_l}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i} \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.1.4.36)$$

je majorantný k (1.1.4.35).

Avšak (1.1.4.36) je ten istý nekonečný rad, ako (1.1.4.30)⁹⁶ a ukázali sme, že (1.1.4.30) je konvergentný. No (1.1.4.36), respektíve (1.1.4.30), je majorantný k (1.1.4.32), teda aj (1.1.4.32) je konvergentný⁹⁷, teda

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\left(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k\right) \left(I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k - c_i\right)}{I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + c_i} = 0,^{98} \quad (1.1.4.37)$$

$j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}} \Delta_l\right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}} \Delta_l - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i\right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_M - \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}} \Delta_l + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i} \forall k \in \mathbb{N},$$

ak $A_i > A_{-i}$.

⁹⁵ Z $\frac{(A-B_1)(A-B_1-C)}{A-B_1+C} \leq \frac{(A-B_2)(A-B_2-C)}{A-B_2+C}$ dostaneme $\frac{(B_1-B_2)((A-B_2)(A-B_1)+C(A-B_2+A-B_1)-C^2)}{(A-B_2)(A-B_1)+C(A-B_2)+C(A-B_1)+C^2} \geq 0$. Menovateľ je kladný. A čitateľ je nezáporný, ak $C(A-B_2+A-B_1)-C^2 \geq 0$, teda ak $A-B_2+A-B_1-C \geq 0$, respektíve ak $A-B_2+A-B_1 \geq C$, čo je pravdivé tvrdenie.

⁹⁶ To je možné vidieť, keď vyťahujeme $\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)$ z každého člena a zátvorky výrazu a podelíme ich medzi sebou.

⁹⁷ Porovnávacie kritérium konvergenie nekonečného radu.

⁹⁸ Z nutnej podmienky konvergenie nekonečného radu.

Použitím $\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k = \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j$ vieme (1.1.4.37)

prepísať na

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\left(I_{M-\sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j \right) \left(I_{M-\sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j - c_i \right)}{I_{M-\sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j + c_i}} = 0,$$

$j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i} \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.1.4.38)$$

Z (1.1.4.38), dostávame

$$\frac{\left(I_{M-\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j \right) \left(I_{M-\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j - c_i \right)}{I_{M-\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j + c_i}} = 0,$$

$j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i} \forall k \in \mathbb{N}.$$

Z (1.1.4.31) vieme, že $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k = 0$, teda dostávame

$$\frac{\left(I_{M-\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k \right) \left(I_{M-\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k - c_i \right)}{I_{M-\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + c_i}} = 0, \quad (1.1.4.39)$$

$j \in \mathbb{N}, \Delta_k > 0 \wedge \Delta_k <$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} \right) \left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} - \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i \right)}{\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} I_{M-\sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}-(-1)^l}{2}} \Delta_l} + \left(\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) c_i} \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pretože sme skonštruovali $p_i^* = I_M - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j$, $p_i^* \geq c_i > 0$ a $\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j >$

$0 \forall j \in \mathbb{N}$, potom $I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k > 0$. Pretože $I_M -$

$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k > 0$ a $c_i > 0$, potom $I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k + c_i > 0$.

Teda (1.1.4.39) môže byť pravdivé, iba ak $I_M - \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k - c_i = 0$. Z toho

dostávame $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k = I_M - c_i$. A pretože je (1.1.4.24) konvergentný,

potom $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}} \Delta_k = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j = I_M - c_i = \Delta_i^*$ za podmienok $\Delta_j >$

$0 \wedge \Delta_j <$

$$\frac{\left(\left(\frac{A_{-i}}{A_i}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k\right) \left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k - \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right) c_{-i} - \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2}\right) c_i\right)}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} I_M - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}-(-1)^k}{2}} \Delta_k + \left(\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}\right) c_{-i} + \left(\frac{(-1)^{j+1}}{2}\right) c_i} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

$c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ a $A_i > A_{-i}$.

Teda $p_i^* = c_i$ za podmienok $c_i \geq \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ a $A_i > A_{-i}$.

Použime teraz lemu z vety o konvergencii monotónnych postupností: ak je rastúca postupnosť reálnych čísel zhora ohraničená, potom supréum tejto postupnosti je jej limitou.⁹⁹

Postupnosť čiastkových súčtov nekonečného radu (1.1.4.24) je postupnosťou reálnych čísel

a pretože $\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j > 0 \forall j \in \mathbb{N}$, potom je táto postupnosť rastúca.

Vieme, že čiastkové súčty tohto nekonečného radu sú zhora ohraničené, pretože $p_i^* = I_M -$

$\Delta_i^* \geq c_i$, teda $\Delta_i^* = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j \leq I_M - c_i$, ale pretože $\left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j > 0 \forall j \in \mathbb{N}$,

potom $\sum_{j=1}^N \left(\frac{A_i}{A_{-i}}\right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j \leq I_M - c_i \forall N \in \mathbb{N}$.

Dokázali sme, že (1.1.4.24) je konvergentný, teda existuje konečná limita jeho čiastkových súčtov, ktorá sa rovná sume nekonečného radu (1.1.4.24).

Teda limita postupnosti čiastkových súčtov sa rovná nekonečnému radu (1.1.4.24).

⁹⁹ (Bibby, 1974)

Ukázali sme, že táto postupnosť dokáže nadobudnúť svoje horné ohraničenie, $I_M - c_i$. Ak nejaká rastúca postupnosť dokáže nadobudnúť svoje horné ohraničenie, potom toto horné ohraničenie je maximum tejto rastúcej postupnosti a ak rastúca postupnosť dokáže nadobudnúť svoje maximum, potom toto maximum je supréum tejto rastúcej postupnosti. Teda supréum postupnosti čiastkových súčtov nekonečného radu (1.1.4.24) je $I_M - c_i$, teda limita tejto postupnosti je $I_M - c_i$. Konečne postupnosť čiastkových súčtov dokáže nadobudnúť svoju limitu a limita tejto postupnosti sa rovná sume nekonečného radu

$$(1.1.4.24), \text{ teda suma nekonečného radu } \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} \right)^{\frac{(-1)^{j-1}+1}{2}} \Delta_j = I_M - c_i.$$

Teda konečná cena produktu producenta i s „relatívne vyššími“, alebo s „relatívne rovnakými“ jednotkovými variabilnými nákladmi a s produktom s väčšou atraktivitou po všetkých uvažovaniach producentov na trhu M je rovná jednotkovým variabilným nákladom producenta i , čo znamená $p_i = c_i$.

Ekvilibrium trhu M za týchto podmienok dostaneme z funkcie najlepšej odpovede producenta $-i$. Producent $-i$ teda pozná konečnú cenu produktu i a teda túto informáciu použije vo svojej funkcii najlepšej odpovede, ktorá je jedna z (1.1.3.5), alebo (1.1.3.6).

Ak $c_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, potom $c_{-i} = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i$, teda producent $-i$ stanoví $p_{-i} = c_{-i} = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i$ a dostávame ekvilibrium $p_i = c_i$, $p_{-i} = c_{-i}$ s jednotlivými dopytmi po produktoch $x_i = \frac{I_M}{2c_i}$, $x_{-i} = \frac{I_M}{2c_{-i}}$.

Ak $c_i > \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, potom $c_{-i} < \frac{A_{-i}}{A_i} c_i$, teda producent $-i$ stanoví $p_{-i} = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i - \Delta_{-i}^*$, $\Delta_{-i}^* > 0 \wedge$

$\Delta_{-i}^* < \frac{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i \left(\frac{A_{-i}}{A_i} c_i - c_{-i} \right)}{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i + c_{-i}}$ a dostávame ekvilibrium $p_i = c_i$, $p_{-i} = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i - \Delta_{-i}^*$, $\Delta_{-i}^* > 0 \wedge \Delta_{-i}^* <$

$\frac{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i \left(\frac{A_{-i}}{A_i} c_i - c_{-i} \right)}{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i + c_{-i}}$ s jednotlivými dopytmi po produktoch $x_i = 0$, $x_{-i} = \frac{I_M}{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i - \Delta_{-i}^*}$, $\Delta_{-i}^* > 0 \wedge \Delta_{-i}^* <$

$\frac{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i \left(\frac{A_{-i}}{A_i} c_i - c_{-i} \right)}{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i + c_{-i}}$.

Pretože sme nešpecifikovali producenta i s „relatívne vyššími“, alebo s „relatívne rovnakými“ jednotkovými variabilnými nákladmi, môže to byť ktorýkoľvek producent $i \in I$. Ako môžeme vidieť, ekvilibria sú definované nezávisle od počiatočného očakávania v kroku 1 o cene konkurenčného produktu, teda nezávisle od I_M . Teda prvotné očakávanie o cene konkurenta v kroku 1 uvažovania producentov nemá vplyv na úroveň ekvibrií a teda výstupov z trhu M . Navyše toto implikuje, že nie je dôležité, ktorý producent je tým producentom, ktorý je na

rade v kroku 1 uvažovania producentov, nemá to vplyv na úroveň ekviliórií, teda výstupov z trhu M.

1.1.5 Ekvilibrium na trhu duopolu s lineárnou úžitkovou funkciou

V predchádzajúcej časti sme dokázali, že racionálny producent s „relatívne vyššími“, alebo s „relatívne rovnakými“ jednotkovými variabilnými nákladmi na trhu duopolu s LUF vždy stanoví cenu jednotky svojho produktu na úroveň svojich jednotkových variabilných nákladov, pričom nezáleží, aký je vzťah (podiel) atraktivity produktov.

To znamená, že trh M (duopol s LUF) má tri možné ekvilióriá z pohľadu konkrétneho producenta $i \in I$:

1. Ak má niektorý producent $i \in I$ „relatívne nižšie“ jednotkové variabilné náklady, teda

$$c_i < \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} \text{ (kde } -i \text{ je označenie konkurenta producenta } i), \text{ potom ekvilibrium, alebo}$$

$$\text{aj výstup trhu M (duopolu s LUF) bude } p_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - \Delta_i, \Delta_i > 0 \wedge \Delta_i <$$

$$\frac{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - c_i \right)}{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} + c_i}, p_{-i} = c_{-i}.$$

2. Ak má niektorý producent $i \in I$ „relatívne rovnaké“ jednotkové variabilné náklady (teda obaja producenti majú „relatívne rovnaké“ jednotkové variabilné náklady), teda $c_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, potom ekvilibrium, alebo aj výstup trhu M (duopolu s LUF) bude $p_i = c_i$ a $p_{-i} = c_{-i}$.

3. Ak má niektorý producent $i \in I$ „relatívne vyššie“ jednotkové variabilné náklady, teda $c_i > \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, potom ekvilibrium, alebo aj výstup trhu M (duopolu s LUF) bude $p_i = c_i$,

$$p_{-i} = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i - \Delta_{-i}, \Delta_{-i} > 0 \wedge \Delta_{-i} < \frac{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i \left(\frac{A_{-i}}{A_i} c_i - c_{-i} \right)}{\frac{A_{-i}}{A_i} c_i + c_{-i}}.$$

Poznámka o funkcii najlepšej odpovede producenta s „relatívne nižšími“ jednotkovými variabilnými nákladmi na trhu M duopolu

Definujme ešte precíznejšie funkciu najlepšej odpovede producenta s „relatívne nižšími“ jednotkovými variabilnými nákladmi, teda ak tohto producenta označíme ako producenta i , prirodzene $i \in I$, potom teda platí $c_i < \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ a producent i stanovuje v ekvilibriu $p_i =$

$$\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - \Delta_i, \Delta_i > 0 \wedge \Delta_i < \frac{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - c_i \right)}{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} + c_i}.$$

Avšak takto definovaná cena p_i definuje nekonečné množstvo možných cien p_i , ktoré spĺňajú

$$p_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - \Delta_i, \Delta_i > 0 \wedge \Delta_i < \frac{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - c_i \right)}{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} + c_i}.$$

Racionálny producent i s „relatívne nižšími“ jednotkovými variabilnými nákladmi sa snaží maximalizovať svoj profit, teda $\max \pi_i(p_i) = p_i x_i - f_i - c_i x_i$ a my vieme, že ak $c_i < \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$,

potom v ekvilibriu $p_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - \Delta_i, \Delta_i > 0 \wedge \Delta_i < \frac{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - c_i \right)}{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} + c_i}$ a že $x_i = \frac{I_M}{p_i}$, teda

dostávame $\max \pi_i(\Delta_i) = I_M - f_i - c_i \frac{I_M}{\left(\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - \Delta_i \right)}$. Vieme, že $\Delta_i > 0$, avšak z $\max \pi_i(\Delta_i)$

vidíme, že s klesajúcim Δ_i profit π_i rastie, teda producent i sa bude snažiť nastaviť Δ_i tak malé, ako je to len možné, aby maximalizoval svoj profit. Ibaže my poznáme (a tak isto aj producent i) iba infimum Δ_i , čo je $\Delta_i > 0$.

Pokiaľ producent i stanoví $\Delta_i = 0$, potom $p_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, čo je cena, pri ktorej si producenti dopyt na trhu M delia medzi sebou, čo by viedlo k nižšiemu dopytu po produkte i , teda aj

nižšiemu profitu π_i v porovnaní, keď $\Delta_i > 0 \wedge \Delta_i < \frac{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - c_i \right)}{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} + c_i}$.

V tejto úvahe sa uspokojíme s predpokladom, že producent i s „relatívne nižšími“ jednotkovými variabilnými nákladmi stanoví Δ_i tak, aby $\Delta_i > 0$, avšak ju volí ako veľmi malú,

veľmi blízko k 0, pričom bude stále spĺňať $\Delta_i < \frac{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} \left(\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - c_i \right)}{\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} + c_i}$, teda cena p_i bude nižšia ako

$\frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, avšak veľmi blízko k danému tak, aby jej najmenšie možné zvýšenie znamenalo

dorovnanie $p_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$.

Dôkaz ekvilibria na trhu duopolu s LUF využitím teórie hier

V časti 1.1.4 Uvažovanie producentov – cesta k ekvilibriu na trhu duopolu s LUF sme dokázali, že uvažovanie producentov na trhu duopolu s LUF vedie k dvom typom rovnovážnych stavov – ekvilibrií, z ktorých sa žiadnemu producentovi neoplatí jednostranne vychýliť a ktoré sú podmienené vzťahom „relatívnych“ jednotkových variabilných nákladov producentov.

V tejto časti ukážeme, že dané ekvilibriá (teda optimálne úrovne cien oboch producentov vzhľadom na voľbu konkurencie) je možné identifikovať pomocou teórie hier.

„Teória hier je štúdiom konfliktných a kooperatívnych matematických modelov medzi inteligentnými a racionálnymi rozhodujúcimi sa aktérmi“¹⁰⁰.

Poznámka o pojmoch teórie hier¹⁰¹

Hra je v teórii hier definovaná ako presne stanovený matematický model inteligentných a racionálnych aktérov a týchto aktérov vystupujúcich v hre nazývame hráčmi.

Hráči majú v hre možnosti voľby (rozhodovania) a jednotlivé konkrétne rozhodnutia nazývame akciami hráčov. Kompletný zoznam akcií hráča v danej hre nazývame stratégiou hráča. V prípade, že stratégia obsahuje iba konkrétne akcie hráča, hovoríme o čistej stratégii hráča a v prípade, že stratégia určuje rozdelenie pravdepodobnosti nad čistými stratégiami hráča, potom hovoríme o zmiešanej stratégii hráča.

Rozhodovací bod je situácia v priebehu hry, kedy minimálne jeden z hráčov volí svoju akciu.

Statická hra znamená, že hráči v hre volia svoje stratégie simultánne, pričom každý z hráčov má iba jednu možnosť určenia akcie, teda v statickej hre sú stratégie priamo akciami hráčov.

Funkcie výplat hráčov sú funkcie, ktoré každému hráčovi v hre priradia von Neumann-Morgensternov úžitok¹⁰² pre všetky profily stratégií všetkých hráčov.

Úplná informácia je vyjadrením predpokladu, že všetci hráči v hre majú úplnú informáciu o akomkoľvek aspekte hry, vrátane svojich funkcií výplat a funkcií výplat ostatných hráčov.

Reakčná funkcia hráča je funkcia, ktorá priradí konkrétnu stratégiu hráča pre akýkoľvek profil stratégií ostatných hráčov v hre tak, že táto stratégia hráča je jeho najlepšou reakciou na akýkoľvek profil stratégií ostatných hráčov v zmysle jeho funkcie výplat.

Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách je taký profil čistých stratégií všetkých hráčov, v ktorom stratégia každého hráča je tou najlepšou možnou reakciou na stratégie ostatných hráčov, teda v zmysle pojmu reakčných funkcií je to taký profil čistých stratégií všetkých hráčov, ktorý je definovaný reakčnými funkciami všetkých hráčov v zmysle ich kombinácie.

Z definície Nashovho ekvilibria v čistých stratégiách vyplýva, že pokiaľ má hra Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách, potom sa žiadnemu hráčovi neoplatí (v zmysle von

¹⁰⁰ (Mayerson, 1997)

¹⁰¹ (Fudenberg, Tirole, 1991)

¹⁰² (von Neumann, Morgenstern, 2007)

Neumann-Morgensternovho úžitku definovanom jeho funkciou výplat) jednostranne vychýliť zo stratégie, ktoré mu Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách definovalo.

Pokiaľ má hra jediné Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách, potom z jeho definície vyplýva, že každý racionálny hráč zahrá v hre stratégiu definovanú Nashovym ekvilibrium, ak teda dovolíme hráčom voliť iba čisté stratégie. Táto voľba je pre každého hráča optimálnou voľbou v zmysle Neumann-Morgensternovho úžitku.

Duopol s LUF ako hra

Zadefinujme si teraz situáciu trhu M ako duopolu s LUF terminológiou teórie hier. Keďže sme analyzovali jednorazovú interakciu producentov na trhu M a ich simultánne nastavovanie cien, ide v tomto prípade o statickú hru.

Racionálni producenti na trhu M sú hráči tvoriaci množinu $I = \{1, 2\}$, pričom množina čistých stratégií každého hráča $i \in I$ je množina $\langle c_i, \infty \rangle$, ktorá definuje možnosť voľby p_i . Keďže ide o statickú hru, množina čistých stratégií je zároveň aj množinou čistých akcií hráča v statickej hre.

Keďže má práca ambíciu aplikovateľnosti v reálnom svete, budeme sa zaoberať iba čistými stratégiami hráčov, teda nebudeme uvažovať možnosť rozdelenia pravdepodobnosti výberu hráčov nad množinou ich čistých stratégií.

Funkcie výplat hráčov na trhu M sú definované ako ich profit, teda $\pi_i = p_i x_i - f_i - c_i x_i \forall i \in I$, avšak s predpokladom, že hráči preferujú produkciu pred neprodukovaním, pokiaľ sú z hľadiska profitu indiferentní v tomto rozhodovaní.¹⁰³

V úvahách o duopole s LUF sme pre producentov predpokladali úplnú informáciu vo všetkých aspektoch trhu, preto ide o hru s úplnou informáciou.

V predchádzajúcich úvahách sme definovali aj reakčné funkcie hráčov, ktoré sme nazvali funkcie najlepšej odpovede a označili sme ich (1.1.3.5) a (1.1.3.6). Prirodzene (1.1.3.5) a (1.1.3.6) spĺňajú predpoklady reakčných funkcií, pretože priradujú konkrétnu stratégiu hráča pre akýkoľvek profil stratégií ostatných hráčov v hre tak, že je táto stratégia najlepšou reakciou v zmysle jeho výplaty.

Aby sme boli schopný identifikovať ekvibriá, rozdeľme teraz hru duopolu s LUF na tri hry na základe možných situácií hráča $i \in I$, v ktorých sa môže nachádzať. Tieto situácie sú definované porovnaním jeho jednotkových variabilných nákladov s „relatívnymi“

¹⁰³ Takto definovaná statická hra sa v terminológii teórie hier nazýva aj strategický tvar hry.

jednotkovými nákladmi konkurenčného hráča, ktorého označíme $-i \in I, -i \neq i$, teda $c_i < \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, $c_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ a $c_i > \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$.

Duopol s LUF z pohľadu hráča s „relatívne nižšími“ variabilnými nákladmi

Predpokladajme, že hráč $i \in I$ má „relatívne nižšie“ jednotkové variabilné náklady v hre duopolu s LUF, teda $c_i < \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$.

V Poznámke o funkcii najlepšej odpovede producenta s „relatívne nižšími“ jednotkovými variabilnými nákladmi na trhu M duopolu sme definovali, že optimálna voľba producenta $i \in I$, pokiaľ pre neho platí $c_i < \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ je voľba najväčšieho možného $p_i^* = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - \Delta_i < \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, $\Delta_i > 0$, teda najmenšieho možného $\Delta_i > 0$. Toto determinuje optimálnu stratégiu producenta i ako hráča i v situácii $c_i < \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$. Hráč i nie je náchylný voliť $p_i < p_i^*$, pretože to by znamenalo nižšiu výplatu (zisk π_i). A v prípade minimálneho vychýlenia smerom hore, teda stanovenia $p_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, by to pre hráča i znamenalo opäť pokles jeho výplaty (zisku π_i), pretože v takom prípade je hráč $-i \in I$ schopný stanoviť $p_{-i} = c_{-i}$, čo vedie k del'be dopytu na trhu M.

Keďže poznáme optimálnu stratégiu hráča i v situácii $c_i < \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, potom dokážeme stanoviť optimálnu stratégiu hráča $-i$. Akákoľvek stratégia, ktorú je hráč $-i$ schopný zvoliť v situácii $c_{-i} > \frac{A_{-i}}{A_i} c_i \wedge p_i^* = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - \Delta_i$, teda $\forall p_{-i} \geq c_{-i}$ vedie k $\pi_{-i} = -f_{-i}$, pretože dopyt m'ňa svoje finančné prostriedky iba na produkt i . Avšak predpokladali sme, že producenti preferujú produkciu pred neprodukovaním, pokiaľ sú indiferentný v situáciách z hľadiska profitu. Napriek tomu, že hráč $-i$ voľbou $p_{-i} = c_{-i}$ nezíska žiadny dopyt, je to voľba, ktorá má najväčší potenciál získania dopytu, pretože pri najmenšom vychýlení hráča i zo svojej optimálnej stratégie by znamenalo pre hráča $-i$ dopyt po produkte $-i$.¹⁰⁴

Teda optimálnou reakciou hráča $-i$ v situácii $c_{-i} > \frac{A_{-i}}{A_i} c_i \wedge p_i^* = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - \Delta_i$ je voľba $p_{-i}^* = c_{-i}$.

Týmto sme dostali ekvilibrium v čistých stratégiách hry duopolu s LUF s podmienkou $c_i < \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, $p_i^* = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - \Delta_i$, kde $\Delta_i = \min_{\Delta > 0} \Delta$, $p_{-i}^* = c_{-i}$. Ekvilibrium $p_i^* = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - \Delta_i$, kde $\Delta_i = \min_{\Delta > 0} \Delta$, $p_{-i}^* = c_{-i}$ je Nashovým ekvilibrium, pretože stratégie každého hráča sú tou najlepšou

¹⁰⁴ Predpoklad preferencie produkovať je prirodzene možné rozšíriť aj na predpoklad preferencie voľby producentov, ktorá má najväčší potenciál produkovať v prípade, keď akákoľvek voľba nevedie k produkcii.

možnou reakciou na stratégie ostatných hráčov.

Zároveň sme dostali jediné Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách, pretože hráči voľbou akejkoľvek inej stratégie nedokážu vytvoriť ekvilibrium, teda rovnovážny stav, z ktorého sa žiadnemu hráčovi neoplatí jednostranne vychýliť.

Ak je teda profil stratégií $p_i^* = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - \Delta_i$, kde $\Delta_i = \min_{\Delta > 0} \Delta$, $p_{-i}^* = c_{-i}$ jedínym Nashovym ekvilibrium v čistých stratégiách, potom racionálni hráči zvolia v hre duopolu s LUF s podmienkou $c_i < \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ práve tieto stratégie.

Duopol s LUF z pohľadu hráča s „relatívne rovnakými“ variabilnými nákladmi

Predpokladajme, že hráč $i \in I$ má „relatívne rovnaké“ jednotkové variabilné náklady v hre duopolu s LUF, teda $c_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$.

Jedinou optimálnou stratégiou hráča i v hre duopolu s LUF s podmienkou $c_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ je $p_i^* = c_i$, pretože tá jediná mu zaručuje dopyt. Hráč i nemôže voliť $p_i < p_i^* = c_i$. A v prípade, že by sa rozhodol zvoliť $p_i > p_i^* = c_i$, potom by hráč $-i \in I$ mohol zareagovať voľbou takého p_{-i} , ktoré by znamenalo nulový dopyt po produkte i .

Avšak v situácii $c_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ pre hráča $-i$ platí $c_{-i} = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i$ a teda hráč $-i$ je v rovnakej situácii, ako hráč i . Teda optimálna stratégia hráča $-i$ v hre duopolu s LUF s $c_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ je voľba $p_{-i}^* = c_{-i}$.

Týmto sme dostali ekvilibrium v čistých stratégiách hry duopolu s LUF s podmienkou $c_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, $p_i^* = c_i$, $p_{-i}^* = c_{-i}$. Ekvilibrium $p_i^* = c_i$, $p_{-i}^* = c_{-i}$ je Nashovym ekvilibrium, pretože stratégie každého hráča sú tou najlepšou možnou reakciou na stratégie ostatných hráčov.

Zároveň sme dostali jediné Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách, pretože hráči voľbou akejkoľvek inej stratégie nedokážu vytvoriť ekvilibrium, teda rovnovážny stav, z ktorého sa žiadnemu hráčovi neoplatí jednostranne vychýliť.

Ak je teda profil stratégií $p_i^* = c_i$, $p_{-i}^* = c_{-i}$ jedínym Nashovym ekvilibrium v čistých stratégiách, potom racionálni hráči zvolia v hre duopolu s LUF s podmienkou $c_i = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ práve tieto stratégie.

Duopol s LUF z pohľadu hráča s „relatívne vyššími“ variabilnými nákladmi

Predpokladajme, že hráč $i \in I$ má „relatívne vyššie“ jednotkové variabilné náklady v hre duopolu s LUF, teda $c_i > \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$.

V tomto prípade je však hráč i v úplne rovnakej situácii, ako hráč $-i \in I$, keď sme analyzovali duopol s LUF z pohľadu hráča i s „relatívne“ nižšími variabilnými nákladmi.

Ak teda hráč i hrá hru duopolu s LUF a platí $c_i > \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$, potom jediným Nashovým

ekvilibriom v čistých stratégiách je profil stratégií $p_i^* = c_i$, $p_{-i}^* = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i - \Delta_{-i}$, kde $\Delta_{-i} =$

$\min_{\Delta \geq 0} \Delta$ a teda racionálni hráči zvolia v hre duopolu s LUF s podmienkou $c_i > \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i}$ práve tieto stratégie.

Teória hier teda identifikovala rovnaké ekvilibriá na trhu duopolu s LUF, ako náš predchádzajúci prístup.

Výstupy a pozorovania z trhu duopolu s LUF

Ekvilibrium, alebo teda ekvilibriá trhu duopolu s LUF vedú k dôležitému pozorovaniu, že producent dokáže získať kladný profit iba v prípade, pokiaľ má „relatívne nižšie“ jednotkové variabilné náklady oproti svojmu konkurentovi.

Je racionálne očakávať, že producent nezostane na trhu dlhodobo, pokiaľ dokáže získať iba negatívny profit.

V dlhodobom horizonte sa producent s „relatívne vyššími“ jednotkovými variabilnými nákladmi bude snažiť obmedziť, alebo až zbaviť tejto svojej nevýhody, čo by prirodzene robil cez investície do produktu (kvalita, marketing a podobne), alebo cez znižovanie svojej nákladovosti (investície do efektívnejšej výroby, znižovanie nákladov).

Avšak keď producent s „relatívne vyššími“ jednotkovými variabilnými nákladmi dosiahne relatívnu úroveň jednotkových variabilných nákladov konkurenta (teda bude na trhu platiť rovnosť v relatívnych jednotkových variabilných nákladoch medzi producentmi), ekvilibrium definuje opätovne negatívny profit pre tohto producenta. Preto sa producent snaží nie len dorovnať relatívne jednotkové variabilné náklady konkurenta, ale dokonca ich až podliezť. Ale o to isté sa snaží aj jeho konkurent.

Jediným racionálnym výstupom z tohto správania racionálnych producentov v dlhodobom horizonte je, že obaja producenti investujú do svojich produktov a do nákladovej efektívnosti, čo vedie v dlhodobom horizonte k rovnosti relatívnych jednotkových variabilných nákladov

pre oboch producentov (pretože predpoklad úplnej informácie je možné rozšíriť aj na sféru najoptimálnejšej produkcie a marketingu). No to by viedlo k negatívnemu profitu pre oboch producentov v dlhodobom horizonte.

Ak teda má trh M reprezentovať realitu, potom by v realite neexistoval taký trh, ako je trh M, v dlhodobom horizonte, čo však nie je pravda. V realite existujú duopoly výrazne substitučných produktov, ktoré trvajú dlhodobo.

V ďalších analýzach overíme, či dlhodobý horizont predsa len nebude motivovať racionálnych producentov k iným ekvili briám, vedúcim k možnosti kladného profitu, na rozdiel od jednorazovej interakcie producentov.

Vo všeobecnosti však ide o problém predpokladu, že produkty na trhu M sú dokonalými substitútmi, teda preferencie dopytu sa prejavujú v zmysle lineárnej úžitkovej funkcie.

Akonáhle sú produkty dokonale zameniteľné, potom existuje v dlhodobom horizonte iba jediná stratégia, ako mať zabezpečený dopyt a teda aj produkciu, a to predávať za cenu svojich jednotkových variabilných nákladov a teda získať iba negatívny profit.

Teda trh M, ako model trhu duopolu s lineárnou úžitkovou funkciou, môže byť z tohto pohľadu použitý iba na krátkodobé situácie (jednorazové trhy). Teda trh M sa javí ako veľmi obmedzený v aplikáciách v reálnom svete.

1.1.6 Opakovaná interakcia producentov na trhu duopolu s LUF

Ako sme naznačili v časti Výstupy a pozorovania z trhu duopolu s LUF, pozrime sa na situáciu, kedy producenti na trhu duopolu s LUF interagujú opakovane, teda nejde iba o jednorazovú interakciu producentov, ale situácia popísaná v predchádzajúcich častiach sa opakuje.

V tejto časti si opätovne pomôžeme terminológiou a prostriedkami teórie hier.

Poznámka o pojmo ch teórie hier¹⁰⁵

Dynamická hra je v teórii hier hra, v ktorej existuje určitá následnosť voľby jednotlivých akcií jednotlivými hráčmi. Statická hra na rozdiel od dynamickej vyjadruje iba jednorazovú situáciu v ktorej hráči volili svoje akcie simultánne.

Špeciálnym prípadom dynamickej hry je aj opakovanie určitej statickej hry, takéto hry voláme opakované hry.

¹⁰⁵ (Fudenberg, Tirole, 1991)

Stratégie hráča v dynamickej hre opisujú kompletný zoznam akcií hráča v každej jeho voľbe, čo je v prípade dynamických hier potrebné zdôrazniť.

Funkcie výplat hráčov sú funkcie, ktoré každému hráčovi v hre priradia von Neumann-Morgensternov úžitok¹⁰⁶ pre všetky profily stratégií všetkých hráčov a v opakovanej hre ide o súčet výplat hráčov zo všetkých jednotlivých opakovaní.

Úplná informácia je vyjadrením predpokladu, že všetci hráči v hre majú úplnú informáciu o akomkoľvek aspekte hry, vrátane svojich funkcií výplat a funkcií výplat ostatných hráčov.

Pri dynamických hrách je potrebné ešte zdôrazniť aj pojem úplnej informácie hráčov, kde podobne ako pri statickej hre vyjadruje úplné informácie hráčov v hre o štruktúre hry (napríklad poradie volieb hráčov) a o funkciách výplat všetkých hráčov vrátane oponentov, ale nezaručuje dokonalú informáciu hráča o priebehu niektorých z predchádzajúcich volieb akcií niektorého z hráčov v bode voľby daného hráča. Ak majú hráči dokonalú informáciu, potom majú informáciu nie len o štruktúre hry a výplatách, ale aj o priebehu všetkých predchádzajúcich volieb akcií v každom bode svojej voľby (inak povedané, v každom bode svojej voľby poznajú všetky predchádzajúce akcie všetkých hráčov), čo pri hre s úplnou informáciou mať nemusia.

Reakčná funkcia hráča je funkcia, ktorá priradí konkrétnu stratégiu hráča pre akýkoľvek profil stratégie ostatných hráčov v hre tak, že táto stratégia hráča je jeho najlepšou reakciou na akýkoľvek profil stratégie ostatných hráčov v zmysle jeho funkcie výplat a teda toto platí aj pre opakované hry.

Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách je taký profil čistých stratégií všetkých hráčov, v ktorom stratégia každého hráča je tou najlepšou možnou reakciou na stratégie ostatných hráčov, teda v zmysle pojmu reakčných funkcií je to taký profil čistých stratégií všetkých hráčov, ktorý je definovaný reakčnými funkciami všetkých hráčov, čo platí aj v prípade opakovaných hier.

Z definície Nashovho ekvilibria v čistých stratégiách vyplýva, že pokiaľ má hra Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách, potom sa žiadnemu hráčovi neoplatí (v zmysle von Neumann-Morgensternovho úžitku definovanom jeho funkciou výplat) jednostranne vychýliť zo stratégie, ktoré mu Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách definovalo.

¹⁰⁶ (von Neumann, Morgenstern, 2007)

Podhra je dynamická hra, ktorá začína v určitom rozhodovacom bode celej dynamickej hry a obsahuje všetky následné rozhodovacie body danej dynamickej hry, teda podhra je časťou celej dynamickej hry od určitého rozhodovacieho bodu až po jej koniec.

Vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v čistých stratégiách je podmnožina Nashovych ekvilibrií v čistých stratégiách dynamických hier, pričom toto ekvilibrium je podmienené Nashovym ekvilibriom v čistých stratégiách v každej podhre celej dynamickej hry.

Spätná indukcia v čistých stratégiách je postup, pri ktorom vyšetrujeme hru od jej najmenších podhier a stanovíme pre ne Nashove ekvilibriá v čistých stratégiách a následne prechádzame k ich predchádzajúcim podhrám, pričom v týchto podhrách už poznáme výstupy z nasledujúcich podhier (Nashove ekvilibriá v čistých stratégiách najmenších podhier), na základe ktorých vieme definovať Nashove ekvilibriá predchádzajúcich podhier a spätne postupujeme po podhrách až sa dostaneme na úroveň celej dynamickej hry, čím vieme popísať optimálne stratégie (jednotlivé akcie) –vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibriá v čistých stratégiách pre všetkých hráčov v celej dynamickej hre.

História opakovanej hry v niektorom z opakovaní je zaznamenanie všetkých minulých akcií jednotlivých hráčov v predchádzajúcich opakovaníach.

Podmienená stratégia v opakovanej hre je stratégia, ktorá dokáže definovať akciu hráča v každom jeho rozhodovacom bode opakovanej hry na základe histórie tohto rozhodovacieho bodu, teda napríklad na základe predchádzajúcich akcií iných hráčov v opakovanej hre v minulosti.

Duopol s LUF s konečným počtom opakovaní

Pokiaľ pri jednorazovej interakcii producentov na trhu M išlo o statickú hru, jej opakovaním dostaneme opakovanú hru.

Opakujme statickú hru duopolu s LUF konečne veľa krát a označme tento počet $N \in \mathbb{N}$.

Stratégia hráča v dynamickej hre, ktorou je každá opakovaná hra, musí popísať všetky jeho akcie v každom jeho rozhodovacom bode.

Funkcia výplat hráča v opakovanej hre je súčet jeho výplat z jednotlivých opakovaní.

Zopakujme predpoklad úplnej informácie pre hráčov, pričom tento predpoklad je teraz v opakovanej hre rozšírený aj o informáciu o počte opakovaní hry, teda každý hráč pozná N . Je prirodzené rozšíriť informačné hľadisko aj o dokonalú informáciu, čo znamená, že hráči

poznajú voľbu predchádzajúcich akcií všetkých hráčov v každom bode svojho rozhodovania.¹⁰⁷

Použijeme teraz na opakovanú hru duopolu s LUF s konečným počtom opakovaní koncept spätnej indukcie.

Najmenšou podhrou opakovanej hry trhu M s počtom opakovaní N je statická hra duopolu s LUF v poslednom kole opakovania N .

Nashovým ekviliбриom v čistých stratégiách tejto statickej hry je ekvilibrium definované v kapitole 1.1.5 Ekvilibrium na trhu duopolu s lineárnou úžitkovou funkciou a je jediným Nashovým ekviliбриom v čistých stratégiách.

Keďže jediné Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách statickej hry je taký profil stratégií hráčov, ktorý racionálny hráči v hre zahrajú, potom výstupom z tejto podhry je výstup definujúci potencionálne kladný profit iba pre hráča s „relatívne nižšími“ jednotkovými variabilnými nákladmi.

To znamená, že minimálne jeden z hráčov v tejto podhre dosiahne záporný profit.

Keď sa presunieme o podhru späť v spätnej indukcii, teda na opakovanie $N - 1$, môžeme využiť výstup z najmenšej podhry (opakovania N) ako vstup do rozhodovania hráčov v podhre opakovania $N - 1$. Racionálni hráči totiž využívajú spätnú indukciu rovnako, ako my, teda dokážu identifikovať výstup z posledného opakovania.

To, že prípadná voľba inej, ako ekvilibriovej akcie v opakovaní $N - 1$ nijako neovplyvňuje výstup z opakovania v kole N znamená, že hráči nie sú ničím motivovaní zmeniť svoju ekvilibriovú akciu v kole $N - 1$, preto ju aj zvolia.

Tým sme dostali kompletný výstup z podhry začínajúcej opakovaním $N - 1$, teda výplaty hráčov z oboch posledných opakovaní $N - 1$ a N .

Rozhodovanie hráčov v opakovaní $N - 2$, ako počiatočný rozhodovací bod predchádzajúcej podhry, nijako neovplyvňuje výstup z podhry začínajúcej v opakovaní $N - 1$, preto opäť v opakovaní $N - 2$ hráči volia akciu definovanú ekviliбриom statickej hry.

Týmto spôsobom hráči definujú svoje voľby akcií pre každé opakovanie opakovanej hry, teda pre všetkých N opakovaní a vidíme, že v každom jednom bode hráči zvolia svoju ekvilibriovú akciu statickej hry (teda definujú svoju stratégiu tak, že zahrajú svoju stratégiu statickej hry v každom opakovaní).

¹⁰⁷ V reálnom svete sú producenti schopní si pamätať svoje a konkurenčné nastavenia cien v minulosti.

Takto sme dostali vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v čistých stratégiách a jediné vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v čistých stratégiách, preto hráči v hre duopolu s LUF s konečným počtom opakovaní budú voliť stratégie definované týmto ekvilibrium. Teda táto analýza duopolu s LUF s konečným počtom opakovaní iba potvrdzuje neželaný výstup, ktorý definuje negatívny profit pre aspoň jedného hráča, čo je v rozpore s pozorovaním v reálnom svete.

Ak by sa aj niektorý z hráčov vychýlil zo svojej stratégie a zvolil v niektorom z opakovaní inú akciu, ako mu hovorí racionálny prístup, pri predpoklade racionálnosti aspoň druhého hráča by nezískal vyšší profit.

- Hráč s „relatívne vyššími“ jednotkovými variabilnými nákladmi môže pri predpoklade vychýlenia sa z jeho ekvilibriovej stratégie voliť iba vyššiu cenu, čo mu neprinesie žiadny dodatočný dopyt.
- Hráč s „relatívne rovnakými“ jednotkovými variabilnými nákladmi môže voliť tiež iba vyššiu cenu pri predpoklade vychýlenia sa z jeho ekvilibriovej stratégie, čo znamená, že príde o celý dopyt, a hoci sa to na jeho profite neprejaví, predpokladali sme, že producenti (hráči) preferujú produkovať pred neprodukovaním.
- Hráč, ktorý má „relatívne nižšie“ variabilné náklady znížením ceny zníži aj svoj profit a zvýšením ceny dorovnáva „relatívnu“ cenu produktov na trhu¹⁰⁸, čím prichádza o časť svojho dopytu a teda tiež znižuje svoj profit.

Duopol s LUF s nekonečným alebo neurčitým počtom opakovaní

Predpokladajme teraz, že duopol s LUF sa bude opakovať nekonečne veľa krát, alebo, že sa bude opakovať neurčitý počet krát, čo vyjadríme pomocou pravdepodobnosti, s akou hráči predpokladajú, že nastane ďalšie opakovanie.

Pokiaľ hráči predpokladajú opakovanie statickej hry nekonečne veľa krát, alebo neurčitý počet krát, potom každá podhra je rovnaká, ako celá hra.

Opäť predpokladajme úplnú a dokonalú informáciu pre hráčov.

V takomto prípade nie je možné použiť spätnú indukciu na hľadanie vzhľadom na podhry dokonalého ekvilibria, pretože nedokážeme identifikovať najmenšiu podhru, teda posledné opakovanie N .

¹⁰⁸ Vychádza z Poznámky o funkcii najlepšej odpovede producenta s „relatívne nižšími“ jednotkovými variabilnými nákladmi v časti Ekvilibrium na trhu duopolu s lineárnou úžitkovou funkciou.

Pripomeňme, že stratégie hráčov musia popisovať všetky akcie opakovanej hry, preto aj akcie v každom opakovaní, ktoré môžu nastať aj s malou pravdepodobnosťou, preto z pohľadu stratégie hráčov nie je rozdiel, či ide o nekonečnú opakovanú hru, alebo opakovanú hru s neurčitou dĺžkou.

Jediné stratégie, ktoré sú schopné popísať každú akciu hráča v nekonečnej opakovanej hre, alebo v opakovanej hre s neurčitou dĺžkou sú podmienené stratégie, do ktorých radíme aj nereagujúce stratégie (stratégie, ktoré volia stále rovnaké akcie v každom opakovaní bez ohľadu na históriu, prípadne akcie s presne definovaným postupom voľby akcií, bez ohľadu na históriu) a náhodné stratégie (ktoré volia akcie náhodne, bez ohľadu na históriu).¹⁰⁹

Pozrime sa bližšie na jednotlivé podhry nekonečnej opakovanej hry, alebo opakovanej hry s neurčitou dĺžkou. Tie nie sú úplne rovnaké. Líšia sa od seba svojou históriou.

Pretože sú podmienené stratégie jediné stratégie, ktoré dokážeme použiť v nekonečnej opakovanej hre, alebo v opakovanej hre s neurčitou dĺžkou, história každej podhry je determinovaná podmienenými stratégiami, ktoré hráči v hre hrajú.

Vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium nekonečnej opakovanej hry, alebo opakovanej hry s neurčitou dĺžkou je teda determinované samotnými stratégiami, ktoré hráči hrajú, pretože koncept vzhľadom na podhry dokonalých ekvilibrií vyžaduje ekvilibrium v každej podhre.

Ak niektorá podmienená stratégia, ktorú hrajú obaja hráči v nekonečnej opakovanej hre duopolu s LUF, alebo opakovanej hre duopolu s LUF s neurčitou dĺžkou, dokáže sama so sebou vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium, potom ho aj vytvorí, pokiaľ ju hrajú obaja hráči.¹¹⁰

Pripomeňme, že funkcia výplat hráča v opakovanej hre je súčet jeho výplat z jednotlivých opakovaní, teda v prípade nekonečnej opakovanej hry, alebo opakovanej hry s neurčitou dĺžkou ide o nekonečný rad jednotlivých očakávaných výplat z jednotlivých opakovaní.

NASTY CONSTANT

Prirodzenou podmienenou stratégiou, ktorá dokáže vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre duopolu s LUF, alebo opakovanej hre duopolu s LUF s neurčitou dĺžkou, je stratégia, ktorá volí v každom opakovaní akciu definovanú Nashovým ekviliom v čistých stratégiách statickej hry duopolu s LUF, ktoré sme

¹⁰⁹ (Fudenberg, Tirole, 1991)

¹¹⁰ (Fudenberg, Tirole, 1991)

definovali v časti Ekvilibrium na trhu duopolu s lineárnou úžitkovou funkciou, bez ohľadu na históriu.

Nazvime túto stratégiu NASTY CONSTANT, pretože je zlá na svojho konkurenta a konštantná.

Táto situácia však popisuje stav, kedy minimálne jeden z hráčov permanentne dosahuje negatívny profit, čo je opätovne v rozpore s pozorovaním v reálnom svete.

NICE CONSTANT

Predstavíme si aj inú podmienenú stratégiu, opätovne nereagujúcu na históriu, ktorá však nedokáže vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre duopolu s LUF, alebo opakovanej hre duopolu s LUF s neurčitou dĺžkou.

Je to stratégia, ktorá pre oboch hráčov stanoví konštantnú úroveň cien tak, aby sa ich „relatívne“ jednotkové ceny produktov rovnali, čiže aby si hráči delili dopyt a dokonca aj s podmienkou, že obaja hráči predajom svojich produktov získajú pozitívny profit po odpočítaní fixných a variabilných nákladov.

Nazvime túto stratégiu NICE CONSTANT, pretože je milá na svojho konkurenta a konštantná.

