

Matematicko - fyzikálna fakulta
Univerzita Komenského, BRATISLAVA

Soňa PAVLÍKOVÁ

GRAFY S JEDINÝM 1-FAKTOROM A MATICE

Kandidátska dizertačná práca

Autor : **RNDr. Soňa Pavlíková**

Katedra matematiky

Materiálovo-technologická fakulta

Slovenská technická univerzita

Paulínska 16

917 24 TRNAVA

Školiteľ : **Prof. RNDr. Ján Plesník, DrSc.**

KNOM MFF Univerzita Komenského

BRATISLAVA

Jún 1994

OBSAH

Úvod do problematiky	3
Hlavné výsledky práce	7
Použité označenia	9
I. Výsledky pre matice	14
II. Výsledky pre grafy	23
Konštrukcia grafu G^{-1}	26
III. Invertovanie a duálny index stromov	31
Konštrukcia a základné vlastnosti T^+	32
Ďalšie vlastnosti grafu T^+	36
Vlastnosti duálneho indexu	46
IV. Invertovanie grafov s jediným 1-faktorom	51
Konštrukcia grafu L_m	61
Zoznam použitej literatúry	66
Zoznam použitých symbolov	69

Úvod do problematiky

Nech G je konečný neorientovaný graf bez slučiek s vrcholovou množinou $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ a hranovou množinou $E(G)$ (násobné hrany sa pripúšťajú). Matica susednosti $A = (a_{ij})$ grafu G je štvorcová matica typu $n \times n$ ktorej prvok a_{ij} je rovný počtu hrán spájajúcich vrchol v_i s vrcholom v_j . Zrejme graf G je jednoznačne určený (až na izomorfizmus) maticou A , ale obrátene to neplatí - matica A závisí od označenia vrcholov. Preto grafu G môžeme priradiť triedu matíc $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$, kde dve matice A a A^* patria do tejto triedy práve vtedy, keď existuje taká permutačná matica P , že $A^* = P^{-1}AP$. Zaujímavým invariantom triedy $\mathcal{A}$ je **charakteristický polynóm** $P_G(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, kde $A \in \mathcal{A}(G)$, resp. spektrum $\text{Sp}(G) = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, kde $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ je koreň rovnice $P_G(\lambda) = 0$ a $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Spektrá grafov začali ako prví skúmať L. M. LICHTENBAUM [Лих 56] a L. COLLATZ a U. SINOGOWITZ [CoSi 57], hoci teoretickí chemici sa zaujímali o spektrá grafov oveľa skôr, napr. E. HÜCKEL [Hück 31], ktorí však používali inú terminológiu.

Jednou z motivácií prečo sa študujú spektrá grafov je použiteľnosť výsledkov spektrálnej teórie grafov v kvantovej chémii: v kvantovej chémii štruktúrne vzorce určitých nenasýtených uhľovodíkov možno reprezentovať grafmi - tieto grafy nazývame aj molekulárne alebo Hückelove grafy. Molekulárny graf má zvyčajne párny počet vrcholov. Potom energia najvyššieho obsadeného molekulárneho orbitalu (HOMO - the highest occupied molecular orbital) je $\lambda_{n/2}$. Energia najnižšieho neobsadeného molekulárneho orbitálu (LUMO - the lowest unoccupied molecular orbital) je $\lambda_{n/2+1}$. HOMO-LUMO separácia je rozdiel $\lambda_{n/2} - \lambda_{n/2+1}$. [CDGT 88]. V kvantovej chémii je veľa pozornosti venovanej

práve tejto HOMO-LUMO separácii - je totiž známe, že veľa fyzikálno - chemických parametrov uhľovodíkov je určených resp. závisí od tejto separácie [St 61].

HOMO-LUMO separácia je vo väčšine prípadov rovná rozdielu medzi najmenším kladným a najväčším záporným vlastným číslom molekulárneho grafu. V prípade bipartitných grafov (s párnym počtom vrcholov) HOMO-LUMO separácia je práve dvojnásobok najmenšieho kladného vlastného čísla, ktoré nazývame **duálny index** grafu. Preto je skúmanie duálneho indexu zaujímavé z hľadiska chemickej aplikácie.

Nech G je konečný graf na n vrchoch so spektrom :

$$\lambda_n(G) \leq \lambda_{n-1}(G) \leq \dots \leq \lambda_2(G) \leq \lambda_1(G),$$

kde $\lambda_i(G) \neq 0$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$ (t.j. matica susedností $A(G)$ je regulárna). Graf H budeme nazývať **inverzným grafom** ku G práve vtedy, keď H je graf na n vrchoch so spektrom :

$$\frac{1}{\lambda_n(G)}, \frac{1}{\lambda_{n-1}(G)}, \dots, \frac{1}{\lambda_2(G)}, \frac{1}{\lambda_1(G)}$$

Inverzný graf ku G nie je určený jednoznačne, každý kospektrálny graf (t.j. majúci to isté spektrum) s inverzným grafom ku G je tiež inverzným grafom ku G . Najväčšie kladné vlastné číslo grafu budeme nazývať **index** grafu. Keďže spektrum inverzného grafu tvoria prevrátené hodnoty spektra pôvodného grafu, zrejme duálny index grafu dostaneme ako prevrátenú hodnotu indexu inverzného grafu. Pre index grafu existujú rôzne metódy a odhady ako ho získať, ktoré však nemožno priamo použiť na duálny index. V prípade, že poznáme inverzný graf k

nejakému grafu, môžeme pomocou neho získať informáciu o duálnom indexe pôvodného grafu. Preto je zaujímavé skúmať pre aké grafy existuje inverzný graf, ako ho získať a čo možno z neho zistiť o duálnom indexe pôvodného grafu.

Zrejme nutnou podmienkou existencie inverzného grafu ku grafu G je, aby každé $\lambda_i(G) \neq 0$ a to je práve vtedy, keď matica susednosti $A(G)$ je regulárna.

Nutná a postačujúca podmienka, kedy k matici susednosti stromu T existuje inverzná matica vychádza z koeficientovej vety (veta 1.2 v [CDS 80]). Pre stromy je zaujímavé, že charakteristický polynóm stromu T s n vrcholmi je rovný nasledovnému polynómu (tzv. matchingovému polynómu):

$$\mu(T, x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k m(T, k) x^{n-2k}$$

kde $m(T, k)$ vyjadruje počet párení v T na k vrchoch. Z toho vyplýva, že $A(T)$ je invertovateľná práve vtedy, keď T obsahuje párenie na n vrchoch, teda keď T obsahuje 1-faktor ([GoGu 81], [Go 84], [HL 72], [LoPe 73]).

Skúmanie duálneho indexu grafu cez inverzný graf začali Gutman, Cvetković a Simić v [CGS 78]. Dokázali, že inverzná matica $A^{-1}(T)$ k matici $A(T)$ je matica, ktorej prvky sú len $0, 1, -1$ a matica $A^+(T)$, ktorá vznikne z matice $A^{-1}(T)$ zámienou -1 na $+1$ je podobná s maticou $A^{-1}(T)$. Na maticu $A^+(T)$ sa potom možno pozeráť ako na maticu susednosti inverzného grafu. Maticu $A^+(T)$ možno teda považovať za algebraickú konštrukciu inverzného grafu.

Spektrálnymi vlastnosťami stromov sa zaoberali ďalšie práce. V práci [LoPe 73] Lovász a Pelikán skúmali charakteristický polynóm stromu a index stromu a určili maximálnu a minimálnu hodnotu indexu medzi všetkými stromami na n vrchoch. V [GoMcK 78] Godsil a McKay definovali koreňový súčin grafov a na základe tohto podali spektrálnu charakterizáciu špeciálnej triedy stromov. V [Go 84] Godsil uviedol odhady pre duálny index lesa. V [HoYu 86] je uvedený odhad pre k -tu vlastnú hodnotu stromu.