Takáto stratégia by viedla k pozitívnemu profitu pre oboch hráčov počas celej opakovanej hry, pokiaľ by ju obaja hráči hrali.

Avšak táto stratégia nedokáže sama so sebou vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium, pretože pokiaľ by jej protihráč zistil v niektorom opakovaní, že hrá proti NICE CONSTANT, potom by jeho najlepšou odpoveďou bolo hranie stratégie, ktorá by volila ceny o niečo minimálne nižšie, ako mu hovorí jeho stratégia NICE CONSTANT a tým by získaval väčší profit.

Teda stratégia NICE CONSTANT nie je najlepšou odpoveďou sama na seba a teda nedokáže sama so sebou vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre duopolu s LUF, alebo opakovanej hre duopolu s LUF s neurčitou dĺžkou.

Táto stratégia má dve slabé miesta pri porovnaní s realitou. V realite racionálni producenti nezvolia na začiatku existencie trhu cenu a nenechajú ju konštantnú donekonečna. Racionálny producent v každom svojom rozhodovacom bode (v každom opakovaní statickej hry duopolu s LUF) dokážu meniť svoju cenu. A teda v každom svojom bode rozhodovania bude motivovaný „zradiť“ svojho konkurenta znížením ceny svojho produktu, čím získa v danom

opakovaní výrazne vyšší profit, pokiaľ predpokladá, že jeho konkurent hrá stratégiu konštantných cien.¹¹¹ Navyše podobne môže rozmýšľať aj jeho konkurent, teda v reálnom svete má takáto stratégia tendenciu sklznúť do prirodzeného ekvilibria duopolu s LUF, pričom opätovne dostávame výstup s negatívnym profitom pre aspoň jedného producenta.

Navyše na reálnych trhoch existujú bariéry voči takýmto stratégiám producentov (štandardne prijaté štátom, v ktorom sa nachádza predmetný trh, alebo organizátorom trhu), pretože pokiaľ producenti hrajú takúto stratégiu na reálnom trhu, trpí tým dopyt, ktorý musí kupovať produkty na trhu za vyššie ceny, ako keby bol trh konkurenčný. Takáto situácia na trhu sa nazýva kartel.

TIT-FOR-TAT duopolu s LUF

Iná podmienená stratégia s kartelovým potenciálom, ktorá však dokáže vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre duopolu s LUF, alebo opakovanej hre duopolu s LUF s neurčitou dĺžkou, a teda ktorá môže viesť ku kladnému profitu oboch hráčov, je stratégia, ktorá je skutočne podmienená, teda reaguje na históriu a ktorá je analógiou slávnej stratégie TIT-FOR-TAT identifikovanej Axelrodom vo svojich turnajoch opakovanej hry Väznova dilemma¹¹².

Nazvime túto stratégiu teda TIT-FOR-TAT duopolu s LUF, kde táto stratégia v prvom opakovaní, keď je ešte história prázdna množina, zvolí ceny produktov hráčov tak, aby sa ich „relatívne“ jednotkové ceny produktov rovnali, čiže aby si hráči delili dopyt a dokonca aj s podmienkou, že obaja hráči predajom svojich produktov získajú pozitívny profit po odpočítaní fixných a variabilných nákladov, teda rovnako, ako volí stratégia NICE CONSTANT v každom opakovaní.

Avšak TIT-FOR-TAT duopolu s LUF bude analyzovať históriu hry v každom rozhodovacom bode, konkrétne práve predchádzajúce opakovanie, pričom pokiaľ konkurent v predchádzajúcom opakovaní zvolí nižšiu cenu, ako cenu, ktorá umožňuje, aby sa „relatívne“ jednotkové ceny produktov rovnali (teda nižšiu ako „dohodnutú“ cenu), potom TIT-FOR-TAT duopolu s LUF „trestá“ svojho protihráča nastavením ceny na úroveň NASTY CONSTANT v tomto rozhodovacom bode¹¹³.

¹¹¹ Čo je vlastne vyjadrenie neschopnosti stratégie NICE CONSTANT vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium.

¹¹² (Axelrod, 1984)

¹¹³ Toto je iba jedna z možných verzií TIT-FOR-TAT duopolu s LUF, keďže sa pohybujeme v spojitom priestore akcií hráčov, môžu existovať aj iné úrovne cien, ktoré TIT-FOR-TAT duopolu s LUF zvolí po „zrade“

TIT-FOR-TAT duopolu s LUF má však aj schopnosť „odpúšťať“, keďže analyzuje iba predchádzajúce kolo. Pokiaľ sa protihráč rozhodne po „zrazení“ TIT-FOR-TAT duopolu s LUF v niektorom z ďalších kôl vrátiť s cenou aspoň na úroveň stratégie NICE CONSTANT, potom TIT-FOR-TAT duopolu s LUF v nasledujúcom kole zvolí tiež úroveň ceny NICE CONSTANT¹¹⁴.

Pokiaľ proti sebe postavíme dvojicu stratégií TIT-FOR-TAT duopolu s LUF, potom ani jedna stratégia „nezradí“ tú druhú a navyše, pokiaľ niektorý z hráčov zistí, že hrá proti TIT-FOR-TAT duopolu s LUF, potom sa mu neoplatí v žiadnom opakovaní „zradiť“, pretože v ďalšom opakovaní očakáva „trest“ zo strany TIT-FOR-TAT duopolu s LUF a teda získavame vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium.

Stratégie TIT-FOR-TAT duopolu s LUF odstraňujú do určitej miery nereálnosť stratégií typu NICE CONSTANT v nereagovaní, v tom, že dokážu trestať svojho konkurenta za jednostranné vychýlenie sa, avšak dokážu aj odpúšťať, čo sa pri Axelrodových turnajoch ukázalo ako želaná vlastnosť stratégií, samozrejme pri diskretnom type opakovanej hry Vážňova dilemma¹¹⁵ a teda nie v našej situácii¹¹⁶.

Stratégie typu TIT-FOR-TAT duopolu s LUF sú však naďalej kartelovými stratégiami, preto v reálnom svete existujú bariéry na ich aplikáciu.

CRUEL

Iným typom stratégie s kartelovým potenciálom, teda stratégia, ktorá by mohla viesť k existencii trhu duopolu s LUF v dlhodobom horizonte, teda k situácii, kedy obaja producenti dosahujú kladné profity, je stratégia CRUEL, teda krutá stratégia na svojho konkurenta.

Ide o stratégiu, ktorá podobne ako TIT-FOR-TAT duopolu s LUF v prvom opakovaní zvolí cenu produktu na úrovni stratégie NICE CONSTANT a pokračuje v tom, pokiaľ ju jej konkurent „nezradí“ voľbou nižšej úrovne ceny. Keď sa to však stane, potom stratégia CRUEL bude už navždy stanovovať ceny na úrovni stratégie NASTY CONSTANT, teda stratégia CRUEL analyzuje v každom svojom rozhodovacom bode celú existujúcu históriu

protihráča. Táto cena bude nižšia ako pôvodná úroveň, ale nutne nemusí okamžite ísť až na úroveň svojich jednotkových variabilných nákladov.

¹¹⁴ Stratégia NICE COSNTANT tiež nedefinuje presne úroveň cien produktov, teda môže byť nekonečne veľa stratégií typu NICE CONSTANT, ktorá si však za podmienky kladie také úrovne cien konkurenčných produktov, aby obaja hráči produkovali (teda aby existoval dopyt po oboch produktoch) a aby obaja hráči predajom svojich produktov získajú pozitívny profit po odpočítaní fixných a variabilných nákladov.

¹¹⁵ (Axelrod, 1984)

¹¹⁶ Podobnosť úspešnosti TIT-FOR-TAT Vážňovej dilemy v simulovaných turnajoch a TIT-FOR-TAT duopolu s LUF by mohli overiť behaviorálne turnaje podobné tým Axelrodovým.

hry, a teda pokiaľ v nej vidí čo i len jednu „zradu“ konkurenta, potom zvolí úroveň ceny NASTY CONSTANT¹¹⁷.

Stratégie typu CRUEL dokážu vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium, pretože pokiaľ jej protihráč vie, že hrá proti tejto stratégii, nikdy ju „nezradí“, pretože potom by nasledoval „trest“ v podobe „zrád“ zo strany CRUEL navždy. Teda stratégia CRUEL je sama sebe najlepšou odpoveďou v nekonečnej opakovanej hre oligopolu s LUF, alebo opakovanej hre oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou a teda dokáže v nej vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium.

Opätovne by však išlo o kartel, ktorému organizátori trhov vytvárajú bariéry.

Sumár vzhľadom na podhry dokonalých ekvilibrií nekonečnej opakovanej hry duopolu s LUF, alebo opakovanej hry duopolu s LUF s neurčitou dĺžkou

Prirodzenou stratégiou, ktorá dokáže vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre duopolu s LUF, alebo opakovanej hre duopolu s LUF s neurčitou dĺžkou je stratégia NASTY CONSTANT.

Táto stratégia však definuje očakávaný výstup analogický so statickou hrou a teda výstup, ktorý vedie pre aspoň jedného hráča k negatívnemu profitu.

Existuje nekonečne veľa mutácii stratégii typu TIT-FOR-TAT duopolu s LUF a jej kombinácii s CRUEL, ktoré dokážu vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre duopolu s LUF, alebo opakovanej hre duopolu s LUF s neurčitou dĺžkou.

Vo všeobecnosti, pokiaľ majú stratégie vlastnosti „milá“, teda v prvom kole a vo všetkých nasledujúcich dokým ju „nezradia“ volí úroveň ceny stratégie NICE CONSTANT a „krutá“, teda že dokáže trestať okamžite po prvej „zrade“ protihráča, potom dokážu vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre duopolu s LUF, alebo opakovanej hre duopolu s LUF s neurčitou dĺžkou.

Nevýhodou týchto stratégií je fakt, že majú povahu kartelu, ktorý je neželaným efektom na reálnom trhu, pretože ten vedie k zvyšovaniu cien pre dopyt (populáciu) a preto sú v reálnom svete využívané bariéry, ktoré kartel obmedzujú (hoci nie vždy, no pri väčšine reálnych trhov).

¹¹⁷ Ide iba o jednu z možných verzií stratégie CRUEL, keďže sa pohybujeme v spojitom priestore akcií hráčov, môžu existovať aj iné úrovne cien, ktoré CRUEL zvolí po „zrade“ protihráča, nižšie ako pôvodná „dohodnutá“ úroveň, ale nutne nemusí okamžite ísť až na úroveň svojich jednotkových variabilných nákladov.

Navyše reálne trhy sú skôr opakovanými hrami s neurčitou dĺžkou a nie nekonečnými opakovanými hrami, pretože je pravdepodobné, že producenti na reálnom trhu neočakávajú, že trh, na ktorom produkujú, bude existovať donekonečna, ale iba prisudzujú určitú pravdepodobnosť uskutočnenia ďalšieho opakovania.

A to sme ešte do našich analýz nezapojili diskontný faktor, ktorým môžu producenti znehodnocovať svoje príjmy z budúcnosti na úkor príjmov v súčasnosti. Pokiaľ povolíme existenciu finančného trhu, potom producenti môžu byť motivovaní voliť svoje akcie v blízkych kolách tak, aby získali čo najviac, pretože dnešný zisk môžu investovať a tým kompenzovať svoje budúce straty, respektíve zníženia profitu.

Ak by teda producenti prisudzovali nízku pravdepodobnosť uskutočnenia budúcich opakovaní, prípadne by finančný trh poskytoval vysoký úrok pri investícii, potom by producenti boli motivovaní „zradiť“, napriek tomu, že by v nekonečnej hre bez diskontného faktora pokračovali v hraní stratégie, ktorá im zaručuje vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium s kladným profitom pre všetkých producentov.

V prípade opakovanej hry s neurčitou dĺžkou, prípadne nekonečnej opakovanej hry s diskontným faktorom, alebo ich kombinácie, potom záleží na úrovni týchto faktorov, pričom pokiaľ ich efekt rastie, potom klesá vôľa hráčov zostať vo svojej „milej“ stratégii, až sa môže táto vôľa kooperovať vytratiť, pokiaľ profit z aktuálnej „zrady“ prevýši súčasnú hodnotu očakávaných profitov z budúcich opakovaní.

Jediná stratégia v hre duopolu s LUF s neurčitou dĺžkou, alebo v nekonečnej opakovanej hre duopolu s LUF s diskontným faktorom, alebo v ich kombinácii, ktorá je imúnna voči týmto faktorom je stratégia NASTY CONSTANT, ktorá volí akcie, ktoré zodpovedajú ekvilibriu statickej hry duopolu s LUF a teda neželanému výstupu v porovnaní s realitou.

Výstupy a pozorovania z opakovaného duopolu s LUF

Pri analýze opakovaného duopolu s LUF sme využili pojmy a poznatky teórie hier.

Duopol s LUF s konečným počtom opakovaní viedol k rovnakému výstupu, ako statická hra duopolu s LUF, teda k ekvilibriu v ktorom aspoň jeden producent dosahoval negatívny profit, čo v dlhodobom horizonte štandardne nesúhlasí s realitou.

Pri duopole s LUF s nekonečným alebo neurčitým počtom opakovaní sme dokázali identifikovať stratégie producentov v oblasti cien, ktoré by mohli viesť k dlhodobej existencii trhu M (duopolu s LUF), teda ku kladnému profitu oboch producentov, avšak tieto stratégie

mali povahu kartelu, čo je neželaný jav na reálnom trhu z pohľadu jeho organizátora, ktorým je štandardne štát, alebo iná organizácia, ktorá má na zreteli blaho dopytu (populácie) a teda pretože kartel spôsobuje zvyšovanie cien na akomkoľvek trhu, organizátor trhu štandardne vytvára bariéry na vznik kartelu a preto tieto stratégie nie sú vo všeobecnosti použiteľné v realite.

Navyše sme ukázali, že na existenciu rovnovážneho stavu na trhu – ekvilibria, ktoré vedie ku kladnému profitu oboch producentov vplýva aj pravdepodobnosť, s akou producenti očakávajú uskutočnenie nasledujúcich opakovaní trhu M a tiež diskontný faktor. Oba tieto faktory znižujú vôľu producentov zotrvať v stratégii zabezpečujúcej ekvilibrium, v ktorom obaja získavajú kladný profit, dokonca pokiaľ výška vplyvu týchto faktorov dosiahne určitú úroveň (ktorá znehodnotí očakávané budúce profity natoľko, že ich prevýšia potencionálne profity z aktuálneho opakovania), racionálni producenti maximalizujúci svoj profit sa vychýlia zo svojej stratégie v smere k pôvodnému ekvilibriu statickej hry duopolu s LUF, čo opätovne vedie k negatívnemu profitu pre aspoň jedného producenta a teda k výsledku, ktorý je málo pravdepodobný z dlhodobého hľadiska v realite.

Jedinou imúnnou stratégiou voči malým pravdepodobnostiam uskutočnenia nasledujúcich opakovaní a vysokým úrovniám diskontného faktora, ktorá zaručovala ekvilibrium v duopole s LUF s nekonečným alebo neurčitým počtom opakovaní, bola stratégia, ktorá definovala v každom opakovaní voľbu ceny producentov na úrovni statickej hry duopolu s LUF, teda stratégia, ktorá prináša negatívny profit pre aspoň jedného producenta.

1.2 Oligopol s lineárnou úžitkovou funkciou

Oligopol je jedna z najčastejších foriem konkurencie na trhu. Je to situácia, v ktorej viac ako dvaja konkurenční producenti produkujú viac ako dva produkty, ktoré uspokojujú konkrétnu potrebu dopytu (populácie) a tieto produkty sú jedinými produktami, ktoré dokážu túto potrebu dopytu uspokojiť. Inými slovami nazývame tieto produkty substitútmi a pokiaľ tieto viac ako dva substitúty sú jediné produkty, ktoré dokážu uspokojiť konkrétnu potrebu dopytu, potom trh týchto produktov nazývame oligopol.

Podobne ako pri duopole, dopyt má limitované zdroje, ktoré mína na trhu oligopolu. Producenti na trhu oligopolu teda súťažia o limitovaný dopyt. Táto súťaž je zvyčajne vedená cenou produktov, pretože dopyt tvorí svoje rozhodnutia o spotrebe na základe cien jednotlivých produktov.

Prirodzene očakávame, že spotreba niektorého z produktov poklesne, pokiaľ jeho cena vzrastie, pretože si dopyt môže dovoliť menej daného produktu za svoje obmedzené zdroje, prípadne bude dopyt zvyšovať spotrebu relatívne zlacnených konkurenčných produktov.

Naopak, pokiaľ cena niektorého z produktov poklesne, potom prirodzene očakávame nárast spotreby daného produktu, pretože si dopyt bude môcť dovoliť kúpiť viac daného produktu za svoje obmedzené zdroje, prípadne dopyt zníži spotrebu relatívne zdražených konkurenčných produktov.

Navyše je racionálne očakávať, že spotreba všetkých produktov v oligopole (respektíve celková spotreba produktov na trhu oligopolu) poklesne, pokiaľ všetky produkty zdražiajú a naopak.¹¹⁸

Podobne ako pri duopole, budeme používať pojmy rozpočet dopytu, rozpočtová hranica a spotrebné koše.^{119 120}

Opäť podobne ako pri duopole, budeme vyjadrovať preferencie spotrebiteľa pomocou úžitkovej funkcie, teda funkcie, ktorá priradí číselnú hodnotu každému spotrebnému košu tak, aby zachovala poradie preferencií dopytu medzi všetkými spotrebnými košmi.

Za preferencie budeme opäť považovať vyjadrenia názoru spotrebiteľa (alebo celého dopytu), ktorý spotrebný kôš preferuje, keď porovnáva akékoľvek dva spotrebné koše.^{121 122}

¹¹⁸ Tento predpoklad o dopyte sa nazýva aj Zákon dopytu (Amir, Erickson, Jin, 2015).

¹¹⁹ (Varian, 1995)

¹²⁰ (Varian, 1992)

¹²¹ (Varian, 1995)

¹²² (Varian, 1992)

Keď zadefinujeme úžitkovú funkciu na trhu oligopolu a rozpočtovú hranicu dopytu, potom sme schopný odvodiť dopytovú funkciu po jednotlivých produktoch v závislosti od ich cien, ako maximalizáciu úžitku pre dopyt (maximalizáciu úžitkovej funkcie) na rozpočtovej hranici.

Keďže má práca ambíciu aplikácie v reálnom svete, všetky číselné parametre a výstupy, ktoré budeme používať, budú z množiny reálnych čísiel.

1.2.1 Lineárna úžitková funkcia (LUF) na trhu oligopolu

Uvažujme $N \in \mathbb{N}$ konkurenčných producentov a označme množinu týchto producentov $I = \{1, 2, \dots, N\}$, ktorí produkujú $N \in \mathbb{N}$ substitučných produktov, pričom platí, že každý producent produkuje práve jeden produkt a zároveň označme množinu týchto produktov rovnako $I = \{1, 2, \dots, N\}$, pričom platí, že producent $i \in I$ vyrába práve produkt $i \in I$, $\forall i \in I$. Predpokladajme, že týchto N produktov sú jediné produkty, ktoré dokážu uspokojiť nejakú konkrétnu potrebu dopytu.

Nazvime túto konkrétnu potrebu dopytu, spotrebu predmetných produktov a produkciu týchto produktov trhom M , podobne ako pri duopole.

Nech $x_i \geq 0$ je počet jednotiek produktu $i \in I$, nech $f_i > 0$ ¹²³ sú fixné náklady producenta $i \in I$, nech $c_i > 0$ ¹²⁴ sú variabilné náklady producenta $i \in I$ na jednotku produktu i a nech $p_i \geq 0$ je jednotková cena produktu $i \in I$.

Predpokladajme, že sa producenti zaujímajú iba o maximalizáciu ich profitu a nech profit je definovaný ako $\pi_i = p_i x_i - f_i - c_i x_i$ pre všetkých producentov $i \in I$.

Vidíme, že pre akékoľvek dané x_i , f_i and c_i profit producenta i , $\pi_i \geq -f_i \Leftrightarrow p_i \geq c_i$.

Ak $p_i < c_i$, tak pre akékoľvek dané $x_i > 0$, $f_i, c_i > 0$ profit producenta i $\pi_i < -f_i$, čiže je racionálne predpokladať $p_i \geq c_i$, $\forall i \in I$.

Dovoľme zjemniť predpoklad, že producenti sa zaujímajú iba o maximalizáciu ich profitu v prípade, keď $p_i = c_i$ pre ľubovoľné $i \in I$. V takom prípade predpokladajme, že producent $i \in I$ bude produkovať dopytom požadované množstvo produktu $i \in I$, napriek tomu, že pri

¹²³ Toto je relatívne prirodzená požiadavka, pretože štandardne majú producenti aspoň minimálne fixné náklady, pokiaľ chcú produkovať.

¹²⁴ Toto je racionálna požiadavka, pretože pokiaľ by boli pre niektorého producenta variabilné náklady na jednotku produktu rovné nule, potom by mohol producent stanoviť cenu produktu na nulovej úrovni, čo by viedlo k nekonečnej spotrebe tohto produktu a trh M by zanikol.

zachovaní požiadavky by bol producent indiferentný medzi produkovaním a neprodukovaním.¹²⁵

Uvažujme a označme celkové finančné zdroje dopytu $I_T > 0$.

Nech $x_0 \geq 0$ je počet jednotiek všetkých ostatných produktov mimo trhu M, ktoré napĺňajú akúkoľvek inú potrebu dopytu, nech sú jednotky x_0 ekvivalentné k jednotkám x_i , $i \in I$.

Nech $p_0 \geq 0$ je cena jednotky x_0 a teda môžeme tvrdiť, že p_0 je vážený priemer cien produktov mimo trh M, v zmysle ekvivalentných jednotiek trhu M.

Predpokladajme, že p_0 a x_0 nereagujú na situáciu na trhu M, teda z pohľadu trhu M ide o konštanty.

To znamená, že súčin $p_0 \cdot x_0$ definuje finančné zdroje, ktoré dopyt míňa mimo trh M.

To znamená, že rozdiel $I_T - p_0 x_0 = I_M$ definuje finančné zdroje, ktoré dopyt míňa na trhu M a požadujeme $I_M > 0$, čo znamená $p_0 x_0 < I_T$.

Keďže považujeme produkty na trhu M za substitúty, predpokladajme, že sú dokonalé substitúty, teda predpokladajme, že úžitková funkcia dopytu na trhu M je lineárna¹²⁶:

$$U_L(x_1, x_2, \dots, x_N) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_N x_N + D x_0, \\ \text{s rozpočtovým obmedzením } I_M = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_N x_N, \quad (1.2.1.1)$$

za podmienok

$$A_i > 0, D > 0, x_i \geq 0, c_i > 0, p_i \geq c_i, x_0 \geq 0, p_0 \geq 0, I_T > 0, I_M = I_T - p_0 x_0 > 0 \quad \forall i \in I,$$

¹²⁵ V prípade, keď $p_i = c_i$, $i \in I$, môžeme predpokladať, že napriek tomu, že je producent $i \in I$ indiferentný medzi produkovaním a neprodukovaním v zmysle jeho profitu π_i , producent $i \in I$ môže preferovať produkciu, pretože toto rozhodnutie producenta môže zachovať prax jeho pracovnej sily. V opačnom prípade pracovná sila producenta môže stratiť svoju prax, čo môže byť nákladnejšie pre producenta, pokiaľ by sa producent vrátil do produkcie pri výhodnejších podmienkach na trhu M. Tento slabý predpoklad môže byť podporený predpokladom, že variabilné náklady c_i obsahujú všetky variabilné náklady producenta pri produkcii jednotky produktu i , vrátane údržby a opráv plynúcich z opotrebenia spôsobeného produkciou produktu i .

¹²⁶ V ekonomickej literatúre, napríklad (Nechyba, 2010) sa úžitková funkcia dokonalých substitútov v duopole často vyjadruje ako lineárna funkcia $U_L = x_1 + x_2$. V tomto prípade ide o rozšírenie duopolu na úroveň oligopolu.

Dodaním koeficientov atraktivity produktov A_i umožňujeme nazerať na situáciu vo väčšej všeobecnosti, analyzovať zmeny na trhu M pri zmene atraktivity produktov na trhu M.

Doplnenie komponentu $D x_0$ nevedie k zmene pri výpočte výstupov trhu M, pokiaľ uvažujeme efektívny oligopol na trhu M. Avšak komponent $D x_0$ nám môže umožniť analýzu situácie (za určitých predpokladov), keď sa efektívny oligopol z trhu M vytratí, keď napríklad niektorý z producentov získa na trhu M monopolné postavenie.

kde $A_i > 0^{127}$ je atraktivita produktu $i \in I$ z pohľadu dopytu, $D > 0^{128}$ je atraktivita produktov mimo trh M a $I_M = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_Nx_N$ je rozpočtová hranica dopytu na trhu M.

Koeficient atraktivity A_i vyjadruje akúkoľvek atraktivitu ako napríklad kvalita, marketing, alebo dostupnosť a známosť produktu $i \in I$ v jednom koeficiente.

Predpoklad, že produkty na trhu M sú dokonalé substitúty znamená, že hoci by ich atraktivity z pohľadu dopytu neboli rovnaké, určité množstvo ľubovoľného produktu $i \in I$ má z pohľadu dopytu rovnaký úžitok, ako určité množstvo ľubovoľného iného produktu $j \in I$, čo platí $\forall i, j \in I$.

1.2.2 Dopytové funkcie na trhu oligopolu s LUF

Predpokladajme, že producenti sú schopní vyrábať akékoľvek dopytom požadované množstvo ich produktov. To znamená, že v našej analýze nebudú žiadne produkčné obmedzenia. Čiže producenti $i \in I$ môžu úplne slobodne stanovovať cenu $p_i \geq c_i, \forall i \in I$.

Odvodíme teraz dopytové funkcie po produktoch $i \in I, \forall i \in I$ pomocou maximalizácie úžitkovej funkcie dopytu za podmienky rozpočtovej hranice. Využijeme na to Lagrangeovu metódu neurčitých koeficientov pre hľadanie lokálneho extrému (maxima) funkcie s rovnostným obmedzením¹²⁹. Lagrangeova funkcia pre lineárnu úžitkovú funkciu (1.2.1.1) je

$$\mathcal{L}_L(x_1, x_2, \dots, x_N, \lambda) = A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_Nx_N + Dx_0 + \lambda[I_M - p_1x_1 - p_2x_2 - \dots - p_Nx_N], \quad (1.2.2.1)$$

kde λ je Lagrangeov multiplikátor.

Lagrangeova metóda definuje $N + 1$ podmienok pre lokálny extrém, ktoré musia byť splnené súčasne:

$$\frac{d\mathcal{L}_L}{dx_1} = A_1 - \lambda p_1 = 0, \quad (1.2.2.2.1)$$

¹²⁷ Budeme požadovať, aby atraktivity produktov boli väčšie ako 0, pretože v prípade, keď je atraktivita niektorého z produktov nulová, potom tento produkt už nepatrí do trhu M. V jednom špeciálnom prípade umožníme atraktivite niektorého z produktov, aby bol rovný 0, ale to bude iba v prípade, keď niektorý z produktov stratí svoju atraktivitu na trhu M (napríklad v prípade diferenciacie konkurenčného produktu, k čomu by viedli významné investície do kvality produktu zo strany konkurenta), čo by znamenalo zmenu trhu M z oligopolu na monopol.

¹²⁸ Budeme požadovať, aby atraktivita produktov mimo trh M bola väčšia ako 0, pretože v opačnom prípade by trh M bol trhom všetkých potrieb dopytu.

¹²⁹ (Dixit, 1990)

$$\frac{d\mathcal{L}_L}{dx_2} = A_2 - \lambda p_2 = 0, \quad (1.2.2.2.2)$$

...

$$\frac{d\mathcal{L}_L}{dx_N} = A_N - \lambda p_N = 0, \quad (1.2.2.2.N)$$

$$\frac{d\mathcal{L}_L}{d\lambda} = I_M - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \dots - p_N x_N = 0. \quad (1.1.2.2.N+1)$$

Pokiaľ budeme najprv uvažovať iba prvých N podmienok, teda (1.2.2.2.1), (1.2.2.2.2), ...,

(1.2.2.2.N), potom dostaneme $\binom{N}{2}$, alebo $\frac{N!}{2(N-2)!}$ podmienok, ktoré môžeme definovať

zápisom cez ľubovoľné $i, j \in I$ také, že $i \neq j$:

$$p_i = \frac{A_i}{A_j} p_j, i \neq j, \forall i, j \in I \quad (1.2.2.3)$$

Podmienke (1.2.2.3) môžeme rozumieť tak, že dopyt bude deliť svoju spotrebu na trhu M medzi všetky produkty na trhu M v zmysle $x_i > 0 \forall i \in I \Leftrightarrow (1.2.2.3)$.

Zároveň podmienke (1.2.2.3) môžeme rozumieť tak, že pokiaľ pre niektorý z produktov $i \in I$ a ľubovoľný iný produkt $j \in I, j \neq i$ platí $p_i > \frac{A_i}{A_j} p_j$, potom dopyt po produkte i bude nulový, teda $x_i = 0$.

Ďalší výstup z podmienky (1.2.2.3) je, že pokiaľ pre niektorý z produktov $i \in I$ a pre každý iný produkt $j \in I, j \neq i$ platí $p_i < \frac{A_i}{A_j} p_j \forall j \in I$, také, že $j \neq i$, potom dopyt použije svoje finančné zdroje alokované na trh M iba na produkt i , teda $x_i = \frac{I_M}{p_i}$ a $\forall j \in I$, také, že $j \neq i$ bude platiť $x_j = 0$.

Navyše z podmienky (1.2.2.3) vyplýva, že pokiaľ existuje viacero produktov $k \in I$ takých, pre ktoré platí $\frac{p_k}{A_k} = \min_{i \in I} \frac{p_i}{A_i}$, potom tieto produkty $k \in I$ tvoria podmnožinu $K \subset I$ takých produktov na trhu M, pre ktoré platí $x_k > 0 \forall k \in K$ a súčasne pre všetky ostatné produkty $j \in I$, ktoré nepatria do množiny K , teda pre ktoré platí $\frac{p_j}{A_j} \neq \min_{i \in I} \frac{p_i}{A_i}$, teda $\frac{p_j}{A_j} > \min_{i \in I} \frac{p_i}{A_i}$ tvoria podmnožinu $J = I - K \subset I$ takých produktov $j \in J$ na trhu M, pre ktoré platí $x_j = 0 \forall j \in J = I - K$.

Z predchádzajúcich úvah a z Lagrangeovej metódy pre hľadanie lokálneho extrému dostaneme dopytové funkcie $\forall i \in I$:

$$x_i(p_1, p_2, \dots, p_N) = \begin{cases} 0 & \text{ak } \frac{p_i}{A_i} > \min_{j \in I} \frac{p_j}{A_j} \\ \frac{I_M}{|K|p_i} = \frac{I_M}{|K|A_i \min_{j \in I} \frac{p_j}{A_j}} & \text{ak } \frac{p_i}{A_i} = \min_{j \in I} \frac{p_j}{A_j}, \text{ kde } K \subset I \text{ a } \forall k \in K: \frac{p_k}{A_k} = \min_{j \in I} \frac{p_j}{A_j} \end{cases} \quad (1.2.2.4)$$

Všimnime si, že dopytové funkcie duopolu (1.1.2.6) a (1.1.2.7) sú špeciálnym prípadom dopytovej funkcie oligopolu (1.2.2.4) pre $N = 2$, pričom posledné 2 vetvy dopytových funkcií duopolu (1.1.2.6) a (1.1.2.7) sú analogické s poslednou vetvou (1.2.2.4).

1.2.3 Funkcie najlepšej odpovede na trhu oligopolu s LUF

Predpokladajme, že producenti na trhu M sú racionálni a že ich jedinou motiváciou je maximalizácia ich zisku, s jedným zjemnením tohto predpokladu, ktoré bolo uvedené pri definovaní lineárnej úžitkovej funkcie oligopolu a teda, že producenti budú produkovať akékoľvek požadované množstvo dopytom..

Doplňme ešte ďalší predpoklad, že všetci producenti na trhu M majú úplnú informáciu o hodnotách $A_i, D, I_M, f_i, c_i \forall i \in I$, čiže všetci poznajú (1.2.2.4) $\forall i \in I$ a že dokážu pozorovať $p_i \forall i \in I$.

Pozrime sa na problém maximalizácie profitu producenta $i \forall i \in I$, čo znamená $\forall i \in I$:

$$\max \pi_i(p_i) = p_i x_i - f_i - c_i x_i. \quad (1.2.3.1)$$

Ak pre ľubovoľného producenta $i \in I$ zafixujeme ceny všetkých ostatných produktov $j \in I$ na trhu M, takých, že $j \neq i$, potom:

1. ak $\frac{c_i}{A_i} > \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j^{fix}}{A_j}$, potom z (1.2.2.4), (1.2.3.1), podmienky $p_i \geq c_i, \forall i \in I$

a predpokladu, že $\forall i \in I$: ak $p_i = c_i$, potom producent $i \in I$ produkuje trhom M požadované množstvo svojho produktu $i \in I$, vyplýva, že producent $i \in I$ stanoví jednotkovú cenu svojho produktu $p_i = c_i$, čo vedie k $x_i = 0$ a $\pi_i = -f_i$, čo je jeho minimálny profit.

2. ak $\frac{c_i}{A_i} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j^{fix}}{A_j}$, potom z (1.2.2.4), (1.2.3.1), podmienky $p_i \geq c_i, \forall i \in I$

a predpokladu, že $\forall i \in I$: ak $p_i = c_i$, potom producent $i \in I$ produkuje trhom M požadované množstvo svojho produktu $i \in I$, vyplýva, že producent $i \in I$ stanoví

jednotkovú cenu svojho produktu $p_i = c_i = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j^{fix}}{A_j}$, čo vedie k $x_i = \frac{I_M}{|K|c_i}$, kde

$K \subset I$ a $\forall k \in K: \frac{p_k}{A_k} = \min_{j \in I} \frac{p_j}{A_j}$ a $\pi_i = -f_i$, čo je jeho minimálny profit.

3. ak $\frac{c_i}{A_i} < \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j^{fix}}{A_j}$, potom z (1.2.2.4), (1.2.3.1), podmienky $p_i \geq c_i, \forall i \in I$

a z porovnania, kedy je $\pi_i^L > \pi_i^*$, kde $\pi_i^L = p_i^L x_i^L - f_i - c_i x_i^L$ a $\pi_i^* = p_i^* x_i^* - f_i - c_i x_i^*$,

kde $p_i^L = p_i^* - \Delta_i, \Delta_i > 0, p_i^* = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j^{fix}}{A_j}, x_i^L = x_i(p_i^L, \mathbf{p}_j^{FIX})$ a $x_i^* = x_i(p_i^*, \mathbf{p}_j^{FIX})$ z

(1.2.2.4), kde $\mathbf{p}_j^{FIX}$ je vektor $N - 1$ fixovaných cien produktov $j \in I$ takých, že $j \neq i$,

vyplýva, že producent $i \in I$ stanoví jednotkovú cenu svojho produktu $p_i =$

$$A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j^{fix}}{A_j} - \Delta_i, \Delta_i > 0 \wedge \Delta_i < \frac{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j^{fix}}{A_j} \left(A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j^{fix}}{A_j} - c_1 \right)}{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j^{fix}}{A_j} + c_1}, \text{ čo vedie k } x_i =$$

$$\frac{I_M}{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j^{fix}}{A_j} - \Delta_i} \text{ a k } \pi_i = I_M \left(\frac{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j^{fix}}{A_j} - \Delta_i - c_i}{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j^{fix}}{A_j} - \Delta_i} \right) - f_i \text{ a pretože } A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j^{fix}}{A_j} - \Delta_i > c_i >$$

$0, \pi_i > -f_i$ a teda producent i dosahuje vyšší, ako minimálny profit.¹³⁰

Z vyššie uvedeného odvodíme funkciu najlepšej odpovede pre všetkých producentov, teda $\forall i \in I$:

$$p_i(\mathbf{p}_j) = \begin{cases} c_i & \text{ak } \frac{c_i}{A_i} > \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j}{A_j} \\ c_i = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j}{A_j} & \text{ak } \frac{c_i}{A_i} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j}{A_j} \\ A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j}{A_j} - \Delta_i, \Delta_i > 0 \wedge \Delta_i < \frac{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j}{A_j} \left(A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j}{A_j} - c_1 \right)}{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j}{A_j} + c_1} & \text{ak } \frac{c_i}{A_i} < \min_{j \in I, j \neq i} \frac{p_j}{A_j} \end{cases}, \quad (1.2.3.2)$$

kde $\mathbf{p}_j$ je vektor $N - 1$ cien produktov $j \in I$ takých, že $j \neq i$.

1.2.4 Uvažovanie producentov – cesta k ekvilibriu na trhu oligopolu s LUF

V predchádzajúcich úvahách sme považovali $p_j \forall j \in I, j \neq i$ z pohľadu producenta $i \in I$ ako dané. Toto prirodzene nie je pravda, pretože všetci producenti sa snažia maximalizovať svoj profit súčasne, teda súčasne stanovujú ceny, čo im teda nedovoľuje pozorovať cenu ich konkurentov a až následne spraviť rozhodnutie o cene vlastného produktu¹³¹.

Avšak podobne ako sme predpokladali pri duopole, producenti môžu predpokladať rozhodnutia svojich konkurentov. Predpokladáme, že producenti sú racionálni a že všetky

¹³⁰ Uvedené je analogické k úvahám o funkcii najlepšej odpovedi producenta v duopole.

¹³¹ V reálnom svete ceny konkurenčných produktov nie sú pre producenta známe až do momentu realizácie trhu M.

informácie sú úplne známe každému z producentov. Na rozdiel od duopolu pri oligopole má však producent viacero konkurentov, teda nepredpokladá rozhodnutia iba jedného konkurenta, ale viacerých. No keďže je daný producent úplne informovaný o všetkých A_i a $c_i \forall i \in I$, potom dokáže identifikovať takého konkurenta, alebo konkurentov $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K$:

$$\frac{p_k}{A_k} = \min_{j \in I} \frac{p_j}{A_j}.$$

Napriek tomu, že by sme pri analýze uvažovania producentov mali postupovať tak, že by sme pri rozhodovaní konkrétneho producenta mali brať do úvahy rozhodnutia všetkých jeho konkurentov, racionálny producent môže svoje uvažovanie zúžiť iba na rozhodovania producentov $k \in K$, pretože môže racionálne predpokladať, že práve tí majú potenciál stanoviť najnižšiu cenu na trhu oligopolu s LUF, keďže pozná (1.2.3.2) $\forall i \in I$.

V takom prípade sa problém uvažovania producentov zúžuje na porovnávanie vlastného $\frac{c_i}{A_i}$ $\forall i \in I$ s jedinou konkurenčnou hodnotou $\min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, pričom toto porovnávanie je analogické s doupolným porovnávaním „relatívnych“ variabilných nákladov z pohľadu konkrétneho producenta na trhu duopolu s LUF.

Avšak pri duopole s LUF sme dokázali, že producent s „relatívne vyššími“ alebo s „relatívne rovnakými“ jednotkovými variabilnými nákladmi stanoví jednotkovú cenu svojho produktu vždy na úroveň svojich jednotkových variabilných nákladov.

Z toho vyplýva, že pokiaľ má ľubovoľný producent $i \in I$ na trhu oligopolu s LUF „relatívne vyššie“, alebo „relatívne rovnaké“ jednotkové variabilné náklady ako jeho ľubovoľný konkurent $k \in I$, ktorý dosahuje $\frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, potom producent i stanoví $p_i = c_i$ a úroveň jeho produkcie je závislá od toho, či má „relatívne vyššie“ jednotkové variabilné náklady ako konkurent (konkurenti) k , pre ktorých platí $\frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, kedy $x_i = 0$, alebo „relatívne rovnaké“ jednotkové variabilné náklady ako konkurent (konkurenti) k , pre ktorých platí $\frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, kedy $x_i = \frac{I_M}{|K|c_i}$. V oboch prípadoch však producent i dosahuje $\pi_i = -f_i$. V prípade, že má ľubovoľný producent $i \in I$ na trhu oligopolu s LUF „relatívne nižšie“ jednotkové variabilné náklady ako jeho ľubovoľný konkurent $k \in I$, ktorý dosahuje $\frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, potom producent i stanovuje jednotkovú cenu svojho produktu $p_i = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} - \Delta_i, \Delta_i > 0 \wedge \Delta_i <$

$$\frac{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} \left(A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} - c_1 \right)}{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} + c_1}, \text{ čo znamená, že získa celý dopyt trhu } M, \text{ teda } x_i = \frac{I_M}{p_i} = \frac{I_M}{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} - \Delta_i},$$

čo vedie k $\pi_i = I_M \left(\frac{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} - \Delta_i - c_i}{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} - \Delta_i} \right) - f_i > -f_i$, teda získa väčší ako minimálny profit.

Dôkaz je analogický k dôkazu ekvilibria na trhu duopolu s LUF.

1.2.5 Ekvilibrium na trhu oligopolu s lineárnou úžitkovou funkciou

Z prechádzajúcej časti vyplýva, že trh oligopolu s LUF má tri možné ekvilibriá z pohľadu konkrétneho producenta $i \in I$:

1. Ak má niektorý producent $i \in I$ „relatívne nižšie“ jednotkové variabilné náklady ako ktorýkoľvek jeho konkurent $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K: \frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, teda $c_i < A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, potom ekvilibrium, alebo aj výstup trhu M (oligopolu s LUF) bude $p_i = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} - \Delta_i, \Delta_i > 0 \wedge \Delta_i < \frac{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} \left(A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} - c_1 \right)}{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} + c_1}$, $p_j = c_j \forall j \in I, j \neq i$.
2. Ak má niektorý producent $i \in I$ „relatívne rovnaké“ jednotkové variabilné náklady ako ktorýkoľvek jeho konkurent $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K: \frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, teda $c_i = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, potom ekvilibrium, alebo aj výstup trhu M (oligopolu s LUF) bude $p_i = c_i = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, $p_k = c_k = A_k \min_{j \in I, j \neq k} \frac{c_j}{A_j} \forall k \in K$ a $p_j = c_j \forall j \in I - K - \{i\}$.
3. Ak má niektorý producent $i \in I$ „relatívne vyššie“ jednotkové variabilné náklady ako ktorýkoľvek jeho konkurent $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K: \frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, teda $c_i > A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, potom ekvilibrium, alebo aj výstup trhu M (oligopolu s LUF) bude $p_i = c_i, p_k = c_k = A_k \min_{j \in I, j \neq k} \frac{c_j}{A_j} \forall k \in K$ a $p_j = c_j \forall j \in I - K - \{i\}$.

Poznámka o funkcii najlepšej odpovede producenta s „relatívne najnižšími“ jednotkovými variabilnými nákladmi na trhu M oligopolu

Ak existuje jediný producent $i \in I$, pre ktorého platí $\frac{c_i}{A_i} = \min_{j \in I} \frac{c_j}{A_j}$, potom tento producent je jediný, ktorý produkuje a získal celý dopyt na trhu oligopolu s LUF.

Pre tohto producenta i sme v takom prípade definovali, že zvolí cenu $p_i = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} -$

$$\Delta_i, \Delta_i > 0 \wedge \Delta_i < \frac{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} \left(A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} - c_1 \right)}{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} + c_1}, \text{ čo je však množina nekonečne veľa možných cien,}$$

pričom je želané pre tohto producenta zvoliť jediné, keďže to musí v reálnom svete spraviť.

Avšak analogickými úvahami ako v „Poznámka o funkcii najlepšej odpovede producenta s „relatívne nižšími“ jednotkovými variabilnými nákladmi“ v prípade duopolu s LUF dôjdeme k rovnakému záveru, že to nie je možné, pokiaľ neobmedzíme možnosť voľby ceny na určitú diskretnú stupnicu (napríklad jednotky ceny v zmysle prirodzených čísiel, alebo v zmysle deliteľnosti iba na úrovni stotín jednotiek, čo býva štandardné definovanie meny).

Avšak aj pri oligopole sa uspokojíme s predpokladom, že producent $i \in I$, ktorý jediný dosahuje $\frac{c_i}{A_i} = \min_{j \in I} \frac{c_j}{A_j}$ volí svoju $\Delta_i > 0$ tak, že je veľmi malá, veľmi blízko k 0, pričom bude

$$\text{stále spĺňať } \Delta_i < \frac{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} \left(A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} - c_1 \right)}{A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} + c_1}, \text{ teda cena } p_i \text{ bude nižšia ako } A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}, \text{ avšak}$$

veľmi blízko k danému tak, aby jej najmenšie možné zvýšenie znamenalo dorovnanie $p_i = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$.

Dôkaz ekvilibria na trhu oligopolu s LUF využitím teórie hier

V časti 1.2.4 Uvažovanie producentov – cesta k ekvilibriu na trhu oligopolu s LUF sme dokázali, že uvažovanie producentov na trhu oligopolu s LUF vedie k dvom typom rovnovážnych stavov – ekvilibrií, z ktorých sa žiadnemu producentovi neoplatí jednostranne vychýliť a ktoré sú podmienené vzťahom „relatívnych“ jednotkových variabilných nákladov producentov.

V tejto časti ukážeme, že dané ekvilibriá (teda optimálne úrovne cien oboch producentov vzhľadom na voľbu konkurencie) je možné identifikovať pomocou teórie hier.