V [Go 85] Godsil skúmal, kedy existuje inverzný graf ku grafu, ktorý nie je strom. Dokázal, že postačujúcou podmienkou pre existenciu inverzného grafu ku grafu G je existencia jediného 1-faktoru M a podmienka, aby G/M bol bipartitný graf (G/M značí kontrakciu po hranách párenia). Táto podmienka nie je však nutnou. Zároveň dokázal algebraickú konštrukciu inverzného grafu. V tomto článku je tiež ukázané, že cesta s 1-faktorom na n vrchoch má minimálny duálny index spomedzi všetkých stromov (dokonca lesov) s 1-faktorom na n vrchoch.

V [Si 87] sú uvedené niektoré výsledky, týkajúce sa indexu stromov ale aj niektorých grafov, ktoré nie sú stromy.

Hlavné výsledky práce

V prvej kapitole je uvedená nutná a postačujúca podmienka, kedy je nejaká štvorcová matica diagonálne podobná s nezápornou maticou. Každý matici môžeme istým spôsobom priradiť buď orientovaný alebo neorientovaný graf. Hlavný výsledok prvej kapitoly je ďalej preformulovaný v reči grafov priradených k štvorcovej matici.

V druhej kapitole aplikujeme výsledky z prvej kapitoly na odvodenie nutnej a postačujúcej podmienky, kedy je ohodnotený (di-)graf D silne invertovateľný. Žiaľ, pre použitie tejto podmienky je nutne poznať inverzný (di-)graf k D . A však pre triedu grafov G s jediným 1-faktorom uvidíme v závere tejto kapitoly čisto grafovú konštrukciu inverzného (ohodnoteného) grafu G^{-1} ku grafu G .

Trieda stromov s 1-faktorom je z pohľadu invertovania grafov zaujímavá. Ako už bolo v úvode spomenuté - inverzná matica k matici susednosti takéhoto stromu je vždy diagonálne podobná $(0,1)$ -matici. Tretia kapitola sa zaoberá takouto triedou stromov. Obsahuje čisto grafovú konštrukciu silne inverzného grafu k stromu s 1-faktorom, ktorá je modifikáciou konštrukcie z druhej kapitoly. Na základe tejto konštrukcie sú potom odvodené vlastnosti silne inverzného grafu k stromu a tiež duálneho indexu stromu. Výsledky z I. a II. kapitoly zjednodušujú dôkazy uvedené v článku [PaKr 90]. Preto sa niektoré dôkazy v práci odlišujú od dôkazov uvedených v [PaKr 90].

Štvrtá kapitola sa zaoberá invertovaním a duálnym indexom bipartitných grafov s jediným 1-faktorom, ktoré sú po kontrahovaní po hranách 1-faktora bipartitné. Konštrukcia z II. kapitoly je modifikovaná pre túto triedu grafov. Na základe tejto konštrukcie je potom odvodená charakterizácia inverzných grafov k stromom. V tejto kapitole uvidíme

tiež rozšírenie doteraz známej triedy silne invertovateľných grafov. V triede stromov s 1-faktorom má cesta zvláštny význam - duálny index cesty má minimálnu hodnotu. V tejto kapitole je uvedená konštrukcia špeciálneho grafu L_m , ktorý má takýto význam pre triedu grafov, ktorými sa zaoberá táto kapitola, t.j. duálny index tohto grafu L_m má minimálnu hodnotu spomedzi všetkých grafov s jediným 1-faktorom, ktoré sú po kontrahovaní po hranách 1-faktora bipartitné.

Použité označenia

Pod **grafom** budeme rozumieť konečný neorientovaný graf bez slučiek v ktorom pripúšťame násobné hrany. Orientované grafy budeme nazývať **digrafy**, v orientovaných grafoch tiež pripúšťame násobné hrany. Neorientované hrany budeme značiť okrúhlymi zátvorkami $(.,.)$, orientované hrany hranatými zátvorkami $[.,.]$.

Hranovú množinu grafu G budeme značiť $E(G)$, vrcholovú množinu $V(G)$. Budeme písať $G \cong H$ ak G a H sú izomorfné a $G \subset\subset H$, ak G je podgraf H a $G \neq H$. Ohodnotenie grafu G je zobrazenie $l: E(G) \rightarrow R$, kde R je množina reálnych čísel. Ak $e = (u, v)$ tak namiesto $l(e)$ niekedy píšeme $l(u, v)$. Ak máme dané ohodnotenie l na grafe G s vrcholovou množinou $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ definujeme maticu susednosti $A(G) = (a_{ij})$ grafu G ako štvorcovú maticu rádu n , kde

$$a_{ij} = \begin{cases} l(v_i, v_j) & \text{ak } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Neohodnotený graf môžeme považovať za ohodnotený graf, v ktorom každá hrana je ohodnotená jednotkou. Podobne **ohodnotený digraf** D s vrcholovou množinou $V(D)$ a množinou orientovaných hrán $E(D)$ je orientovaný graf s priradeným zobrazením $l: E(D) \rightarrow R$.

Nech A je štvorcová matica rádu n . Maticu $s(A) = (s_{ij})$ s vlastnosťou

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } a_{ij} > 0 \\ 0 & \text{ak } a_{ij} = 0 \\ -1 & \text{ak } a_{ij} < 0 \end{cases}$$

budeme nazývať **signum** matice A .

Nech **A** a **B** sú štvorcové matice rovnakého rádu. Budeme hovoriť, že **matice A a B majú rovnaké signum** ak $s(A) = s(B)$.

Graf **G** budeme nazývať **bipartitným grafom**, alebo krátko **bigrafom**, ak neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky. Ak budeme chcieť zdôrazniť, že graf **G** je bigraf, tak ho označíme G_b . Hovoríme, že neprázdne množiny $R \subset V(G)$ a $C \subset V(G)$ tvoria **bipartíciu** bigrafu $G = (V(G), E(G))$ ak $R \cap C = \emptyset$ a $R \cup C = V(G)$ a žiadne dva vrcholy z množiny R , resp. C , nie sú spojené hranou. Ak máme danú bipartíciu (R, C) bigrafu **G** môžeme definovať $|R| \times |C|$ maticu $B_{RC}(G) = (b_{ij})$ ($|R|$ značí kardinalitu množiny R):

$$b_{ij} = \begin{cases} l(v_i, v_j) & \text{ak } (v_i, v_j) \in E(G), \text{ kde } v_i \in R, v_j \in C \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Túto maticu budeme nazývať **bipartitnou maticou** grafu **G** priradenú k bipartícii (R, C) .

Je zrejmé, že

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & B_{RC}(G) \\ B_{RC}^T(G) & 0 \end{pmatrix}$$

a navyše platí, že ak $B_{RC}(G)$ je štvorcová regulárna matica, potom aj $A(G)$ je regulárna. Ak bipartícia (R, C) je známa z kontextu alebo nás nezaujíma budeme ju z $B_{RC}(G)$ vynechávať.

Budeme hovoriť, že graf **G** **obsahuje 1-faktor** ak existuje taký faktor grafu **G** ktorého každý vrchol má stupeň 1. Symbolom $M(G)$, resp. M , budeme označovať 1-faktor grafu **G** (v prípade, že **G** ho obsahuje) a G/M bude označovať graf, ktorý získame z **G** kontrakciou po hranách 1-faktora M . Cestu s n vrcholmi budeme značiť P_n . Cesta P v **G** dĺžky k je podgraf **G** izomorfný s P_{k+1} . Nech **G** obsahuje 1-faktor $M(G)$.