Opätovne ako pri duopole s LUF využijeme v tejto časti pre oligopol s LUF pojmy a poznatky teórie hier, pričom ich uvádzame v Poznámke o pojmoch z teórie hier v časti Dôkaz ekvilibria na trhu duopolu s LUF využitím teórie hier.

Oligopol s LUF ako hra

Zadefinujme si teraz situáciu trhu M ako oligopolu s LUF terminológiou teórie hier. Keďže sme analyzovali jednorazovú interakciu producentov na trhu M a ich simultánne nastavovanie cien, ide v tomto prípade o statickú hru.

Racionálni producenti na trhu M sú hráči tvoriaci množinu $I = \{1, 2, \dots, N\}$, pričom množina čistých stratégií každého hráča $i \in I$ je množina $\langle c_i, \infty \rangle$, ktorá definuje možnosť voľby p_i . Keďže ide o statickú hru, množina čistých stratégií je zároveň aj množinou čistých akcií hráča v statickej hre.

Keďže má práca ambíciu aplikovateľnosti v reálnom svete, budeme sa zaoberať iba čistými stratégiami hráčov, teda nebudeme uvažovať možnosť rozdelenia pravdepodobnosti výberu hráčov nad množinou ich čistých stratégií.

Funkcie výplat hráčov na trhu M sú definované ako ich profit, teda $\pi_i = p_i x_i - f_i - c_i x_i \forall i \in I$, avšak s predpokladom, že hráči preferujú produkciu pre neprodukovaním, pokiaľ sú z hľadiska profitu indiferentný v tomto rozhodovaní.¹³²

V úvahách o oligopole s LUF sme predpokladali úplnú informáciu o všetkých aspektoch trhu, preto ide o hru s úplnou informáciou.

V predchádzajúcich úvahách sme definovali aj reakčné funkcie hráčov, ktoré sme nazvali funkcie najlepšej odpovede a označili sme ich (1.2.3.2) $\forall i \in I$. Prirodzene (1.2.3.2) $\forall i \in I$ spĺňa predpoklady reakčnej funkcie, pretože priradzuje konkrétnu stratégiu hráča pre akýkoľvek profil stratégií ostatných hráčov v hre tak, že je táto stratégia najlepšou reakciou v zmysle jeho výplaty.

Aby sme boli schopný identifikovať ekvilibriá, rozdeľme teraz hru oligopolu s LUF na tri hry na základe možných situácií hráča $i \in I$, v ktorých sa môže nachádzať. Tieto situácie sú definované porovnaním jeho jednotkových variabilných nákladov s „relatívnymi“

jednotkovými nákladmi všetkých konkurenčných hráčov. Identifikujeme hru oligopolu s LUF z pohľadu hráča i , ktorý má „relatívne nižšie“ jednotkové variabilné náklady ako ktorýkoľvek jeho konkurenčný hráč $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K$: $\frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, teda $c_i < A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$,

potom ak má „relatívne rovnaké“ jednotkové variabilné náklady ako ktorýkoľvek jeho konkurenčný hráč $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K$: $\frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, teda $c_i = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$

a nakoniec ak má „relatívne vyššie“ jednotkové variabilné náklady ako ktorýkoľvek jeho konkurenčný hráč $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K$: $\frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, teda $c_i > A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$.

¹³² Takto definovaná statická hra sa v terminológii teórie hier nazýva aj strategický tvar hry.

Oligopol s LUF z pohľadu hráča s „relatívne nižšími“ variabilnými nákladmi ako ktorýkoľvek iný hráč

Predpokladajme, že hráč $i \in I$ má „relatívne nižšie“ jednotkové variabilné náklady v hre oligopolu s LUF ako ktorýkoľvek jeho konkurenčný hráč $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K: \frac{c_k}{A_k} =$

$$\min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}, \text{ teda } c_i < A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}.$$

V Poznámke o funkcii najlepšej odpovede producenta s „relatívne nižšími“ jednotkovými variabilnými nákladmi na trhu M oligopolu sme definovali, že optimálna voľba producenta

$i \in I$, pokiaľ pre neho platí $c_i < A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$ je voľba najväčšieho možného $p_i^* =$

$$A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} - \Delta_i, \Delta_i > 0, \text{ teda najmenšieho možného } \Delta_i > 0. \text{ Toto determinuje optimálnu}$$

stratégiu producenta i ako hráča i v situácii $c_i < A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$.

Hráč i nie je náchylný voliť $p_i < p_i^*$, pretože to by znamenalo nižšiu výplatu (zisk π_i).

A v prípade minimálneho vychýlenia smerom hore, teda stanovenia $p_i = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} c_{-i}$, by

to pre hráča i znamenalo opäť pokles jeho výplaty (zisku π_i), pretože v takom prípade sú

všetci hráči $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K: \frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$ schopný stanoviť $p_k = c_k$, čo vedie

k del'be dopytu na trhu M.

Keďže poznáme optimálnu stratégiu hráča i v situácii $c_i < A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, potom dokážeme

stanoviť optimálnu stratégiu pre všetkých hráčov $j \in I, j \neq i$. Akákoľvek stratégia, ktorú

ktorýkoľvek hráč $j \in I, j \neq i$ je schopný zvoliť v situácii $c_j > \frac{A_j}{A_i} c_i \wedge p_i^* = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} - \Delta_i$,

teda $\forall p_j \geq c_j$, vedie k $\pi_j = -f_j$, pretože dopyt m'ia svoje finančné prostriedky iba na

produkt i . Avšak predpokladali sme, že producenti preferujú produkciu pred

neprodukovaním, pokiaľ sú indiferentný v situáciách z hľadiska profitu. Napriek tomu, že

ľubovoľný hráč j voľbou $p_j^* = c_j$ nezíska žiadny dopyt, je to voľba, ktorá má najväčší

potenciál získania dopytu.

Zoberme najprv všetkých hráčov $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K: \frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$. Pre nich platí,

že pokiaľ hráč i sa vychýli o najmenší možný krok s cenou smerom hore zo svojej optimálnej

stratégie, potom všetci hráči $k \in K$ pri voľbe $p_k^* = c_k$ začínajú produkovať, pretože bude

existovať dopyt po ich produktoch.¹³³

Zoberme teraz hráčov $l \in L$, kde $L \subset I$ a $\forall l \in L: \frac{c_l}{A_l} > \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$. Pre všetkých hráčov $l \in L$ síce neplatí, že pri minimálnom vychýlení hráča i o najmenší možný krok s cenou smerom hore zo svojej optimálnej stratégie budú voľbou $p_l^* = c_l$ produkovať, avšak, ak zvolia $p_l^* = c_l$, potom pre vznik dopytu po ich produkte stačí najmenšie vychýlenie hráča i zo svojej optimálnej stratégie v porovnaní s akýmkoľvek $p_l > p_l^* = c_l$.¹³⁴

Teda optimálnou reakciou hráča $j \in I, j \neq i$ v situácii $c_j > \frac{A_j}{A_i} c_i \wedge p_i^* = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} - \Delta_i$ je voľba $p_j^* = c_j$.

Týmto sme dostali ekvilibrium v čistých stratégiách hry oligopolu s LUF s podmienkou $c_i < A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, $p_i^* = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} - \Delta_i$, kde $\Delta_i = \min_{\Delta > 0} \Delta$, $p_j^* = c_j \forall j \in I, j \neq i$. Ekvilibrium $p_i^* = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} - \Delta_i$, kde $\Delta_i = \min_{\Delta > 0} \Delta$, $p_j^* = c_j \forall j \in I, j \neq i$ je Nashovým ekvilibrium, pretože stratégie každého hráča sú tou najlepšou možnou reakciou na stratégie ostatných hráčov. Zároveň sme dostali jediné Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách, pretože hráči voľbou akejkolvek inej stratégie nedokážu vytvoriť ekvilibrium, teda rovnovážny stav, z ktorého sa žiadnemu hráčovi neoplatí jednostranne vychýliť.

Ak je teda profil stratégie $p_i^* = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j} - \Delta_i$, kde $\Delta_i = \min_{\Delta > 0} \Delta$, $p_j^* = c_j \forall j \in I, j \neq i$

jediným Nashovým ekvilibrium v čistých stratégiách, potom racionálni hráči zvolia v hre oligopolu s LUF s podmienkou $c_i < A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$ práve tieto stratégie.

Oligopol s LUF z pohľadu hráča s „relatívne rovnakými“ variabilnými nákladmi ako hráči s „relatívne najnižšími“ variabilným nákladmi

Predpokladajme, že hráč $i \in I$ má „relatívne rovnaké“ jednotkové variabilné náklady v hre oligopolu s LUF ako ktorýkoľvek iný hráč $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K: \frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, teda

$$c_i = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}.$$

Jedinou optimálnou stratégiou hráča i v hre oligopolu s LUF s podmienkou $c_i = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$ je $p_i^* = c_i$, pretože tá jediná mu zaručuje dopyt. Hráč i nemôže voliť $p_i < p_i^* = c_i$.

¹³³ Predpoklad preferencie produkovať je prirodzene možné rozšíriť aj na predpoklad preferencie voľby producentov, ktorá má najväčší potenciál produkovať v prípade, keď akákoľvek voľba nevedie k produkcii.

¹³⁴ Predpoklad preferencie produkovať je prirodzene možné rozšíriť aj na predpoklad preferencie voľby producentov, ktorá má najväčší potenciál produkovať v prípade, keď akákoľvek voľba nevedie k produkcii.

A v prípade, že by sa rozhodol zvoliť $p_i > p_i^* = c_i$, potom by ktorýkoľvek hráč $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K: \frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$ mohol zareagovať voľbou takého p_k , ktoré by znamenalo nulový dopyt po produkte i .

Avšak v situácii $c_i = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$ pre hráča k platí $c_k = A_i \min_{j \in I, j \neq k} \frac{c_j}{A_j}$ a teda každý hráč k je v rovnakej situácii, ako hráč i . Teda optimálna stratégia pre každého hráča k v hre oligopolu s LUF s $c_k = A_i \min_{j \in I, j \neq k} \frac{c_j}{A_j}$ je voľba $p_k^* = c_k$.

Pozrime sa ešte na hráčov $l \in L$, kde $L \subset I$ a $\forall l \in L: \frac{c_l}{A_l} > \min_{j \in I} \frac{c_j}{A_j}$. Tí sú v rovnakej situácii, ako hráči $l \in L$, kde $L \subset I$ a $\forall l \in L: \frac{c_l}{A_l} > \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$ v prípade, že existuje jediný hráč i , pre ktorého platí $c_i < A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$ a ktorú sme analyzovali v predchádzajúcej hre oligopolu s LUF s podmienkou $c_i < A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$ pre daného hráča i . Teda $\forall l \in L$ je optimálna stratégia zvoliť $p_l^* = c_l$.

Týmto sme dostali ekvilibrium v čistých stratégiách hry oligopolu s LUF s podmienkou $c_i = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, $p_i^* = c_i$, $p_k^* = c_k \forall k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K: \frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$ a $p_l^* = c_l \forall l \in L$, kde $L \subset I$ a $\forall l \in L: \frac{c_l}{A_l} > \min_{j \in I} \frac{c_j}{A_j}$, teda $p_i^* = c_i \forall i \in I$. Ekvilibrium $p_i^* = c_i \forall i \in I$ je

Nashovym ekvilibriom, pretože stratégie každého hráča sú tou najlepšou možnou reakciou na stratégie ostatných hráčov.

Zároveň sme dostali jediné Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách, pretože hráči voľbou akejkoľvek inej stratégie nedokážu vytvoriť ekvilibrium, teda rovnovážny stav, z ktorého sa žiadnemu hráčovi neoplatí jednostranne vychýliť.

Ak je teda profil stratégií $p_i^* = c_i \forall i \in I$ jediným Nashovym ekvilibriom v čistých stratégiách, potom racionálni hráči zvolia v hre oligopolu s LUF s podmienkou $c_i = A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$ práve tieto stratégie.

Oligopolu s LUF z pohľadu hráča s „relatívne vyššími“ variabilnými nákladmi ako ktorýkoľvek iný hráč

Predpokladajme, že hráč $i \in I$ má „relatívne vyššie“ jednotkové variabilné náklady v hre oligopolu s LUF, ako ktorýkoľvek iný hráč $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K: \frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, teda $c_i > A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$.

V tomto prípade je však hráč i v úplne rovnakej situácii, ako hráč $l \in L$, kde $L \subset I$ a $\forall l \in L$: $\frac{c_l}{A_l} > \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, keď sme analyzovali oligopol s LUF z pohľadu hráča i s „relatívne nižšími“ variabilnými nákladmi ako ktorýkoľvek jeho konkurenčný hráč $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K$: $\frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, alebo v situácii, ako hráč $l \in L$, kde $L \subset I$ a $\forall l \in L$: $\frac{c_l}{A_l} > \min_{j \in I} \frac{c_j}{A_j}$, keď sme analyzovali oligopol s LUF z pohľadu hráča i s „relatívne rovnakými“ variabilnými nákladmi ako ktorýkoľvek iný hráč $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K$: $\frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$.

V oboch analýzach hráč $l \in L$ volil stratégiu $p_l^* = c_l$.

Hráč i ešte môže byť hráčom $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K$: $\frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$ z analýzy situácie oligopolu s LUF z pohľadu hráča i s „relatívne nižšími“ variabilnými nákladmi ako ktorýkoľvek jeho konkurenčný hráč $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K$: $\frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, teda keď platilo $\forall k \in K$: $\frac{c_k}{A_k} > \min_{j \in I} \frac{c_j}{A_j}$. No aj vtedy hráči $k \in K$ volili $p_k^* = c_k$.

Hráč i už teda nie je rozhodujúcim hráčom na trhu M a preto tvar ekvilibria už nezáleží na jeho optimálnej stratégii. Ekvilibrium môže mať tvar $p_i^* = c_i \forall i \in I$, pokiaľ je viacero takých hráčov $k \in K$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K$: $\frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I} \frac{c_j}{A_j}$, respektíve tvar $p_k^* = A_k \min_{j \in I, j \neq k} \frac{c_j}{A_j} - \Delta_k$, kde $\Delta_k = \min_{\Delta > 0} \Delta$, $p_j^* = c_j \forall j \in I, j \neq k$, pokiaľ je jediný hráč $k \in I$ taký, že pre neho platí $c_k < A_k \min_{j \in I, j \neq k} \frac{c_j}{A_j}$.

Dané ekvilibriá sú za platnosti svojich podmienok Nashovými ekvilibriami v čistých stratégiách, pretože sa žiadnemu hráčovi neoplatí jednostranne vychýliť zo svojej ekvilibriovej stratégie v čistých stratégiách.

Navyše sú za platnosti svojich podmienok jedinými Nashovými ekvilibriami v čistých stratégiách a teda racionálni hráči zvolia v hre oligopolu s LUF s podmienkou $c_i > A_i \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$ práve tieto stratégie.

Teória hier teda identifikovala rovnaké ekvilibriá na trhu oligopolu s LUF, ako náš predchádzajúci prístup.

Výstupy a pozorovania z trhu oligopolu s LUF

Ekvilibrium, alebo teda ekvilibriá trhu oligopolu s LUF vedú k dôležitému pozorovaniu, že producent dokáže získať kladný profit iba v prípade, pokiaľ má „relatívne najnižšie“ jednotkové variabilné náklady oproti všetkým svojim konkurentom.

Je racionálne očakávať, že producent nezostane na trhu dlhodobo, pokiaľ dokáže získať iba negatívny profit.

V dlhodobom horizonte sa producent s „relatívne vyššími“ jednotkovými variabilnými nákladmi ako ktorýkoľvek jeho konkurent $k \in I$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K: \frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$ bude snažiť obmedziť, alebo až zbaviť tejto svojej nevýhody, čo by prirodzene robil cez investície do produktu (kvalita, marketing a podobne), alebo cez znižovanie svojej nákladovosti (investície do efektívnejšej výroby, znižovanie nákladov).

Avšak keď producent s „relatívne vyššími“ jednotkovými variabilnými nákladmi dosiahne relatívnu úroveň jednotkových variabilných nákladov konkurentov $k \in I$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K: \frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, potom ekvilibrium definuje opätovne negatívny profit pre tohto producenta.

Preto sa producent snaží nie len dorovnať relatívne jednotkové variabilné náklady

konkurentov $k \in I$, kde $K \subset I$ a $\forall k \in K: \frac{c_k}{A_k} = \min_{j \in I, j \neq i} \frac{c_j}{A_j}$, ale dokonca ich až podliezť. Ale o to isté a snažia aj všetci jeho konkurenti.

Jediným racionálnym výstupom z tohto správania racionálnych producentov v dlhodobom horizonte je, že všetci producenti investujú do svojich produktov a do nákladovej efektívnosti, čo vedie v dlhodobom horizonte k rovnosti relatívnych jednotkových variabilných nákladov pre všetkých producentov (pretože predpoklad úplnej informácie je možné rozšíriť aj na sféru najoptimálnejšej produkcie a marketingu). No to by viedlo k negatívnemu profitu pre všetkých producentov v dlhodobom horizonte.

Ak teda má trh M reprezentovať realitu, potom by v realite neexistoval taký trh, ako je trh M, v dlhodobom horizonte, čo však nie je pravda. V realite existujú oligopolvy výrazne substitučných produktov, ktoré trvajú dlhodobo.

V ďalších analýzach overíme, či dlhodobý horizont predsa len nebude motivovať racionálnych producentov k iným ekvili briám, vedúcim k možnosti kladného profitu, na rozdiel od jednorazovej interakcie producentov.

Vo všeobecnosti však ide o problém predpokladu, že produkty na trhu M sú dokonalými substitútmi, teda preferencie dopytu sa prejavujú v zmysle lineárnej úžitkovej funkcie. Akonáhle sú produkty dokonale zameniteľné, potom existuje v dlhodobom horizonte iba jediná stratégia, ako mať zabezpečený dopyt a teda aj produkciu, a to predávať za cenu svojich jednotkových variabilných nákladov a teda získať iba negatívny profit.

Teda trh M , ako model trhu oligopolu s lineárnou úžitkovou funkciou, môže byť z tohto pohľadu použitý iba na krátkodobé situácie (jednorazové trhy). Teda trh M sa javí ako veľmi obmedzený v aplikáciách v reálnom svete.

1.2.6 Opakovaná interakcia producentov na trhu oligopolu s LUF

Ako sme naznačili v časti Výstupy a pozorovania z trhu oligopolu s LUF, pozrime sa na situáciu, kedy producenti na trhu oligopolu s LUF interagujú opakovane, teda nejde iba o jednorazovú interakciu producentov, ale situácia popísaná v predchádzajúcich častiach sa opakuje.

Opäťovne ako pri duopole s LUF využijeme v tejto časti pre oligopol s LUF pojmy a poznatky teórie hier, pričom ich uvádzame v Poznámke o pojmoch z teórie hier v časti Opakovaná interakcia producentov na trhu duopolu s LUF.

Oligopol s LUF s konečným počtom opakovaní

Pokiaľ pri jednorazovej interakcii producentov na trhu M išlo o statickú hru, jej opakovaním dostaneme opakovanú hru.

Opakujme statickú hru oligopolu s LUF konečne veľa krát a označme tento počet $M \in \mathbb{N}$.

Stratégia hráča v dynamickej hre, ktorou je každá opakovaná hra, musí popísať všetky jeho akcie v každom jeho rozhodovacom bode.

Funkcia výplat hráča v opakovanej hre je súčet jeho výplat z jednotlivých opakovaní.

Zopakujme predpoklad úplnej informácie pre hráčov, pričom tento predpoklad je teraz v opakovanej hre rozšírený aj o informáciu o počte opakovaní hry, teda každý hráč pozná M . Je prirodzené rozšíriť informačné hľadisko aj o dokonalú informáciu, čo znamená, že hráči poznajú voľbu predchádzajúcich akcií všetkých hráčov v každom bode svojho rozhodovania.¹³⁵

Použijme teraz na opakovanú hru oligopolu s LUF s konečným počtom opakovaní koncept spätnej indukcie.

Najmenšou podhrou opakovanej hry trhu M s počtom opakovaní M je statická hra duopolu s LUF v poslednom kole opakovania M .

Nashovým ekviliбриom v čistých stratégiách tejto statickej hry je ekvilibrium definované v kapitole 1.2.5 Ekvilibrium na trhu oligopolu s lineárnou úžitkovou funkciou a je jediným

¹³⁵ V reálnom svete sú producenti schopní si pamätať svoje a konkurenčné nastavenia cien v minulosti.

Nashovým ekvilibriom v čistých stratégiách.

Keďže jediné Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách statickej hry je taký profil stratégie hráčov, ktorý racionálny hráči v hre zahrajú, potom výstupom z tejto podhry je výstup definujúci potencionálne kladný profit iba pre hráča s „relatívne najnižšími“ jednotkovými variabilnými nákladmi a pokiaľ je jediným s takouto úrovňou „relatívnych“ jednotkových variabilných nákladov na trhu M .

To znamená, že minimálne $N - 1$ hráčov v tejto podhre dosiahne záporný profit.

Keď sa presunieme o podhru späť v spätnej indukcii, teda na opakovanie $M - 1$, môžeme využiť výstup z najmensej podhry (opakovania M) ako vstup do rozhodovania hráčov v podhre opakovania $M - 1$. Racionálni hráči totiž využívajú spätnú indukciu rovnako, ako my, teda dokážu identifikovať výstup z posledného opakovania.

To, že prípadná voľba inej, ako ekvilibriovej akcie v opakovaní $M - 1$ nijako neovplyvňuje výstup z opakovania v kole M znamená, že hráči nie sú ničím motivovaní zmeniť svoju ekvilibriovú akciu v kole $M - 1$, preto ju aj zvolia.

Tým sme dostali kompletný výstup z podhry začínajúcej opakovaním $M - 1$, teda výplaty hráčov z oboch posledných opakovaní $M - 1$ a M .

Rozhodovanie hráčov v opakovaní $M - 2$, ako počiatočný rozhodovací bod predchádzajúcej podhry, nijako neovplyvňuje výstup z podhry začínajúcej v opakovaní $M - 1$, preto opäť v opakovaní $M - 2$ hráči volia akciu definovanú ekvilibriom statickej hry.

Týmto spôsobom hráči definujú svoje voľby akcii pre každé opakovanie opakovanej hry, teda pre všetkých M opakovaní a vidíme, že v každom jednom bode hráči zvolia svoju ekvilibriovú akciu statickej hry (teda definujú svoju stratégiu tak, že zahrajú svoju stratégiu statickej hry v každom opakovaní).

Takto sme dostali vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v čistých stratégiách a jediné vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v čistých stratégiách, preto hráči v hre oligopolu s LUF s konečným počtom opakovaní budú voliť stratégie definované týmto ekvilibriom. Teda táto analýza duopolu s LUF s konečným počtom opakovaní iba potvrdzuje neželaný výstup, ktorý definuje negatívny profit pre aspoň jedného hráča, čo je v rozpore s pozorovaním v reálnom svete.

Ak by sa aj niektorý z hráčov vychýlil zo svojej stratégie a zvolil v niektorom z opakovaní inú akciu, ako mu hovorí racionálny prístup, pri predpoklade racionálnosti ostatných hráčov by nezískal vyšší profit.

- Hráč s „relatívne vyššími“ jednotkovými variabilnými nákladmi ako akýkoľvek iný hráč na trhu M môže pri predpoklade vychýlenia sa z jeho ekvilibriovej stratégie voliť iba vyššiu cenu, čo mu neprinesie žiadny dodatočný dopyt.
- Hráč s „relatívne rovnakými“ jednotkovými variabilnými nákladmi ako je minimum na trhu M (a nie je jediný s touto úrovňou na trhu M) môže voliť tiež iba vyššiu cenu pri predpoklade vychýlenia sa z jeho ekvilibriovej stratégie, čo znamená, že príde o celý dopyt, a hoci sa to na jeho profite neprejaví, predpokladali sme, že producenti (hráči) preferujú produkovať pred neprodukovaním.
- Hráč, ktorý má „relatívne najnižšie“ variabilné náklady na trhu M (a je jediný s touto úrovňou na trhu M) znížením ceny zníži aj svoj profit a zvýšením ceny dorovnáva „relatívnu“ cenu niektorého, alebo niektorých produktov na trhu¹³⁶, čím prichádza o časť svojho dopytu a teda tiež znižuje svoj profit.

Oligopol s LUF s nekonečným alebo neurčitým počtom opakovaní

Predpokladajme teraz, že oligopol s LUF sa bude opakovať nekonečne veľa krát, alebo, že sa bude opakovať neurčitý počet krát, čo vyjadríme pomocou pravdepodobnosti, s akou hráči predpokladajú, že nastane ďalšie opakovanie.

Pokiaľ hráči predpokladajú opakovanie statickej hry nekonečne veľa krát, alebo neurčitý počet krát, potom každá podhra je rovnaká, ako celá hra.

V takomto prípade nie je možné použiť spätnú indukciu na hľadanie vzhl'adom na podhry dokonalého ekvilibria, pretože nedokážeme identifikovať najmenšiu podhru, teda posledné opakovanie M .

Pripomeňme, že stratégie hráčov musia popísať všetky akcie opakovanej hry, preto aj akcie v každom opakovaní, ktoré môžu nastať aj s malou pravdepodobnosťou, preto z pohľadu stratégie hráčov nie je rozdiel, či ide o nekonečnú opakovanú hru, alebo opakovanú hru s neurčitou dĺžkou.

¹³⁶ Vychádza z Poznámky o funkcii najlepšej odpovede producenta s „relatívne najnižšími“ jednotkovými variabilnými nákladmi na trhu M v časti Ekvilibrium na trhu oligopolu s lineárnou úžitkovou funkciou.

Jediné stratégie, ktoré sú schopné popísať každú akciu hráča v nekonečnej opakovanej hre, alebo v opakovanej hre s neurčitou dĺžkou sú podmienené stratégie, do ktorých radíme aj nereagujúce stratégie (stratégie, ktoré volia stále rovnaké akcie v každom opakovaní bez ohľadu na históriu, prípadne akcie s presne definovaným postupom voľby akcií, bez ohľadu na históriu) a náhodné stratégie (ktoré volia akcie náhodne, bez ohľadu na históriu).¹³⁷

Pozrime sa bližšie na jednotlivé podhry nekonečnej opakovanej hry, alebo opakovanej hry s neurčitou dĺžkou. Tie nie sú úplne rovnaké. Líšia sa od seba svojou históriou.

Pretože sú podmienené stratégie jediné stratégie, ktoré dokážeme použiť v nekonečnej opakovanej hre, alebo v opakovanej hre s neurčitou dĺžkou, história každej podhry je determinovaná podmienenými stratégiami, ktoré hráči v hre hrajú.

Vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium nekonečnej opakovanej hry, alebo opakovanej hry s neurčitou dĺžkou je teda determinované samotnými stratégiami, ktoré hráči hrajú, pretože koncept vzhľadom na podhry dokonalých ekvilibrií vyžaduje ekvilibrium v každej podhre.

Ak niektorá podmienená stratégia, ktorú hrajú obaja hráči v nekonečnej opakovanej hre oligopolu s LUF, alebo opakovanej hre oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou, dokáže sama so sebou vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium, potom ho aj vytvorí, pokiaľ ju hrajú obaja hráči.¹³⁸

Pripomeňme, že funkcia výplat hráča v opakovanej hre je súčet jeho výplat z jednotlivých opakovaní, teda v prípade nekonečnej opakovanej hry, alebo opakovanej hry s neurčitou dĺžkou ide o nekonečný rad jednotlivých očakávaných výplat z jednotlivých opakovaní.

NASTY CONSTANT

Prirodzenou podmienenou stratégiou, ktorá dokáže vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre oligopolu s LUF, alebo opakovanej hre oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou, je stratégia, ktorá volí v každom opakovaní akciu definovanú Nashovým ekvilibrium v čistých stratégiách statickej hry oligopolu s LUF, ktoré sme definovali v časti Ekvilibrium na trhu oligopolu s lineárnou úžitkovou funkciou, bez ohľadu na históriu.

Nazvime túto stratégiu NASTY CONSTANT, pretože je zlá na svojich konkurentov a konštantná.

¹³⁷ (Fudenberg, Tirole, 1991)

¹³⁸ (Fudenberg, Tirole, 1991)

Táto situácia však popisuje stav, kedy minimálne $N - 1$ z hráčov permanentne dosahuje negatívny profit, čo je opätovne v rozpore s pozorovaním v reálnom svete.

NICE CONSTANT

Predstavíme si aj inú podmienenú stratégiu, opätovne nereagujúcu na históriu, ktorá však nedokáže vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre oligopolu s LUF, alebo opakovanej hre oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou.

Je to stratégia, ktorá pre všetkých hráčov stanoví konštantnú úroveň cien tak, aby sa ich „relatívne“ jednotkové ceny produktov rovnali, čiže aby si hráči delili dopyt a dokonca aj s podmienkou, že všetci hráči predajom svojich produktov získajú pozitívny profit po odpočítaní fixných a variabilných nákladov.

Nazvime túto stratégiu NICE CONSTANT, pretože je milá na svojich konkurentov a konštantná.

Takáto stratégia by viedla k pozitívnemu profitu pre všetkých hráčov počas celej opakovanej hry, pokiaľ by ju všetci hráči hrali.

Avšak táto stratégia nedokáže sama so sebou vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium, pretože pokiaľ by niektorý jej protihráč zistil v niektorom opakovaní, že hrá proti NICE CONSTANT, teda že hrá proti protihráčom, ktorí všetci používajú NICE CONSTANT, potom by jeho najlepšou odpoveďou bolo hranie stratégie, ktorá by volila ceny o niečo minimálne nižšie, ako mu hovorí jeho stratégia NICE CONSTANT a tým by získaval väčší profit.

Teda stratégia NICE CONSTANT nie je najlepšou odpoveďou sama na seba a teda nedokáže sama so sebou vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre oligopolu s LUF, alebo opakovanej hre oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou.

Táto stratégia má dve slabé miesta pri porovnaní s realitou. V realite racionálni producenti nezvolia na začiatku existencie trhu cenu a nenechajú ju konštantnú donekonečna. Racionálny producent v každom svojom rozhodovaní bude (v každom opakovaní statickej hry oligopolu s LUF) dokázať meniť svoju cenu. A teda v každom svojom bode rozhodovania bude motivovaný „zradiť“ svojich konkurentov znížením ceny svojho produktu, čím získa v danom opakovaní výrazne vyšší profit, pokiaľ predpokladá, že jeho konkurent hrá stratégiu

konštantných cien.¹³⁹ Navyše podobne môžu rozmýšľať aj jeho konkurenti, teda v reálnom svete má takáto stratégia tendenciu sklznúť do prirodzeného ekvilibria oligopolu s LUF, pričom opätovne dostávame výstup s negatívnym profitom pre aspoň $N - 1$ producentov.

Navyše na reálnych trhoch existujú bariéry voči takýmto stratégiám producentov (štandardne prijaté štátom, v ktorom sa nachádza predmetný trh, alebo organizátorom trhu), pretože pokiaľ producenti hrajú takúto stratégiu na reálnom trhu, trpí tým dopyt, ktorý musí kupovať produkty na trhu za vyššie ceny, ako keby bol trh konkurenčný. Takáto situácia na trhu sa nazýva kartel.

TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF

Iná podmienená stratégia s kartelovým potenciálom, ktorá však dokáže vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre oligopolu s LUF, alebo opakovanej hre oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou, a teda ktorá môže viesť ku kladnému profitu všetkých hráčov, je stratégia, ktorá je skutočne podmienená, teda reaguje na históriu a ktorá je analógiou slávnej stratégie TIT-FOR-TAT identifikovanej Axelrodom vo svojich turnajoch opakovanej hry Väzňova dilemma¹⁴⁰.

Nazvime túto stratégiu teda TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF, kde táto stratégia v prvom opakovaní, keď je ešte história prázdna množina, zvolí ceny produktov hráčov tak, aby sa ich „relatívne“ jednotkové ceny produktov rovnali, čiže aby si hráči delili dopyt a dokonca aj s podmienkou, že všetci hráči predajom svojich produktov získajú pozitívny profit po odpočítaní fixných a variabilných nákladov, teda rovnako, ako volí stratégia NICE CONSTANT v každom opakovaní.

Avšak TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF bude analyzovať históriu hry v každom rozhodovanom bode, konkrétne práve predchádzajúce opakovanie, pričom pokiaľ ktorýkoľvek z konkurentov a stačí jediný, v predchádzajúcom opakovaní zvolí nižšiu cenu, ako cenu, ktorá umožňuje, aby sa „relatívne“ jednotkové ceny produktov rovnali (teda nižšiu ako „dohodnutú“ cenu), potom TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF „trestá“ celý trh M nastavením ceny na úroveň NASTY CONSTANT v tomto rozhodovanom bode¹⁴¹.

¹³⁹ Čo je vlastne vyjadrenie neschopnosti stratégie NICE CONSTANT vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium.

¹⁴⁰ (Axelrod, 1984)

¹⁴¹ Toto je iba jedna z možných verzií TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF, keďže sa pohybujeme v spojitom priestore akcií hráčov, môžu existovať aj iné úrovne cien, ktoré TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF zvolí po „zrade“ niektorého z protihráčov. Táto cena bude nižšia ako pôvodná úroveň, ale nutne nemusí okamžite ísť až na úroveň svojich jednotkových variabilných nákladov.

TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF má však aj schopnosť „odpúšťať“, keďže analyzuje iba predchádzajúce kolo, hoci za veľmi prísnych podmienok. Pokiaľ sa všetci jej protihráči, ktorí „zradili“ rozhodnú po „zradení“ TIT-FOR-TAT duopolu s LUF v niektorom z ďalších kôl vrátiť s cenou aspoň na úroveň stratégie NICE CONSTANT a zároveň v tomto kole návratu „zradcov“ do „kooperácie“ všetci ostatní hráči naďalej zahrajú NICE CONSTANT, potom TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF v nasledujúcom kole zvolí tiež úroveň ceny NICE CONSTANT¹⁴².

Pokiaľ proti sebe postavíme N stratégií N hráčov TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF, potom ani jedna stratégia „nezradí“ trh M a navyše, pokiaľ niektorý z hráčov zistí, že hrá proti $N - 1$ stratégií TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF, potom sa mu neoplatí v žiadnom opakovaní „zradiť“, pretože v ďalšom opakovaní očakáva „trest“ zo strany každej z $N - 1$ TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF a teda získavame vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium.

Stratégie TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF obmedzujú do určitej miery nereálnosť stratégií typu NICE CONSTANT v tom, že dokážu trestať svojho konkurenta za jednostranné vychýlenie sa, avšak dokážu aj odpúšťať, čo sa pri Axelrodových turnajoch ukázalo ako želaná vlastnosť stratégií, samozrejme pri diskretnom type opakovanej hry Väžňova dilemma¹⁴³ a teda nie v našej situácii¹⁴⁴.

Stratégie typu TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF sú však naďalej kartelovými stratégiami, preto v reálnom svete existujú bariéry na ich aplikáciu.

Všimnime si ešte, že v prípade oligopolu v porovnaní s duopolom je ešte náročnejšie sa vrátiť naspäť ku kooperácii hráčov, pokiaľ tí hrajú v nekonečnej opakovanej hre oligopolu s LUF, alebo opakovanej hre oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou, stratégie TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF po jednorazovej deviácii niektorého z hráčov.

V nekonečnej opakovanej hre duopolu s LUF, alebo opakovanej hre duopolu s LUF s neurčitou dĺžkou, pokiaľ hráči hrajú TIT-FOR-TAT duopolu s LUF a jeden z hráčov v niektorom opakovaní „zradí“, potom postačí, ak tento hráč začne opätovne kooperovať a TIT-FOR-TAT duopolu s LUF mu odpustí a hra sa vráti do kooperácie.

¹⁴² Stratégia NICE CONSTANT tiež nedefinuje presne úroveň cien produktov, teda môže byť nekonečne veľa stratégií typu NICE CONSTANT, ktorá si však za podmienky kladie také úrovne cien konkurenčných produktov, aby všetci hráči produkovali (teda aby existoval dopyt po oboch produktoch) a aby všetci hráči predajom svojich produktov získajú pozitívny profit po odpočítaní fixných a variabilných nákladov.

¹⁴³ (Axelrod, 1984)

¹⁴⁴ Podobnosť úspešnosti TIT-FOR-TAT Väžňovej dilemy v simulovaných turnajoch a TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF by mohli overiť behaviorálne turnaje podobné tým Axelrodovým.

Avšak v nekonečnej opakovanej hre oligopolu s LUF, alebo opakovanej hre oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou, pokiaľ hráči hrajú TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF a jeden z hráčov v niektorom opakovaní „zradí“, potom nestačí, ak opätovne začne kooperovať, pretože svojou deviáciou z kooperácie spustí „trestanie“ stratégií TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF, ktoré začnú reagovať na „tresty“ všetkých ostatných stratégií TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF. To znamená, že hráč po svojej deviácii z kooperácie už nemá silu vrátiť trh do stavu kooperácie, pretože stratégie TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF nereagujú iba na jeho akciu, ale tiež na akciu všetkých ostatných, ktorí sú však všetci v stave voľby „trestu“.

Teda pri oligopole je návrat do stavu kooperácie hráčov, v zmysle hrania akcií zabezpečujúcich profit pre všetkých, oveľa náročnejší, ako pri duopole. A to platí dokonca aj v takom prípade, keď nekonečnú opakovanú hru oligopolu s LUF, alebo opakovanú hru oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou hrajú extrémne „odpúšťajúce“ stratégie, akými sú TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF.

To znamená, že napriek tomu, že v nekonečnej opakovanej hre oligopolu s LUF, alebo opakovanej hre oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou hráči využívajú TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF, trest za jedinou deviáciu niektorého z hráčov je prakticky na úrovni stratégie CRUEL, ktorú si predstavíme nižšie.

CRUEL

Iným typom stratégie s kartelovým potenciálom, teda stratégia, ktorá by mohla viesť k existencii trhu oligopolu s LUF v dlhodobom horizonte, teda k situácii, kedy obaja producenti dosahujú kladné profity, je stratégia CRUEL, teda krutá stratégia na svojho konkurenta.

Ide o stratégiu, ktorá podobne ako TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF v prvom opakovaní zvolí cenu produktu na úrovni stratégie NICE CONSTANT a pokračuje v tom, pokiaľ ju niektorý z jej konkurentov „nezradí“ voľbou nižšej úrovne ceny. Keď sa to však stane, potom stratégia CRUEL bude už navždy stanovovať ceny na úrovni stratégie NASTY CONSTANT, teda stratégia CRUEL analyzuje v každom svojom rozhodovaní celú existujúcu históriu hry, a teda pokiaľ v nej vidí čo i len jednu „zradu“ konkurenta, potom zvolí úroveň ceny NASTY CONSTANT¹⁴⁵.

¹⁴⁵ Ide iba o jednu z možných verzií stratégie CRUEL, keďže sa pohybujeme v spojitom priestore akcií hráčov, môžu existovať aj iné úrovne cien, ktoré CRUEL zvolí po „zrade“ protihráča, nižšie ako pôvodná „dohodnutá“ úroveň, ale nutne nemusí okamžite ísť až na úroveň svojich jednotkových variabilných nákladov.

Stratégie typu CRUEL dokážu vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium, pretože pokiaľ ich protihráč vie, že hrá proti týmto stratégiám, nikdy ich „nezradí“, pretože potom by nasledoval „trest“ v podobe „zrád“ zo strany stratégií CRUEL navždy. Teda stratégia CRUEL je sama sebe najlepšou odpoveďou v nekonečnej opakovanej hre oligopolu s LUF, alebo opakovanej hre oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou a teda dokáže v nej vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium.

Opätovne by však išlo o kartel, ktorému organizátori trhov vytvárajú bariéry.

Sumár vzhľadom na podhry dokonalých ekvilibrií nekonečnej opakovanej hry oligopolu s LUF, alebo opakovanej hry oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou

Prirodzenou stratégiou, ktorá dokáže vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre oligopolu s LUF, alebo opakovanej hre oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou je stratégia NASTY CONSTANT.

Táto stratégia však definuje očakávaný výstup analogický so statickou hrou a teda výstup, ktorý vedie pre aspoň $N - 1$ hráčov k negatívnemu profitu.

Existuje nekonečne veľa mutácii stratégii typu TIT-FOR-TAT oligopolu s LUF a jej kombinácii s CRUEL, ktoré dokážu vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre oligopolu s LUF, alebo opakovanej hre oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou.

Vo všeobecnosti, pokiaľ majú stratégie vlastnosti „milá“, teda v prvom kole a vo všetkých nasledujúcich dokým ju „nezradia“ volí úroveň ceny stratégie NICE CONSTANT a „krutá“, teda že dokáže trestať okamžite po prvej „zrade“ niektorého z protihráčov, potom dokážu vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre oligopolu s LUF, alebo opakovanej hre oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou.

Navyše na rozdiel od duopolu s LUF je trest „odpúšťajúcich“ stratégií v hre oligopolu s LUF prakticky na úrovni stratégie CRUEL, pretože v oligopole s LUF po deviácii z kooperácie jediného hráča „kruté“ a hoci „odpúšťajúce“ stratégie „trestajú“ celý trh a teda začnú reagovať po tomto kole „trestami“ za „tresty“ ostatných „krutých“ a „odpúšťajúcich“ stratégií, z čoho sa už v budúcnosti nedokážu dostať.

Preto deviant už nemá silu po svojej „zrade“ vrátiť hru oligopolu s LUF späť do stavu kooperácie zahráním akcie na úrovni NICE CONSTANT, napriek tomu, že hrá proti „odpúšťajúcim“ stratégiám.

Nevýhodou týchto stratégií je fakt, že majú povahu kartelu, ktorý je neželaným efektom na reálnom trhu, pretože ten vedie k zvyšovaniu cien pre dopyt (populáciu) a preto sú v reálnom svete využívané bariéry, ktoré kartel obmedzujú (hoci nie vždy, no pri väčšine reálnych trhov).

Navyše reálne trhy sú skôr opakovanými hrami s neurčitou dĺžkou a nie nekonečnými opakovanými hrami, pretože je pravdepodobné, že producenti na reálnom trhu neočakávajú, že trh, na ktorom produkujú, bude existovať donekonečna, ale iba prisudzujú určitú pravdepodobnosť uskutočnenia ďalšieho opakovania.

A to sme ešte do našich analýz nezapojili diskontný faktor, ktorým môžu producenti znehodnocovať svoje príjmy z budúcnosti na úkor príjmov v súčasnosti. Pokiaľ povolíme existenciu finančného trhu, potom producenti môžu byť motivovaní voliť svoje akcie v blízkych kolách tak, aby získali čo najviac, pretože dnešný zisk môžu investovať a tým kompenzovať svoje budúce straty, respektíve zníženia profitu.

Ak by teda producenti prisudzovali nízku pravdepodobnosť uskutočnenia budúcich opakovaní, prípadne by finančný trh poskytoval vysoký úrok pri investícii, potom by producenti boli motivovaní „zraďiť“, napriek tomu, že by v nekonečnej hre bez diskontného faktora pokračovali v hraní stratégie, ktorá im zaručuje vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium s kladným profitom pre všetkých producentov.

V prípade opakovanej hry s neurčitou dĺžkou, prípadne nekonečnej opakovanej hry s diskontným faktorom, alebo ich kombinácie, potom záleží na úrovni týchto faktorov, pričom pokiaľ ich efekt rastie, potom klesá vôľa hráčov zostať vo svojej stratégii, až sa táto vôľa kooperácie môže vytratiť, pokiaľ profit z aktuálnej „zrady“ prevýši súčasnú hodnotu očakávaných profitov z budúcich opakovaní.

Jediná stratégia v hre oligopolu s LUF s neurčitou dĺžkou, alebo v nekonečnej opakovanej hre oligopolu s LUF s diskontným faktorom, alebo v ich kombinácii, ktorá je imúnna voči týmto faktorom, je stratégia NASTY CONSTANT, ktorá volí akcie, ktoré zodpovedajú ekvilibriu statickej hry oligopolu s LUF a teda neželanému výstupu v porovnaní s realitou.

Výstupy a pozorovania z opakovaného oligopolu s LUF

Pri analýze opakovaného oligopolu s LUF sme využili pojmy a poznatky teórie hier.

Oligopol s LUF s konečným počtom opakovaní viedol k rovnakému výstupu, ako statická hra oligopolu s LUF, teda k ekvilíbriu v ktorom aspoň $N - 1$ producentov dosahovalo negatívny profit, čo v dlhodobom horizonte štandardne nesúhlasí s realitou.

Pri oligopole s LUF s nekonečným alebo neurčitým počtom opakovaní sme dokázali identifikovať stratégie producentov v oblasti cien, ktoré by mohli viesť k dlhodobej existencii trhu M (oligopolu s LUF), teda ku kladnému profitu všetkých producentov, avšak tieto stratégie mali povahu kartelu, čo je neželaný jav na reálnom trhu z pohľadu jeho organizátora, ktorým je štandardne štát, alebo iná organizácia, ktorá má na zreteli blaho dopytu (populácie) a teda pretože kartel spôsobuje zvyšovanie cien na akomkoľvek trhu, organizátor trhu štandardne vytvára bariéry na vznik kartelu a preto tieto stratégie nie sú vo všeobecnosti použiteľné v realite.

Navyše sme ukázali, že na existenciu rovnovážneho stavu na trhu – ekvilíbria, ktoré vedie ku kladnému profitu všetkých producentov vplýva aj pravdepodobnosť, s akou producenti očakávajú uskutočnenie nasledujúcich opakovaní trhu M a tiež diskontný faktor. Oba tieto faktory znižujú vôľu producentov zotrvať v stratégii zabezpečujúcej ekvilíbrium, v ktorom všetci producenti získavajú kladný profit, dokonca pokiaľ výška vplyvu týchto faktorov dosiahne určitú úroveň (ktorá znehodnotí očakávané budúce profity natoľko, že ich prevýšia potencionálne profity z aktuálneho opakovania), racionálni producenti maximalizujúci svoj profit sa vychýlia zo svojej stratégie v smere k pôvodnému ekvilíbriu statickej hry oligopolu s LUF, čo opäť vedie k negatívnemu profitu pre aspoň $N - 1$ producentov a teda k výsledku, ktorý je málo pravdepodobný z dlhodobého hľadiska v realite.

Jedinou imúnou stratégiou voči malým pravdepodobnostiam uskutočnenia nasledujúcich opakovaní a vysokým úrovniam diskontného faktora, ktorá zaručovala ekvilíbrium v oligopole s LUF s nekonečným alebo neurčitým počtom opakovaní, bola stratégia, ktorá definovala v každom opakovaní voľbu ceny producentov na úrovni statickej hry oligopolu s LUF, teda stratégia, ktorá prináša negatívny profit pre aspoň $N - 1$ producentov.

2. Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu – trh nedokonalých substitútov

V predchádzajúcich častiach práce sme ukázali, že modely trhu s lineárnou úžitkovou funkciou, teda modely trhu s predpokladom o dokonalosti substitúcie produktov vedú k záverom, ktoré je možné aplikovať na pozorovania reálnych trhov iba obmedzene.

Modely sme konfrontovali z hľadiska počtu producentov a tiež z hľadiska ich trvania, či náhodou tieto efekty nemajú vplyv na ich výstup, ktorým je, napriek niektorým nie veľmi stabilným výnimkám, negatívny profit pre aspoň jedného z producentov na trhu, čo je v rozpore s racionálnosťou producentov a pozorovaním reálnych trhov.

V nasledujúcej časti zmeníme predpoklad o dokonalosti substitúcie produktov na trhu na nedokonalosť ich substitúcie.

Ak sú ale produkty navzájom nedokonalosť substitučné, potom sa nutne stávajú do určitej miery komplementami.

Stále však budeme hovoriť o trhu substitútov, teda trhu produktov, ktoré uspokojujú konkrétnu potrebu dopytu (populácie) a tieto produkty sú jedinými produktami, ktoré dokážu túto potrebu dopytu uspokojiť.

Ako ale môžu byť dva produkty substitútmi a zároveň komplementami?

Pomôžeme si príkladom z reálneho sveta, kde existujú dva vysokokvalitné kolové nápoje, ktoré sú väčšinou populácie považované za významne substitučné, nazvime ich v tejto práci KOKA a PEPI¹⁴⁶ a teda predpokladajme, že tieto dva nápoje tvoria trh „vysokokvalitných kolových nápojov“, teda sú jedinými produktami, ktoré dokážu uspokojiť dopyt populácie po „vysokokvalitných kolových nápojoch“.

Napriek tomu, že ich väčšina populácie považuje za významne substitučné, pokiaľ sa spýtame konkrétnej osoby, ktorý z týchto nápojov preferuje, dokáže nám odpovedať výberom jedného z nich. V tomto výbere nemusí záležať iba na chuti, či kvalite daných nápojov, tie môžu byť dokonca pre niekoho úplne rovnaké, avšak preferencia konkrétnej osoby môže vyplývať aj z jeho obľuby farby (modrá, červená), či patriotizmu, alebo jednoducho sympatií.

Navyše mimo samotnej preferencie spotrebiteľa na samotnú spotrebu môže vplývať aj dostupnosť jedného, alebo druhého produktu pre konkrétneho spotrebiteľa, pokiaľ napríklad

¹⁴⁶ Nie je nutné menovať produkty reálnymi názvami, ide iba o príklad, ktorý môže byť príkladom akéhokoľvek trhu.

jemu blízky supermarket distribuuje iba jeden z týchto produktov.

Preferencie dopytu vyjadrujú preferencie všetkých spotrebiteľov, vrátane ich informovanosti a dostupnosti daných produktov.

No predstavme si situáciu, keď chceme privítať u seba niekoľkých svojich priateľov a nech je ich počet relatívne veľký. Budeme odhadovať, že počas návštevy skonzumujú povedzme 40 litrov vysoko kvalitných kolových nápojov. Tieto nápoje nakupujeme v dvojlitrových fľašiach, teda je potrebné nakúpiť 20 fliaš a predpokladajme, že cena fliaše oboch nápojov je rovnaká.

Predpokladajme, že absolútne nepoznáme preferencie svojich priateľov v oblasti vysoko kvalitných kolových nápojov. Pri kúpe, ako racionálny subjekt, sa budeme snažiť dosiahnuť čo možno najlepší úžitok, či už svojich priateľov, alebo aj náš, keďže vyššia spokojnosť priateľov nám prináša vyšší osobný úžitok (napríklad radosť).

Keďže nepoznáme preferencie svojich priateľov, rozhodneme sa nakúpiť 20 fliaš nášho obľúbeného nápoja, alebo pri takomto počte budeme diverzifikovať ponuku vysokokvalitných kolových nápojov na večierku, aby prípadne aj tí, ktorí preferujú iný nápoj, dosiahli svoje maximálne uspokojenie?

Pokiaľ patríme k tým, ktorí napriek tomu, že medzi našimi priateľmi môžu existovať takí, ktorí preferujú iný nápoj ako my, aj tak nakúpia iba nami preferovanú značku, neznamená to, že sa tak chová celá populácia.

A keďže preferencie dopytu vyjadrujú preferencie celej populácie, potom sa v preferenciách dopytu musí prejaviť tento komplementárny efekt produktov vysokokvalitných kolových nápojov, teda že dopyt v niektorých prípadoch považuje večierok za lepší, ak sú na ňom dostupné oba vysokokvalitné kolové nápoje.

Vyššie uvedené je príkladom „správne sa prejavujúcich preferencií“, ktoré spĺňajú predpoklady monotónnosti¹⁴⁷, konvexnosti a navyše rýdzej konvexnosti^{148, 149, 150}.

Ešte pripomenieme, že v našom príklade nejde o čisté komplementy, dokážeme si užiť večierok aj s dostupnosťou jediného z vysokokvalitných kolových nápojov, teda ich substitučný efekt je zachovaný.

¹⁴⁷ Prirodzene „viac je lepšie“.

¹⁴⁸ „Priemery sú preferované pred extrémami“, teda že kombinácia dvoch produktov pri rovnakom objeme spotreby je preferovaná pred spotrebou jediného z produktov.

¹⁴⁹ (Varian, 1995)

¹⁵⁰ (Varian, 1992)

Napriek tomu, že sme uviedli iba jeden príklad, v realite je práveže bežná práve takáto situácia, že produkty na nejakom konkrétnom trhu nejakej potreby populácie nespĺňajú predpoklady dokonalých substitútov dokonale, či už z hľadiska kvality, dostupnosti, osobných preferencií spotrebiteľov, alebo aj informovanosti.

Práveže sú situácie nedokonalých substitútov v realite oveľa bežnejšie, ako situácie dokonalých substitútov.

Môžeme navyše zdôrazniť, že komplementárny vzťah substitútov nemusí byť spôsobený samotnými preferenciami spotrebiteľov, ale aj jednoduchou neinformovanosťou časti populácie (dopytu) o existencii niektorého z produktov, alebo nedostupnosťou tohto produktu pre časť dopytu. Úžitková funkcia dopytu vyjadruje preferencie celého dopytu, teda celej populácie, respektíve každého spotrebiteľa, ktorý uspokojuje svoju konkrétnu potrebu na trhu duopolu. No keďže je niektorému spotrebiteľovi, ako časti dopytu, niektorý z produktov nedostupný, či neznámy, a to z akéhokoľvek dôvodu, potom táto časť dopytu bude siahať striktne iba po jednom z produktov. Toto však môže platiť aj pre konkurenčný produkt. V extrémnom prípade, keď by časť populácie mala striktne dostupný iba jeden produkt a zvyšná časť populácie iba druhý, potom by z pohľadu trhu duopolu išlo o čisté komplementary, hoci by mohlo ísť vo svojej produktovej podstate o čisté substitúty.

V ďalších častiach modelov trhov využívame takú úžitkovú funkciu, ktorá vznikla úpravou lineárnej úžitkovej funkcie z predchádzajúcich častí a ktorá spĺňa predpoklady monotónnosti a rýdzej konvexnosti preferencií, teda kombinuje substitučný a komplementárny vzťah substitučných produktov na trhu.

2.1 Duopol s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou

Pre model duopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou platí rovnaká definícia, akú sme uviedli v úvode časti Duopol s lineárnou úžitkovou funkciou pre duopol s lineárnou úžitkovou funkciou.

Tak isto v prípade duopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou budeme predpokladať limitované zdroje dopytu, ktoré mína na nami analyzovanom trhu.

Tiež budeme predpokladať súťaž producentov o tieto limitované zdroje vo forme stanovovania cien produktov.

Naše očakávania na trhu duopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou budú, že spotreba niektorého z produktov poklesne, pokiaľ jeho cena vzrastie a naopak.

Tiež budeme očakávať, že spotreba všetkých produktov v duopole (respektíve celková spotreba produktov na trhu duopolu) poklesne, pokiaľ všetky produkty zdražia a naopak.¹⁵¹

Podobne ako v predchádzajúcich častiach budeme používať pojmy rozpočet dopytu, rozpočtová hranica a spotrebné koše.^{152 153}

A tiež podobne ako v predchádzajúcich častiach, budeme vyjadrovať preferencie spotrebiteľa pomocou úžitkovej funkcie, teda funkcie, ktorá priradí číselnú hodnotu každému spotrebnému košu tak, aby zachovala poradie preferencií dopytu medzi všetkými spotrebnými košmi, pričom táto funkcia bude v nasledujúcej časti vyjadrovať nie len substitučný vzťah produktov, ale aj ich komplementárny vzťah.

Za preferencie budeme opäť považovať vyjadrenia názoru spotrebiteľa (alebo celého dopytu), ktorý spotrebný koš preferuje, keď porovnáva akékoľvek dva spotrebné koše.^{154 155}

Keď zadefinujeme úžitkovú funkciu na trhu duopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou a rozpočtovú hranicu dopytu, potom sme schopný odvodiť dopytovú funkciu po jednotlivých produktoch v závislosti od ich cien, ako maximalizáciu úžitku pre dopyt (maximalizáciu úžitkovej funkcie) na rozpočtovej hranici.

Keďže má práca ambíciu aplikácie v reálnom svete, všetky číselné parametre a výstupy, ktoré budeme používať, budú z množiny reálnych čísiel.

¹⁵¹ Tento predpoklad o dopyte sa nazýva aj Zákon dopytu (Amir, Erickson, Jin, 2015).

¹⁵² (Varian, 1995)

¹⁵³ (Varian, 1992)

¹⁵⁴ (Varian, 1995)

¹⁵⁵ (Varian, 1992)

2.1.1 Kvázi-lineárna úžitková funkcia (QLUF) na trhu duopolu

Uvažujme dvoch konkurenčných producentov $I = \{1, 2\}$, ktorí produkujú dva substitučné produkty a predpokladajme, že tieto dva produkty (označme ich produkt 1 ako produkt, ktorý produkuje producent 1 a produkt 2 ako produkt, ktorý produkuje producent 2, teda množina produktov bude rovnako $I = \{1, 2\}$) sú jedinými produktami, ktoré dokážu uspokojiť nejakú konkrétnu potrebu dopytu.

Nazvime túto konkrétnu potrebu dopytu, spotrebu predmetných produktov a produkciu týchto produktov trhom N.

Nech $x_i \geq 0$ je počet jednotiek produktu $i \in I$, nech $f_i > 0$ ¹⁵⁶ sú fixné náklady producenta $i \in I$, nech $c_i > 0$ ¹⁵⁷ sú variabilné náklady producenta $i \in I$ na jednotku produktu i a nech $p_i \geq 0$ je jednotková cena produktu $i \in I$.

Predpokladajme, že sa producenti zaujímajú iba o maximalizáciu ich profitu a nech profit je definovaný ako $\pi_i = p_i x_i - f_i - c_i x_i$ pre všetkých producentov $i \in I$.

Vidíme, že pre akékoľvek dané x_i , f_i and c_i profit producenta i , $\pi_i \geq -f_i \Leftrightarrow p_i \geq c_i$.

Ak $p_i < c_i$, tak pre akékoľvek dané $x_i > 0$, $f_i, c_i > 0$ profit producenta i $\pi_i < -f_i$, čiže je racionálne predpokladať $p_i \geq c_i, \forall i \in I$.

Dovoľme zjemniť predpoklad, že producenti sa zaujímajú iba o maximalizáciu ich profitu v prípade, keď $p_i = c_i$ pre ľubovoľné $i \in I$. V takom prípade predpokladajme, že producent $i \in I$ bude produkovať dopytom požadované množstvo produktu $i \in I$, napriek tomu, že pri zachovaní požiadavky by bol producent indiferentný medzi produkovaním a neprodukovaním.¹⁵⁸

Uvažujme a označme celkové finančné zdroje dopytu $I_T > 0$.

Nech $x_0 \geq 0$ je počet jednotiek všetkých ostatných produktov mimo trhu N, ktoré naplňajú akúkoľvek inú potrebu dopytu, nech sú jednotky x_0 ekvivalentné k jednotkám $x_i, i \in I$.

Nech $p_0 \geq 0$ je cena jednotky x_0 a teda môžeme tvrdiť, že p_0 je vážený priemer cien

¹⁵⁶ Toto je relatívne prirodzená požiadavka, pretože štandardne majú producenti aspoň minimálne fixné náklady, pokiaľ chcú produkovať.

¹⁵⁷ Toto je racionálna požiadavka, pretože pokiaľ by boli pre niektorého producenta variabilné náklady na jednotku produktu rovné nule, potom by mohol producent stanoviť cenu produktu na nulovej úrovni, čo by viedlo k nekonečnej spotrebe tohto produktu a trh N by zanikol.

¹⁵⁸ V prípade, keď $p_i = c_i, i \in I$, môžeme predpokladať, že napriek tomu, že je producent $i \in I$ indiferentný medzi produkovaním a neprodukovaním v zmysle jeho profitu π_i , producent $i \in I$ môže preferovať produkciu, pretože toto rozhodnutie producenta môže zachovať prax jeho pracovnej sily. V opačnom prípade pracovná sila producenta môže stratiť svoju prax, čo môže byť nákladnejšie pre producenta, pokiaľ by sa producent vrátil do produkcie pri výhodnejších podmienkach na trhu N. Tento slabý predpoklad môže byť podporený predpokladom, že variabilné náklady c_i obsahujú všetky variabilné náklady producenta pri produkcii jednotky produktu i , vrátane údržby a opráv plynúcich z opotrebenia spôsobeného produkciou produktu i .

produktov mimo trh N, v zmysle ekvivalentných jednotiek trhu N.

Predpokladajme, že p_0 a x_0 nereagujú na situáciu na trhu N, teda z pohľadu trhu N ide o konštanty.

To znamená, že súčin $p_0 * x_0$ definuje finančné zdroje, ktoré dopyt míňa mimo trh N.

To znamená, že rozdiel $I_T - p_0 x_0 = I_N$ definuje finančné zdroje, ktoré dopyt míňa na trhu N a požadujeme $I_N > 0$, čo znamená $p_0 x_0 < I_T$.

V tomto momente uvedieme takú úžitkovú funkciu dopytu, ktorá dokáže opísať substitučný a zároveň aj komplementárny vzťah produktov na trhu duopolu s nedokonalými substitútmi, pričom túto úžitkovú funkciu nazveme kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou, pretože vychádza z lineárnej úžitkovej funkcie dokonalých substitútov, no zároveň v sebe obsahuje prvok komplementárnosti produktov:

$$U_{QL}(x_1, x_2) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + C x_1 x_2 + D x_0,$$

s rozpočtovým obmedzením $I_N = p_1 x_1 + p_2 x_2$, (2.1.1.1)

za podmienok

$$A_i > 0, C > 0, D > 0, x_i \geq 0, c_i > 0, p_i \geq c_i, x_0 \geq 0, p_0 \geq 0, I_T > 0, I_N = I_T - p_0 x_0 > 0 \quad \forall i \in I,$$

kde $A_i > 0$ ¹⁵⁹ je samostatná atraktivita produktu $i \in I$ z pohľadu dopytu, $C > 0$ ¹⁶⁰ je koeficient komplementárnosti produktov, $D > 0$ ¹⁶¹ je atraktivita produktov mimo trh N a $I_N = p_1 x_1 + p_2 x_2$ je rozpočtová hranica dopytu na trhu N.

Koeficient samostatnej atraktivity A_i vyjadruje akúkoľvek atraktivitu ako napríklad kvalita, marketing, alebo dostupnosť a známosť produktu $i \in I$ v jednom koeficiente v zmysle substitúcie produktov na trhu N.

Koeficient komplementárnosti D vyjadruje všetky dôvody komplementárnosti produktov na trhu N, ako napríklad konvexnosť samotných preferencií spotrebiteľov, informovanosť časti

¹⁵⁹ Budeme požadovať, aby samostatné atraktivity produktov boli väčšie ako 0, pretože v prípade, keď je atraktivita niektorého z produktov nulová, potom tento produkt už nemá substitučný vzťah s ostatnými produktami na trhu N. Išlo by o degenerovaný prípad funkcie (2.1.1.1).

¹⁶⁰ Budeme požadovať, aby koeficient komplementárnosti bol väčší ako 0, pretože v prípade, že by bol menší, potom by boli práveže extrémne vo výbere spotreby preferované pred priemerami, teda by nešlo o konvexné, ale o konkávne preferencie, ktoré nie sú veľmi prirodzené a navyše nepravdepodobné, pokiaľ má úžitková funkcia predstavovať preferencie celého dopytu. Konkávne preferencie by pri našom príklade z úvodu časti Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu – trh nedokonalých substitútov znamenalo, že by dostupnosť oboch nápojov KOKA a PEPI na večierku spôsoboval negatívny úžitok, teda napríklad by vyvolal konflikt našich priateľov, čo je pri akomkoľvek type reálneho trhu veľmi málo pravdepodobná situácia. V prípade, že by bol koeficient komplementárnosti rovný 0, potom by išlo o dokonalé substitúty, teda o lineárnu úžitkovú funkciu, ktorej výstupy sme analyzovali v predchádzajúcich častiach.

¹⁶¹ Budeme požadovať, aby atraktivita produktov mimo trh N bola väčšia ako 0, pretože v opačnom prípade by trh N bol trhom všetkých potrieb dopytu.

spotrebiteľov (populácie, dopytu), alebo aj dostupnosť produktov pre časť spotrebiteľov (populáciu, dopyt).

Predpoklad, že produkty 1 a 2 sú substitúty znamená, že hoci by A_1 a A_2 neboli rovnaké, určité množstvo produktu 1 má z pohľadu dopytu rovnaký úžitok, ako určité množstvo produktu 2 a naopak.

Avšak predpoklad, že produkty 1 a 2 sú nedokonalé substitúty, teda že majú aj vzťah komplementárnosti, znamená, že dopyt preferuje cez člena svojej kvázi-lineárnej úžitkovej funkcie Cx_1x_2 aspoň minimálnu spotrebu oboch produktov a nie len jedného z nich.

Hodnota koeficientu komplementárnosti C vo vzťahu k hodnotám $A_i \forall i \in I$ bude definovať mieru substitučného, respektíve komplementárneho vzťahu medzi produktami 1 a 2.

V tomto momente môžeme iba predpokladať, že pokiaľ je hodnota C v porovnaní s $A_i \forall i \in I$ „malá“, komplementárny vzťah produktov bude zanedbateľný a trh N sa bude svojimi výstupmi podobáť na trh s lineárnou úžitkovou funkciou, dokonca až môže dosiahnuť jeho úroveň.

Naopak, pokiaľ bude hodnota C v porovnaní s $A_i \forall i \in I$ „veľká“, potom trh N stratí vlastnosť trhu substitučných produktov, čo by viedlo k monopolnému správaniu producentov, ktorí by si dopyt delili na základe daných $A_i \forall i \in I$ a C , no už bez súťaže, čiže by stanovovali čo možno najvyššie ceny.

Z uvedeného vyplýva, že počiatočná podmienka kladená pre $C > 0$ je iba prvou podmienkou pre C , pričom pre zachovanie efektívneho trhu N s QLUF pravdepodobne pribudnú ďalšie, ktoré budú predmetom nášho ďalšieho výskumu.

2.1.2 Dopytové funkcie na trhu duopolu s QLUF

Predpokladajme, že producenti na trhu N sú schopní vyrábať akékoľvek dopytom požadované množstvo ich produktov. To znamená, že v našej analýze nebudú žiadne produkčné obmedzenia. Čiže producenti $i \in I$ môžu úplne slobodne stanovovať cenu $p_i \geq c_i, \forall i \in I$.

Odvodíme teraz dopytové funkcie po produktoch 1 a 2 pomocou maximalizácie úžitkovej funkcie dopytu za podmienky rozpočtovej hranice. Využijeme na to Lagrangeovu metódu neurčitých koeficientov pre hľadanie lokálneho extrému (maxima) funkcie s rovnostným obmedzením¹⁶². Lagrangeova funkcia pre kvázi-lineárnu úžitkovú funkciu (2.1.1.1) je

$$\mathcal{L}_L(x_1, x_2, \lambda) = A_1x_1 + A_2x_2 + Cx_1x_2 + Dx_0 + \lambda[I_N - p_1x_1 - p_2x_2], \quad (2.1.2.1)$$

¹⁶² (Dixit, 1990)

kde λ je Lagrangeov multiplikátor.

Lagrangeova metóda definuje tri podmienky pre lokálny extrém, ktoré musia byť splnené súčasne:

$$\frac{d\mathcal{L}_L}{dx_1} = A_1 + Cx_2 - \lambda p_1 = 0, \quad (2.1.2.2)$$

$$\frac{d\mathcal{L}_L}{dx_2} = A_2 + Cx_1 - \lambda p_2 = 0, \quad (2.1.2.3)$$

$$\frac{d\mathcal{L}_L}{d\lambda} = I_N - p_1x_1 - p_2x_2 = 0. \quad (2.1.2.4)$$

Z riešenia sústavy (2.1.2.2), (2.1.2.3) a (2.1.2.4) dostaneme pre x_1 a x_2 dopytové funkcie na trhu N, avšak ešte bez uvažovania podmienky $x_i \geq 0 \forall i \in I$:

$$x_1(p_1, p_2) = \frac{I_N}{2p_1} - \frac{A_2}{2C} + \frac{A_1 p_2}{2C p_1}, \quad (2.1.2.5)$$

$$x_2(p_1, p_2) = \frac{I_N}{2p_2} - \frac{A_1}{2C} + \frac{A_2 p_1}{2C p_2}. \quad (2.1.2.6)$$

Z (2.1.2.5) a podmienky $x_1 \geq 0$ dostaneme, že $p_1 \leq \frac{A_1}{A_2}p_2 + \frac{C}{A_2}I_N$, z čoho vyplýva, že keď $p_1 > \frac{A_1}{A_2}p_2 + \frac{C}{A_2}I_N$, potom $x_1 = 0$, no zároveň aj $x_2 = \frac{I_N}{p_2}$.

Analogicky z (2.1.2.6) a podmienky $x_2 \geq 0$ dostaneme, že $p_2 \leq \frac{A_2}{A_1}p_1 + \frac{C}{A_1}I_N$, z čoho vyplýva, že keď $p_2 > \frac{A_2}{A_1}p_1 + \frac{C}{A_1}I_N$, potom $x_2 = 0$, no zároveň aj $x_1 = \frac{I_N}{p_1}$.

Z (2.1.2.5) a (2.1.2.6) a predchádzajúcich úvah dostaneme dopytové funkcie na trhu N:

$$x_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{ak } p_1 > \frac{A_1}{A_2}p_2 + \frac{C}{A_2}I_N \\ \frac{I_N}{2p_1} - \frac{A_2}{2C} + \frac{A_1 p_2}{2C p_1} & \text{ak } p_1 \in \left(\frac{A_1}{A_2}p_2 - \frac{C}{A_2}I_N, \frac{A_1}{A_2}p_2 + \frac{C}{A_2}I_N\right), \\ \frac{I_N}{p_1} & \text{ak } p_1 < \frac{A_1}{A_2}p_2 - \frac{C}{A_2}I_N \end{cases} \quad (2.1.2.7)$$

$$x_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{ak } p_2 > \frac{A_2}{A_1}p_1 + \frac{C}{A_1}I_N \\ \frac{I_N}{2p_2} - \frac{A_1}{2C} + \frac{A_2 p_1}{2C p_2} & \text{ak } p_2 \in \left(\frac{A_2}{A_1}p_1 - \frac{C}{A_1}I_N, \frac{A_2}{A_1}p_1 + \frac{C}{A_1}I_N\right), \\ \frac{I_N}{p_2} & \text{ak } p_2 < \frac{A_2}{A_1}p_1 - \frac{C}{A_1}I_N \end{cases} \quad (2.1.2.8)$$

2.1.3 Funkcie najlepšej odpovede na trhu duopolu s QLUF

Predpokladajme, že producenti na trhu N sú racionálni a že ich jedinou motiváciou je maximalizácia ich zisku, s jedným zjemnením tohto predpokladu, ktoré bolo uvedené pri definovaní kvázi-lineárnej úžitkovej funkcie duopolu a teda, že producenti budú produkovať akékoľvek požadované množstvo dopytom.

Doplňme ešte ďalší predpoklad, že obaja producenti majú úplnú informáciu o hodnotách A_i , C , D , I_M , f_i , $c_i \forall i \in I$, čiže obaja poznajú (2.1.2.7) a (2.1.2.8) a že dokážu pozorovať $p_i \forall i \in I$.

Pozrime sa na problém maximalizácie profitu oboch producentov, čo znamená $\forall i \in I$:

$$\max \pi_i(p_i) = p_i x_i - f_i - c_i x_i. \quad (2.1.3.1)$$

Ak zafixujeme $p_2 = p_2^{fix}$, producent 1 nikdy nestanoví $p_1 > \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N$, pokiaľ $c_1 > \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N$, kedy producent 1 stanoví $p_1 = c_1$.¹⁶³ Totiž stanovenie $p_1 > \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N$ by znamenalo nulový dopyt po produkte 1, teda $x_1 = 0$, čo by znamenalo minimálny profit pre producenta 1 $\pi_1 = -f_1$.

Ak $c_1 > \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N$, potom producent 1 stanovuje $p_1 = c_1$, hoci je v takom prípade nulový dopyt po produkte 1, pretože to je minimálna cena, kedy je producent 1 ešte ochotný produkovať.¹⁶⁴

Rovnako môžeme uvažovať o producentovi 2, ak sa snaží stanoviť $p_2 > \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix} + \frac{C}{A_1} I_N$, keď máme fixovanú $p_1 = p_1^{fix}$. Producent 2 nikdy nestanoví $p_2 > \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix} + \frac{C}{A_1} I_N$ (iba v prípade, keď $c_2 > \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix} + \frac{C}{A_1} I_N$ a v takom prípade stanoví $p_2 = c_2$ z čoho vyplýva $x_2 = 0$), pretože to by viedlo k nulovému dopytu po produkte 2 ($x_2 = 0$), čo by znamenalo minimálny profit pre producenta 2 ($\pi_2 = -f_2$).

Nech je teraz $c_1 = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N$ pri fixovanej $p_2 = p_2^{fix}$. Pretože producent 1 nemôže stanoviť $p_1 < c_1$ a keďže neplatí $c_1 > \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N$, teda producent 1 stanoví $p_1 = c_1 =$

¹⁶³ Predpoklad, že producent 1 stanoví $p_1 = c_1$ v prípade ak $c_1 > \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N$ vychádza z podmienky $p_1 \geq c_1$ a z predpokladu, že ak $p_1 = c_1$ producent 1 preferuje produkovať dopytované množstvo produktu 1, hoci je producent 1 indiferentný medzi produkovaním a neprodukovaním v zmysle jeho profitu π_1 .

¹⁶⁴ Vychádza z predpokladu, že producent 1 preferuje produkovať akékoľvek požadované množstvo $x_1 \geq 0$ v prípade, keď $p_1 = c_1$, hoci producent 1 je indiferentný medzi produkovaním a neprodukovaním v zmysle profitu π_1 .

$\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N$. Z (2.1.2.7) mu však vyplýva $x_1 = 0$ a teda $\pi_1 = -f_1$.

Analogicky ak pri fixovanej $p_1 = p_1^{fix}$ platí pre producenta 2 $c_2 = \frac{A_2}{A_1}p_1^{fix} + \frac{C}{A_1}I_N$, producent 2 volí $p_2 = c_2 = \frac{A_2}{A_1}p_1^{fix} + \frac{C}{A_1}I_N$, z čoho vyplýva $x_2 = 0$ a $\pi_2 = -f_2$.

Podme s c_1 producenta 1 nižšie pri $p_2 = p_2^{fix}$ a nech $c_1 > \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}I_N \wedge c_1 < \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N$. V takom prípade producent 1 môže voliť $p_1 \geq c_1$, avšak už sme dokázali, že nezvolí $p_1 > \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N$. Teda nech $p_1 \in \langle c_1, \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \rangle$, kde $c_1 \in \left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}I_N, \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \right)$. V takomto prípade z (2.1.2.7) vyplýva, že dopyt $x_1 = \frac{I_N}{2p_1} - \frac{A_2}{2C} + \frac{A_1}{2C} \frac{p_2^{fix}}{p_1}$. Ak toto doplníme do $\pi_1(p_1) = p_1x_1 - f_1 - c_1x_1$ dostaneme

$$\pi_1(p_1) = p_1 \left(\frac{I_N}{2p_1} - \frac{A_2}{2C} + \frac{A_1}{2C} \frac{p_2^{fix}}{p_1} \right) - f_1 - c_1 \left(\frac{I_N}{2p_1} - \frac{A_2}{2C} + \frac{A_1}{2C} \frac{p_2^{fix}}{p_1} \right)$$

a keďže prioritou producenta 1 je maximalizácia profitu, teda $\max \pi_1(p_1)$, potom dostávame podmienku pre maximum $(\pi_1)'_{p_1} = 0$. Teda ak $p_1 \in \langle c_1, \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \rangle$, kde $c_1 \in \left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}I_N, \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \right)$, potom najlepšia odpoveď producenta 1 na p_2^{fix} je

$$p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \right)}. \quad (2.1.3.2)$$

Dokážeme, že v prípade ak $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \right)}$, kde $c_1 \in \left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}I_N, \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \right)$ platí $p_1 \geq c_1$. Z $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \right)} \geq c_1$ úpravami dostaneme $\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \geq c_1$, čo platí, pretože sme definovali $c_1 < \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N$, navyše vidíme, že $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \right)} > c_1$.

Dokážeme ešte, že $\pi_1 > -f_1$, keď $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \right)}$, kde $c_1 \in \left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}I_N, \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \right)$. $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \right)} \geq c_1 > 0$ a $x_1 = \frac{A_1p_2^{fix} + c_1I_N - \sqrt{A_2c_1(A_1p_2^{fix} + c_1I_N)}}{2C\sqrt{c_1\left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N\right)}}$, kde je menovateľ kladný a čitateľ je kladný práve vtedy, keď

$A_1 p_2^{fix} + C I_N > \sqrt{A_2 c_1 (A_1 p_2^{fix} + C I_N)}$, z čoho po úpravách dostaneme $\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N > c_1$,

čo je naša pôvodná podmienka, teda $x_1 > 0$. A keďže $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \right)} > c_1$,

potom $\pi_1 > -f_1$.

Analogicky ak pri fixovanej $p_1 = p_1^{fix}$ platí pre producenta 2 $c_2 \in \left(\frac{A_2}{A_1} p_1^{fix} - \frac{C}{A_1} I_N, \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix} + \frac{C}{A_1} I_N \right)$ a teda producent 2 volí $p_2 \in \langle c_2, \frac{A_2}{A_1} p_1^{fix} + \frac{C}{A_1} I_N \rangle$, potom

$$p_2 = \sqrt{c_2 \left(\frac{A_2}{A_1} p_1^{fix} + \frac{C}{A_1} I_N \right)}, \quad (2.1.3.3)$$

a $p_2 = \sqrt{c_2 \left(\frac{A_2}{A_1} p_1^{fix} + \frac{C}{A_1} I_N \right)} x_2 > c_2$, pričom $x_2 > 0$ a $\pi_2 > -f_2$.

Nech teraz pre producenta 1 pri $p_2 = p_2^{fix}$ platí $c_1 = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}$. Teda producent 1 vyberá

$p_1 \in \langle \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}, \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \rangle$, pretože $p_1 > \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N$ nikdy nezvolí, ak $c_1 =$

$\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}$. Ak $p_1 \in \langle \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}, \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \rangle$, potom z (2.1.2.7) vyplýva, že $x_1 =$

$\frac{I_N}{2p_1} - \frac{A_2}{2C} + \frac{A_1}{2C} \frac{p_2^{fix}}{p_1}$. Ak toto doplníme do $\pi_1(p_1) = p_1 x_1 - f_1 - c_1 x_1$ dostaneme

$$\pi_1(p_1) = p_1 \left(\frac{I_N}{2p_1} - \frac{A_2}{2C} + \frac{A_1}{2C} \frac{p_2^{fix}}{p_1} \right) - f_1 - c_1 \left(\frac{I_N}{2p_1} - \frac{A_2}{2C} + \frac{A_1}{2C} \frac{p_2^{fix}}{p_1} \right)$$

a keďže prioritou producenta 1 je maximalizácia profitu, teda $\max \pi_1(p_1)$, potom dostávame

podmienku pre maximum $(\pi_1)'_{p_1} = 0$. Teda ak $p_1 \in \langle \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}, \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \rangle$, potom

najlepšia odpoveď producenta 1 na p_2^{fix} je

$$p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \right)}. \quad (2.1.3.4)$$

Dokážeme, že v prípade ak $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \right)}$, kde $c_1 = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N$ platí $p_1 \geq$

c_1 . Z $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \right)} \geq c_1 = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N$ úpravami dostaneme

$\left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N \right) \left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \right) \geq \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N, \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N = c_1 > 0$, teda

z predchádzajúceho dostaneme $\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \geq \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N$, čo je prirodzene pravda

a tiež navyše $\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N > \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}I_N$, teda $p_1 > c_1$ ak $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \right)}$ a $c_1 = \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}$.

Dokážeme ešte, že $\pi_1 > -f_1$, keď $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \right)}$ a $c_1 = \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}$. $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \right)} \geq c_1 > 0$ a $x_1 = \frac{A_1 p_2^{fix} + C I_N - \sqrt{A_1^2 (p_2^{fix})^2 - C^2 I_N^2}}{2C \sqrt{\left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}I_N \right) \left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \right)}}$. Keďže $\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}I_N =$

$c_1 > 0$ menovateľ je kladný. Aby bol aj čitateľ kladný, potom $A_1 p_2^{fix} + C I_N >$

$\sqrt{A_1^2 (p_2^{fix})^2 - C^2 I_N^2}$, z čoho dostaneme $(A_1 p_2^{fix} + C I_N) > (A_1 p_2^{fix} - C I_N)$, čo je pravda

a teda $x_1 > 0$. A keďže $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \right)} > c_1 = \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}I_N$, potom $\pi_1 > -f_1$.

Analogicky ak pri fixovanej $p_1 = p_1^{fix}$ platí pre producenta 2 $c_1 = \frac{A_2}{A_1}p_1^{fix} - \frac{C}{A_1}I_N$ a teda

producent 2 volí $p_2 \in \langle \frac{A_2}{A_1}p_1^{fix} - \frac{C}{A_1}I_N, \frac{A_2}{A_1}p_1^{fix} + \frac{C}{A_1}I_N \rangle$, potom

$$p_2 = \sqrt{c_2 \left(\frac{A_2}{A_1}p_1^{fix} + \frac{C}{A_1}I_N \right)}, \quad (2.1.3.5)$$

a $p_2 = \sqrt{c_2 \left(\frac{A_2}{A_1}p_1^{fix} + \frac{C}{A_1}I_N \right)} x_2 > c_2$, pričom $x_2 > 0$ a $\pi_2 > -f_2$.

Ešte sme nevypísalí najlepšiu odpoveď producenta 1 v situácii, keď je $p_2 = p_2^{fix}$ a $c_1 <$

$\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}I_N$. V takom prípade producent 1 volí $p_1 \in \langle c_1, \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \rangle$, kde $c_1 <$

$\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}I_N$, pretože sme už ukázali, že producent 1 nezvolí $p_1 > \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N$, ak $c_1 <$

$\frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}I_N$.

V takýchto možnostiach voľby už dopyt nie je rovnaký v zmysle tvaru dopytovej funkcie pre

všetky možnosti voľby. Ak producent 1 zvolí $p_1 \in \langle \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}I_N, \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \rangle$, potom z

(2.1.2.7) má dopyt tvar $x_1 = \frac{I_N}{2p_1} - \frac{A_2}{2C} + \frac{A_1}{2C} \frac{p_2^{fix}}{p_1}$, avšak ak producent 1 zvolí $p_1 < \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} -$

$\frac{C}{A_2}I_N$, potom má dopyt tvar $x_1 = \frac{I_N}{p_1}$.

V tomto momente je dôležité si uvedomiť, aký je dopyt v prípade, že $p_1 = \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}I_N$.

Ako sme definovali, ak $p_1 \in \langle \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} - \frac{C}{A_2}I_N, \frac{A_1}{A_2}p_2^{fix} + \frac{C}{A_2}I_N \rangle$, potom $x_1 = \frac{I_N}{2p_1} - \frac{A_2}{2C} + \frac{A_1}{2C} \frac{p_2^{fix}}{p_1}$.

Dosaďme však $p_1 = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N$ do x_1 a vidíme, že po úpravách dostaneme $x_1 = \frac{\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N}{\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N} = \frac{I_N}{p_1}$. Teda v podstate môžeme tvrdiť, že pre $p_1 \in \langle c_1, \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N \rangle$, kde $c_1 < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N$ má dopyt tvar $x_1 = \frac{I_N}{p_1}$. Z toho vyplýva, že pre $p_1 \in \langle c_1, \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N \rangle$, kde $c_1 < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N$ producent 1 dosahuje maximálny profit pri voľbe $p_1 = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N$.

Ak teda $p_2 = p_2^{fix}$ a $c_1 < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N$, potom sa producent 1 rozhoduje medzi voľbou

$p_1^* = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \right)}$, ktorá maximalizuje profit, ak producent volí $p_1 \in$

$\left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N, \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \right)$ ¹⁶⁵ a $p_1^L = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N$, pričom o tomto sa rozhoduje iba

v prípade, keď $p_1^* = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \right)} > \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N = p_1^L$.

Totíž pokiaľ $p_1^* = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \right)} < \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N = p_1^L$, teda keď

$$c_1 < \frac{\left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N \right)^2}{\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N}, \quad (2.1.3.6)$$

potom $p_1^* \in \langle c_1, \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N \rangle$ a v takom prípade sme ukázali, že producent 1 volí $p_1 =$

$\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N$. Navyše, ak $p_1^* = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \right)} = \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N = p_1^L$, z čoho

vyplýva

$$c_1 = \frac{\left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N \right)^2}{\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N}, \quad (2.1.3.7)$$

potom je optimálnym rozhodnutím producenta 1 voliť $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \right)} =$

$\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N$.

Nech teda $c_1 \in \left(\frac{\left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N \right)^2}{\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N}, \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N \right)$ pri fixovanom p_2^{fix} . Z predchádzajúcich

úvah vyplýva, že v takom prípade $p_1^* = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \right)} > \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N = p_1^L$.

Dokážeme, že napriek tomu, že pri voľbe p_1^L by mal producent celý dopyt trhu N, aj tak je pre

¹⁶⁵ To vyplýva z maximalizácie profitu na intervale $p_1 \in \langle \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N, \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} + \frac{C}{A_2} I_N \rangle$.

neho optimálnejšie voliť p_1^* , kedy sa o dopyt trhu N delí so svojím konkurentom. Teda

$$\text{dokážeme } \pi_1^*(p_1^*) > \pi_1^L(p_1^L) \quad \forall c_1 \in \left(\frac{(A_1 p_2^{fix} - C I_N)^2}{A_2(A_1 p_2^{fix} + C I_N)}, \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N \right), \text{ kde } \pi_1^*(p_1^*) =$$

$$p_1^* \left(\frac{I_N}{2p_1^*} - \frac{A_2}{2C} + \frac{A_1}{2C} \frac{p_2^{fix}}{p_1^*} \right) - f_1 - c_1 \left(\frac{I_N}{2p_1^*} - \frac{A_2}{2C} + \frac{A_1}{2C} \frac{p_2^{fix}}{p_1^*} \right) \text{ a } \pi_1^L(p_1^L) = I_N - f_1 - c_1 \frac{I_N}{p_1^L}, \quad \forall c_1 \in$$

$$\left(\frac{(A_1 p_2^{fix} - C I_N)^2}{A_2(A_1 p_2^{fix} + C I_N)}, \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N \right).$$

Riešením $\pi_1^*(p_1^*) = \pi_1^L(p_1^L)$ dostávame kvadratickú rovnicu $(A_2)^2 \frac{(A_1 p_2^{fix} + C I_N)^2}{(A_1 p_2^{fix} - C I_N)^2} (c_1)^2 -$

$$2A_2(A_1 p_2^{fix} + C I_N)c_1 + (A_1 p_2^{fix} - C I_N)^2 > 0$$

pre hodnotu c_1 , ktorá má iba jeden koreň,

$$c_1 = \frac{(A_1 p_2^{fix} - C I_N)^2}{A_2(A_1 p_2^{fix} + C I_N)}, \text{ teda podmienku, kedy } p_1^* = p_1^L \text{ a teda samozrejme } \pi_1^*(p_1^*) = \pi_1^L(p_1^L).$$

Riešením $\pi_1^*(p_1^*) > \pi_1^L(p_1^L)$ vzhľadom na c_1 teda dostaneme množinu všetkých reálnych čísiel, avšak ak k riešeniu dodáme našu podmienku $c_1 \in \left(\frac{(A_1 p_2^{fix} - C I_N)^2}{A_2(A_1 p_2^{fix} + C I_N)}, \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N \right)$,

potom platí, že pre $\forall c_1 \in \left(\frac{(A_1 p_2^{fix} - C I_N)^2}{A_2(A_1 p_2^{fix} + C I_N)}, \frac{A_1}{A_2} p_2^{fix} - \frac{C}{A_2} I_N \right) : \pi_1^*(p_1^*) > \pi_1^L(p_1^L)$.

Keďže sú vyššie uvedené situácie symetrické aj pre producenta 2, pri rovnakom uvažovaní o rozhodovaní producenta 2 dôjdeme k analogickým výstupom.

Z vyššie uvedeného odvodíme funkciu najlepšej odpovede producenta 1 ako

$$p_1(p_2) = \begin{cases} c_1 & \text{ak } c_1 \geq \frac{A_1}{A_2} p_2 + \frac{C}{A_2} I_N \\ \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2 + \frac{C}{A_2} I_N \right)} & \text{ak } c_1 \in \left(\frac{(A_1 p_2 - C I_N)^2}{A_2(A_1 p_2 + C I_N)}, \frac{A_1}{A_2} p_2 + \frac{C}{A_2} I_N \right) \\ \frac{A_1}{A_2} p_2 - \frac{C}{A_2} I_N & \text{ak } c_1 \leq \frac{(A_1 p_2 - C I_N)^2}{A_2(A_1 p_2 + C I_N)} \end{cases} \quad (2.1.3.8)$$

a funkciu najlepšej odpovede producenta 2 ako

$$p_2(p_1) = \begin{cases} c_2 & \text{ak } c_2 \geq \frac{A_2}{A_1} p_1 + \frac{C}{A_1} I_N \\ \sqrt{c_2 \left(\frac{A_2}{A_1} p_1 + \frac{C}{A_1} I_N \right)} & \text{ak } c_2 \in \left(\frac{(A_2 p_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 p_1 + C I_N)}, \frac{A_2}{A_1} p_1 + \frac{C}{A_1} I_N \right) \\ \frac{A_2}{A_1} p_1 - \frac{C}{A_1} I_N & \text{ak } c_2 \leq \frac{(A_2 p_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 p_1 + C I_N)} \end{cases} \quad (2.1.3.9)$$

2.1.4 Dôkaz ekvilibria na trhu duopolu s QLUF

Existenciu ekvilibria na trhu duopolu s QLUF dokážeme pomocou pojmov a prostriedkov teórie hier, ktoré sme uviedli v Poznámke o pojmoch teórie hier časti Dôkaz ekvilibria na trhu duopolu s LUF využitím teórie hier.

Definujme trh N duopolu s QLUF ako hru. Keďže nejde o opakovanú, ale jednorazovú situáciu, pôjde o statickú hru.

Racionálnych producentov $I = \{1, 2\}$ budeme nazývať hráčmi $I = \{1, 2\}$.