Budeme hovoriť, že cesta P je v G **alternujúca** vzhľadom na $M(G)$ ak spĺňa práve jednu z nasledovných podmienok:

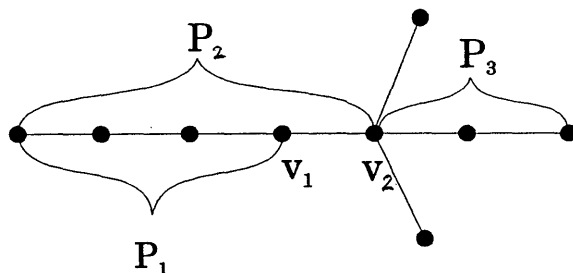
- (i) P je cesta dĺžky 1, t.j. hrana
- (ii) z každej dvojice susedných hrán v P je práve jedna patriaca $M(G)$ a P začína aj končí hranou nepatriacou $M(G)$.

Budeme hovoriť, že P je **párna** (resp. **nepárna**) **alternujúca cesta** ak P obsahuje párny (resp. nepárny) počet hrán nepatriacich $M(G)$. Ak P je len hrana tak ju budeme považovať za párnú (resp. nepárnú) alternujúcu cestu ak patrí (resp. nepatrí) do $M(G)$.

Cestu P v grafe G budeme nazývať **voľnou**, ak spĺňa nasledovné podmienky:

- (i) všetky vrcholy cesty P majú v grafe G stupeň 2, okrem koncových vrcholov cesty P
- (ii) jeden koncový vrchol cesty P má stupeň 1 v grafe G a druhý má stupeň aspoň 2 v grafe G - tento vrchol budeme nazývať **vrcholom spojenia cesty P v G** .

Cesta P je **maximálna voľná cesta** v G ak P je voľna cesta v G a zároveň vrchol spojenia cesty P v G má stupeň aspoň 3.



Obr. 1.

Na obr.1 sú cesty P_1 , P_2 , a P_3 voľne, P_2 , a P_3 sú maximálne voľne cesty. Vrchol v_1 je vrcholom spojenia P_1 v G , v_2 je vrcholom spojenia P_2 , aj P_3 v G

Pre $U \subset V(G)$ budeme označovať symbolom $G[U]$ indukovaný podgraf grafu G s vrcholovou množinou U . Pre $F \subset E(G)$ je $G \setminus F$ graf, ktorý dostaneme z G odstránením hrán množiny F . Pre $v \in V(G)$ a $e \in E(G)$ budeme písať $G \setminus v$ resp. $G \setminus e$ namiesto $G \setminus \{v\}$ resp. $G \setminus \{e\}$. Pre vrchol v bude $\deg(v)$ označovať stupeň vrchola v .

Nech G je neorientovaný alebo orientovaný graf a nech $A(G)$ je jeho matica susednosti. Vlastné hodnoty matice susednosti $A(G)$ nazývame spektrom grafu G . Nech teda G má spektrum

$$\lambda_n(G) \leq \lambda_{n-1}(G) \leq \dots \leq \lambda_2(G) \leq \lambda_1(G),$$

kde $\lambda_i(G) \neq 0$ pre všetky $i = 1, \dots, n$. Graf H budeme nazývať **inverzným grafom** ku G ak H je graf na n vrchoch so spektrom :

$$\frac{1}{\lambda_n(G)}, \frac{1}{\lambda_{n-1}(G)}, \dots, \frac{1}{\lambda_2(G)}, \frac{1}{\lambda_1(G)}$$

Graf H budeme nazývať **silne inverzným** grafom ku grafu G ak jeho matica susednosti $A(H)$ je diagonálne podobná s maticou $A^{-1}(G)$.

Graf G budeme nazývať **invertovateľným** ak existuje k nemu aspoň jeden inverzný graf.

Graf G s maticou susednosti $A(G)$ budeme nazývať **silne invertovateľným** ak $A^{-1}(G)$ je diagonálne podobná nezápornej celočíselnej matici t.j. ak existuje taká regulárna diagonálna matica C , že matica $CA^{-1}(G)C^{-1}$ je celočíselná a nezáporná.

Pre graf G budeme označovať maximálne kladné vlastné číslo symbolom $\lambda(G)$ a nazývať **index** grafu G a minimálne kladné vlastné číslo alebo tiež **duálny index** grafu G symbolom $\lambda^+(G)$.