Množina čistých stratégií každého hráča $i \in I$ je množina $\langle c_i, \infty \rangle$, ktorá je definovaná možnosťami voľby p_i . Keďže ide o statickú hru, množina čistých stratégií je zároveň aj množinou čistých akcií hráča v statickej hre.

Keďže má práca ambíciu aplikovateľnosti v reálnom svete, budeme sa zaoberať iba čistými stratégiami hráčov, teda nebudeme uvažovať možnosť rozdelenia pravdepodobnosti výberu hráčov nad množinou ich čistých stratégií.

Funkcie výplat hráčov na trhu M sú definované ako ich profit, teda $\pi_i = p_i x_i - f_i - c_i x_i \forall i \in I$, avšak s predpokladom, že hráči preferujú produkciu pred neprodukovaním, pokiaľ sú z hľadiska profitu indiferentní v tomto rozhodovaní.¹⁶⁶

V predchádzajúcich častiach kapitoly 2.1 Duopol s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou sme definovali kvázi-lineárnu úžitkovú funkciu a následne dopytovú funkciu po produktoch $i \in I$ v závislosti od všetkých p_i , ktoré ovplyvňujú funkcie výplat hráčov i .

Následne sme definovali reakčné funkcie hráčov $i \in I$, ktoré sme nazvali funkcie najlepšej odpovede (2.1.3.8) a (2.1.3.9).

Keďže poznáme reakčné funkcie a predpokladáme racionalitu hráčov, môžeme prejsť k identifikácii Nashových ekvilibrií, ktoré definujú situáciu, z ktorej sa žiadnemu hráčovi neoplatí jednostranne vychýliť.

Rozdeľme ale najprv hru duopolu s QLUF na samostatné hry na základe „relatívneho“ vzťahu jednotkových variabilných nákladov hráčov tak, aby v každej takejto samostatnej hre existoval iba jeden konkrétny profil ekvilibria.

Na to, aby sme mohli hru duopolu s QLUF rozdeliť týmto spôsobom, potrebujeme poznať definície hraníc „relatívnych“ variabilných nákladov, kedy ekvilibriá môžu nadobúdať iné profily.

¹⁶⁶ Takto definovaná statická hra sa v terminológii teórie hier nazýva aj strategický tvar hry.

Najprv si musíme uvedomiť, čo znamená v duopole s QLUF výraz „relatívny“ vzťah jednotkových variabilných nákladov. V prípade duopolu s LUF s dokonalými substitútmi do tohto vzťahu vstupovali iba samotné výšky jednotkových variabilných nákladov hráčov a atraktivity ich produktov, no v prípade duopolu s QLUF s nedokonalými substitútmi do tohto vzťahu vstupuje ešte aj komplementárna zložka produktov, ktorú sme definovali ako C a to môže „relatívny“ vzťah jednotkových variabilných nákladov hráčov zmeniť. Pri pohľade na reakčné funkcie (2.1.3.8) a (2.1.3.9) ale získavame indície, ako by tento „relatívny“ vzťah variabilných nákladov mohol byť definovaný.

Analyzujme podmienky (2.1.3.8) vo vzťahu k $p_2 = c_2$, pretože to je najnižšia možná stratégia hráča 2.

Ekvilibrium duopolu s QLUF s hráčom s „relatívne veľmi vysokými“ variabilnými nákladmi

Nech teda najprv $c_1 \geq \frac{A_1}{A_2}c_2 + \frac{C}{A_2}I_N$. V takom prípade hráč 1 volí $p_1 = c_1$, pričom očakáva $x_1 = 0$ a teda $\pi_1 = -f_1$, čo je minimálny profit pre hráča 1.

Je však v prípade, ak hráč 1 hrá $p_1 = c_1$ optimálne pre hráča 2 hrať $p_2 = c_2$?

Z (2.1.3.9) vidíme, že nie. Hráč 2 (ak hráč 1 hrá $p_1 = c_1$) síce voľbou $p_2 = c_2$ získava celý dopyt, ale jeho profit je v tom prípade iba $\pi_2 = -f_2$ a profit je to, čo hráč 2 uprednostňuje pred objemom produkcie.

Z (2.1.3.9) vidíme, že minimálna cena, ktorú hráč 2 stanoví, je $p_2 = \frac{A_2}{A_1}c_1 - \frac{C}{A_1}I_N$, čo mu dokonca stále determinuje celý dopyt. Z $c_1 \geq \frac{A_1}{A_2}c_2 + \frac{C}{A_2}I_N$ dostávame $c_2 \leq \frac{A_2}{A_1}c_1 - \frac{C}{A_1}I_N = p_2$, čo teda umožňuje hráčovi 2 stanoviť túto cenu.

Avšak hráč 2 stanoví cenu $p_2 = \frac{A_2}{A_1}c_1 - \frac{C}{A_1}I_N$ iba ak $c_2 \leq \frac{(A_2c_1 - CI_N)^2}{A_1(A_2c_1 + CI_N)}$. Ak hráč 2 stanovuje $p_2 = \frac{A_2}{A_1}c_1 - \frac{C}{A_1}I_N$, potom na základe (2.1.3.8) hráč 1 volí $p_1 = c_1$ a dostávame ekvilibrium $p_1^* = c_1$, $p_2^* = \frac{A_2}{A_1}c_1 - \frac{C}{A_1}I_N$, z čoho vyplýva $x_1 = 0$ a teda $\pi_1 = -f_1$ a $x_2 = \frac{I_N}{p_2}$ a teda $\pi_2 = I_N - f_2 - c_2 \frac{I_N}{p_2} = I_N \left(\frac{p_2 - c_2}{p_2} \right) - f_2 > -f_2$ pretože $p_2 = \frac{A_2c_1 - CI_N}{A_1} = \frac{(A_2c_1 - CI_N)(A_2c_1 + CI_N)}{A_1(A_2c_1 + CI_N)} > \frac{(A_2c_1 - CI_N)^2}{A_1(A_2c_1 + CI_N)} \geq c_2$.

Všimnime si, že samotná podmienka $c_1 \geq \frac{A_1}{A_2}c_2 + \frac{C}{A_2}I_N$ pre hráča 1 s „relatívne vyššími“ variabilnými nákladmi v hre duopolu s QLUF s nedokonalými substitútmi, ktorá berie navyše

do úvahy aj komplementárny efekt cez člena $\frac{C}{A_2} I_N$, nevedie pre hráča 1 k nulovému dopytu po jeho produkte. Aby hráč 1 čelil nulovému dopytu, potom musí platiť dokonca $c_2 \leq$

$$\frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)}. \text{ To, že podmienka } c_2 \leq \frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)} \text{ je vyšším nárokom na } c_1 \text{ ako } c_1 \geq \frac{A_1}{A_2} c_2 + \frac{C}{A_2} I_N, \text{ dokážeme inverzne cez } c_2. \text{ Ak } c_1 \geq \frac{A_1}{A_2} c_2 + \frac{C}{A_2} I_N \Rightarrow c_2 \leq \frac{A_2 c_1 - C I_N}{A_1} = \frac{(A_2 c_1 - C I_N)(A_2 c_1 + C I_N)}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)} > \frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)}.$$

Teda ak položíme pre c_2 podmienku $c_2 \leq \frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)}$, potom cez relatívny vzťah

požadujeme od c_1 , aby bolo ešte vyššie ako pôvodná podmienka $c_1 \geq \frac{A_1}{A_2} c_2 + \frac{C}{A_2} I_N$. Teda

podmienka $c_2 \leq \frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)}$ inverzne definuje požiadavku na c_1 , ktorá je vyššia, ako $c_1 \geq$

$\frac{A_1}{A_2} c_2 + \frac{C}{A_2} I_N$, preto hovoríme o duopole s QLUF s hráčom s „relatívne veľmi vysokými“

variabilnými nákladmi.

Duopol s QLUF s hráčom 1 s „relatívne veľmi vysokými“ variabilnými nákladmi, teda s $c_2 \leq$

$\frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)}$ má jediné Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách $p_1^* = c_1$, $p_2^* = \frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{C}{A_1} I_N$,

pretože sa žiadnemu hráčovi neoplatí vychýliť z tohto profilu stratégií a navyše je jediné Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách.

To znamená, že hráči v duopole s QLUF s $c_2 \leq \frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)}$ zahrajú tento profil stratégií.

Ekvilibrium duopolu s QLUF s hráčom s „relatívne vysokými“, ale nie s „relatívne veľmi vysokými“ variabilnými nákladmi

Pokračujme v úvahách s podmienkou $c_1 \geq \frac{A_1}{A_2} c_2 + \frac{C}{A_2} I_N$, avšak teraz bude platiť súčasne aj

$c_2 > \frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)}$. Teda z pohľadu hráča 2 platí $c_2 \in \left(\frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)}, \frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{C}{A_1} I_N \right)$.

Hráč 2 stanoví cenu $p_2 = \frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{C}{A_1} I_N$ iba v prípade, ak $c_2 \leq \frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)}$. Pokiaľ je $c_2 >$

$\frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)}$ a stále platí $c_1 \geq \frac{A_1}{A_2} c_2 + \frac{C}{A_2} I_N$, potom je hráč 2 dokonca ochotný sa o dopyt

podeliť s hráčom 1, pretože zvolí $p_2 = \sqrt{c_2 \left(\frac{A_2}{A_1} c_1 + \frac{C}{A_1} I_N \right)}$ (čo vyplýva z (2.1.3.9)), čo mu

prinesie ešte vyšší profit, ako voľba $p_2 = \frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{C}{A_1} I_N$.

Ak však hráč 2 volí $p_2 = \sqrt{c_2 \left(\frac{A_2}{A_1} c_1 + \frac{c}{A_1} I_N \right)}$ za podmienky $c_2 \in \left(\frac{(A_2 c_1 - c I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + c I_N)}, \frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{c}{A_1} I_N \right)$, potom už hráč 1 nebude voliť $p_1 = c_1$, ale dostáva sa do situácie $c_1 \in$

$\left(\frac{(A_1 p_2 - c I_N)^2}{A_2(A_1 p_2 + c I_N)}, \frac{A_1}{A_2} p_2 + \frac{c}{A_2} I_N \right)$, keď $p_2 = \sqrt{c_2 \left(\frac{A_2}{A_1} c_1 + \frac{c}{A_1} I_N \right)} \wedge c_1 \geq \frac{A_1}{A_2} c_2 + \frac{c}{A_2} I_N \wedge c_2 > \frac{(A_2 c_1 - c I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + c I_N)}$. V takom prípade hráč 1 volí $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2 + \frac{c}{A_2} I_N \right)} = \sqrt{\frac{c_1}{A_2} \left(\sqrt{A_1 c_2 (A_2 c_1 + c I_N)} + c I_N \right)}$ (vychádza z (2.1.3.8)).

To, že $c_1 < \sqrt{\frac{c_1}{A_2} \left(\sqrt{A_1 c_2 (A_2 c_1 + c I_N)} + c I_N \right)}$ dokazuje to, že po úpravách dostaneme vzťah $c_2 > \frac{(A_2 p_1 - c I_N)^2}{A_1(A_2 p_1 + c I_N)}$ a to je náš predpoklad.

Avšak ak hráč 1 volí $p_1 = \sqrt{\frac{c_1}{A_2} \left(\sqrt{A_1 c_2 (A_2 c_1 + c I_N)} + c I_N \right)}$, potom hráč 2 už nezvolí $p_2 = \sqrt{c_2 \left(\frac{A_2}{A_1} c_1 + \frac{c}{A_1} I_N \right)}$, ale opäť bude optimalizovať svoju voľbu cez (2.1.3.9). Na čo následne zareaguje hráč 1 optimalizáciou voľby p_1 cez (2.1.3.8) a tak ďalej.

Za podmienok $c_1 \geq \frac{A_1}{A_2} c_2 + \frac{c}{A_2} I_N \wedge c_2 > \frac{(A_2 c_1 - c I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + c I_N)}$ sme sa dostali do situácie nekonečného počtu optimalizácii hráčov cez ich reakčné funkcie. No v tejto situácii už hráči nemenia tvar svojej reakčnej funkcie, pre hráča 1 si stále zachováva tvar $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2 + \frac{c}{A_2} I_N \right)}$ a pre hráča 2 $p_2 = \sqrt{c_2 \left(\frac{A_2}{A_1} p_1 + \frac{c}{A_1} I_N \right)}$. Tu využijeme definíciu Nashovho ekvilibria v čistých stratégiách v zmysle reakčných funkcií hráčov. Pokiaľ kombinácia reakčných funkcií definuje ekvilibrium, z ktorých sa žiadnemu hráčovi neoplatí jednostranne vychýliť, potom je toto ekvilibrium Nashovým ekvilibriom v čistých stratégiách.

Dostaneme teda úlohu dvoch rovníc o dvoch neznámych

$$p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2 + \frac{c}{A_2} I_N \right)} \wedge p_2 = \sqrt{c_2 \left(\frac{A_2}{A_1} p_1 + \frac{c}{A_1} I_N \right)}, \quad (2.1.4.1)$$

za podmienok $p_1 \geq c_1 > 0, p_2 \geq c_2 > 0, c_1 \geq \frac{A_1}{A_2} c_2 + \frac{c}{A_2} I_N$ a $c_2 > \frac{(A_2 c_1 - c I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + c I_N)}$.

Úpravami (2.1.4.1) dostávame pre p_1 rovnicu

$$p_1^4 - 2\frac{c_1}{A_2}CI_N p_1^2 - \frac{c_1^2}{A_2}A_1 c_2 p_1 + \frac{c_1^2}{A_2^2}CI_N(CI_N - A_1 c_2) = 0. \quad (2.1.4.2)$$

Na nájdenie koreňov využijeme všeobecný vzorec na hľadanie koreňov polynómu 4.

stupňa¹⁶⁷, ktorý je možné odvodiť z Ferrariho metódy na hľadanie koreňov polynómu 4.

stupňa¹⁶⁸. Všeobecný vzorec pre danú rovnicu $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ definuje

$$x_{1,2} = -\frac{b}{4a} - S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}}, \quad x_{3,4} = -\frac{b}{4a} - S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}},$$

$$\text{kde } p = \frac{8ac-3b^2}{8a^2}, \quad q = \frac{b^3-4abc+8a^2d}{8a^3}, \quad S = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3a}\left(Q + \frac{\Delta_0}{Q}\right)}, \quad Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}}, \quad \Delta_0 =$$

$$c^2 - 3bd + 12ae, \quad \Delta_1 = 2c^3 - 9bcd + 27b^2e + 27ad^2 - 72ace.$$

Z (2.1.4.2) vidíme, že pre všeobecný vzorec dostávame

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -2\frac{c_1}{A_2}CI_N, \quad d = -\frac{c_1^2}{A_2}A_1 c_2, \quad e = \frac{c_1^2}{A_2^2}CI_N(CI_N - A_1 c_2)$$

a teda, že pre p_1 dostávame

$$p_{11} = -S - \sqrt{\frac{c_1}{A_2}\left(CI_N - c_1 \frac{A_1 c_2}{4S} - \frac{A_2}{c_1}S^2\right)},$$

$$p_{12} = -S + \sqrt{\frac{c_1}{A_2}\left(CI_N - c_1 \frac{A_1 c_2}{4S} - \frac{A_2}{c_1}S^2\right)},$$

$$p_{13} = -S - \sqrt{\frac{c_1}{A_2}\left(CI_N + c_1 \frac{A_1 c_2}{4S} - \frac{A_2}{c_1}S^2\right)},$$

$$p_{14} = -S + \sqrt{\frac{c_1}{A_2}\left(CI_N + c_1 \frac{A_1 c_2}{4S} - \frac{A_2}{c_1}S^2\right)},$$

(2.1.4.3)

kde

¹⁶⁷ (Borwein, Erdelyi, 1995), (Das, 2014), (Janson, 2010), (Jao, 2013), (Krvavica, 2019), (Landesman, 2017)

¹⁶⁸ (Cardano, 1545)

$$\Delta_0 = 4 \frac{c_1^2}{A_2^2} C I_N (4 C I_N - 3 A_1 c_2),$$

$$\Delta_1 = \frac{c_1^3}{A_2^3} (27 A_2 c_1 (A_1 c_2)^2 + 16 (C I_N)^2 (8 C I_N - 9 A_1 c_2)),$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4 \Delta_0^3}}{2}}, S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{c_1}{A_2} C I_N + \frac{1}{3} \left(Q + \frac{\Delta_0}{Q} \right)}.$$

Keďže hľadáme $p_1 \in \mathbb{R}$, potom hľadáme iba také korene rovnice (2.1.4.2), kde $S \in \mathbb{R}$ a teda nutne musí platiť $S \geq 0$. A keďže hľadáme $p_1 \geq c_1 > 0$ a $p_1 \in \mathbb{R}$, potom môžeme vylúčiť korene p_{1_1} a p_{1_4} , pretože tie sú nutne záporné v $\mathbb{R}$.

Stále máme dva korene p_{1_2} a p_{1_4} , ktoré však nutne nemusia existovať v $\mathbb{R}$, respektíve nemusia spĺňať podmienky našej hry, ktoré kladieme na p_1 cez podmienky kladené na c_1 (respektíve c_2).

Na to, aby sme identifikovali rozhodnutie racionálneho hráča 1 potrebujeme dokázať, že existuje riešenie (2.1.4.2), ktoré spĺňa $c_2 \in \left(\frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1 (A_2 c_1 + C I_N)}, \frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{C}{A_1} I_N \right)$ a súčasne, že je jediným riešením, teda existuje jediné Nashovo ekvilibrium v tejto hre.

Najprv dokážeme, že ak také riešenie existuje, potom je jediné.

Vráťme sa k (2.1.4.2) a upravme ju na tvar

$$\left(\frac{A_2}{c_1} p_1^2 - C I_N \right)^2 = A_1 c_2 A_2 p_1 + A_1 c_2 C I_N \quad (2.1.4.4)$$

a následne na tvar

$$\frac{A_2}{c_1} p_1^2 - C I_N = \sqrt{A_1 c_2 A_2 p_1 + A_1 c_2 C I_N}. \quad (2.1.4.5)$$

Z (2.1.4.5) dostávame na ľavej strane funkciu

$$f(p_1) = \frac{A_2}{c_1} p_1^2 - C I_N \quad (2.1.4.6)$$

a na pravej strane funkciu

$$g(p_1) = \sqrt{A_1 c_2 A_2 p_1 + A_1 c_2 C I_N}. \quad (2.1.4.7)$$

Obe funkcie $f(p_1)$ a $g(p_1)$ sú pre $p_1 \geq 0$ monotónne a striktne rastúce.

V bode $p_1 = 0$ $f(0) = -CI_N$ a $g(0) = \sqrt{A_1 c_2 CI_N}$ a keďže $A_1, c_2, C, I_N > 0$, potom platí $f(0) = -CI_N < \sqrt{A_1 c_2 CI_N} = g(0)$.

Ak pre funkcie striktne rastúce $f(p_1)$ a $g(p_1)$ $p_1 \geq 0$, také, že $f(0) < g(0)$ platí $f'(p_1) > g'(p_1)$ pre $\forall p_1 \in (p_1^S, \infty)$ pre nejaké $p_1^S > 0$ a súčasne $f''(p_1) > g''(p_1) \forall p_1 > 0$ a existuje také $p_1^* > 0$, že platí $f(p_1^*) = g(p_1^*)$, potom existuje jediné také p_1^* .

Ak totiž $f''(p_1) > g''(p_1) \forall p_1 > 0$, potom zmena sklonu rastu funkcií¹⁶⁹ pre rastúce p_1 nie je v žiadnom $p_1 > 0$ rovnaká a navyše ak pre nejaké $p_1^S > 0$ platí, že $\forall p_1 \in (p_1^S, \infty): f'(p_1) > g'(p_1)$, potom funkcia $f(p_1)$ od tohto bodu rastie rýchlejšie s rastom p_1 , ako $g(p_1)$ a teda existuje možnosť, že sa pretnú v nejakom $p_1^* > p_1^S$. To, že $f''(p_1) > g''(p_1) \forall p_1 > 0$ nám zabezpečí, že pokiaľ sa funkcie v niektorom p_1^* pretnú, pretnú sa iba v jednom bode a nebudú pokračovať „spolu“, čo by znamenalo nekonečne veľa takých p_1^* pre ktoré $f(p_1^*) = g(p_1^*)$, no my chceme dokázať, že existuje jediné (ak existuje).

Nech teda existuje také $p_1^* > 0$, že platí $f(p_1^*) = g(p_1^*)$. Ukážeme najprv, že druhé derivácie $f(p_1)$ a $g(p_1)$ $p_1 \geq 0$ majú vzťah $f''(p_1) > g''(p_1)$. $f''(p_1) = 2 \frac{A_2}{c_1}$, teda je to kladná

konštanta. $g''(p_1) = -\frac{(A_1 c_2 A_2)^2}{4\sqrt{(A_1 c_2 A_2 p_1 + A_1 c_2 CI_N)^3}}$ a pretože analyzujeme $g''(p_1)$ pre $p_1 \geq 0$

a všetky ostatné parametre sú kladné, potom nutne $g''(p_1) < 0 \forall p_1 \geq 0$. Teda nutne platí $f''(p_1) > g''(p_1) \forall p_1 \geq 0$.

Teraz prejdeme na dôkaz, že existuje také $p_1^S > 0$, pre ktoré platí $f'(p_1) > g'(p_1)$ pre $\forall p_1 \in (p_1^S, \infty)$. Z $f'(p_1) > g'(p_1)$ dostávame nerovnicu

$$(p_1)^2 (A_2 p_1 + CI_N) > \frac{(c_1)^2 A_1 c_2}{16}. \quad (2.1.4.8)$$

Pre $p_1 = 0$ nerovnosť neplatí, teda ani $f'(0) > g'(0)$ neplatí.

No vidíme, že na ľavej strane (2.1.4.8), ktorá má byť väčšia, máme striktne rastúcu funkciu $h(p_1) = (p_1)^2 (A_2 p_1 + CI_N)$ pre rastúce p_1 a navyše $\forall p_1 \geq 0: h(p_1) \geq 0$, navyše $\forall p_1 > 0: h(p_1) > 0$.

Navyše na pravej strane (2.1.4.8) máme kladnú konštantu. Kladná konštanta je samozrejme väčšia ako 0, preto pre $p_1 = 0$ nerovnosť neplatí, čo teda znamená, že v $p_1 = 0$ $g(p_1)$ rastie

¹⁶⁹ Druhá derivácia funkcie je smernicou dotýčnice v každom bode prvej derivácie ako funkcie a tá je smernicou dotýčnice v každom bode pôvodnej funkcie. Teda druhá derivácia určuje strmosť prvej derivácie, ktorá určuje strmosť pôvodnej funkcie. Druhá derivácia teda určuje zmenu strmosti funkcie.

strmšie, ako $f(p_1)$ s rastúcim p_1 . Funkcia $h(p_1)$ je však striktnie rastúca a ak dokážeme

$\lim_{p_1 \rightarrow \infty, p_1 > 0} (p_1)^2 (A_2 p_1 + C I_N) = \infty$, potom nutne musí existovať nejaké $p_1^S > 0$, pre ktoré platí

$f'(p_1) > g'(p_1) \forall p_1 \in (p_1^S, \infty)$. No prirodzene $\lim_{p_1 \rightarrow \infty, p_1 > 0} (p_1)^2 (A_2 p_1 + C I_N) = \infty$, keďže

výraz v limite je zložený z násobku dvoch funkcií, pre ktoré platí $\lim_{p_1 \rightarrow \infty, p_1 > 0} (p_1)^2 = \infty$ a

$\lim_{p_1 \rightarrow \infty, p_1 > 0} (A_2 p_1 + C I_N) = \infty$, teda musí existovať také $p_1^S > 0$, pre ktoré platí $f'(p_1) >$

$g'(p_1) \forall p_1 \in (p_1^S, \infty)$.

Teda sme dokázali, že ak existuje také $p_1^* > 0$, že platí $f(p_1^*) = g(p_1^*)$, potom existuje jediné také p_1^* .

Vráťme sa teraz k riešeniu (2.1.4.3). Po jeho dosiahnutí sme konštatovali, že iba dve zo štyroch riešení dáva zmysel v reálnych číslach. Zostali nám ešte ďalšie dve, p_{12} a p_{14} .

Dokázali sme, že pokiaľ existuje jedno z nich, potom existuje jediné, avšak všeobecný vzorec nám núka hneď dve riešenia.

Pozrime sa na ne bližšie:

$$p_{12} = -S + \sqrt{\frac{c_1}{A_2} \left(C I_N - c_1 \frac{A_1 c_2}{4S} - \frac{A_2}{c_1} S^2 \right)},$$

$$p_{14} = -S + \sqrt{\frac{c_1}{A_2} \left(C I_N + c_1 \frac{A_1 c_2}{4S} - \frac{A_2}{c_1} S^2 \right)}.$$

Riešenia p_{12} a p_{14} sa medzi sebou líšia iba v znamienku pri výraze $c_1 \frac{A_1 c_2}{4S}$. Výraz $c_1 \frac{A_1 c_2}{4S}$, ako všetky ostatné výrazy v riešeniach, je vo svojej podstate konštanta, pretože všetky parametre $A_i, C, c_i, I_N \forall i \in I$ sú dané a v našej hre konštantné.

Ak teda existuje jediné riešenie (2.1.4.2) a to má mať tvar ako p_{12} alebo p_{14} , potom to, ktoré neexistuje, musí byť definované práve vyššie spomenutou odlišnosťou.

Pokiaľ existuje riešenie rovnice (2.1.4.2) v $\mathbb{R}$, potom všetky jednotlivé výrazy v riešeniach p_{12} a p_{14} sú kladné, pokiaľ pred nimi nie je záporné znamienko. To znamená, že neexistenciu riešenia v tvare ako p_{12} alebo p_{14} môže zapríčiniť iba fakt, že výraz pod odmocninou je menší ako 0.

Keďže sú všetky výrazy pod odmocninou kladné, pokiaľ nie je pred nimi záporné znamienko znamená, že $c_1 \frac{A_1 c_2}{4S} > -c_1 \frac{A_1 c_2}{4S}$ a teda $\frac{c_1}{A_2} \left(C I_N + c_1 \frac{A_1 c_2}{4S} - \frac{A_2}{c_1} S^2 \right) > \frac{c_1}{A_2} \left(C I_N - c_1 \frac{A_1 c_2}{4S} - \frac{A_2}{c_1} S^2 \right)$

a teda pokiaľ existuje p_{1_2} , potom nutne musí existovať p_{1_4} , čo je v spore s dokázaným tvrdením, že existuje maximálne jedno riešenie (2.1.4.2) v $\mathbb{R}$ spĺňajúce $c_2 \in$

$$\left(\frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)}, \frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{C}{A_1} I_N \right), \text{ ak existuje.}$$

Teda tvar riešenia p_{1_4} je jediné riešenie (2.1.4.2) v $\mathbb{R}$ spĺňajúce $c_2 \in \left(\frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)}, \frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{C}{A_1} I_N \right)$, ak existuje.

Prejdime ešte na dôkaz existencie riešenia. Tá nie je jednoznačná. Nejednoznačnosť toho, či riešenie existuje vyplýva z faktu, že produkty nie sú dokonalými substitútmi a teda sú do určitej miery komplementy. Okrem podmienky kladnosti hodnôt $A_i, C, c_i, I_N \forall i \in I$

a podmienky hry $c_2 \in \left(\frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)}, \frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{C}{A_1} I_N \right)$ sme na hodnoty $A_i, C, c_i, I_N \forall i \in I$ nedali žiadnu inú podmienku. To znamená, že C môže byť akokoľvek vysoké v porovnaní s atraktivitami A_i a teda v našom modeli duopolu s QLUF môžeme analyzovať aj takmer dokonalé komplementy. Ak sú však dva produkty takmer dokonalé komplementy, potom už strácajú svoju nahraditeľnosť a teda konkurenčnosť (v zmysle vzťahu produktov) a teda každý producent je takmer monopolom pre svoju časť trhu. V takomto prípade sú producenti (alebo hráči) motivovaní stanovovať čo možno najvyššie ceny, pretože majú v podstate dané, ako vysoké finančné prostriedky bude dopyt mínať na ich produkt (v zmysle nášho predpokladu, že dopyt mína konštantné finančné prostriedky na trhu N).

To, kedy je trh N ešte konkurenčným trhom a kedy sa stáva trhom komplementov určujú podmienky existencie riešenia p_{1_4} z (2.1.4.3), ako jediného riešenia (2.1.4.2), ak existuje.

Teda optimálna voľba hráča 1 v hre duopolu s QLUF s podmienkou $c_2 \in$

$$\left(\frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + C I_N)}, \frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{C}{A_1} I_N \right) \text{ je}$$

$$p_1^* = -S + \sqrt{\frac{c_1}{A_2} \left(C I_N + c_1 \frac{A_1 c_2}{4S} - \frac{A_2}{c_1} S^2 \right)}, \quad (2.1.4.9)$$

kde

$$\Delta_0 = 4 \frac{c_1^2}{A_2^2} C I_N (4 C I_N - 3 A_1 c_2),$$

$$\Delta_1 = \frac{c_1^3}{A_2^3} (27 A_2 c_1 (A_1 c_2)^2 + 16 (C I_N)^2 (8 C I_N - 9 A_1 c_2)),$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4 \Delta_0^3}}{2}}, S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{c_1}{A_2} C I_N + \frac{1}{3} \left(Q + \frac{\Delta_0}{Q} \right)}$$

a táto optimálna voľba existuje, ak

$$\Delta_1^2 - 4 \Delta_0^3 \geq 0 \text{ z definície } Q, Q \neq 0 \text{ z definície } S, \frac{4}{3} \frac{c_1}{A_2} C I_N + \frac{1}{3} \left(Q + \frac{\Delta_0}{Q} \right) > 0 \text{ z definície } S \text{ a z } S$$

v menovateli $p_1^*, \frac{c_1}{A_2} \left(C I_N + c_1 \frac{A_1 c_2}{4S} - \frac{A_2}{c_1} S^2 \right) \geq 0$ a $-S + \sqrt{\frac{c_1}{A_2} \left(C I_N + c_1 \frac{A_1 c_2}{4S} - \frac{A_2}{c_1} S^2 \right)} > c_1 > 0$.

Analogicky dostaneme optimálnu voľbu hráča 2 v hre duopolu s QLUF s podmienkou $c_2 \in$

$$\left(\frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1 (A_2 c_1 + C I_N)}, \frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{C}{A_1} I_N \right)$$

$$p_2^* = -S + \sqrt{\frac{c_2}{A_1} \left(C I_N + c_2 \frac{A_2 c_1}{4S} - \frac{A_1}{c_2} S^2 \right)}, \quad (2.1.4.10)$$

kde

$$\Delta_0 = 4 \frac{c_2^2}{A_1^2} C I_N (4 C I_N - 3 A_2 c_1),$$

$$\Delta_1 = \frac{c_2^3}{A_1^3} (27 A_1 c_2 (A_2 c_1)^2 + 16 (C I_N)^2 (8 C I_N - 9 A_2 c_1)),$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4 \Delta_0^3}}{2}}, S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{c_2}{A_1} C I_N + \frac{1}{3} \left(Q + \frac{\Delta_0}{Q} \right)}$$

a táto optimálna voľba existuje, ak

$$\Delta_1^2 - 4 \Delta_0^3 \geq 0 \text{ z definície } Q, Q \neq 0 \text{ z definície } S, \frac{4}{3} \frac{c_2}{A_1} C I_N + \frac{1}{3} \left(Q + \frac{\Delta_0}{Q} \right) > 0 \text{ z definície } S \text{ a z } S$$

v menovateli $p_2^*, \frac{c_2}{A_1} \left(C I_N + c_2 \frac{A_2 c_1}{4S} - \frac{A_1}{c_2} S^2 \right) \geq 0$ a $-S + \sqrt{\frac{c_2}{A_1} \left(C I_N + c_2 \frac{A_2 c_1}{4S} - \frac{A_1}{c_2} S^2 \right)} > c_2 > 0$.

(2.1.4.9) a (2.1.4.10) nám definujú jediné Nashovo ekvilibrium v hre duopolu s QLUF s $c_2 \in$

$$\left(\frac{(A_2 c_1 - C I_N)^2}{A_1 (A_2 c_1 + C I_N)}, \frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{C}{A_1} I_N \right), \text{ pokiaľ existuje, pretože je definované reakčnými funkciami}$$

všetkých hráčov v hre. Racionálni hráči (producenti), pokiaľ ekvilibrium existuje, zvolia

presne túto úroveň cien v duopole s QLUF s podmienkou $c_2 \in \left(\frac{(A_2 c_1 - c I_N)^2}{A_1(A_2 c_1 + c I_N)}, \frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{c}{A_1} I_N \right)$, pokiaľ sú splnené podmienky z (2.1.4.9) a (2.1.4.10), čo vedie k $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $p_1^* > c_1$, $p_2^* > c_2$ a teda $\pi_1 > -f_1$ a $\pi_2 > -f_2$.

Pokiaľ ekvilibrium neexistuje, producenti už neprodukurujú na konkurenčnom trhu N, ale ich produkty sú do takej miery komplementy, že môžu určovať ceny produktov v nekonečnej výške, čím znížia svoje variabilné náklady na 0. Finančné prostriedky, ktoré dopyt na nekonkurenčnom trhu N mňa na konkrétny produkt, tým nezmenia, keďže sme predpokladali konštantné finančné prostriedky dopytu alokované na trh N.

Ekvilibrium duopolu s QLUF s hráčmi s „relatívne podobnými“ variabilnými nákladmi

Zmeňme teraz náš predpoklad o jednotkových variabilných nákladoch hráča 1 na $c_1 \in$

$\left(\frac{A_1}{A_2} c_2 - \frac{c}{A_2} I_N, \frac{A_1}{A_2} c_2 + \frac{c}{A_2} I_N \right)$, čo znamená pre jednotkové variabilné náklady hráča 2 $c_2 \in \left(\frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{c}{A_1} I_N, \frac{A_2}{A_1} c_1 + \frac{c}{A_1} I_N \right)$. Za týchto podmienok v hre duopolu s QLUF hráčovi 1 (2.1.3.8)

stanovuje ako optimálnu voľbu $p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2 + \frac{c}{A_2} I_N \right)}$ a súčasne hráčovi 2 (2.1.3.8) určuje

ako optimálnu voľbu $p_2 = \sqrt{c_2 \left(\frac{A_2}{A_1} p_1 + \frac{c}{A_1} I_N \right)}$. Na identifikáciu Nashovho ekvilibria

v čistých stratégiách postačí skombinovať obe optimálne voľby hráčov, čím dostávame analogickú úlohu k (2.1.4.1) predchádzajúcej časti práce, teda

$$p_1 = \sqrt{c_1 \left(\frac{A_1}{A_2} p_2 + \frac{c}{A_2} I_N \right)} \wedge p_2 = \sqrt{c_2 \left(\frac{A_2}{A_1} p_1 + \frac{c}{A_1} I_N \right)}, \quad (2.1.4.11)$$

avšak za podmienok $p_1 \geq c_1 > 0$, $p_2 \geq c_2 > 0$, $c_1 \in \left(\frac{A_1}{A_2} c_2 - \frac{c}{A_2} I_N, \frac{A_1}{A_2} c_2 + \frac{c}{A_2} I_N \right)$, respektíve $c_2 \in \left(\frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{c}{A_1} I_N, \frac{A_2}{A_1} c_1 + \frac{c}{A_1} I_N \right)$.

Dôkaz jedinečnosti ekvilibria, pokiaľ existuje, vychádzajúceho z (2.1.4.11), je analogický k dôkazu jedinečnosti ekvilibria (2.1.4.1), podobne tvar optimálnej voľby hráčov je rovnaký ako (2.1.4.9) a (2.1.4.10), za rovnakých podmienok, ako sú uvádzané v (2.1.4.9) a (2.1.4.10), čo zabezpečuje existenciu jediného Nashovho ekvilibria v čistých stratégiách duopolu s QLUF s podmienkou $c_1 \in \left(\frac{A_1}{A_2} c_2 - \frac{c}{A_2} I_N, \frac{A_1}{A_2} c_2 + \frac{c}{A_2} I_N \right)$, respektíve $c_2 \in \left(\frac{A_2}{A_1} c_1 - \frac{c}{A_1} I_N, \frac{A_2}{A_1} c_1 + \frac{c}{A_1} I_N \right)$, pokiaľ sú splnené podmienky z (2.1.4.9) a (2.1.4.10), teda pokiaľ existuje.

Jediné Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách hry duopolu s QLUF s podmienkou $c_1 \in \left(\frac{A_1}{A_2}c_2 - \frac{C}{A_2}I_N, \frac{A_1}{A_2}c_2 + \frac{C}{A_2}I_N\right)$ je teda rovnaké, ako (2.1.4.9) a (2.1.4.10), ale teda s podmienkou $c_1 \in \left(\frac{A_1}{A_2}c_2 - \frac{C}{A_2}I_N, \frac{A_1}{A_2}c_2 + \frac{C}{A_2}I_N\right)$, pokiaľ existuje. Racionálni hráči (producenti), pokiaľ ekvilibrium existuje, zvolia presne túto úroveň cien v duopole s QLUF s podmienkou $c_1 \in \left(\frac{A_1}{A_2}c_2 - \frac{C}{A_2}I_N, \frac{A_1}{A_2}c_2 + \frac{C}{A_2}I_N\right)$, pokiaľ sú splnené podmienky z (2.1.4.9) a (2.1.4.10), čo vedie k $x_1 > 0, x_2 > 0, p_1^* > c_1, p_2^* > c_2$ a teda $\pi_1 > -f_1$ a $\pi_2 > -f_2$.

Pokiaľ ekvilibrium neexistuje, producenti už neprodukujú na konkurenčnom trhu N, ale ich produkty sú do takej miery komplementy, že môžu určovať ceny produktov v nekonečnej výške, čím znížia svoje variabilné náklady na 0. Finančné prostriedky, ktoré dopyt na nekonkurenčnom trhu N míňa na konkrétny produkt, tým nezmenia.

Ekvilibrium duopolu s QLUF s hráčom s „relatívne nízkymi“, ale nie s „relatívne veľmi nízkymi“ variabilnými nákladmi

Teraz by sme mali prejsť k analýze situácie na trhu N duopolu s QLUF, keď platí $c_1 \in \left(\frac{(A_1c_2 - CI_N)^2}{A_2(A_1c_2 + CI_N)}, \frac{A_1}{A_2}c_2 - \frac{C}{A_2}I_N\right)$. Keďže sme však v duopole, táto situácia pre hráča 1 je rovnaká, ako situácia pre hráča 2 v časti Ekvilibrium duopolu s QLUF s hráčom s „relatívne vysokými“, ale nie s „relatívne veľmi vysokými“ variabilnými nákladmi. A naopak, situácia keď $c_1 \in \left(\frac{(A_1c_2 - CI_N)^2}{A_2(A_1c_2 + CI_N)}, \frac{A_1}{A_2}c_2 - \frac{C}{A_2}I_N\right)$ je pre hráča 2 rovnaká, ako situácia pre hráča 1 v časti Ekvilibrium duopolu s QLUF s hráčom s „relatívne vysokými“, ale nie s „relatívne veľmi vysokými“ variabilnými nákladmi.

Môžeme teda konštatovať, že (2.1.4.9) a (2.1.4.10) nám definujú jediné Nashovo ekvilibrium v hre duopolu s QLUF s $c_1 \in \left(\frac{(A_1c_2 - CI_N)^2}{A_2(A_1c_2 + CI_N)}, \frac{A_1}{A_2}c_2 - \frac{C}{A_2}I_N\right)$, pokiaľ existuje, pretože je definované reakčnými funkciami všetkých hráčov v hre. Racionálni hráči (producenti), pokiaľ ekvilibrium existuje, zvolia presne túto úroveň cien v duopole s QLUF s podmienkou $c_1 \in \left(\frac{(A_1c_2 - CI_N)^2}{A_2(A_1c_2 + CI_N)}, \frac{A_1}{A_2}c_2 - \frac{C}{A_2}I_N\right)$, čo vedie k $x_1 > 0, x_2 > 0, p_1^* > c_1, p_2^* > c_2$ a teda $\pi_1 > -f_1$ a $\pi_2 > -f_2$.

Pokiaľ ekvilibrium neexistuje, producenti už neprodukujú na konkurenčnom trhu N, ale ich produkty sú do takej miery komplementy, že môžu určovať ceny produktov v nekonečnej

výške, čím znížia svoje variabilné náklady na 0. Finančné prostriedky, ktoré dopyt na nekonkurenčnom trhu N míňa na konkrétny produkt, tým nezmenia.

Ekvilibrium duopolu s QLUF s hráčom s „relatívne veľmi nízkymi“ variabilnými nákladmi

Poslednou situáciou, ktorú sme neanalyzovali je hra duopolu s QLUF za podmienky $c_1 \leq \frac{(A_1 c_2 - CI_N)^2}{A_2(A_1 c_2 + CI_N)}$. Avšak táto situácia je pre hráča 1 rovnaká, ako situácia pre hráča 2 v časti

Ekvilibrium duopolu s QLUF s hráčom s „relatívne veľmi vysokými“ variabilnými nákladmi.

A naopak, situácia keď $c_1 \leq \frac{(A_1 c_2 - CI_N)^2}{A_2(A_1 c_2 + CI_N)}$ je pre hráča 2 rovnaká, ako situácia pre hráča 1 v časti Ekvilibrium duopolu s QLUF s hráčom s „relatívne veľmi vysokými“ variabilnými nákladmi.

Môžeme teda konštatovať, že Duopol s QLUF s hráčom 1 s „relatívne veľmi nízkymi“

variabilnými nákladmi, teda s $c_1 \leq \frac{(A_1 c_2 - CI_N)^2}{A_2(A_1 c_2 + CI_N)}$ má jediné Nashovo ekvilibrium v čistých

stratégiách $p_1^* = \frac{A_1}{A_2} c_2 - \frac{C}{A_2} I_N$, $p_2^* = c_1$, pretože sa žiadnemu hráčovi neoplatí vychýliť z tohto profilu stratégií a navyše je jediné Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách.

To znamená, že hráči v duopole s QLUF s $c_1 \leq \frac{(A_1 c_2 - CI_N)^2}{A_2(A_1 c_2 + CI_N)}$ zahrajú tento profil stratégií.

2.1.5 Ekvilibrium na trhu duopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou

Identifikovali sme tri typy ekvibrií z pohľadu konkrétneho producenta $i \in I$ na trhu duopolu s QLUF. Ak označíme k producentovi i konkurenčného producenta $-i \in I$, $-i \neq i$, potom tieto ekvibriá, teda výstupy z trhu duopolu s QLUF s racionálnymi producentmi, môžeme zapísať:

1. Ak pre producenta $i \in I$ vzhľadom na jeho konkurenta $-i \in I$ platí $c_{-i} \leq \frac{(A_{-i} c_i - CI_N)^2}{A_i(A_{-i} c_i + CI_N)}$,

potom ekvilibrium, teda profil úrovní cien, ktoré racionálni producenti zvolia bude

$$p_i^* = c_i, p_{-i}^* = \frac{A_{-i}}{A_i} c_i - \frac{C}{A_i} I_N.$$

2. Ak pre producenta $i \in I$ vzhľadom na jeho konkurenta $-i \in I$ platí $c_i > \frac{(A_i c_{-i} - CI_N)^2}{A_{-i}(A_i c_{-i} + CI_N)}$

a súčasne $c_{-i} > \frac{(A_{-i} c_i - CI_N)^2}{A_i(A_{-i} c_i + CI_N)}$, potom ekvilibrium nemusí existovať, avšak ak splní

podmienky $\Delta_{i1}^2 - 4\Delta_{i0}^3 \geq 0$, $Q_i \neq 0$, $\frac{4}{3} \frac{c_i}{A_{-i}} CI_N + \frac{1}{3} \left(Q_i + \frac{\Delta_{i0}}{Q_i} \right) > 0$, $\frac{c_i}{A_{-i}} \left(CI_N + c_i \frac{A_i c_{-i}}{4S_i} - \right.$

$$\begin{aligned}
& \frac{A_{-i}}{c_i} S_i^2 \geq 0, -S_i + \sqrt{\frac{c_i}{A_{-i}} \left(C I_N + c_i \frac{A_i c_{-i}}{4 S_i} - \frac{A_{-i}}{c_i} S_i^2 \right)} > c_i > 0, \text{ kde } \Delta_{i0} = \\
& 4 \frac{c_i^2}{A_{-i}^2} C I_N (4 C I_N - 3 A_i c_{-i}), \Delta_{i1} = \frac{c_i^3}{A_{-i}^3} (27 A_{-i} c_i (A_i c_{-i})^2 + 16 (C I_N)^2 (8 C I_N - 9 A_i c_{-i})), \\
& Q_i = \sqrt[3]{\frac{\Delta_{i1} + \sqrt{\Delta_{i1}^2 - 4 \Delta_{i0}^3}}{2}}, S_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{c_i}{A_{-i}} C I_N + \frac{1}{3} \left(Q_i + \frac{\Delta_{i0}}{Q_i} \right)} \text{ a súčasne } \Delta_{-i1}^2 - 4 \Delta_{-i0}^3 \geq 0, \\
& Q_{-i} \neq 0, \frac{4}{3} \frac{c_{-i}}{A_i} C I_N + \frac{1}{3} \left(Q_{-i} + \frac{\Delta_{-i0}}{Q_{-i}} \right) > 0, \frac{c_{-i}}{A_i} \left(C I_N + c_{-i} \frac{A_{-i} c_i}{4 S_{-i}} - \frac{A_i}{c_{-i}} S_{-i}^2 \right) \geq 0, -S_{-i} + \\
& \sqrt{\frac{c_{-i}}{A_i} \left(C I_N + c_{-i} \frac{A_{-i} c_i}{4 S_{-i}} - \frac{A_i}{c_{-i}} S_{-i}^2 \right)} > c_{-i} > 0, \text{ kde } \Delta_{-i0} = 4 \frac{c_{-i}^2}{A_i^2} C I_N (4 C I_N - 3 A_{-i} c_i), \\
& \Delta_{-i1} = \frac{c_{-i}^3}{A_i^3} (27 A_i c_{-i} (A_{-i} c_i)^2 + 16 (C I_N)^2 (8 C I_N - 9 A_{-i} c_i)), Q_{-i} = \sqrt[3]{\frac{\Delta_{-i1} + \sqrt{\Delta_{-i1}^2 - 4 \Delta_{-i0}^3}}{2}}, \\
& S_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{c_{-i}}{A_i} C I_N + \frac{1}{3} \left(Q_{-i} + \frac{\Delta_{-i0}}{Q_{-i}} \right)}, \text{ potom ekvilibrium existuje a má tvar } p_i^* = -S_i + \\
& \sqrt{\frac{c_i}{A_{-i}} \left(C I_N + c_i \frac{A_i c_{-i}}{4 S_i} - \frac{A_{-i}}{c_i} S_i^2 \right)}, p_{-i}^* = -S_{-i} + \sqrt{\frac{c_{-i}}{A_i} \left(C I_N + c_{-i} \frac{A_{-i} c_i}{4 S_{-i}} - \frac{A_i}{c_{-i}} S_{-i}^2 \right)}
\end{aligned}$$

3. Ak pre producenta $i \in I$ vzhľadom na jeho konkurenta $-i \in I$ platí $c_i \leq \frac{(A_i c_{-i} - C I_N)^2}{A_{-i} (A_i c_{-i} + C I_N)}$, potom ekvilibrium, teda profil úrovní cien, ktoré racionálni producenti zvolia bude $p_i^* = \frac{A_i}{A_{-i}} c_{-i} - \frac{C}{A_{-i}} I_N, p_{-i}^* = c_{-i}$.

Vidíme, že na rozdiel od modelu s lineárnou úžitkovou funkciou, teda modelu dokonalých substitútov, model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou, teda model nedokonalých substitútov, dokázal pri duopole identifikovať také podmienky, ktoré vedú k potencionálne kladnému profitu pre oboch producentov.

Model duopolu s QLUF identifikoval aj ekvilibriá podobné ekvilibriám z duopolu s LUF, a teda vtedy, pokiaľ sa „relatívne“ jednotkové variabilné náklady producentov príveľmi líšia. To znamená, že ani komplementárny efekt nestačí na eliminovanie substitučného efektu produktov, čo v takom prípade znamená negatívny profit pre jedného z producentov a dlhodobú neudržateľnosť trhu.

Avšak model duopolu s QLUF dokázal identifikovať aj také ekvilibrium, ktoré vedie k potencionálne kladnému profitu oboch producentov a teda potencionálne k dlhodobej existencii trhu. Toto zodpovedá reálnym trhom oveľa viac, ako model duopolu s LUF.

Netreba však zabudnúť, že na to, aby ekvilibrium existovalo, je potrebné, aby atribúty trhu spĺňali určité podmienky, čo spôsobuje fakt, že pri trhu nedokonalých produktov existuje medzi týmito produktami okrem substitučného aj komplementárny efekt. Pokiaľ je tento efekt priveľký, potom sa z konkurenčného trhu stáva nekonkurenčný a teda producenti majú tendenciu stanovovať až nekonečne vysoké ceny, pretože majú dopyt zaručený.

V praktickej aplikácii nie je nutné poznať úplne presne hodnotu všetkých atribútov, je možné tieto hodnoty odhadovať, či už štatisticky, alebo aj inými metódami. Navyše, pokiaľ reálny subjekt analyzujúci reálny trh pozoruje existenciu konkurenčného trhu dlhodobo, potom musí predpokladať hodnoty atribútov trhu tak, aby boli splnené podmienky druhého ekvilibria duopolu s QLUF z vyššie uvedeného zoznamu.

Na základe odhadu hodnôt atribútov trhu a aplikáciou modelu trhu N s QLUF je možné vypracovávať scenáre, ktoré umožnia strategické rozhodovanie reálneho producenta.

2.1.6 Opakovaná interakcia producentov na trhu duopolu s QLUF

Pozrime sa teraz na situáciu, kedy producenti na trhu duopolu s QLUF interagujú opakovane, teda nejde iba o jednorazovú interakciu producentov, ale situácia popísaná v predchádzajúcich častiach sa opakuje.

V tejto časti opätovne využijeme terminológiu a prostriedky teórie hier, ako boli spomenuté pri analýze trhov s LUF.

Duopol s QLUF s konečným počtom opakovaní

Pokiaľ pri jednorazovej interakcii producentov na trhu N išlo o statickú hru, jej opakovaním dostaneme opakovanú hru.

Opakujme statickú hru duopolu s QLUF konečne veľa krát a označme tento počet $N \in \mathbb{N}$.

Stratégia hráča v dynamickej hre, ktorou je každá opakovaná hra, musí popísať všetky jeho akcie v každom jeho rozhodovacom bode.

Funkcia výplat hráča v opakovanej hre je súčet jeho výplat z jednotlivých opakovaní.

Zopakujme predpoklad úplnej informácie pre hráčov, pričom tento predpoklad je teraz v opakovanej hre rozšírený aj o informáciu o počte opakovaní hry, teda každý hráč pozná N . Je prirodzené rozšíriť informačné hľadisko aj o dokonalú informáciu, čo znamená, že hráči

poznajú voľbu predchádzajúcich akcií všetkých hráčov v každom bode svojho rozhodovania.¹⁷⁰

Použijeme teraz na opakovanú hru duopolu s QLUF s konečným počtom opakovaní koncept spätnej indukcie.

Najmenšou podhrou opakovanej hry trhu N s počtom opakovaní N je statická hra duopolu s QLUF v poslednom kole opakovania N .

Nashovým ekviliбриom v čistých stratégiách tejto statickej hry je ekvilibrium definované v kapitole 2.1.5 Ekvilibrium na trhu duopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou a je jediným Nashovým ekviliбриom v čistých stratégiách za daných podmienok, ak existuje.

Keďže jediné Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách statickej hry je taký profil stratégií hráčov, ktorý racionálny hráči v hre zahrajú, potom výstupom z tejto podhry je dopredu daný a má teda profil stratégií Nashovho ekvilibria v čistých stratégiách so všetkými následnými výstupmi v zmysle dopytu po produktoch a zisku pre producentov.

Keďže analyzujeme konkurenčnú súťaž, budeme uvažovať duopol s QLUF s podmienkami, za ktorých ekvilibrium existuje, pretože v opačnom prípade by sme analyzovali nekonkurenčný trh N .

Keď sa presunieme o podhru späť v spätnej indukcii, teda na opakovanie $N - 1$, môžeme využiť výstup z najmenšej podhry (opakovania N) ako vstup do rozhodovania hráčov v podhre opakovania $N - 1$. Racionálni hráči totiž využívajú spätnú indukciu rovnako, ako my, teda dokážu identifikovať výstup z posledného opakovania.

To, že prípadná voľba inej, ako ekvilibriovej akcie v opakovaní $N - 1$ nijako neovplyvňuje výstup z opakovania v kole N znamená, že hráči nie sú ničím motivovaní zmeniť svoju ekvilibriovú akciu v kole $N - 1$, preto ju aj zvolia.

Tým sme dostali kompletný výstup z podhry začínajúcej opakovaním $N - 1$, teda výplaty hráčov z oboch posledných opakovaní $N - 1$ a N .

Rozhodovanie hráčov v opakovaní $N - 2$, ako počiatočný rozhodovací bod predchádzajúcej podhry, nijako neovplyvňuje výstup z podhry začínajúcej v opakovaní $N - 1$, preto opäť v opakovaní $N - 2$ hráči volia akciu definovanú ekviliбриom statickej hry.

Týmto spôsobom hráči definujú svoje voľby akcií pre každé opakovanie opakovanej hry, teda pre všetkých N opakovaní a vidíme, že v každom jednom bode hráči zvolia svoju ekvilibriovú

¹⁷⁰ V reálnom svete sú producenti schopní si pamätať svoje a konkurenčné nastavenia cien v minulosti.

akciu statickej hry (teda definujú svoju stratégiu tak, že zahrajú svoju stratégiu statickej hry v každom opakovaní).

Takto sme dostali vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v čistých stratégiách a jediné vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v čistých stratégiách, preto hráči v hre duopolu s QLUF s konečným počtom opakovaní budú voliť stratégie definované týmto ekvilibriumom.

To znamená, že konečné opakovanie statickej hry duopolu s QLUF nevedie k iným záverom, ako samotná analýza statickej hry.

V prípade, ak sa „relatívne“ jednotkové variabilné náklady oboch hráčov výrazne neodlišujú, a zároveň atribúty trhu spĺňajú podmienky existencie ekvilibria statickej hry (podmienky druhého ekvilibria v kapitole 2.1.5 Ekvilibrium na trhu duopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou), potom hráči volia v každom opakovaní také úrovne cien, ktoré zodpovedajú ekvilibriumu statickej hry, čo vedie k možnosti kladného profitu (vzhľadom na fixné náklady) každého z hráčov z celej hry.

V prípade, ak sa „relatívne“ jednotkové variabilné náklady hráčov líšia natoľko, že hráč s „relatívne veľmi nízkymi“ jednotkovými variabilnými nákladmi nie je motivovaný sa o dopyt deliť (teda platí jedna z podmienok v prvom, alebo treťom ekvilibriumu kapitoly 2.1.5 Ekvilibrium na trhu duopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou), potom hráč s „relatívne veľmi nízkymi“ jednotkovými variabilnými nákladmi dosahuje väčší ako minimálny profit v každom opakovaní statickej hry, teda väčší ako minimálny profit z celej hry. Na druhej strane hráč s „relatívne veľmi vysokými“ jednotkovými variabilnými nákladmi nedokáže v žiadnom opakovaní získať nenulový dopyt, a teda v každom kole získava negatívny profit, teda minimálny profit z celej hry.

Druhý výstup konečnej opakovanej hry duopolu s QLUF je rovnaký, ako keby išlo o model s LUF, kde jeden z hráčov má „relatívne vyššie“, alebo „relatívne nižšie“ jednotkové variabilné náklady.

Avšak prvý výstup modeluje situáciu, ktorá potencionálne vedie ku kladnému profitu pre oboch hráčov (v závislosti na výške fixných nákladov), čo súhlasí s pozorovaniami na reálnych trhoch.

Žiadny hráč zo žiadnej analyzovanej situácie nie je motivovaný sa jednostranne vychýliť v žiadnom kole, pretože v situácii, keď obaja produkujú, akákoľvek jednostranná zmena ceny by viedla k nižšiemu profitu daného hráča.

V situácii, keď produkuje iba jeden hráč, tak hráč s produkciou nemá motiváciu cenu znížiť v žiadnom kole, pretože by tým svoj profit iba znížil a na druhej strane zvýšenie ceny tohto

hráča by znamenalo stratu dopytu do takej miery v danom opakovaní, že by jeho profit poklesol.

Naopak v situácii, keď produkuje iba jeden hráč, tak hráč, ktorý neprodukuje už svoju cenu nemôže znížiť, pretože sa už rovná jeho jednotkovým variabilným nákladom a naopak jednostranné zvýšenie jeho ceny by znamenalo iba vzdialenie sa od situácie, kedy by potencionálne produkoval.

Duopol s QLUF s nekonečným alebo neurčitým počtom opakovaní

Predpokladajme teraz, že duopol s QLUF sa bude opakovať nekonečne veľa krát, alebo, že sa bude opakovať neurčitý počet krát, čo vyjadríme pomocou pravdepodobnosti, s akou hráči predpokladajú, že nastane ďalšie opakovanie.

Pokiaľ hráči predpokladajú opakovanie statickej hry nekonečne veľa krát, alebo neurčitý počet krát, potom každá podhra je rovnaká, ako celá hra.

Opäť predpokladajme úplnú a dokonalú informáciu pre hráčov.

V takomto prípade nie je možné použiť spätnú indukciu na hľadanie vzhl'adom na podhry dokonalého ekvilibria, pretože nedokážeme identifikovať najmenšiu podhru, teda posledné opakovanie N .

Pripomeňme, že stratégie hráčov musia popisovať všetky akcie opakovanej hry, preto aj akcie v každom opakovaní, ktoré môžu nastať aj s malou pravdepodobnosťou, preto z pohľadu stratégie hráčov nie je rozdiel, či ide o nekonečnú opakovanú hru, alebo opakovanú hru s neurčitou dĺžkou.

Jediné stratégie, ktoré sú schopné popísať každú akciu hráča v nekonečnej opakovanej hre, alebo v opakovanej hre s neurčitou dĺžkou, sú podmienené stratégie, do ktorých radíme aj nereagujúce stratégie (stratégie, ktoré volia stále rovnaké akcie v každom opakovaní bez ohľadu na históriu, prípadne akcie s presne definovaným postupom voľby akcií, bez ohľadu na históriu) a náhodné stratégie (ktoré volia akcie náhodne, bez ohľadu na históriu).¹⁷¹

Pozrime sa bližšie na jednotlivé podhry nekonečnej opakovanej hry, alebo opakovanej hry s neurčitou dĺžkou. Tie nie sú úplne rovnaké. Líšia sa od seba svojou históriou.

Pretože sú podmienené stratégie jediné stratégie, ktoré dokážeme použiť v nekonečnej

¹⁷¹ (Fudenberg, Tirole, 1991)

opakovanej hre, alebo v opakovanej hre s neurčitou dĺžkou, história každej podhry je determinovaná podmienenými stratégiami, ktoré hráči v hre hrajú.

Vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium nekonečnej opakovanej hry, alebo opakovanej hry s neurčitou dĺžkou je teda determinované samotnými stratégiami, ktoré hráči hrajú, pretože koncept vzhľadom na podhry dokonalých ekvilibrií vyžaduje ekvilibrium v každej podhre.

Ak niektorá podmienená stratégia, ktorú hrajú obaja hráči v nekonečnej opakovanej hre duopolu s QLUF, alebo opakovanej hre duopolu s QLUF s neurčitou dĺžkou, dokáže sama so sebou vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium, potom ho aj vytvorí, pokiaľ ju hrajú obaja hráči.¹⁷²

Pripomeňme, že funkcia výplat hráča v opakovanej hre je súčet jeho výplat z jednotlivých opakovaní, teda v prípade nekonečnej opakovanej hry, alebo opakovanej hry s neurčitou dĺžkou, ide o nekonečný rad jednotlivých očakávaných výplat z jednotlivých opakovaní.

Aby sme zachovali analógiu výskumu, pri príkladoch podmienených stratégií v nekonečnej opakovanej hre duopolu s QLUF, alebo opakovanej hre duopolu s QLUF s neurčitou dĺžkou budeme vychádzať z príkladov stratégií v nekonečnej opakovanej hre duopolu s LUF, alebo opakovanej hre duopolu s LUF s neurčitou dĺžkou.

NASTY CONSTANT, alebo RATIONAL CONSTANT

Prirodzenou podmienenou stratégiou, ktorá dokáže vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre duopolu s QLUF, alebo opakovanej hre duopolu s QLUF s neurčitou dĺžkou, je stratégia, ktorá volí v každom opakovaní akciu definovanú Nashovým ekvilibriom v čistých stratégiách statickej hry duopolu s QLUF.

Keďže v nekonečnej opakovanej hre duopolu s QLUF, alebo opakovanej hre duopolu s QLUF s neurčitou dĺžkou už voľba ekvilibriovej stratégie nie je nutne až tak „zlou“ pre konkurenta, pokiaľ sú splnené podmienky hry, kedy obaja producenti produkujú, názov NASTY CONSTANT už nevyjadruje jej povahu. Preto by sme ju v tejto hre za daných podmienok mohli nazvať aj RATIONAL CONSTANT. Samozrejme, ak sú splnené podmienky podkladovej statickej hry, keď produkuje iba jeden hráč, názov NASTY CONSTANT je správny.

¹⁷² (Fudenberg, Tirole, 1991)

Keďže sa žiadnemu hráčovi neoplatí v žiadnom opakovaní vychýliť, pokiaľ jeho konkurent využíva stratégiu RATIONAL CONSTANT, potom táto stratégia dokáže sama so sebou vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium.

Situácia je analogická s reálnym svetom, kedy producenti produkujú za cenu nad svojimi jednotkovými variabilnými nákladmi, ktorá je definovaná „relatívnymi“ atraktivitami a „relatívnym“ komplementárnym efektom ich produktov, pokiaľ trh spĺňa predpoklady takéhoto ekvilibria.

Pokiaľ však niektorý z producentov dokáže na trhu získať celý dopyt pri racionálnej voľbe svojej ceny, potom z dlhodobého hľadiska jeho konkurent odchádza z trhu, pretože nedokáže získať žiadny profit.

DUMPING CONSTANT

Druhou konštantou podmienenou stratégiou, ktorú by sme mohli považovať za analogickú k NASTY CONSTANT z modelu s LUF, je stratégia DUMPING CONSTANT.

Ide o stratégiu, ktorá v každom opakovaní volí cenu na úrovni jednotkových variabilných nákladov.

Stratégiu DUMPING CONSTANT sme mohli definovať aj pre opakovaný duopol s LUF, avšak v takom modeli by v situácii, pokiaľ sa „relatívne“ jednotkové variabilné náklady producentov rovnajú, viedla k úplne rovnakým výstupom, ako NASTY CONSTANT. V iných prípadoch by viedla iba k zníženiu profitu produkujúceho producenta na minimálnu úroveň.

Avšak stratégia DUMPING CONSTANT je v nekonečnej opakovanej hre duopolu s QLUF, alebo opakovanej hre duopolu s QLUF s neurčitou dĺžkou zaujímavejšia. Samozrejme za podmienok, kedy na trhu produkuje iba jeden producent, stratégia DUMPING CONSTANT iba v podstate znižuje profit produkujúceho producenta na minimum.

No v situácii, kedy podmienky statickej hry definujú produkciu pre oboch producentov, stratégia DUMPING CONSTANT zničí akýkoľvek potencionálny profit na trhu. V závislosti na podmienkach trhu môže znamenať produkciu iba pre jedného producenta, alebo pre oboch.

Stratégia DUMPING CONSTANT teda nie je veľmi racionálnou voľbou ani jedného z producentov, pokiaľ sa z dlhodobého hľadiska nesnaží niektorý producent svojho konkurenta z trhu dostať preč a predpokladá, že disponuje dostatočným kapitálom na financovanie tejto stratégie.

Navyše, stratégia DUMPING CONSTANT nedokáže vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium, pretože pre aspoň jedného hráča v hre nie je najlepšou reakciou sama na seba. Keď si hráč s „relatívne nižšími“ variabilnými nákladmi uvedomí, že hrá proti stratégii DUMPING CONSTANT, potom je pre neho racionálnou voľbou zvýšiť cenu na úroveň jeho reakčnej funkcie, či už (2.1.3.8), alebo (2.1.3.9). Stratégia DUMPING CONSTANT na to nezareaguje.

NICE CONSTANT

Prejdime na stratégiu NICE CONSTANT, alebo by sme ju mohli nazvať aj stratégiou naivného kartelistu. Stratégia NICE CONSTANT v nekonečnej opakovanej hre duopolu s QLUF, alebo opakovanej hre duopolu s QLUF s neurčitou dĺžkou zvolí pre každého producenta takú úroveň cien, že obaja získavajú väčší profit, ako keby volili svoje ekvilibriumové ceny statickej hry. Táto stratégia je aplikovateľná na akékoľvek podmienky trhu, v ktorých ekvilibrium existuje.

Avšak táto stratégia nedokáže sama so sebou vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium, pretože pokiaľ by jej protihráč zistil v niektorom opakovaní, že hrá proti NICE CONSTANT, potom by jeho najlepšou odpoveďou bolo hranie stratégie, ktorú by mu určila jeho reakčná funkcia, (2.1.3.8), alebo (2.1.3.9) a tým by získaval väčší profit.

TIT-FOR-TAT duopolu s QLUF

Iná podmienená stratégia s kartelovým potenciálom, ktorá však dokáže vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre duopolu s QLUF, alebo opakovanej hre duopolu s QLUF s neurčitou dĺžkou, je stratégia, ktorá je skutočne podmienená, teda reaguje na históriu a ktorá je analógiou slávnej stratégie TIT-FOR-TAT identifikovanej Axelrodom vo svojich turnajoch opakovanej hry Vážňova dilemma¹⁷³.

Stratégia na začiatku hry stanoví úroveň cien všetkých hráčov ako stratégia NICE CONSTANT. Ak však jej konkurent stratégiu TIT-FOR-TAT duopolu s QLUF zradí v niektorom z opakovaní zahrnutím nižšej ceny, potom táto stratégia zvolí v nasledujúcom opakovaní úroveň ceny RATIONAL CONSTANT¹⁷⁴. Týmto spôsobom stratégia TIT-FOR-TAT duopolu s QLUF „trestá“ svojho konkurenta za vychýlenie sa z kartelovej úrovne cien.

¹⁷³ (Axelrod, 1984)

¹⁷⁴ Toto je iba jedna z možných verzií TIT-FOR-TAT duopolu s QLUF, keďže sa pohybujeme v spojitom priestore akcií hráčov, môžu existovať aj iné úrovne cien, ktoré TIT-FOR-TAT duopolu s QLUF zvolí po „zrade“ protihráča. Táto cena bude nižšia ako pôvodná úroveň, ale nutne nemusí okamžite ísť až na úroveň stratégie RATIONAL CONSTANT.

Avšak stratégia TIT-FOR-TAT duopolu s QLUF vie aj „odpúšťať“. Keďže analyzuje iba predchádzajúce opakovanie, potom jej konkurent môže zvrátiť stav úrovne cien RATIONAL CONSTANT zahráním úrovne NICE CONSTANT v niektorom s nasledujúcich opakovaní, na čo stratégia TIT-FOR-TAT duopolu s QLUF v ďalšom opakovaní opäť zvolí úroveň ceny NICE CONSTANT.

Pokiaľ je dodatočný zisk pre producentov, vyplývajúci z dohodnutej úrovne cien NICE CONSTANT oproti úrovni cien RATIONAL CONSTANT, dostatočne vysoký, potom aj „trest“ stratégie TIT-FOR-TAT duopolu s QLUF je efektívny a teda sa hráčovi, ktorý hrá proti stratégii TIT-FOR-TAT duopolu s QLUF neoplatí jednostranne vychýliť v žiadnom opakovaní. To znamená, že stratégia TIT-FOR-TAT duopolu s QLUF dokáže sama so sebou vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium.

Na reálnych trhoch však existujú bariéry, ktoré demotivujú racionálnych producentov od voľby stratégii takéhoto typu, teda od kartelovej dohody. Kartelová dohoda vedie k vyššej úrovni cien ako pri efektívnej konkurencii a teda subjekty trhu ochraňujúce spotrebiteľa sa snažia takýmto dohodám zabrániť.

CRUEL

Ďalším typom stratégie s kartelovým potenciálom, ktorá je skutočne podmienená a ktorá dokáže vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre duopolu s QLUF, alebo opakovanej hre duopolu s QLUF s neurčitou dĺžkou, je stratégia CRUEL, analogická so stratégiou CRUEL v hre duopolu s LUF.

Ide o stratégiu, ktorá podobne ako TIT-FOR-TAT duopolu s QLUF v prvom opakovaní zvolí cenu produktu na úrovni stratégie NICE CONSTANT a pokračuje v tom, pokiaľ ju jej konkurent „nezradí“ voľbou nižšej úrovne ceny. Keď sa to však stane, potom stratégia CRUEL bude už navždy stanovovať ceny na úrovni stratégie RATIONAL CONSTANT, teda stratégia CRUEL analyzuje v každom svojom rozhodovaní bode celú existujúcu históriu hry, a teda pokiaľ v nej vidí čo i len jednu „zradu“ konkurenta, potom zvolí úroveň ceny RATIONAL CONSTANT¹⁷⁵.

Stratégie typu CRUEL dokážu vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium, pretože pokiaľ jej protihráč vie, že hrá proti tejto stratégii, nikdy ju „nezradí“, pretože potom by

¹⁷⁵ Ide iba o jednu z možných verzií stratégie CRUEL, keďže sa pohybujeme v spojitom priestore akcií hráčov, môžu existovať aj iné úrovne cien, ktoré CRUEL zvolí po „zrade“ protihráča, nižšie ako pôvodná „dohodnutá“ úroveň, ale nutne nemusí okamžite ísť až na úroveň stratégie RATIONAL CONSTANT.

nasledoval „trest“ v podobe „zrád“ zo strany CRUEL navždy. Teda stratégia CRUEL je sama sebe najlepšou odpoveďou v nekonečnej opakovanej hre oligopolu s QLUF, alebo opakovanej hre oligopolu s QLUF s neurčitou dĺžkou a teda dokáže v nej vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium.

Samozrejme za podmienky, že trest stratégie CRUEL je dostatočný, vzhľadom na dodatočný profit dohodnutej úrovne cien NICE CONSTANT, ktorú hráči zvolia, v porovnaní s výstupom z profilu akcii stratégie RATIONAL CONSTANT.

No práve to, že stratégia CRUEL aj jedinú „zradu“ trestá donekonečna, ekvilibrium vytvorené stratégiami CRUEL je ešte stabilnejšie, ako ekvilibrium vytvorené napríklad stratégiami TIT-FOR-TAT duopolu s QLUF, ktoré zabúďajú vzdialenejšie „zrady“ a teda dokážu odpúšťať.

Opätovne by však išlo o kartel, ktorému organizátori trhov vytvárajú bariéry.

Sumár vzhľadom na podhry dokonalých ekvilibrií nekonečnej opakovanej hry duopolu s QLUF, alebo opakovanej hry duopolu s QLUF s neurčitou dĺžkou

Prirodzenou stratégiou, ktorá dokáže vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre duopolu s QLUF, alebo opakovanej hre duopolu s QLUF s neurčitou dĺžkou je stratégia NASTY CONSTANT, alebo inak RATIONAL CONSTANT. Už aj táto stratégia dokáže vytvoriť taký rovnovážny stav, ktorý vedie k potencionálnemu profitu pre oboch producentov, samozrejme za predpokladu splnenia podmienok existencie ekvilibria takéhoto tvaru v podkladovej statickej hre duopolu s QLUF.

Na druhej strane, pokiaľ podmienky trhu nevytvárajú takú situáciu, kedy obaja racionálni producenti dosahujú zisk, potom daný trh s producentami so stratégiami RATIONAL CONSTANT nedokáže existovať dlhodobo, pretože jeden z producentov (ten s negatívnym ziskom) v dlhodobom horizonte trh opustí.

Existuje nekonečne veľa mutácii stratégii typu TIT-FOR-TAT duopolu s QLUF a jej kombinácii s CRUEL, ktoré dokážu vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre duopolu s QLUF, alebo opakovanej hre duopolu s QLUF s neurčitou dĺžkou a ktoré vedú k ešte vyšším profitom oboch producentov, ako pri voľbe stratégie RATIONAL CONSTANT.

Vo všeobecnosti, pokiaľ majú stratégie vlastnosti „milá“, teda v prvom kole a vo všetkých nasledujúcich dokým ju „nezradia“ volia úroveň ceny stratégie NICE CONSTANT a „krutá“, teda, že dokážu trestať okamžite po prvej „zrade“ protihráča a vo svojej krutosti „efektívna“, teda, že trest stratégie je efektívny v zmysle straty dodatočného profitu „zradcu“, potom

dokážu vytvoriť vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium v nekonečnej opakovanej hre duopolu s QLUF, alebo opakovanej hre duopolu s QLUF s neurčitou dĺžkou.

Nevýhodou týchto stratégií je fakt, že majú povahu kartelu, ktorý je neželaným efektom na reálnom trhu, pretože ten vedie k zvyšovaniu cien pre dopyt (populáciu) a preto sú v reálnom svete využívané bariéry, ktoré kartel obmedzujú (hoci nie vždy, no pri väčšine reálnych trhov).

Navyše reálne trhy sú skôr opakovanými hrami s neurčitou dĺžkou a nie nekonečnými opakovanými hrami, pretože je pravdepodobné, že producenti na reálnom trhu neočakávajú, že trh, na ktorom produkujú, bude existovať donekonečna, ale iba prisudzujú určitú pravdepodobnosť uskutočnenia ďalšieho opakovania.

Zapojme ešte do našich analýz diskontný faktor, ktorým môžu producenti znehodnocovať svoje príjmy z budúcnosti na úkor príjmov v súčasnosti. Pokiaľ povolíme existenciu finančného trhu, potom producenti môžu byť motivovaní voliť svoje akcie v blízkych kolách tak, aby získali čo najviac, pretože dnešný zisk môžu investovať a tým kompenzovať svoje budúce straty, respektíve zníženia profitu.

Ak by teda producenti prisudzovali nízku pravdepodobnosť uskutočnenia budúcich opakovaní, prípadne by finančný trh poskytoval vysoký úrok pri investícii, potom by producenti boli motivovaní „zradiť“, napriek tomu, že by v nekonečnej hre bez diskontného faktora pokračovali v hraní stratégie, ktorá im zaručuje vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium s výraznejším profitom pre všetkých producentov, ako pri voľbe ceny prirodzeného ekvilibria RATIONAL CONSTANT.

V prípade opakovanej hry s neurčitou dĺžkou, prípadne nekonečnej opakovanej hry s diskontným faktorom, alebo ich kombinácie, potom záleží na úrovni týchto faktorov, pričom pokiaľ ich efekt rastie, potom klesá vôľa hráčov zostať vo svojej „milej“ stratégii, až sa môže táto vôľa kooperovať vytratiť, pokiaľ profit z aktuálnej „zrady“ prevýši súčasnú hodnotu očakávaných dodatočných profitov z budúcich opakovaní.

Jediná stratégia v hre duopolu s QLUF s neurčitou dĺžkou, alebo v nekonečnej opakovanej hre duopolu s QLUF s diskontným faktorom, alebo v ich kombinácii, ktorá je imúnna voči týmto faktorom, je stratégia RATIONAL CONSTANT, ktorá volí akcie, ktoré zodpovedajú ekvilibriu statickej hry duopolu s QLUF.

Výstupy a pozorovania z opakovaného duopolu s QLUF

Pri analýze opakovaného duopolu s QLUF sme využili pojmy a poznatky teórie hier.

Duopol s QLUF s konečným počtom opakovaní viedol k podstate rovnakému výstupu, ako statická hra duopolu s QLUF, teda k rovnakým tvarom ekvilibrií v každom opakovaní.

Pri duopole s QLUF s nekonečným alebo neurčitým počtom opakovaní sme okrem prirodzeného ekvilibria (ktorým je stratégia RATIONAL CONSTANT, teda ceny na úrovni ekvilibrií statickej hry) dokázali identifikovať aj iné ekvilibriá, ktoré by viedli k ešte vyšším ziskom producentov, ako ceny na úrovni stratégie RATIONAL CONSTANT.

No tieto stratégie mali povahu kartelu, čo je neželaný jav na reálnom trhu z pohľadu jeho organizátora, ktorým je štandardne štát, alebo iná organizácia, ktorá má na zreteli blaho dopytu (populácie) a teda pretože kartel spôsobuje zvyšovanie cien na akomkoľvek trhu, organizátor trhu štandardne vytvára bariéry na vznik kartelu a preto tieto stratégie nie sú vo všeobecnosti použiteľné v realite.

Navyše sme ukázali, že na existenciu rovnovážneho stavu na trhu – ekvilibria, ktoré vedie ku dodatočnému profitu oboch producentov vplýva aj pravdepodobnosť, s akou producenti očakávajú uskutočnenie nasledujúcich opakovaní trhu N a tiež diskontný faktor. Oba tieto faktory znižujú vôľu producentov zotrvať v stratégii zabezpečujúcej ekvilibrium, v ktorom obaja získavajú dodatočný profit, dokonca pokiaľ výška vplyvu týchto faktorov dosiahne určitú úroveň (ktorá znehodnotí očakávané budúce dodatočné profity natoľko, že ich prevýšia potencionálne profity z aktuálneho opakovania), racionálni producenti maximalizujúci svoj profit sa vychýlia zo svojej stratégie v smere k pôvodnému ekvilibriu statickej hry duopolu s QLUF.

Jedinou imúnou stratégiou voči malým pravdepodobnostiam uskutočnenia nasledujúcich opakovaní a vysokým úrovniam diskontného faktora, ktorá zaručovala ekvilibrium v duopole s QLUF s nekonečným alebo neurčitým počtom opakovaní, bola stratégia, ktorá definovala v každom opakovaní voľbu ceny producentov na úrovni statickej hry duopolu s QLUF.

2.2 Oligopol s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou

Pre model oligopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou platí rovnaká definícia, akú sme uviedli v úvode časti Oligopol s lineárnou úžitkovou funkciou pre oligopol s lineárnou úžitkovou funkciou.

Tak isto v prípade oligopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou budeme predpokladať limitované zdroje dopytu, ktoré míňa na nami analyzovanom trhu.

Tiež budeme predpokladať súťaž producentov o tieto limitované zdroje vo forme stanovovania cien produktov.

Naše očakávania na trhu oligopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou budú, že spotreba niektorého z produktov poklesne, pokiaľ jeho cena vzrastie a naopak.

Tiež budeme očakávať, že spotreba všetkých produktov v oligopole (respektíve celková spotreba produktov na trhu oligopolu) poklesne, pokiaľ všetky produkty zdražejú a naopak.¹⁷⁶

Podobne ako v predchádzajúcich častiach budeme používať pojmy rozpočet dopytu, rozpočtová hranica a spotrebné koše.^{177 178}

A tiež podobne ako v predchádzajúcich častiach, budeme vyjadrovať preferencie spotrebiteľa pomocou úžitkovej funkcie, teda funkcie, ktorá priradí číselnú hodnotu každému spotrebnému košu tak, aby zachovala poradie preferencií dopytu medzi všetkými spotrebnými košmi, pričom táto funkcia bude v nasledujúcej časti vyjadrovať nie len substitučný vzťah produktov, ale aj ich komplementárny vzťah.

Za preferencie budeme opäť považovať vyjadrenia názoru spotrebiteľa (alebo celého dopytu), ktorý spotrebný kôš preferuje, keď porovnáva akékoľvek dva spotrebné koše.^{179 180}

Vzhľadom na komplexnosť riešení a výstupov pri analýze oligopolu s ľubovoľným počtom producentov budeme ďalej v práci analyzovať triopol s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu, ako príklad oligopolu.

Triopol je situácia, v ktorej traja konkurenční producenti produkujú tri produkty, ktoré uspokojujú konkrétnu potrebu dopytu (populácie) a tieto produkty sú jedinými produktami, ktoré dokážu túto potrebu dopytu uspokojiť. Inými slovami nazývame tieto produkty

¹⁷⁶ Tento predpoklad o dopyte sa nazýva aj Zákon dopytu (Amir, Erickson, Jin, 2015).

¹⁷⁷ (Varian, 1995)

¹⁷⁸ (Varian, 1992)

¹⁷⁹ (Varian, 1995)

¹⁸⁰ (Varian, 1992)

substitútmi a pokiaľ tieto tri substitúty sú jediné produkty, ktoré dokážu uspokojiť konkrétnu potrebu dopytu, potom trh týchto produktov nazývame triopol.

Keď zdefinujeme úžitkovú funkciu na trhu triopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou a rozpočtovú hranicu dopytu, potom sme schopný odvodiť dopytovú funkciu po jednotlivých produktoch v závislosti od ich cien, ako maximalizáciu úžitku pre dopyt (maximalizáciu úžitkovej funkcie) na rozpočtovej hranici.

Keďže má práca ambíciu aplikácie v reálnom svete, všetky číselné parametre a výstupy, ktoré budeme používať, budú z množiny reálnych čísiel.

2.2.1 Kvázi-lineárna úžitková funkcia (QLUF) na trhu triopolu

Uvažujme troch konkurenčných producentov $I = \{1, 2, 3\}$, ktorí produkujú tri substitučné produkty, pričom platí, že každý producent produkuje práve jeden produkt a zároveň označme množinu týchto produktov rovnako $I = \{1, 2, 3\}$, pričom platí, že producent $i \in I$ vyrába práve produkt $i \in I$, $\forall i \in I$.

Predpokladajme, že tieto tri produkty sú jediné produkty, ktoré dokážu uspokojiť nejakú konkrétnu potrebu dopytu.

Nazvime túto konkrétnu potrebu dopytu, spotrebu predmetných produktov a produkciu týchto produktov trhom N , podobne ako pri duopole.

Nech $x_i \geq 0$ je počet jednotiek produktu $i \in I$, nech $f_i > 0$ ¹⁸¹ sú fixné náklady producenta $i \in I$, nech $c_i > 0$ ¹⁸² sú variabilné náklady producenta $i \in I$ na jednotku produktu i a nech $p_i \geq 0$ je jednotková cena produktu $i \in I$.

Predpokladajme, že sa producenti zaujímajú iba o maximalizáciu ich profitu a nech profit je definovaný ako $\pi_i = p_i x_i - f_i - c_i x_i$ pre všetkých producentov $i \in I$.

Vidíme, že pre akékoľvek dané x_i , f_i and c_i profit producenta i , $\pi_i \geq -f_i \Leftrightarrow p_i \geq c_i$.

Ak $p_i < c_i$, tak pre akékoľvek dané $x_i > 0$, $f_i, c_i > 0$ profit producenta i $\pi_i < -f_i$, čiže je racionálne predpokladať $p_i \geq c_i$, $\forall i \in I$.

Dovoľme zjemniť predpoklad, že producenti sa zaujímajú iba o maximalizáciu ich profitu v prípade, keď $p_i = c_i$ pre ľubovoľné $i \in I$. V takom prípade predpokladajme, že producent $i \in I$ bude produkovať dopytom požadované množstvo produktu $i \in I$, napriek tomu, že pri

¹⁸¹ Toto je relatívne prirodzená požiadavka, pretože štandardne majú producenti aspoň minimálne fixné náklady, pokiaľ chcú produkovať.

¹⁸² Toto je racionálna požiadavka, pretože pokiaľ by boli pre niektorého producenta variabilné náklady na jednotku produktu rovné nule, potom by mohol producent stanoviť cenu produktu na nulovej úrovni, čo by viedlo k nekonečnej spotrebe tohto produktu a trh N by zanikol.

zachovaní požiadavky by bol producent indiferentný medzi produkovaním a neprodukovaním.¹⁸³

Uvažujme a označme celkové finančné zdroje dopytu $I_T > 0$.

Nech $x_0 \geq 0$ je počet jednotiek všetkých ostatných produktov mimo trhu N, ktoré napĺňajú akúkoľvek inú potrebu dopytu, nech sú jednotky x_0 ekvivalentné k jednotkám x_i , $i \in I$.

Nech $p_0 \geq 0$ je cena jednotky x_0 a teda môžeme tvrdiť, že p_0 je vážený priemer cien produktov mimo trh N, v zmysle ekvivalentných jednotiek trhu N.

Predpokladajme, že p_0 a x_0 nereagujú na situáciu na trhu N, teda z pohľadu trhu N ide o konštanty.

To znamená, že súčin $p_0 \cdot x_0$ definuje finančné zdroje, ktoré dopyt míňa mimo trh N.

To znamená, že rozdiel $I_T - p_0 x_0 = I_N$ definuje finančné zdroje, ktoré dopyt míňa na trhu N a požadujeme $I_N > 0$, čo znamená $p_0 x_0 < I_T$.

V tomto momente uvedieme takú úžitkovú funkciu dopytu, ktorá dokáže opísať substitučný a zároveň aj komplementárny vzťah produktov na trhu triopolu s nedokonalými substitútmi, pričom túto úžitkovú funkciu nazveme kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou, pretože vychádza z lineárnej úžitkovej funkcie dokonalých substitútov, no zároveň v sebe obsahuje prvok komplementárnosti produktov:

$$U_{QL}(x_1, x_2, x_3) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + C x_1 x_2 x_3 + D x_0,$$

$$\text{s rozpočtovým obmedzením } I_N = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3, \quad (2.2.1.1)$$

za podmienok

$$A_i > 0, C > 0, D > 0, x_i \geq 0, c_i > 0, p_i \geq c_i, x_0 \geq 0, p_0 \geq 0, I_T > 0, I_N = I_T - p_0 x_0 > 0 \quad \forall i \in I,$$

kde $A_i > 0$ ¹⁸⁴ je samostatná atraktivita produktu $i \in I$ z pohľadu dopytu, $C > 0$ ¹⁸⁵ je

¹⁸³ V prípade, keď $p_i = c_i$, $i \in I$, môžeme predpokladať, že napriek tomu, že je producent $i \in I$ indiferentný medzi produkovaním a neprodukovaním v zmysle jeho profitu π_i , producent $i \in I$ môže preferovať produkciu, pretože toto rozhodnutie producenta môže zachovať prax jeho pracovnej sily. V opačnom prípade pracovná sila producenta môže stratiť svoju prax, čo môže byť nákladnejšie pre producenta, pokiaľ by sa producent vrátil do produkcie pri výhodnejších podmienkach na trhu N. Tento slabý predpoklad môže byť podporený predpokladom, že variabilné náklady c_i obsahujú všetky variabilné náklady producenta pri produkcii jednotky produktu i , vrátane údržby a opráv plynúcich z opotrebenia spôsobeného produkciou produktu i .

¹⁸⁴ Budeme požadovať, aby atraktivity produktov boli väčšie ako 0, pretože v prípade, keď je atraktivita niektorého z produktov nulová, potom tento produkt už nemá substitučný vzťah s ostatnými produktami na trhu N. Išlo by o degenerovaný prípad funkcie (2.2.1.1).

¹⁸⁵ Budeme požadovať, aby koeficient komplementárnosti bol väčší ako 0, pretože v prípade, že by bol menší, potom by boli práveže extrémne vo výbere spotreby preferované pred priemerami, teda by nešlo o konvexné, ale o konkávne preferencie, ktoré nie sú veľmi prirodzené a navyše nepravdepodobné, pokiaľ má úžitková funkcia predstavovať preferencie celého dopytu.

koeficient komplementárnosti produktov, $D > 0$ ¹⁸⁶ je atraktivita produktov mimo trh N a $I_N = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$ je rozpočtová hranica dopytu na trhu N.

Koeficient samostatnej atraktivity A_i vyjadruje akúkoľvek atraktivitu ako napríklad kvalita, marketing, alebo dostupnosť a známosť produktu $i \in I$ v jednom koeficiente v zmysle substitúcie produktov na trhu N.

Koeficient komplementárnosti C vyjadruje všetky dôvody komplementárnosti produktov na trhu N, ako napríklad konvexnosť samotných preferencií spotrebiteľov, informovanosť časti spotrebiteľov (populácie, dopytu), alebo aj dostupnosť produktov pre časť spotrebiteľov (populáciu, dopyt).

Predpoklad, že produkty $i \in I$ sú substitúty znamená, že hoci by A_1 , A_2 a A_3 neboli rovnaké, určité množstvo ľubovoľného z produktov má z pohľadu dopytu rovnaký užitek, ako určité množstvo iného produktu a to platí pre všetky tri produkty navzájom.

Avšak predpoklad, že produkty $i \in I$ sú nedokonalé substitúty, teda že majú aj vzťah komplementárnosti, znamená, že dopyt preferuje cez člena svojej kvázi-lineárnej užítkovej funkcie $Cx_1x_2x_3$ aspoň minimálnu spotrebu všetkých troch produktov a nie len jedného z nich.

Hodnota koeficientu komplementárnosti C vo vzťahu k hodnotám $A_i \forall i \in I$ bude definovať mieru substitučného, respektíve komplementárneho vzťahu medzi produktami $i \in I$.

V tomto momente môžeme iba predpokladať, že pokiaľ je hodnota C v porovnaní s $A_i \forall i \in I$ „malá“, komplementárny vzťah produktov bude zanedbateľný a trh N sa bude svojimi výstupmi podobáť na trh s lineárnou užítkovou funkciou, dokonca až môže dosiahnuť jeho úroveň.

Naopak, pokiaľ bude hodnota C v porovnaní s $A_i \forall i \in I$ „veľká“, potom trh N stratí vlastnosť trhu substitučných produktov, čo by viedlo k monopolnému správaniu producentov, ktorí by si dopyt delili na základe daných $A_i \forall i \in I$ a C , no už bez súťaže, čiže by stanovovali čo možno najvyššie ceny.

Z uvedeného vyplýva, že počiatočná podmienka kladená pre $C > 0$ je iba prvou podmienkou pre C , pričom pre zachovanie efektívneho trhu N s QLUF pravdepodobne pribudnú ďalšie, ktoré budú predmetom nášho ďalšieho výskumu.

V prípade, že by bol koeficient komplementárnosti rovný 0, potom by išlo o dokonalé substitúty, teda o lineárnu užítkovú funkciu, ktorej výstupy sme analyzovali v predchádzajúcich častiach.

¹⁸⁶ Budeme požadovať, aby atraktivita produktov mimo trh N bola väčšia ako 0, pretože v opačnom prípade by trh N bol trhom všetkých potrieb dopytu.

2.2.2 Náznak dopytových funkcií na trhu triopolu s QLUF a motivácia modifikácie QLUF v prípade oligopolu

Predpokladajme, že producenti na trhu N sú schopní vyrábať akékoľvek dopytom požadované množstvo ich produktov. To znamená, že v našej analýze nebudú žiadne produkčné obmedzenia. Čiže producenti $i \in I$ môžu úplne slobodne stanovovať cenu $p_i \geq c_i, \forall i \in I$.

Odvodíme teraz dopytové funkcie po produktoch $i \in I$ pomocou maximalizácie úžitkovej funkcie dopytu za podmienky rozpočtovej hranice. Využijeme na to Lagrangeovu metódu neurčitých koeficientov pre hľadanie lokálneho extrému (maxima) funkcie s rovnostným obmedzením¹⁸⁷. Lagrangeova funkcia pre kvázi-lineárnu úžitkovú funkciu (2.2.1.1) je

$$\mathcal{L}_L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + Cx_1x_2x_3 + Dx_0 + \lambda[I_N - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3], \quad (2.2.2.1)$$

kde λ je Lagrangeov multiplikátor.

Lagrangeova metóda definuje štyri podmienky pre lokálny extrém, ktoré musia byť splnené súčasne a teda dostávame sústavu štyroch rovníc o štyroch neznámych:

$$\frac{d\mathcal{L}_L}{dx_1} = A_1 + Cx_2x_3 - \lambda p_1 = 0,$$

$$\frac{d\mathcal{L}_L}{dx_2} = A_2 + Cx_1x_3 - \lambda p_2 = 0,$$

$$\frac{d\mathcal{L}_L}{dx_3} = A_3 + Cx_1x_2 - \lambda p_3 = 0,$$

$$\frac{d\mathcal{L}_L}{d\lambda} = I_N - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3 = 0. \quad (2.2.2.2)$$

Riešenie sústavy (2.1.2.4) pre x_1, x_2, x_3 vedie k polynómom vyšších rádov a zároveň k definícii podmienok kladených na parametre trhu $A_i, C, p_i, I_N \forall i \in I$ a navyše aj na úrovne samotných x_1, x_2, x_3 pre existenciu dopytu po jednotlivých x_1, x_2, x_3 . Dopytové funkcie na trhu triopolu s QLUF preto nie sú jednoznačne všeobecne definovateľné a podliehajú podmienkam kladeným na $A_i, C, p_i, I_N, x_i \forall i \in I$.

Vzhľadom na komplexnosť dopytových funkcií na trhu triopolu s QLUF uvedieme novú úžitkovú funkciu, ktorá vedie k menej komplexným dopytovým funkciám a navyše je z pohľadu spotrebiteľa (dopytu) racionálnejšia, ako samotná QLUF v triopole.

¹⁸⁷ (Dixit, 1990)

To, že sú dopytové funkcie na trhu triopolu (a teda aj oligopolu) veľmi komplexné spôsobuje, že aj funkcie najlepšej odpovede producentov (reakčné funkcie) na úrovne cien ostatných produktov budú následne tiež priveľmi komplexné. A z priveľmi komplexných reakčných funkcií je odvoditeľné priveľmi komplexné ekvilibrium, ako optimálna voľba producentov.

To, že QLUF v triopole nie je úplne racionálna z pohľadu dopytu vychádza z toho, že QLUF nevyjadruje rýdzo konvexné preferencie v zmysle $x_i \forall i \in I$ vo všetkých svojich bodoch.

Pokiaľ pre niektoré $i \in I$ platí $x_i = 0$, potom QLUF (2.2.1.1) nevyjadruje rýdzo konvexné preferencie v zmysle x_j a $x_k, j, k \in I, j \neq i, k \neq i, j \neq k$. To, že $x_i = 0$ znamená pre člena funkcie $Cx_1x_2x_3 = 0$. Člen $Cx_1x_2x_3$ vyjadruje komplementaritu produktov $i \in I, \forall i \in I$ v zmysle preferencií dopytu. Pokiaľ však ľubovoľné $x_i = 0$ dokáže tento komplementárny vzťah na trhu vymazať, následne sa zostávajúce dva produkty k sebe chovajú ako dokonalé substitúty, ktorých preferenčný vzťah nie je rýdzo konvexný, ale lineárny.

Vďaka tomu QLUF v triopole nie je úžitkovou funkciou „správne sa prejavujúcich preferencií“^{188 189} vo všetkých bodoch.

V realite je toto málo pravdepodobná situácia. Rozšírme náš príklad z úvodu kapitoly 2.

Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu – trh nedokonalých substitútov o dvoch vysokokvalitných kolových nápojoch na tri, dodaním vysokokvalitného kolového nápoja KOFO. Nech teda máme trh troch vysokokvalitných kolových nápojov KOKA, PEPI a KOFO, teda triopol.

Príklad z úvodu kapitoly bol príkladom duopolu s QLUF a teda sme nečelili problému formy komplementárneho efektu.

V prípade triopolu však už forma komplementárnosti produktov nie je jednoznačná. Môže byť absolútna, teda taká, že pokiaľ jediný z produktov nie je spotrebovávaný, potom komplementárny efekt na trhu úplne zaniká (túto situáciu opisuje QLUF (2.2.1.1)). Alebo môže byť aj po dvojiciach produktov, teda taká, že pokiaľ niektorý z produktov nie je spotrebovávaný, naďalej existuje komplementárny vzťah ostatných produktov v zmysle ich párov.

V realite je racionálnejšie očakávať druhú formu komplementárnosti nedokonale substitučných produktov.

Ak sa totiž pozrieme na príklad triopolu vysokokvalitných kolových nápojov s QLUF, potom

¹⁸⁸ (Varian, 1995)

¹⁸⁹ (Varian, 1992)

daná situácia znamená, že pokiaľ by hostiteľ nedisponoval aspoň minimálnym počtom fliaš z každého nápoja, potom by považoval zostávajúce dostupné kolové nápoje na jeho večierku za dokonale substitučné.

Teda napríklad, pokiaľ by nezohnal na večierok nápoj KOKA, potom by mu už nezáležalo na tom, že niekto z jeho hostí môže preferovať PEPI a niekto KOFO. A to teda platí pri ktoromkoľvek nedostupnom nápoji v zmysle ostatných dvoch dostupných.

No to je v protiklade s pôvodnou motiváciou prezentácie príkladu, že spotrebitelia preferujú aspoň minimálne zastúpenie všetkých dostupných nedokonalosť substitučných produktov v akejkoľvek situácii. Pri použití QLUF v triopole to však, ako sme ukázali, neplatí.

Pokiaľ by sme sa pozreli ešte na druhý dôvod existencie komplementárnosti nedokonalosť substitučných produktov, teda samotnú dostupnosť produktov pre dopyt na určitej časti trhu N , stojí za úvahu, či vôbec časť trhu N , v ktorej je určitý produkt nedostupný, by mal byť aj naďalej súčasťou celého trhu N , alebo by nemal byť vyčlenený z trhu N ako samostatný trh, na ktorom prirodzene už neplatí celá úžitková funkcia celého pôvodného trhu N .

Druhá forma komplementárnosti nedokonalosť substitučných produktov je forma komplementárnosti po pároch produktov. Ak teda modifikujeme člena (2.2.1.1) $Cx_1x_2x_3$ na $C(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$, potom už pri ľubovoľnom a jedinom $x_i = 0 \quad i \in I$ bude platiť $C(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \neq 0$ a teda komplementárnosť produktov (a teda konvexnosť preferencií) sa zachová aj v tejto situácii.

Ešte poznamenáme, že tvar modifikovaného člena $C(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ nie je jediným. Takýto tvar predpokladá rovnaký komplementárny efekt medzi všetkými dvojicami produktov, vyjadrený koeficientom C . No komplementárny vzťah rôznych dvojíc produktov môže byť aj odlišný, teda napríklad tvar úžitkovej funkcie vyjadrujúceho komplementárnosť by mohol byť aj $C_1x_1x_2 + C_2x_1x_3 + C_3x_2x_3$. V ďalších analýzach však budeme pokračovať s predpokladom rovnakého efektu komplementárnosti dvojíc produktov, teda s tvarom člena $C(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ a analýzu modifikovanej QLUF s členom $C_1x_1x_2 + C_2x_1x_3 + C_3x_2x_3$ prenecháme budúcim výskumom.

Ak sa opäť vrátíme k príkladu vysokokvalitných kolových nápojov, potom pokiaľ nie je napríklad dostupná KOKA, tak aj naďalej v prípade člena úžitkovej funkcie vyjadrujúceho komplementárnosť produktov $C(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ bude hostiteľ preferovať zastúpenie aspoň minimálneho množstva fliaš PEPI a KOFO a nebude ich považovať za dokonalé substitúty. A to platí pri ktoromkoľvek nedostupnom nápoji v zmysle ostatných dvoch dostupných.

Ambíciou práce je sa čo najviac priblížiť k realite, preto ďalej budeme pokračovať s analýzou novej, modifikovanej kvázi-lineárnej úžitkovej funkcie na trhu triopolu, ako príkladu oligopolu.

Zároveň netvrdíme, že funkcia (2.2.1.1) nereprezentuje niektorú z reálnych situácií, no taká situácia, keď producent vníma vysoko substitučné produkty za komplementy iba v prípade, pokiaľ má dostupné všetky také produkty, o ktorých vie, je relatívne neobvyklá v realite.

Ak však producent pôsobí na reálnom trhu N ako oligopolu s QLUF s preferenciami dopytu prejavujúcimi sa ako (2.2.1.1), potom pri znalosti (odhade) konkrétnych hodnôt $A_i, C, c_i, I_N > 0 \forall i \in I$ dokáže odvodiť dopytové funkcie po jednotlivých produktoch a z nich reakčné funkcie jednotlivých producentov a následne potencionálneho ekvilibria, ako kombináciu optimálnych volieb cien jednotlivých producentov.

2.2.3 Modifikovaná kvázi-lineárna úžitková funkcia (MQLUF) na trhu triopolu

Uvažujme troch konkurenčných producentov $I = \{1, 2, 3\}$, ktorí produkujú tri substitučné produkty, pričom platí, že každý producent produkuje práve jeden produkt a zároveň označme množinu týchto produktov rovnako $I = \{1, 2, 3\}$, pričom platí, že producent $i \in I$ vyrába práve produkt $i \in I, \forall i \in I$.

Predpokladajme, že tieto tri produkty sú jediné produkty, ktoré dokážu uspokojiť nejakú konkrétnu potrebu dopytu.

Nazvime túto konkrétnu potrebu dopytu, spotrebu predmetných produktov a produkciu týchto produktov trhom N , podobne ako pri duopole.

Nech $x_i \geq 0$ je počet jednotiek produktu $i \in I$, nech $f_i > 0$ ¹⁹⁰ sú fixné náklady producenta $i \in I$, nech $c_i > 0$ ¹⁹¹ sú variabilné náklady producenta $i \in I$ na jednotku produktu i a nech $p_i \geq 0$ je jednotková cena produktu $i \in I$.

Predpokladajme, že sa producenti zaujímajú iba o maximalizáciu ich profitu a nech profit je definovaný ako $\pi_i = p_i x_i - f_i - c_i x_i$ pre všetkých producentov $i \in I$.

Vidíme, že pre akékoľvek dané x_i, f_i and c_i profit producenta $i, \pi_i \geq -f_i \Leftrightarrow p_i \geq c_i$.

Ak $p_i < c_i$, tak pre akékoľvek dané $x_i > 0, f_i, c_i > 0$ profit producenta $i \pi_i < -f_i$, čiže je racionálne predpokladať $p_i \geq c_i, \forall i \in I$.

¹⁹⁰ Toto je relatívne prirodzená požiadavka, pretože štandardne majú producenti aspoň minimálne fixné náklady, pokiaľ chcú produkovať.

¹⁹¹ Toto je racionálna požiadavka, pretože pokiaľ by boli pre niektorého producenta variabilné náklady na jednotku produktu rovné nule, potom by mohol producent stanoviť cenu produktu na nulovej úrovni, čo by viedlo k nekonečnej spotrebe tohto produktu a trh N by zanikol.

Dovoľíme zjemniť predpoklad, že producenti sa zaujímajú iba o maximalizáciu ich profitu v prípade, keď $p_i = c_i$ pre ľubovoľné $i \in I$. V takom prípade predpokladajme, že producent $i \in I$ bude produkovat' dopytom požadované množstvo produktu $i \in I$, napriek tomu, že pri zachovaní požiadavky by bol producent indiferentný medzi produkovaním a neprodukovaním.¹⁹²

Uvažujme a označme celkové finančné zdroje dopytu $I_T > 0$.

Nech $x_0 \geq 0$ je počet jednotiek všetkých ostatných produktov mimo trhu N, ktoré naplňajú akúkoľvek inú potrebu dopytu, nech sú jednotky x_0 ekvivalentné k jednotkám x_i , $i \in I$.

Nech $p_0 \geq 0$ je cena jednotky x_0 a teda môžeme tvrdiť, že p_0 je vážený priemer cien produktov mimo trh N, v zmysle ekvivalentných jednotiek trhu N.

Predpokladajme, že p_0 a x_0 nereagujú na situáciu na trhu N, teda z pohľadu trhu N ide o konštanty.

To znamená, že súčin $p_0 * x_0$ definuje finančné zdroje, ktoré dopyt míňa mimo trh N.

To znamená, že rozdiel $I_T - p_0 x_0 = I_N$ definuje finančné zdroje, ktoré dopyt míňa na trhu N a požadujeme $I_N > 0$, čo znamená $p_0 x_0 < I_T$.

V tomto momente uvedieme takú úžitkovú funkciu dopytu, ktorá dokáže opísať substitučný a zároveň aj komplementárny vzťah produktov na trhu triopolu s nedokonalými substitútmi, pričom túto úžitkovú funkciu nazveme modifikovanou kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou, pretože vychádza z kvázi-lineárnej úžitkovej funkcie:

$$U_{MQL}(x_1, x_2, x_3) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + C(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) + D x_0, \\ \text{s rozpočtovým obmedzením } I_N = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3, \quad (2.2.3.1)$$

za podmienok

$$A_i > 0, C > 0, D > 0, x_i \geq 0, c_i > 0, p_i \geq c_i, x_0 \geq 0, p_0 \geq 0, I_T > 0, I_N = I_T - p_0 x_0 > 0 \forall i \in I,$$

¹⁹² V prípade, keď $p_i = c_i$, $i \in I$, môžeme predpokladať, že napriek tomu, že je producent $i \in I$ indiferentný medzi produkovaním a neprodukovaním v zmysle jeho profitu π_i , producent $i \in I$ môže preferovať produkciu, pretože toto rozhodnutie producenta môže zachovať prax jeho pracovnej sily. V opačnom prípade pracovná sila producenta môže stratiť svoju prax, čo môže byť nákladnejšie pre producenta, pokiaľ by sa producent vrátil do produkcie pri výhodnejších podmienkach na trhu N. Tento slabý predpoklad môže byť podporený predpokladom, že variabilné náklady c_i obsahujú všetky variabilné náklady producenta pri produkcii jednotky produktu i , vrátane údržby a opráv plynúcich z opotrebenia spôsobeného produkciou produktu i .

kde $A_i > 0$ ¹⁹³ je atraktivita produktu $i \in I$ z pohľadu dopytu, $C > 0$ ¹⁹⁴ je koeficient komplementárnosti produktov rovnaký pre všetky dvojice produktov, $D > 0$ ¹⁹⁵ je atraktivita produktov mimo trh N a $I_N = p_1x_1 + p_2x_2$ je rozpočtová hranica dopytu na trhu N.

Koeficient samostatnej atraktivity A_i vyjadruje akúkoľvek atraktivitu ako napríklad kvalita, marketing, alebo dostupnosť a známosť produktu $i \in I$ v jednom koeficiente.

Koeficient komplementárnosti C vyjadruje všetky dôvody komplementárnosti dvojíc produktov na trhu N, ako napríklad konvexnosť samotných preferencií spotrebiteľov, informovanosť časti spotrebiteľov (populácie, dopytu), alebo aj dostupnosť produktov pre časť spotrebiteľov (populáciu, dopyt).

Hodnota koeficientu komplementárnosti C vo vzťahu k hodnotám $A_i \forall i \in I$ bude definovať mieru substitučného, respektíve komplementárneho vzťahu medzi produktami $i \in I$.

V tomto momente môžeme iba predpokladať, že pokiaľ je hodnota C v porovnaní s $A_i \forall i \in I$ „malá“, komplementárny vzťah produktov bude zanedbateľný a trh N sa bude svojimi výstupmi podobáť na trh s lineárnou úžitkovou funkciou, dokonca až môže dosiahnuť jeho úroveň.

Naopak, pokiaľ bude hodnota C v porovnaní s $A_i \forall i \in I$ „veľká“, potom trh N stratí vlastnosť trhu substitučných produktov, čo by viedlo k monopolnému správaniu producentov, ktorí by si dopyt delili na základe daných $A_i \forall i \in I$ a C , no už bez súťaže, čiže by stanovovali čo možno najvyššie ceny.

Z uvedeného vyplýva, že počiatočná podmienka kladená pre $C > 0$ je iba prvou podmienkou pre C , pričom pre zachovanie efektívneho trhu N s MQLUF pravdepodobne pribudnú ďalšie, ktoré budú predmetom nášho ďalšieho výskumu.

¹⁹³ Budeme požadovať, aby samostatné atraktivity produktov boli väčšie ako 0, pretože v prípade, keď je atraktivita niektorého z produktov nulová, potom tento produkt už nemá substitučný vzťah s ostatnými produktami na trhu N. Išlo by o degenerovaný prípad funkcie (2.2.3.1).

¹⁹⁴ Budeme požadovať, aby koeficient komplementárnosti bol väčší ako 0, pretože v prípade, že by bol menší, potom by boli práveže extrémny vo výbere spotreby preferované pred priemerami, teda by nešlo o konvexné, ale o konkávne preferencie, ktoré nie sú veľmi prirodzené a navyše nepravdepodobné, pokiaľ má úžitková funkcia predstavovať preferencie celého dopytu.

V prípade, že by bol koeficient komplementárnosti rovný 0, potom by išlo o dokonalé substitúty, teda o lineárnu úžitkovú funkciu, ktorej výstupy sme analyzovali v predchádzajúcich častiach.

¹⁹⁵ Budeme požadovať, aby atraktivita produktov mimo trh N bola väčšia ako 0, pretože v opačnom prípade by trh N bol trhom všetkých potrieb dopytu.

2.2.4 Náznak lokálnych dopytových funkcií na trhu triopolu s MQLUF

Predpokladajme, že producenti na trhu N sú schopní vyrábať akékoľvek dopytom požadované množstvo ich produktov. To znamená, že v našej analýze nebudú žiadne produkčné obmedzenia. Čiže producenti $i \in I$ môžu úplne slobodne stanovovať cenu $p_i \geq c_i, \forall i \in I$.

Odvodíme teraz dopytové funkcie po produktoch $i \in I$ pomocou maximalizácie úžitkovej funkcie dopytu za podmienky rozpočtovej hranice. Využijeme na to Lagrangeovu metódu neurčitých koeficientov pre hľadanie lokálneho extrému (maxima) funkcie s rovnostným obmedzením¹⁹⁶. Lagrangeova funkcia pre kvázi-lineárnu úžitkovú funkciu (2.2.3.1) je

$$\mathcal{L}_L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + C(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + Dx_0 + \lambda[I_N - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3], \quad (2.2.4.1)$$

kde λ je Lagrangeov multiplikátor.

Lagrangeova metóda definuje štyri podmienky pre lokálny extrém, ktoré musia byť splnené súčasne a teda dostávame sústavu štyroch rovníc o štyroch neznámych:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_L}{dx_1} &= A_1 + Cx_2 + Cx_3 - \lambda p_1 = 0, \\ \frac{d\mathcal{L}_L}{dx_2} &= A_2 + Cx_1 + Cx_3 - \lambda p_2 = 0, \\ \frac{d\mathcal{L}_L}{dx_3} &= A_3 + Cx_1 + Cx_2 - \lambda p_3 = 0, \\ \frac{d\mathcal{L}_L}{d\lambda} &= I_N - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.2.4.2)$$

Z riešenia sústavy (2.2.4.2) dostaneme pre x_1, x_2, x_3 dopytové funkcie na trhu N, avšak ešte bez uvažovania podmienky $x_i \geq 0 \forall i \in I$:

$$x_1(p_1, p_2, p_3) = \frac{(p_1 - p_2 - p_3)CI_N - 2A_1p_2p_3 - A_2p_3(-p_1 - p_2 + p_3) - A_3p_2(-p_1 + p_2 - p_3)}{C(p_1(p_1 - p_2 - p_3) + p_2(-p_1 + p_2 - p_3) + p_3(-p_1 - p_2 + p_3))}, \quad (2.2.4.3)$$

$$x_2(p_1, p_2, p_3) = \frac{(-p_1 + p_2 - p_3)CI_N - A_1p_3(-p_1 - p_2 + p_3) - 2A_2p_1p_3 - A_3p_1(p_1 - p_2 - p_3)}{C(p_1(p_1 - p_2 - p_3) + p_2(-p_1 + p_2 - p_3) + p_3(-p_1 - p_2 + p_3))}, \quad (2.2.4.4)$$

$$x_3(p_1, p_2, p_3) = \frac{(-p_1 - p_2 + p_3)CI_N - A_1p_2(-p_1 + p_2 - p_3) - A_2p_1(p_1 - p_2 - p_3) - 2A_3p_1p_2}{C(p_1(p_1 - p_2 - p_3) + p_2(-p_1 + p_2 - p_3) + p_3(-p_1 - p_2 + p_3))}. \quad (2.2.4.5)$$

(2.2.4.3) môžeme prepísať na tvar

¹⁹⁶ (Dixit, 1990)

$$x_1(p_1, p_2, p_3) = \frac{(p_2 + p_3)CI_N + 2A_1p_2p_3 + A_2p_3(p_3 - p_2) + A_3p_2(p_2 - p_3) - CI_Np_1 - (A_2p_3 + A_3p_2)p_1}{C(p_1(2p_2 + 2p_3 - p_1) - (p_2 - p_3)^2)}, \quad (2.2.4.6)$$

kde v čitateli $(p_2 + p_3)CI_N + 2A_1p_2p_3 > 0$, $-CI_Np_1 - (A_2p_3 + A_3p_2)p_1 < 0$ a $A_2p_3(p_3 - p_2) + A_3p_2(p_2 - p_3)$ je nejednoznačné, závisí na hodnotách p_2 , p_3 , A_2 a A_3 . Menovateľ (2.2.4.6) je kladný, pokiaľ $p_1(2p_2 + 2p_3 - p_1) - (p_2 - p_3)^2 > 0 \Leftrightarrow p_1 \in (p_2 + p_3 - 2\sqrt{p_2p_3}, p_2 + p_3 + 2\sqrt{p_2p_3})$, pre $p_1 = p_2 + p_3 - 2\sqrt{p_2p_3}$ a $p_1 = p_2 + p_3 + 2\sqrt{p_2p_3}$ je rovný nule a pre $p_1 \in (0, p_2 + p_3 - 2\sqrt{p_2p_3}) \cup (p_2 + p_3 + 2\sqrt{p_2p_3}, \infty)$ je záporný.

Vidíme, že dopytová funkcia producenta 1 (2.2.4.6) na trhu triopolu nemá rovnaký priebeh pre $p_1 \in (0, \infty)$ a navyše pre $p_1 = p_2 + p_3 - 2\sqrt{p_2p_3}$ a $p_1 = p_2 + p_3 + 2\sqrt{p_2p_3}$ nie je definovaná.

Vzhľadom na vyššie uvedené a komplexnosť riešení mimo interval $p_1 \in (p_2 + p_3 - 2\sqrt{p_2p_3}, p_2 + p_3 + 2\sqrt{p_2p_3})$ v tomto bode prejdeme k zúženiu priestoru voľby ceny producenta 1 na $p_1 \in (p_2 + p_3 - 2\sqrt{p_2p_3}, p_2 + p_3 + 2\sqrt{p_2p_3})$.

Môžeme si to dovoliť aj vzhľadom na cieľ práce, ktorým je vytvoriť model blízky reálnym situáciám. Ak totiž analyzujeme reálny trh, je veľmi málo pravdepodobné, že na reálnom trhu substitučných produktov naplňajúcich konkrétnu potrebu dopytu bude cena jedného z nich násobne vyššia, alebo nižšia, ako ostatných produktov.

Pokiaľ sme v realite svedkami takého výrazného rozdielu v cenách medzi nami považovanými substitučnými produktami, môže to byť spôsobené tým, že sme trh zle identifikovali. Je možné, že sme náš trh definovali nad produktami, ktoré síce považujeme za substitučné, avšak samotný dopyt to tak nevníma a možno nie vedome.

Ako príklad môžeme uviesť trh dovolenkových zájazdov. Pokiaľ by sme analyzovali trh akýchkoľvek dovolenkových zájazdov, potom by sme samozrejme zmiešali dokopy aj zájazdy lokálneho typu, kde nie je potrebná letecká doprava, spolu s luxusnými zájazdami v päť hviezdčkových rezortoch v exotických destináciách. Prirodzene by sme boli svedkami výrazného rozptylu cien zájazdov, ako produktov.

Avšak je skutočne málo pravdepodobné, že dopyt v zmysle celej populácie považuje luxusný exotický zájazd za produkt naplňajúci rovnakú potrebu, ako víkendové kempovanie v prírodnej lokalite 100 km od bydliska. Časť dopytu (populácie) to môže považovať za substitučné, no celý dopyt pravdepodobne nie.

Predpoklad trhu N boli ale substitučné produkty naplňajúce konkrétnu potrebu dopytu a teda v našom príklade by bolo vhodné na správnu analýzu rozdeliť trh akýchkoľvek dovolenkových zájazdov na menšie trhy na základe vlastností produktu – dovolenkového zájazdu. Tým by sme dosiahli lepšie výstupy z analýzy, ale zároveň aj zúženie rozptylu cien.

Predpokladajme teda, že producent 1 má možnosť voľby cien na úrovni $p_1 \in (p_2 + p_3 - 2\sqrt{p_2 p_3}, p_2 + p_3 + 2\sqrt{p_2 p_3})$ a ďalej v analýze pokračujme s týmto predpokladom. A to teda znamená, že menovateľ (2.2.4.6) bude vždy kladný.

Predtým, ako prejdeme k podmienke $x_1 \geq 0$ ešte zabezpečíme náš pôvodný predpoklad, že racionálna dopytová funkcia klesá s rastúcou cenou daného produktu.

To otestujeme tým, že overíme, či prvá derivácia dopytovej funkcie (2.2.4.6) podľa p_1 je ostro menšia ako 0 na intervale $p_1 \in (p_2 + p_3 - 2\sqrt{p_2 p_3}, p_2 + p_3 + 2\sqrt{p_2 p_3})$.

No pri všeobecnom riešení daný test vedie ku komplexným podmienkam kladeným na hodnotu A_1 vzhľadom na ostatné A_i $i \in I, i \neq 1$ a C , aby bola (2.2.4.6) klesajúca na intervale $p_1 \in (p_2 + p_3 - 2\sqrt{p_2 p_3}, p_2 + p_3 + 2\sqrt{p_2 p_3})$.

Pokiaľ sa však producent 1 nachádza v reálnej situácii triopolu, potom pri znalosti, respektíve odhade parametrov trhu dokáže vyjadriť lokálnu dopytovú funkciu pre svoj produkt na intervale $p_1 \in (p_2 + p_3 - 2\sqrt{p_2 p_3}, p_2 + p_3 + 2\sqrt{p_2 p_3})$. V reálnej situácii dokonca táto funkcia môže byť považovaná za globálnu, pretože producent by si mal byť vedomí trhu, na ktorom pôsobí a teda by mal vedieť dokázať identifikovať konkurentov a tým pádom aj ceny ich produktov. Tie by však nemali byť vo väčšom rozptyle, ako je podmienka kladená pre lokálnu dopytovú funkciu, respektíve táto podmienka by mala byť v realite porušená iba v malom počte prípadov.

Pokiaľ však je porušená, potom sa pravdepodobne reálny trh správa podľa inej úžitkovej funkcie.

Samozrejme vyššie uvedené uvažovania sa vzťahujú na ľubovoľného producenta $i \in I$, nie iba pre producenta 1.

Avšak ak reálny producent pozná, alebo dokáže odhadnúť parametre trhu potrebné na definovanie úžitkovej funkcie dopytu (2.2.3.1), potom dokáže odhadnúť dopytové funkcie po každom produkte na trhu a z nich dokáže odvodiť reakčné funkcie každého z producentov na trhu. Z týchto reakčných funkcií dokáže identifikovať ekvilibrium, pokiaľ existuje, a pokiaľ existuje jediné ekvilibrium, dostáva optimálnu voľbu všetkých producentov, teda aj svoju.

2.2.5 Výstupy z oligopolu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou

Pre oligopol, konkrétne pre príklad triopolu, sme predstavili dve kvázi-lineárne úžitkové funkcie dopytu, kvázi-lineárnu úžitkovú funkciu (QLUF) a modifikovanú kvázi-lineárnu úžitkovú funkciu (MQLUF).

Obe úžitkové funkcie vedú vo všeobecnom riešení ku komplexným výstupom, no v reálnom prípade, za predpokladu správnej identifikácie trhu producentom a z nej vyplývajúcej znalosti, či schopnosti správneho odhadu parametrov trhu by pravdepodobne mohli viesť k aplikácii modelu na strategické rozhodnutia v zmysle voľby ceny, alebo aj výšky investícií do produktu, či produkcie.

Navyše aplikácia modelu na reálnu opakovanú situáciu, ktorou trhy štandardne sú, a odhade zmeny parametrov trhu v čase, by producentovi pomohla pri stanovovaní dlhodobej stratégie nie len v zmysle cenotvorby, ale aj dosiahnutiu želaného podielu na trhu.

Ak by bol totiž producent ochotný akceptovať v určitom období straty pri stratégii dosiahnutia podielu na trhu, potom by aplikácia modelu dokázala identifikovať potrebný kapitál, ktorý by bol potrebný na kompenzáciu dočasných strát. Neurčité parametre modelu, hlavne s ohľadom na budúcnosť, je možné meniť a tým získať informáciu o potrebnom kapitále v zmysle určitých scenárov.

Navyše sme identifikovali konkrétne optimálne rozhodnutie producenta, ktoré je v realite aplikovateľné aj pre producenta pôsobiacom na trhu oligopolu, a tým je ekvilibrium duopolu s QLUF.

Napriek tomu, že ekvilibrium bolo získané analýzou trhu, na ktorom pôsobia iba dvaja producenti, je možné ho aplikovať aj na trhu viacerých producentov.

Za určitých podmienok ekvilibrium duopolu s QLUF už nie je definované cenou variabilných nákladov pre minimálne všetkých producentov až na jedného, teda už nie tak, ako to bolo pri modeloch trhu s LUF. Za určitých podmienok model duopolu s QLUF definoval takú úroveň optimálnych cien, ktorá viedla pre oboch producentov k vyššej cene produktu, ako sú ich variabilné náklady a tým model duopolu s QLUF modeluje optimálne rozhodnutie producentov, ktoré je bližšie k realite, ako model s LUF.

Keďže je model modelom a teda odhadom reálnej situácie, potom aj určitá aplikácia modelu duopolu s QLUF môže pomôcť producentovi v oligopole k správnym strategickým rozhodnutiam.

Model duopolu s QLUF je možné aplikovať na trh oligopolu tak, že konkrétny producent

bude nazerať na všetkých svojich konkurentov ako na jedného producenta.

Pokiaľ tento producent určí parametre tohto zovšeobecneného konkurenta ako určitý priemer parametrov všetkých jeho konkurentov, prípadne stanoví rôzne scenáre úrovni týchto parametrov, potom dokáže identifikovať svoju optimálnu voľbu voči tomuto zovšeobecnenému konkurentovi. Pri definícii rôznych scenárov úrovni parametrov môže využívať priemer konkurentov, prípadne extrémne úrovne parametrov z pomedzi konkurentov a dokáže tak identifikovať priestor výstupov z jeho pôsobenia na trhu. Čiže dokáže vytvárať dopadové analýzy, ktoré môžu slúžiť ako podklad pre strategické rozhodnutia.

Reálny producent tak má na výber, či pri strategických rozhodnutiach bude využívať modely s QLUF, alebo MQLUF, ktoré berú do úvahy skutočný počet jeho konkurentov na správne identifikovanom trhu, alebo siahne k jednoduchšiemu modelu, modelu duopolu s QLUF, ktorý tiež dokáže pomôcť k optimálnemu rozhodnutiu.

Samozrejme využitie modelu duopolu s QLUF producentom v oligopole predpokladá analýzy a rozumné nastavenie parametrov zovšeobecneného konkurenta v zmysle jeho reálnych konkurentov.

D. Výsledky práce a diskusia

Práca identifikovala také modely trhu substitučných produktov, ktoré by bolo možné aplikovať v praxi strategického rozhodovania reálneho producenta.

Model s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu

Práca vychádzala najskôr z typického modelu trhu substitučných produktov, ktorý je definovaný lineárnou úžitkovou funkciou dopytu. V ekonomickej literatúre sa pri analýzach dopytu na trhoch substitučných produktov stretneme práve s touto úžitkovou funkciou¹⁹⁷.

Využitie lineárnej úžitkovej funkcie predpokladá dokonalo substitučný vzťah produktov, čo znamená, že každý z produktov dokáže dokonalo nahradiť v spotrebe akýkoľvek iný produkt naplňajúci určitú potrebu dopytu. Uvedené neznamená, že sú substitučné produkty na trhu homogénne, dopyt môže prisudzovať jednotlivým produktom určité preferencie, ktoré je možné v lineárnej úžitkovej funkcii vyjadriť pomocou koeficientov atraktivity.

Predpoklad dokonalej substitúcie produktov na trhu v spojitosti s predpokladom racionality producentov ale viedol k výstupu, ktorý je v rozpore s častou realitou, teda že kladný profit je na trhu substitučných produktov schopný získať maximálne jeden z producentov. Takéto trhy by predsa nemohli existovať dlhodobo, no v realite existujú.

V práci sme konfrontovali aj dlhodobú existenciu trhu za podmienky lineárnej úžitkovej funkcie dopytu, ktorá dokázala identifikovať podmienky, kedy by bol tento neželaný výstup eliminovaný. No tieto situácie vo veľkej miere naplňajú definíciu kartelu. Ide o také voľby dlhodobých podmienených stratégií producentmi, ktoré zo začiatku volia kartelové úrovne cien, pričom pokiaľ ich konkurent zradí, menia svoje voľby na úrovne cien ekvilibria statickej hry.

Tento neželaný výstup bol prítomný ako v prípade analýzy duopolu, tak aj oligopolu.

Na základe analýzy modelu oligopolu s lineárnou úžitkovou funkciou teda môžeme konštatovať, že je vhodný iba na určité typy reálnych trhov. V situácii, keď pozorujeme dlhodobú existenciu trhu, model nie je vhodný.

Diskusia o predpokladoch modelu s LUF

Napriek tomu, že model s lineárnou úžitkovou funkciou vedie k výstupom, ktoré sú možné iba na špecifických reálnych trhoch, a to najmä z pohľadu dlhodobej existencie trhu, samotný

¹⁹⁷ (Varian, 1995), (Nechyba, 2010)

model vo svojich predpokladoch nemusí byť nutne až tak vzdialený od širšieho spektra reálnych trhov.

Tvar úžitkovej funkcie – koeficienty atraktivity produktov v lineárnom vzťahu

Základným predpokladom modelu s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu je samotný tvar úžitkovej funkcie.

Predstavme si, že by sme mali za úlohu identifikovať preferencie dopytu na konkrétnom reálnom trhu a popísať ich pomocou ľubovoľnej úžitkovej funkcie. Vo všeobecnosti existujú dva prístupy, ktoré by sme mohli zvoliť, a to prieskum trhu dopytovaním reálnych spotrebiteľov a odhad dopytovej funkcie pomocou štatistickej analýzy historických dát, z ktorej by bolo možné späť odvodiť samotnú úžitkovú funkciu.

Ak by sme sa rozhodli pre prieskum trhu, potom môžeme predpokladať, že by reálni spotrebiteľia boli schopní identifikovať svoje preferencie medzi jednotlivými produktmi v zmysle o koľko viac preferujú určitý produkt pred druhým, či pred ostatnými. Ak by aj neboli schopní sa vyjadriť v číselnom vyjadrení, pri správnom nastavení prieskumu je možné túto informáciu dopytovaním získať.

Je však málo pravdepodobné, že by pomocou dopytovaní spotrebiteľov získali inú informáciu ako o koľko krát viac preferujú určitý produkt pred iným. Toto však definuje lineárny vzťah v preferenciách spotrebiteľov, teda lineárnu úžitkovú funkciu.

Spotrebiteľia ale nemajú prečo svoje preferencie vnímať a prejavovať inak, ako nám zodpovedia, preto je možné predpokladať, že ich preferencie medzi produktami na trhu sú skutočne, aspoň do určitej miery, lineárne.

Môžem predpokladať, že by sme tento výstup z prieskumu získali aj na reálnom trhu produktov, ktorý existuje dlhodobo, nie len na krátkodobých trhoch.

Analýza historických dát rôznych reálnych trhov môže viesť k rôznym tvarom dopytovej funkcie po produktoch. Pokiaľ však z nich odvodené úžitkové funkcie vyjadrujú nelineárny vzťah preferencii, potom je interpretácia takýchto úžitkových funkcií veľmi náročná, najmä pokiaľ má byť konfrontovaná s názormi reálnych spotrebiteľov.

Linearita preferencii sa tak nejaví ako nesprávny predpoklad, aspoň pokiaľ analyzujeme trh lokálne, v zmysle priestoru možných úrovní vstupných parametrov.¹⁹⁸

¹⁹⁸ Otázne môžu byť situácie, kedy je spotrebiteľ presýtený určitým produktom, pričom v prípade, že disponuje priveľkým množstvom tohto produktu môže začať preferovať iný produkt, iba kvôli zmene. Avšak práve tam smerujú úvahy modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou, ktorá je hlavným výstupom práce.

Finančné prostriedky dopytu alokované na trh v modeli s LUF

Ďalším predpokladom v modeli s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu bol predpoklad o konštantných finančných prostriedkoch, ktoré dopyt míňa na nami analyzovanom trhu.

Tento predpoklad je skutočne v porovnaní s reálnymi trhmi príliš silný. Reálny dopyt štandardne upravuje výšku finančných prostriedkov, ktoré minie na konkrétnom trhu, pretože tomuto trhu konkurujú iné trhy, ktoré uspokojujú iné potreby dopytu.

Avšak je racionálne predpokladať, že pokiaľ sa významne nezmenia podmienky na jednotlivých trhoch všetkých potrieb dopytu a tiež, že sa významne nezmení ekonomická situácia spotrebiteľov, potom sú finančné prostriedky, ktoré dopyt míňa na jednotlivých trhoch, relatívne konštantné.

Práca si nedáva za cieľ analyzovať trhy v turbulentných obdobiach, ale identifikovať model trhu, ktorý by bol nápomocný pri strategických rozhodnutiach producentov. Toto implicitne predpokladá relatívnu stabilitu externých vplyvov na náš analyzovaný trh.

Navyše, parameter finančných prostriedkov alokovaných dopytom na nami analyzovanom trhu nie je nemenný. To znamená, že model umožňuje tvorbu rôznych scenárov pri rôznych úrovniach tohto parametra. To zároveň platí aj pre dlhodobjšie analýzy, pri ktorých môžeme odhadovať určitý vývoj tohto parametra.

Na základe vyššie uvedeného môžeme konštatovať, že predpoklad o konštantných finančných prostriedkoch dopytu alokovaných na nami analyzovanom trhu v modeli s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu nevedie k neželanému výstupu, ktorý sme identifikovali.

Informačné hľadisko v modeli s LUF

Model s lineárnou úžitkovou funkciou predpokladá, že všetci producenti majú dokonalú informáciu o všetkých aspektoch trhu.

Každý z producentov pozná úžitkovú funkciu dopytu na danom trhu a finančné prostriedky, ktoré dopyt míňa na danom trhu, z čoho je schopný si odvodiť dopytové funkcie po každom z produktov.

Navyše, každý z producentov pozná fixné a variabilné náklady všetkých producentov, čím dokáže odvodiť funkcie najlepšej odpovede všetkých producentov.

Tento predpoklad je prirodzene veľmi silný v porovnaní s realitou. Reálni producenti málo kedy poznajú dokonale preferencie dopytu, finančné prostriedky dopytu alokované na trh a fixné a variabilné náklady konkurentov.

No reálni producenti sú schopní všetky tieto parametre odhadovať. Ak tieto parametre dokážu odhadnúť, potom dokážu zvoliť také úrovne ich vlastných premenných, ktoré vedú k maximalizácii ich zisku na základe odhadov ostatných parametrov.

Pokiaľ sa aj v prvotných odhadoch mýlia, reálni producenti dokážu pozorovať realizáciu ich produkcie a predaj ich produktu a teda pokiaľ dosiahnu vopred neočakávaný výstup, dokážu svoje odhady zlepšiť pri ďalšom strategickom rozhodovaní.

Navyše, reálni producenti sú schopní pozorovať historické úrovne cien svojej konkurencie, poznajú historické výstupy z trhu a preto dokážu relatívne dobre odhadovať všetky parametre, o ktorých model predpokladá dokonalú informáciu.

Samozrejme, že optimalizácia odhadov parametrov trhu je podmienená relatívne dlhodobou existenciou trhu, no na druhej strane, také trhy sú v realite najčastejšie.

Vďaka reálnej možnosti optimalizácie odhadu parametrov trhu nie je predpoklad dokonalej informácie významne vzdialený od reality.

Model by bolo možné rozšíriť o aplikáciu nedokonalej informácie, pri ktorej by producenti poznali iba určité pravdepodobnosti úrovní parametrov trhu. To je však analogické k prístupu reálneho producenta, ktorý vytvára rôzne scenáre na základe rôznych úrovní parametrov trhu a prisudzuje týmto scenárom rôzne pravdepodobnosti.

Model s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu striktne definuje rozdelenie dopytu po produktoch. Ak existuje jediný produkt, ktorého relatívna cena v zmysle atraktivít je najnižšia, potom dopyt siahne iba po tomto produkte. Pokiaľ existujú viaceré produkty, ktorých relatívne ceny sú najnižšie na trhu, potom dopyt rovnomerne rozdelí svoje finančné prostriedky medzi tieto produkty.

Predpoklad o dokonalej informácii na toto nevplyva, preto aj neovplyvňuje neželaný výstup, ktorý model s lineárnou úžitkovou funkciou definuje.

Informačné hľadisko spotrebiteľov nie je v tejto práci významné. Modely, ktoré práca využíva, popisujú dopyt pomocou odhadnutej/zvolenej úžitkovej funkcie, ktorá v sebe implicitne informačné hľadisko spotrebiteľov obsahuje.

Racionalita v modeli s LUF

Racionalita subjektov na trhu je štandardným predpokladom ekonomických modelov.

V realite prirodzene očakávame racionalitu subjektov, problémom predpokladu racionality môže byť fakt, že model nepopisuje správne motivácie subjektov a preto vedie k iným výstupom.

Avšak môžeme predpokladať, že v zmysle modelu konkurenčnej súťaže je predpoklad maximalizácie zisku producentov správny.

Je možné, že v realite existujú producenti, ktorí nie sú motivovaní ziskom, môžu to byť producenti poskytujúci určité služby spoločnosti, prípadne sú financovaní štátom, no práca sa zaoberá štandardnými trhmi, na ktorých producenti takéhoto špeciálneho typu nezvyknú pôsobiť.

Racionalita spotrebiteľov sa prejavuje vo voľbe najlepšieho spotrebného koša pri vopred stanovenom rozpočte, ktorá vedie k dopytovým funkciám po jednotlivých produktoch.

Lineárna úžitková funkcia popisuje racionálne preferencie a autorovi práce nie sú známe dôvody spochybňovania racionality spotrebiteľov v ich výbere.

Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu

Napriek tomu, že predpoklady modelu s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu boli volené tak, aby neboli vo významnom rozpore so všeobecnou realitou, výstup modelu je možné aplikovať iba na špecifické, najmä krátkodobé trhy.

Vo všeobecnosti sme však v realite svedkami dlhodobej existencie trhov. A teda, pokiaľ máme za úlohu popísať dlhodobý reálny trh substitučných produktov, je potrebné siahnuť po inom, ako modeli s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu.

Diskusia o predpokladoch modelu s lineárnou úžitkovou funkciou preukázala ich relatívnu správnosť. Racionalita subjektov je štandardným predpokladom v ekonomických modeloch, informovanosť producentov je možné považovať za konvergujúcu k dokonalej informácii, konštantnosť finančných prostriedkov dopytu alokovaných na trh nie je významne vychýleným predpokladom a predpoklad linearít substitučného vzťahu produktov má svoj základ v samotných názoroch reálnych spotrebiteľov.

Týmito vlastnosťami je model a jeho parametre relatívne jednoducho interpretovateľný aj pre širšie auditórium, ktoré je zapojené do strategického rozhodovania producenta.

Prirodzene sa tak ponúka myšlienka miernej modifikácie modelu s lineárnou úžitkovou funkciou tak, aby bol aplikovateľný aj na dlhodobé trhy, avšak zároveň tak, aby zachovala jeho predpoklady, čím aj jeho vlastnosť relatívne jednoduchej interpretovateľnosti.

Týmto modelom je model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou. Tento model zachováva predpoklad o racionalite subjektov, najmä producentov¹⁹⁹, zachováva predpoklad o dokonalej

¹⁹⁹ Úžitková funkcia dopytu a z nej odvodené dopytové funkcie implicitne predpokladajú racionalitu dopytu, respektíve implicitne definujú mieru racionality dopytu.

informácii producentov²⁰⁰, zachováva predpoklad o konštantných finančných prostriedkoch dopytu alokovaných na nami analyzovaný trh a tiež čiastočne zachováva preferencie dopytu vyjadrené lineárnym vzťahom v užítkovej funkcii.

Model s kvázi-lineárnou užítkovou funkciou ale obohacuje model s lineárnou užítkovou funkciou o komplementárny člen v užítkovej funkcii.

Komplementárny člen užítkovej funkcie

Komplementárny člen kvázi-lineárnej užítkovej funkcie je vyjadrenie predpokladu, že dopyt z akéhokoľvek dôvodu nepovažuje substitučné produkty za dokonalé substitúty. Dôvody, prečo dopyt nepovažuje substitučné produkty za dokonalé substitúty konzultujeme v úvode kapitoly 2. Model s kvázi-lineárnou užítkovou funkciou dopytu – trh nedokonalých substitútov časti C. Metodika práce a metódy skúmania. Môže to byť spôsobené preferenciou rôznorodosti napĺňania potrieb, teda elimináciou presýtenosti určitým produktom, alebo aj samotnou nedokonalou dostupnosťou produktov pre všetkých spotrebiteľov tvoriacich dopyt. Tvar komplementárneho člena v kvázi-lineárnej funkcii nemusí byť nutne taký, ako je predstavený v kapitole 2. Model s kvázi-lineárnou užítkovou funkciou dopytu – trh nedokonalých substitútov časti C. Metodika práce a metódy skúmania. Aj samotná práca v tejto kapitole uvádza dva tvary komplementárneho člena v prípade triopolu. Iným tvarom komplementárneho člena by mohla byť samotná Cobb-Douglasova užítková funkcia, či iné modifikácie.

Voľba tvaru komplementárneho člena by mala byť podmienená predpokladom o danom trhu, ktorý má model analyzovať.

No na druhej strane, práca volila ten najjednoduchší tvar komplementárneho člena (násobok množstiev produktov krát konštanta) z dôvodu, aby užítková funkcia viedla k čo možno najmenej komplexným výstupom. Komplexnejšie tvary komplementárneho člena totiž vedú ku komplexnejším výstupom, čím sa obmedzuje aplikovateľnosť modelu v strategickom rozhodovaní reálneho producenta. Ten totiž očakáva výstupy z modelu relatívne rýchlo, čo je pri komplexných výstupoch značne limitujúce.

Koeficient komplementárnosti v nami zvolenom tvare komplementárneho člena vyjadruje, ako veľmi dopyt preferuje efekt komplementárnosti v spotrebe produktov súčasne v porovnaní s ich jednotlivou spotrebou. Keďže ide model, existuje určitá miera akceptácie

²⁰⁰ Úžitková funkcia v modeli implicitne definuje informácie, ktorými spotrebiteľia disponujú.

nepresnosti, aj keď môžeme predpokladať, že komplementárny efekt na reálnom trhu by bol lepšie opísaný iným tvarom komplementárneho člena úžitkovej funkcie.

Výstupy z modelu s QLUF

Na rozdiel od modelu s lineárnou úžitkovou funkciou, model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou viedol k výstupom, ktoré pozorujeme aj na dlhodobých trhoch, teda umožňoval viacerým producentom dosahovať kladný zisk.

Jediným rozdielom medzi modelom s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu a modelom s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu je predpoklad o nedokonalej substitúcii produktov na trhu, ktorá je vyjadrená komplementárnym členom v úžitkovej funkcii dopytu.

Pri modeli s lineárnou úžitkovou funkciou sme diskutovali racionálnosť predpokladu o lineárnom vzťahu produktov v preferenciách dopytu.

Môžeme ale konštatovať, že napriek tomu, že môžeme považovať predpoklad o lineárnosti vzťahu produktov v preferenciách dopytu za nie veľmi vzdialený od reality, úprava tohto vzťahu o komplementárny efekt produktov nám umožňuje sa k realite ešte viac priblížiť.

Na reálnych trhoch dokonalá substitúcia produktov z pohľadu celého dopytu nie je veľmi bežná. Asi najčastejšou príčinou neexistencie dokonalej substitúcie je už vyššie diskutovaná dostupnosť produktov pre každého spotrebiteľa tvoriaceho dopyt. Navyše môžeme predpokladať, že aspoň časť reálnych spotrebiteľov preferuje rôznorodosť naplnenia svojej potreby. Dokonca, ak analyzujeme konkrétny reálny trh, niektorí spotrebiteľia nemusia považovať všetky produkty na trhu za také, ktoré dokážu naplniť konkrétnu potrebu. Všetky tieto dôvody spôsobujú, že pre analýzu reálneho trhu je vhodné využiť úžitkovú funkciu, ktorá dokáže popísať tento efekt komplementárnosti produktov. No cieľ práce predpokladá trh s vysoko substitučnými produktami, teda takmer lineárny vzťah preferencií dopytu po produktoch, čím sa model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou stáva veľmi vhodným.

Interpretácia parametrov a komplexnosť modelu s QLUF

Navyše, model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou je relatívne jednoducho interpretovateľný aj pre širšie auditórium a umožňuje zrozumiteľnú úpravu jednotlivých parametrov, či už v čase, alebo pri rôznych scenároch dopadových štúdií.

Ďalšou výhodou modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou je jeho relatívne nízka komplexnosť a to napriek tomu, že v prípade oligopolu s viac ako dvoma producentmi je výpočet všeobecného riešenia významne náročná.

V prípade konkrétneho špecifického reálneho problému je však tento model použiteľný. Okrem toho analytik môže aj v prípade reálneho trhu s viac ako dvoma producentami siahnuť po modeli s dvoma producentami, kde konkurenčný producent predstavuje všetkých ostatných producentov. Pri takomto prístupe však analytik musí správne priemerovať, alebo iným spôsobom definovať parametre všeobecného konkurenčného producenta v modeli tak, aby čo možno najlepšie predstavoval všetkých konkurenčných producentov na trhu. Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou tak relatívne spĺňa požiadavku na nízku časovú náročnosť dodania výstupov pri strategickom rozhodovaní reálneho producenta.

Týmto sa model s kvázi-lineárnou funkciou dopytu stáva prijateľnou voľbou pri analýzach strategických rozhodnutí reálnych producentov.

Správnosť výstupov modelu s QLUF

Asi najdôležitejšou otázkou pri voľbe modelu je, či model a jeho výstupy zodpovedajú realite v dostatočnej miere.

Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu nie je na rozdiel od modelu s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu diskvalifikovaný z analýz dlhodobých trhov, pretože jeho výstupy umožňujú viacerým producentom dosahovať kladný zisk.

Zároveň môžeme predpoklady o racionalite producentov, dokonalej informácii, konštantných finančných prostriedkoch dopytu, linearite v preferenciách dopytu a určitom efekte komplementárnosti produktov považovať za relatívne správne, samozrejme s prihliadnutím na akceptáciu určitých nepresností týchto predpokladov.

Všetky tieto vlastnosti modelu však nezaručujú, že jeho aplikácia bude viesť k dokonalým presným predpovediam. Keďže hovoríme o modeli, nemôžeme od neho očakávať, že bude predpovedať výstupy z reálneho trhu dokonale presne.

Správnosť výstupov každého modelu je samozrejme závislá na správnej voľbe jeho parametrov. Pokiaľ reálny producent nie je schopný stanoviť parametre modelu správne, potom je veľmi málo pravdepodobné, že výstupy z takto nastaveného modelu budú správne. Reálny producent je často v situácii, kedy ani nemôže vedieť presne úrovne parametrov potrebných pre model, no môže ich relatívne dobre odhadovať, prípadne vytvárať rôzne scenáre analýz, čím definuje priestor výstupov jeho rozhodnutia.

To, či model dokáže dostatočne správne opísať realitu si reálny producent na dlhodobom trhu substitučných produktov môže overiť spätnou analýzou histórie trhu. Reálny producent na dlhodobom trhu totiž pozná svoje predchádzajúce strategické rozhodnutie v minulosti

a zároveň pozná aj výstupy, ku ktorým viedli. Samozrejme je pri tejto analýze obmedzený určitou neistotou v predpokladoch o parametroch modelu, ktoré nedokáže ovplyvniť a pozorovať, napríklad nemusí vedieť pozorovať detailne všetky rozhodnutia konkurentov v tejto analyzovanej minulosti. Ak však má k dispozícii model, ktorý mu definuje tie parametre, ktoré musí odhadnúť, vie na základe minulosti tieto parametre kalibrovať tak, aby výstupy modelu zodpovedali pozorovanej realite.

Ak pre daný model neexistuje taká kalibrácia parametrov, ktorá vedie k približným výstupom z minulosti, model nie je použiteľný na daný trh.

Keďže však model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu vychádza z racionálnych predpokladov a nie je diskvalifikovaný jeho výstupom z analýzy dlhodobých trhov²⁰¹, je pravdepodobné, že je na analýzu dlhodobých trhov substitučných produktov vhodný, teda, že pre väčšinu trhov bude existovať taká kalibrácia parametrov tohto modelu, ktorá vedie k výstupom dostatočne podobným pozorovanej realite.

Pojem „dostatočne podobný“ je relatívny pre daného reálneho producenta, zamýšľané strategické rozhodnutie a tiež relatívny vzhľadom na informácie, ktorými producent disponuje.

Práca teda netvrdí, že model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu je nutne vhodný pre všetky dlhodobé trhy substitučných produktov, ale javí sa ako silný kandidát pri ich analýze. Tento model, tak ako akýkoľvek iný navrhovaný model, musí byť pred jeho použitím konfrontovaný s minulou realitou analyzovaného trhu. Pokiaľ žiadna jeho racionálna kalibrácia nedokáže správne opísať analyzovaný trh, producent pri svojom strategickom rozhodovaní musí siahnuť po inom modeli (prípadne po úprave modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu).

Avšak tejto konfrontácii musí čeliť akýkoľvek model s ambíciou analýzy konkrétneho reálneho trhu. Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou teda nie je horší, ako akýkoľvek model s racionálnymi predpokladmi, ktorý nie je svojimi výstupmi automaticky diskvalifikovaný z analýzy.

Navyše, model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou je relatívne jednoducho interpretovateľný a jeho parametre sú relatívne ľahko opísateľné funkciami, ktoré vedia v sebe zahrnúť časový faktor, či priestor strategických rozhodnutí konkurentov.

²⁰¹ Tak, ako je model s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu.

Týmito vlastnosťami model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu dokáže cez rôzne scenáre definovať priestor dopadu strategického rozhodnutia reálneho producenta.

Ak teda existuje kalibrácia parametrov modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu, ktorá vedie k výstupom dostatočne podobným ako pozorovaná minulosť konkrétneho trhu, potom môžeme považovať model za správny a teda aplikovateľný pre daný reálny trh.

Producent nutne nemusí pôsobiť na trhu v minulosti, môže ísť o producenta, ktorý zamýšľa vstúpiť na daný trh. Pre takéhoto producenta je náročnejšie uskutočniť kalibráciu modelu, pretože nedisponuje svojimi strategickými rozhodnutiami a výstupmi z nich v minulosti. No takýto producent stále môže aj tak podrobiť minulosť trhu analýze, ktorá by viedla ku kalibrácii jeho modelu. Samozrejme jeho predpoklady sú pravdepodobne menej presné, ako predpoklady producenta, ktorý už na trhu pôsobí, no aj tak dokáže pozorovať určité strategické rozhodnutia existujúcich producentov a výstupy, ku ktorým viedli, prípadne ich dokáže odhadnúť.

Pri analýze trhu, ktorý ešte len vzniká, producenti zamýšľajúci produkovať na takomto trhu nedokážu kalibrovať model na základe histórie trhu. No aj v takom prípade môžu siahnuť po modeli s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu, pričom kalibráciu môžu vykonať na základe podobných trhov, či na základe racionálneho expertného presvedčenia o budúcom trhu.

Ak aj bol ich odhad, teda kalibrácia vychýlená, po zrealizovaní určitej histórie trhu môžu svoje predpoklady upraviť a svoj model prekalibrovať. Prípadne, ak po zrealizovaní tejto histórie producent nedokáže nakalibrovať model tak, aby zodpovedal realite, model ako taký zavrhuje a prikróči k jeho úprave, či využitiu iného modelu.

Racionálni producenti by sa nemali spoliehať donekonečna na jedinú kalibráciu modelu. Pokiaľ pozorujú, že ich analýzy viedli k nesprávnym výstupom, je vhodné, aby svoj model prekalibrovali na základe týchto výstupov.

Reálni producenti by tiež mali model prekalibrovať v prípade, keď pozorujú, prípadne očakávajú doteraz neexistujúci externý, či interný vplyv, či šok, pri ktorom predpokladajú, že bude mať vplyv na trh na ktorom pôsobia.

Navyše analýza kalibrácie modelu by nemala byť podmienená iba pozorovaním, že aktuálna kalibrácia nevedie k správnym výstupom pri porovnaní s reálnou realizáciou trhu, či pri pozorovaní, alebo predpoklade zmien v internom, či externom prostredí trhu. Racionálny producent by mal analyzovať vhodnosť modelu a jeho kalibrácie pravidelne, vo vhodne

zvolených časových úsekoch. Tieto časové úseky sa líšia v závislosti od konkrétnych reálnych trhov a tiež v závislosti od komplexnosti modelu trhu (teda aj trhu samotného) a analytickej kapacity producenta, teda času, za ktorý je analytický tím schopný producentovi dodať novú kalibráciu.

Aplikácia modelu s QLUF v strategickom rozhodovaní

V tejto časti diskusie predstavíme oblasti a spôsob, akým je model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou aplikovateľný v strategickom rozhodovaní reálneho producenta.

Je vhodné si uvedomiť, že reálni producenti volia strategické rozhodnutia s ohľadom na časové hľadisko. Existujú samozrejme strategické rozhodnutia, ktoré sa viažu na jeden konkrétny časový úsek, no na druhej strane, niektoré strategické rozhodnutia potrebujú určitý čas na realizáciu, teda pri týchto rozhodnutiach existuje určitý časový posun zrealizovania dopadu týchto rozhodnutí.

Strategické rozhodnutia na dlhodobých trhoch je teda rozumné vnímať v zmysle časového kontextu, v ktorom sú však aj konkurenti daného producenta schopní upravovať svoje strategické rozhodnutia, čím ovplyvňujú samotný trh.

Navyše, v časovom kontexte môže dochádzať k zmenám externých parametrov trhu, ktoré výstupy trhu a teda aj dopady strategických rozhodnutí ovplyvňujú.

Cena produktu

Strategické rozhodnutia producenta v oblasti cien vlastného produktu sú základnými rozhodnutiami reálnych producentov.

Samotný model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu k jednotkovej cene produktu pristupuje explicitne, pretože práve cena produktov je tá premenná, ktorá je považovaná modelom za kľúčovú, teda premenná, ktorú sú producenti schopní voľne meniť a cez ktorú optimalizujú svoj výstup z trhu, zisk.

V realite je skutočne cena produktu tým parametrom, ktorý sú producenti schopní meniť relatívne okamžite, respektíve v krátkodobom horizonte. Ostatné parametre, ktoré sú producenti schopní upravovať a ktoré diskutujeme nižšie, potrebujú na prejavenie efektu určitý čas.

Z tohto dôvodu môžeme považovať cenu produktu za jediný parameter, ktorým je producent schopný optimalizovať svoje rozhodnutie v krátkodobom horizonte, pričom ostatné parametre v krátkodobom horizonte môže považovať za konštantné.

V dlhodobom horizonte je samozrejme cena produktu naďalej kľúčovým parametrom strategických rozhodnutí, no pri dlhodobých rozhodnutiach už má na výstup z trhu vplyv aj vývoj ostatných parametrov v čase.

Kvalita produktu, marketing, dostupnosť produktu

Strategické rozhodnutia reálnych producentov v oblasti kvality produktu, marketingu a dostupnosti produktu pre spotrebiteľov vedú k úprave preferencií dopytu.

Reálny producent môže očakávať, že pokiaľ rozhodne o zvýšení kvality produktu, potom sa preferencie dopytu vzhľadom na jeho produkt zvýšia, naopak rozhodnutie o znížení kvality produktu môže viesť k zníženiu preferencií.

Podobne pri zvýšení miery marketingu môže reálny producent očakávať zvýšenie preferencií dopytu vzhľadom na jeho produkt, naopak zníženie miery marketingu pravdepodobne povedie k zníženiu preferencií dopytu vzhľadom na jeho produkt.

Pokiaľ nazeráme na dopyt ako na súbor všetkých potencionálnych spotrebiteľov, potom rozhodnutie o zvýšení miery dostupnosti produktu producenta povedie k zvýšeniu preferencií dopytu vzhľadom na jeho produkt (v širšom význame²⁰²) a naopak reštrikcia dostupnosti produktu povedie k zníženiu preferencií dopytu vzhľadom na jeho produkt.

Je pravdepodobné, že rozhodnutia v oblasti kvality produktu, marketingu a dostupnosti produktu sa v reálnom trhu neprejavia okamžite.

Pokiaľ rozhodnutie vedie k zmene kvality produktu, spotrebiteľia s oneskorením získajú skúsenosť s daným produktom s upravenou kvalitou, preto toto rozhodnutie producenta vplýva až na neskoršie rozhodnutia spotrebiteľov.

Rozhodnutie o zmene úrovne marketingu tiež vplýva na rozhodnutia spotrebiteľov oneskorene, pretože vplyv marketingu na rozhodnutia spotrebiteľov vplýva až po odovzdaní informácie, ktoré nový marketing spotrebiteľom poskytuje, čo si vyžaduje určitý čas.

Rozhodnutie o zmene dostupnosti produktu tiež vplýva na rozhodnutia spotrebiteľov oneskorene, pretože distribútori môžu disponovať určitými zásobami daného produktu, prípadne spotrebiteľia pri nedostupnosti konkrétneho produktu môžu v krátkodobom horizonte

²⁰² Širší význam preferencií spotrebiteľov je tu uvedený v tom zmysle, že pokiaľ časť potencionálnych spotrebiteľov nemá niektorý produkt dostupný, napríklad nie je tento produkt zastúpený v ich lokálnom supermarkete, potom si častejšie vyberajú viac dostupné produkty. A to napriek tomu, že môžu daný nedostupný produkt môžu považovať za kvalitnejší v porovnaní s dostupnými produktmi, respektíve, že považujú daný produkt za taký, ktorý lepšie uspokojuje ich konkrétnu potrebu.

Z tohto pohľadu je kľúčová dôkladná identifikácia potencionálneho trhu producentom. Rôzni producenti môžu vnímať množinu potencionálnych spotrebiteľov tvoriacich dopyt rôzne a preto aj ich voľba modelu a jeho parametrov môže byť rôzna, hoci súťažia na trhu substitučných produktov.

svoju spotrebu odkladať, pretože neočakávajú, že výpadok produktu z ich lokálnej dostupnosti je trvalý.

Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu ale dokáže rozhodnutia v oblasti kvality produktu, marketingu a dostupnosti produktu implementovať do predpovedí. A to nie len rozhodnutia samotného spotrebiteľa, ale aj jeho konkurentov.

Ak sa teda efekt strategických rozhodnutí v týchto oblastiach neprejavuje okamžite, je rozumné rozdeliť očakávaný vývoj analyzovaného trhu do určitých časových úsekov, v ktorých sa rozhodnutia dokážu prejavovať.

Pri analýze využívajúcej model s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu teda reálny producent môže začať s určitou (aj keď len odhadnutou) úrovňou parametrov modelu, ktorá zodpovedá aktuálnej situácii na trhu. Následne pre ďalšie časové úseky môže odhadovať zmeny počiatočného stavu parametrov na základe vlastných zamýšľaných strategických rozhodnutí a tiež na základe predpokladaných strategických rozhodnutí jeho konkurentov.

Pri odhade vývoja parametrov modelu si môže pomôcť rôznymi funkciami, ktoré môžu byť závislé od samotného času, alebo aj od výšky investícií, či nákladov na dané rozhodnutie. V prípade odhadu vývoja parametrov konkurencie môže reálny producent vytvoriť rôzne racionálne scenáre vývoja konkurenčných parametrov, čím určí priestor výstupu jeho vlastných strategických rozhodnutí.

Funkcie, ktoré dokážu definovať vývoj určitých parametrov môžu byť rôzne, od jednoduchých, povedzme lineárnych, po komplexné, ktoré berú do úvahy viacero vstupov. Je pravdepodobné, že pre určitý typ trhu budú niektoré vhodné, pričom pre iný nie. Je to len otázka schopnosti analytikov producenta definovať funkcie vývoja parametrov, ktoré dokážu čo možno najpresnejšie opísať ich reálny vývoj a závislosť na ich vstupoch.

Týmto prístupom producent získa predstavu o dopade jeho strategických rozhodnutí v jednotlivých časových úsekoch, čo mu umožní sa lepšie rozhodnúť, ako keby svoje rozhodnutie opieral iba o expertný názor svojho manažmentu.

Je zrejmé, že parametre modelu, o ktorých v tejto časti hovoríme, sú koeficienty atraktivity a komplementárnosti úžitkovej funkcie. Strategické rozhodnutia v oblasti kvality produktu, marketingu a dostupnosti produktu ovplyvňujú práve tieto koeficienty úžitkovej funkcie využívanej v modeli. A teda funkcie, o ktorých v tejto časti hovoríme, sú funkcie, ktoré sú schopné zmenu, alebo vývoj týchto koeficientov v čase odhadnúť, ako závislosť od samotných strategických rozhodnutí producenta, alebo predpokladaných strategických rozhodnutí jeho konkurentov v týchto oblastiach.

Fixné a variabilné náklady

Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu v sebe zahŕňa parametre fixných a variabilných nákladov jednotlivých producentov.

Reálny producent samozrejme pozná svoju aktuálnu štruktúru nákladov a navyše dokáže odhadovať úroveň nákladov svojich konkurentov.

Strategické rozhodnutia producentov v oblasti nákladov vedú k ich optimalizácii, avšak aj v tejto oblasti môžeme očakávať určité oneskorenie efektu rozhodnutia, preto je opäť rozumné analýzu takýchto rozhodnutí rozdeliť do určitých časových úsekov, v ktorých producent očakáva rôzne dopady svojho rozhodnutia v tejto oblasti.

Navyše, producent môže očakávať strategické rozhodnutia svojich konkurentov v oblasti ich nákladov, ktorých efekt tiež prichádza s určitým oneskorením a teda časové úseky môže rozdeľovať aj na základe tohto rozmeru.

V oblasti nákladov môžu existovať strategické rozhodnutia producenta, ktoré vedú v určitom časovom úseku k zmene nákladov jeho konkurentov. Pokiaľ napríklad existuje obmedzené množstvo vstupu potrebného pre produkciu daného typu produktu s najnižšou cenou, producent, ktorý je schopný obmedziť zdroj tohto ideálneho vstupu pre jeho konkurenciu môže prijať také strategické rozhodnutie, ktoré k tomuto obmedzeniu pre jeho konkurenciu povedie. Aj efekt takéhoto rozhodnutia však model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu dokáže definovať.

Okrem toho analýza trhu pomocou modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu v jednotlivých časových úsekoch umožňuje definovať výstupy strategických rozhodnutí pod vplyvom zmien v nákladoch jednotlivých producentov, ktoré môžu byť spôsobené infláciou²⁰³, či cenovým šokom produkčných vstupov.

Analytici producenta totiž môžu očakávať určitý vývoj v cenách produkčných vstupov, ktoré môžu vyjadriť určitými funkciami, ktoré definujú vývoj fixných a variabilných nákladov.

Navyše, v prípade kvality produktu, marketingu a dostupnosti produktu sme zatiaľ diskutovali iba jednu stránku takýchto strategických rozhodnutí, a to dopad na úroveň parametrov úžitkovej funkcie dopytu. Je však zrejmé, že rozhodnutia v týchto oblastiach sú spojené so zmenami v nákladoch.

Rozhodnutie o zmene kvality produktu môže byť spojené so zmenou fixných nákladov

²⁰³ Inflácii v modeli s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu sa venujeme širšie v ďalšej časti diskusie.

v určitom časovom úseku (napríklad jednorazová investícia do technológie), či so zmenou vo variabilných nákladoch na jednotku produktu (napríklad implementácia dodatočnej úrovne kontroly kvality).

Podobne rozhodnutie o zmene úrovne marketingu môže viesť k zmene fixných nákladov pre určité časové obdobie, alebo aj ku zmene jednotkových variabilných nákladov, napríklad pri zmene provízie pre obchodnú službu.

Do tretice strategické rozhodnutie o zmene dostupnosti produktu môže viesť k zmene fixných nákladov v určitom časovom úseku (napríklad rozhodnutie o nákupe nového efektívnejšieho dopravného prostriedku), prípadne k zmene jednotkových variabilných nákladov (ak sa napríklad producent rozhodne ponúkať svoj produkt iba lokálne, potom môže dôjsť k zníženiu nákladov za distribúciu produktu, pretože už nebude ponúkať svoj produkt geograficky vzdialeným spotrebiteľom).

Všetky tieto zmeny v nákladoch podmienené strategickými rozhodnutiami producenta v oblasti kvality produktu, marketingu a dostupnosti produktu je však model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou schopný implementovať. V zásade ide iba o zmenu parametrov nákladov producenta v modeli a pokiaľ producent analyzuje trh v časových úsekoch, potom je to opäť vývoj týchto parametrov v jednotlivých časových úsekoch.

Navyše, producent vo svojich analýzach môže predpokladať rôzne strategické rozhodnutia jeho konkurentov v oblasti kvality ich produktov, marketingu a dostupnosti produktov, pričom model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou mu umožňuje tieto predpoklady a ich dopady analyzovať zo strany zmien v ich nákladoch.

Funkcie, ktoré dokážu odhadovať vplyv strategických rozhodnutí v oblasti kvality produktu, marketingu a dostupnosti produktu, ktoré diskutujeme v časti Kvalita produktu, marketing a dostupnosť produktu, teda môžu vyjadrovať okrem iného odhadovanú závislosť koeficientov atraktivity a komplementárnosti od výšky investícií (výšky fixných a variabilných nákladov).

Treba poznamenať, že v práci pod pojmom variabilné náklady rozumieme všetky variabilné náklady potrebné na produkciu, predaj a dodanie spotrebiteľovi jednotky produktu a ktoré sú priamo viazané na danú jednotku.

Všetky ostatné náklady v práci nazývame fixnými nákladmi.

Samotný model predpokladá, že producenti sú schopní vyprodukovať, predať a dodať akékoľvek množstvo produktu, pričom objem výroby nemá na výšku jednotkových variabilných nákladov vplyv.

To v realite nie je bežné. Variabilné náklady reálneho producenta sú totiž závislé na objeme výroby, čím producent produkuje viac, tým sú jeho jednotkové variabilné náklady nižšie²⁰⁴. Tento efekt sa nazýva aj úspora z rozsahu.

Ak však reálny producent využíva model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu v časových úsekoch, potom môže tento efekt aplikovať v predpoklade o úrovni jeho jednotkových variabilných nákladoch v čase a tiež v predpoklade vývoja jednotkových variabilných nákladov jeho konkurentov.

Externé faktory

Najzrejmejším externým faktorom, ktorý je aj explicitne v modeli obsiahnutý cez samostatný parameter, sú finančné prostriedky dopytu alokované na daný trh.

Model považuje finančné prostriedky dopytu alokované na trh za konštantné, no pri aplikácii modelu v zmysle rôznych časových úsekov je možné ich výšku meniť.

Aj v realite je evidentná zmena finančných prostriedkov alokovaných na konkrétny trh v čase. Spotrebiteľia menia svoju spotrebu na základe ich finančnej situácie. Preto v prípade hospodárskeho rastu môže producent predpokladať, že výška finančných prostriedkov alokovaných na trh bude v čase rásť a naopak, v prípade recesie, alebo krízy bude klesať. Nemusí to byť však pravidlo. Existujú trhy, ktoré môžu reagovať opačne na hospodársky vývoj ekonomiky, napríklad trh nízko nákladových pobytov. V čase ekonomického rastu sa môže dopyt po takýchto produktoch znížiť, pretože spotrebiteľia začnú preferovať iné, možno exotickéjšie a tým pádom drahšie pobyty.

Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu v časových úsekoch umožňuje predpokladaný vývoj týchto finančných prostriedkov v čase aplikovať do predpokladaných výstupov strategických rozhodnutí.

Štandardnými ekonomickými predpokladmi pri modelovaní sú predpoklady o úrokovej miere a inflácii.

Inflácia ovplyvňuje dostupné finančné prostriedky spotrebiteľov, čím ovplyvňuje priamo tento parameter v modeli. Infláciu sme konzultovali aj v prípade fixných a variabilných nákladov producentov.

²⁰⁴ Napríklad ak producent zamestnáva jedného zamestnanca, s ktorým má zmluvu na osem-hodinový pracovný čas za ktorý mu platí pevný mesačný plat. Povedzme, že zamestnancovi trvá vyrobiť produkt jednu hodinu pracovného času. Ak má producent dopyt iba po jednom produkte denne, potom zamestnanec s pevným platom toto množstvo dodá, ale sedem hodín nič neprodukuje. Ak má producent dopyt po ôsmych produktoch denne, náklady na zamestnanca sú rovnaké, ale vyprodukuje osem produktov denne. Jednotkové náklady sú tak nižšie, ako v prípade nižšieho dopytu. Táto úvaha sa samozrejme dá zovšeobecniť na akýkoľvek počet zamestnancov a aj na iné výrobné faktory.

Úroková miera ovplyvňuje najmä, ale nie výlučne, fixné náklady producentov v zmysle zamýšľaných investícií. Pokiaľ producenti nedisponujú voľným kapitálom, potom zamýšľanú investíciu financujú pomocou úverov, ktorých splátky podliehajú úrokovej miere (splátky úverov v práci alokujeme do fixných nákladov).

Navyše, racionálny producent vo svojich analýzach implementuje súčasnú hodnotu budúcich peňažných tokov. Vzdialenejšie zisky v budúcnosti považuje za menej výhodné, ako tie, ktoré dokáže dosiahnuť v krátkodobom horizonte.

Všetky tieto efekty je model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou v časových úsekoch schopný implementovať pri strategických rozhodnutiach pomocou efektu na jeho jednotlivé parametre a výstupy (finančné prostriedky dopytu, náklady producentov, zisk producentov).

Za ďalší externý faktor môžeme považovať samotnú existenciu trhu v budúcnosti. Existenciu niektorých reálnych trhov môžeme považovať za prakticky nekonečnú, no skôr sme v realite svedkami konečného trvania trhov. Technologický vývoj má za následok, že produkty sú nahradzované novými produktami, ktoré preberú funkciu uspokojenia danej potreby spotrebiteľa. Prípadne sú dané trhy reprofilované na trh špecifickej potreby, napríklad, ako tomu bolo pri trhu filmov do fotoaparátov²⁰⁵.

Niektoré strategické rozhodnutia reálnych producentov sa vzťahujú na relatívne krátke obdobie, povedzme rok, či niekoľko rokov. Avšak za strategické rozhodnutia by sme mali považovať aj rozhodnutia dlhodobé. Bolo by neracionálne od producenta, ak by významne investoval do produktu, o ktorom predpokladá, že jeho trh zanikne, prípadne sa významne zmenší (v zmysle finančných prostriedkov dopytu alokovaných na tento trh) v krátkom čase. Z tohto dôvodu je analýza strategického rozhodnutia v zmysle existencie samotného trhu v niektorých prípadoch dôležitá.

No model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou v časových úsekoch takúto analýzu umožňuje a to priame cez parameter finančných prostriedkov dopytu alokovaných na daný trh. Pokiaľ producent predpokladá v určitom časovom horizonte koniec existencie daného trhu, prípadne jeho významné zmenšenie, potom toto dokáže cez spomínaný parameter implementovať do svojich analýz strategických rozhodnutí.

Sumár diskusie o aplikácii modelu s QLUF v strategickom rozhodovaní

V predchádzajúcich častiach sme diskutovali jednotlivé oblasti strategických rozhodnutí reálneho producenta a tiež interné a externé faktory (v zmysle trhu) vplývajúce na dané

²⁰⁵ Napríklad bankrot spoločnosti The Eastman Kodak Company.

rozhodnutia s ohľadom na schopnosť modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu tieto rozhodnutia a vplyvy implementovať v dopadových štúdiách.

Pokiaľ analýza histórie trhu preukáže správnosť výberu modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu cez identifikáciu takej kalibrácie parametrov modelu, ktorá dokázala definovať výstupy dostatočne zhodné s realitou, potom reálny producent môže tento model využiť pre svoje strategické rozhodnutia.

Model pracuje s kľúčovými parametrami, ktorými sú cenové úrovne produktov na trhu a ich voľba (aj odhadovaná) jednotlivými producentami.

Zároveň umožňuje analyzovať dopady strategických rozhodnutí v zmysle vývoja všetkých vyššie uvedených faktorov v čase, či v zmysle rôznych úrovní k nim vzťahujúcich sa parametrov, čím definuje priestor výstupov strategických rozhodnutí producenta.

Faktory, ktoré ovplyvňujú výstupy strategických rozhodnutí sú najmä cena konkurenčných produktov, zmeny v kvalite vlastného a konkurenčných produktov, zmeny vo vlastnom marketingu a marketingu konkurencie, zmeny v dostupnosti vlastného a konkurenčných produktov, zmeny vo fixných a variabilných nákladoch, vlastných, tak aj konkurenčných, zmeny v externých faktoroch trhu ako finančné prostriedky dopytu, úroková miera a inflácia. Samotné strategické rozhodnutia môžu byť v oblasti cenovej politiky, kvality, marketingu a dostupnosti vlastného produktu, aj s ohľadom na náklady, či už fixné, alebo variabilné a optimalizácia nákladov.

Všetky tieto rozhodnutia a vplyvy je možné pomocou modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu v časových úsekoch v analýzach zahrnúť a identifikovať priestor možných výstupov.

Reálny producent tak pri využití modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu pri strategickom rozhodovaní získava informácie o ich dopadoch, ktoré mu expertný úsudok nedokáže poskytnúť. Môžeme tak predpokladať, že jeho využitím sa dokáže rozhodnúť lepšie, ako keby sa spoľahol iba na expertný úsudok svojho manažmentu.

Záver

Dizertačná práca navrhuje model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu ako model, ktorý by bol aplikovateľný pri odhade dopadov strategických rozhodnutí producentov pôsobiacich na reálnych trhoch substitučných produktov.

Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu vychádza z modelu s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu a z jeho racionálnych predpokladov, pričom ho obohacuje o komplementárny člen úžitkovej funkcie.

Výstupy z modelu s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu totiž vedú k možnosti pozitívneho profitu pre maximálne jedného producenta, čo je v rozpore s pozorovaniami na reálnych trhoch. Model s lineárnou úžitkovou funkciou dopytu totiž predpokladá dokonalú substitúciu produktov na trhu z pohľadu dopytu, čo vedie k tomuto neželanému výstupu modelu.

Pridaním komplementárneho člena model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou zoslabuje predpoklad o dokonalej substitúcii produktov a definuje určitý komplementárny vzťah produktov na trhu substitučných produktov. Pokiaľ prijmeme predpoklad o určitej komplementárnosti substitučných produktov na trhu, potom výstupy takéhoto modelu umožňujú pozitívny zisk viacerým producentom, čo je možné pozorovať aj v realite dlhodobých konkurenčných trhov.

Pretože model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu vychádza z modelu s lineárnou úžitkovou funkciou a z jeho racionálnych a relatívne zrozumiteľných predpokladov, model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou si zachováva túto vlastnosť. Tým umožňuje potencionálnemu analytikovi producenta zrozumiteľne interpretovať vstupné a výstupné parametre modelu, či už manažmentu producenta, alebo iným účastníkom strategického rozhodovania. Je predsa zrejmé, že pokiaľ manažment producenta nebude parametrom modelu aspoň do určitej miery rozumieť, potom bude existovať určitá bariéra v jeho aplikácii.

Navyše model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu zachováva do určitej miery relatívnu jednoduchosť výpočtu výstupov, čo vedie k relatívne krátkemu času ich dodania, čo môže byť v prípade strategického rozhodovania reálneho producenta kľúčové.

Okrem toho, zrozumiteľnosť a priamočiarosť parametrov modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu umožňuje odhad ich vývoja v čase pomocou rôznych funkcií v závislosti od času, či od konkrétnych rozhodnutí samotného producenta, alebo konkurencie, prípadne od vývoja externých parametrov trhu. Týmto prístupom je model schopný odhadovať dopad dlhodobých strategických rozhodnutí a teda nie je limitovaný iba na krátke časové obdobia.

Práca netvrdí, že model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu poskytuje dokonalý obraz trhu, respektíve umožňuje dokonale odhadovať dopady strategických rozhodnutí. Je dokonca možné, že na konkrétne vybrané trhy tento model nie je aplikovateľný.

Model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu je stále iba modelom, od ktorých nie je racionálne očakávať dokonalo presné predpovede.

Navyše, ako pre každý model, aj správnosť aplikácie modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu je závislá na správnej kalibrácii parametrov modelu v prípade, keď nie sú všetky parametre modelu (trhu) dokonale známe, čo je samozrejme bežný fakt. Pokiaľ analytik producenta neurčí hodnoty parametrov modelu dostatočne správne, potom nemôže očakávať dostatočne správne výstupy.

Ak dokonca nie je možné nastaviť parametre modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu tak, aby jeho vstupy a výstupy zodpovedali pozorovanej realite nejakého konkrétneho reálneho trhu, potom tento model nie je možné na danom trhu aplikovať a je potrebné pre analýzu tohto trhu aplikovať iný model.

Avšak racionalita predpokladov modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu spolu s jeho výstupom, ktorý umožňuje pozitívny zisk pre viac ako jedného producenta naznačuje jeho širokú aplikovateľnosť na reálne (a aj dlhodobé) konkurenčné trhy.

Aplikácia modelu s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu nie je obmedzená iba na vybrané strategické rozhodnutia. Keďže tento model poskytuje relatívne komplexný pohľad na parametre reálneho trhu a producentov na ňom pôsobiacich, umožňuje tak odhadovať dopady akéhokoľvek strategického rozhodnutia samotného producenta, či jeho konkurencie, či zmeny v externých faktoroch trhu, prípadne akýkoľvek predpokladaný vývoj týchto parametrov, pokiaľ sú tieto rozhodnutia či odhady správne v modeli aplikované.

Model explicitne využíva ceny produktov na trhu, výšku fixných a variabilných nákladov, finančné prostriedky dopytu alokované na daný trh, atraktivitu a komplementárnosť produktov v zmysle úžitku dopytu v širšom slova zmysle ako samotné parametre modelu.

Týmto spôsobom dokáže explicitne vyjadriť zmeny vo výstupoch trhu v závislosti od zmien v cenách produktov, vo výškach nákladov (či už fixných, alebo variabilných) a vo finančných prostriedkoch dopytu alokovaných na daný trh. No zároveň model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu dokáže implicitne vyjadriť zmeny vo výstupoch trhu v závislosti od zmien kvality produktov, marketingu a dostupnosti produktov pre spotrebiteľov na trhu cez koeficienty atraktivity a komplementárnosti v úžitkovej funkcii. Táto implicitná aplikácia modelu je podmienená správnym odhadom efektu zmeny kvality, marketingu a dostupnosti

produktov na vnímanie atraktivity produktu reálnym dopytom a teda správnym vyjadrením zmeny koeficientov atraktivity a komplementárnosti produktov v úžitkovej funkcii dopytu. Navyše, model s kvázi-lineárnou úžitkovou funkciou dopytu pri aplikácii na určité časové úseky (teda vývoj v čase) umožňuje odhadovať vplyv inflácie a úrokovej miery na výstupy analyzovaného trhu.

Literatúra

AMIR, Rabah a ERICKSON, Philip a JIN, Jim. *On the microeconomic foundations of linear demand for differentiated products*. Journal of Economic Theory, Elsevier. 2017, č. 169, s 641-665. DOI: 10.1016/j.jet.2017.03.005

ARMINGTON, Paul S.. *A Theory of Demand for Products Distinguished by Place of Production*. Staff Papers, International Monetary Fund. 1969, č.16, s. 159-178. DOI: 10.2307/3866403

ARROW, Kenneth J. a CHENERY Hollis B. a MINHAS Bagicha Singh a SOLOW Robert M.. *Capital-labor substitution and economic efficiency*. The Review of Economics and Statistics, The MIT Press. 1961, č.43, s. 225-250. DOI: 10.2307/1927286

AXELROD, Robert. *The Evolution of Cooperation*. New York: BasicBooks, 1984. ISBN: 9780465021215. DOI: 10.1007/978-3-319-16999-6_1220-1

AYRES, Frank Jr. a MENDELSON, Elliott. *Schaum's Outline of Calculus*. New York: McGraw-Hill, 1999. ISBN-13: 978-0070419735

BERTRAND, Joseph Louis Francois. *(Review of) Théorie mathématique de la richesse sociale par Léon Walras: Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses par Augustin Cournot*. Journal de Savants. 1883, s.499-508.

BIBBY, John. *Axiomatisations of the average and a further generalisation of monotonic sequences*. Glasgow Mathematical Journal. 1974, č.15. DOI: 10.1017/S0017089500002135

BORWEIN, Peter a ERDELYI, Tamas. *Polynomials and Polynomial Inequalities*. New York: Springer-Verlag, 1995. ISBN: 978-1-4612-0793-1

BOWLEY, Arthur Lyon. *The Mathematical Groundwork of Economics: An Introductory Treatise*, Oxford: Clarendon Press, 1924.

CARDANO, Gerolamo. *Ars magna or The rules of algebra*. 1545. Vydané Dover, 1993. ISBN 0-486-67811-3

CHONÉ, Philippe a LINNEMER, Laurent . *The Quasilinear Quadratic Utility Model: An Overview*. CESifo Working Paper, Center for Economic Studies and ifo Institute (CESifo), Munich. 2019, č. 7640. Dostupné na: <https://www.cesifo.org/en/publikationen/2019/working-paper/quasilinear-quadratic-utility-model-overview>

COBB, Charles W. a DOUGLAS, Paul H.. *A Theory of Production*. American Economic Review, American Economic Association. 1928, č. 18, s. 139-165.

COURNOT, Antoine Augustin. *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. 1838. Vydané The MacMillan Company, 1897.

D'ALEMBERT, Jean le Rond. *Opuscles*. 1768.

DAS, Abhishek. *A novel method to solve cubic and quartic equations*, ResearchGate.

Dostupné na:

https://www.researchgate.net/publication/308874670_A_novel_method_to_solve_cubic_and_quartic_equations

DIXIT, Avinash K.. *A Model of Duopoly Suggesting a Theory of Entry Barriers*. Bell Journal of Economics, RAND Corporation. 1979, č. 10, s. 20-32. DOI: 10.2307/3003317

DIXIT, Avinash K.. *Optimization in Economic Theory*. Oxford: Oxford University Press, 1990. ISBN: 9780198772101

EDGEWORTH, Francis Ysidro. *The pure theory of monopoly*. 1889. Vydané v *Collected Papers*, Macmillan, 1925.

FUDENBERG, Drew a TIROLE, Jean. *Game theory*. Cambridge: The MIT Press, 1991. ISBN: 9780262061414

JANSON, Svante. *Roots of polynomials of degrees 3 and 4*. arXiv:1009.2373, 2010. Dostupné na: <https://arxiv.org/abs/1009.2373>

JAO, David. *Quartic formula*. PlanetMath, 2013. Dostupné na: <https://planetmath.org/quarticformula>

KRVAVICA, Nino. *Explicit expressions for real roots of a quartic equation*. arXiv:1902.08807, 2019. Dostupné na: <https://arxiv.org/abs/1902.08807>

LANDESMAN, Aaron. *Solving the cubic and quartic*. Stanford University matchcamp notes, 2017. Dostupné na: <https://web.stanford.edu/~aaronlan/assets/solving-the-cubic-and-quartic.pdf>

MYERSON, Roger B.. *Game Theory: Analysis of Conflict*. Cambridge: Harvard University Press, 1997. ISBN: 9780674341166

NECHYBA, Thomas J.. *Microeconomics: An Intuitive Approach with Calculus*. Boston: Cengage Learning, 2010. ISBN: 9780538453257

SYDSAETER, Knut a HAMMOND Peter J.. *Mathematics for Economic Analysis*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1995. ISBN-13: 978-0135836002

VARIAN, Hal R.. *Microeconomic Analysis*. New York: W. W. Norton & Company, 1992. ISBN-13: 978-0393957358

VARIAN, Hal R.. *Mikroekonomie – Moderní přístup*. Praha: Victoria Publishing, 1995. ISBN: 80-85865-25-4

VON NEUMANN, John a MORGENSTERN, Oskar. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 2007. ISBN-13: 978-0691130613