I. Výsledky pre matice

Godsil v článku *Inversees of Trees* [Go 85] uviedol postačujúcu podmienku pre silnú invertovateľnosť bigrafu G s jediným 1-faktorom $M(G)$ - stačí ak graf $G/M(G)$ je bigraf. Táto podmienka však nie je nutnou. Godsil preto zadal problém charakterizovať všetky silne invertovateľné grafy s jediným 1-faktorom.

Na tento problém sa môžeme pozeráť aj cez matice - je známe, že k matici susednosti $A(G)$ bigrafu G s jediným 1-faktorom inverzná matica $A^{-1}(G)$ existuje a ak determinant $\det(A(G)) = \pm 1$, tak $A^{-1}(G)$ je celočíselná [Go 85]. Ak inverzná matica $A^{-1}(G)$ je diagonálne podobná s nejakou nezápornou maticou B tak (keďže podobné matice majú rovnaké spektrum) túto maticu B môžeme považovať za maticu susednosti inverzného grafu ku grafu G . V jazyku matíc možno Godsilov problém transformovať naledovne: charakterizovať všetky celočíselné matice, ktorých inverzné matice sú diagonálne podobné s nezápornými celočíselnými maticami.

Výsledky uvedené v tejto kapitole sú pokusom o hľadanie takejto charakterizácie. Aj keď sa tento problém nepodarilo úplne vyriešiť, ukážeme v nasledujúcej kapitole, že výsledky uvedené v tejto kapitole sa dajú použiť na rozhodnutie, či daný graf je alebo nie je silne invertovateľný. Hlavný výsledok tejto kapitoly udáva nutnú a postačujúcu podmienku, kedy je celočíselná matica podobná s nezápornou celočíselnou maticou.

Zavedieme niektoré potrebné označenia. Ak matica má prvky len 0,1,-1 hovoríme o **(0,1,-1)-matici**. Ak A a B sú štvorcové matice a $A = CBC^{-1}$, kde C je diagonálna matica, tak budeme hovoriť, že A a B sú **diagonálne podobné**; ak C je diagonálna (0,1,-1)-matica, tak budeme

hovoríť, že **A** a **B** sú **(0,1,-1)-diagonálne podobné**. Pripomínáme, že ak **C** je diagonálna (0,1,-1)-matica, tak $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1}$.

Nech $\mathbf{C} = (c_{ij})$ je diagonálna matica rádu n , $\overline{\mathbf{C}}$ je $n \times n$ matica definovaná rovnosťou $\overline{\mathbf{C}} = (\overline{c_{ij}}) = (c_{ii} c_{jj}^{-1})$. Potom pre každú maticu **A** platí:

$$\mathbf{CAC}^{-1} = \mathbf{A} * \overline{\mathbf{C}} \quad (1)$$

kde $*$ je násobenie po prvkoch matíc definované rovnosťou $(a_{ij}) * (c_{ij}) = (a_{ij} c_{ij})$.

Rovnosť (1) vyplýva z nasledujúcich dvoch zrejmých tvrdení :

Lema 1.1. *Nech $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ sú diagonálne podobné matice. Potom **A** aj **B** majú na rovnakých miestach nuly, t.j. $a_{ij} = 0$ práve vtedy keď $b_{ij} = 0$.*

Lema 1.2. *Nech $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ sú štvorcové matice ktoré majú nasledovné vlastnosti pre každé i, j :*

(i) *ak $b_{ij} = 0$ potom $a_{ij} = 0$*

(ii) *ak $a_{ij} = c$, kde c je reálne číslo rôzne od nuly, potom $b_{ij} = a_{ij}$.*

*Potom diagonálna podobnosť matice **B** s nezápornou maticou implikuje diagonálnu podobnosť matice **A** s nezápornou maticou.*

Nasledujúca lema bude užitočná pre zjednodušenie niektorých dôkazov, ktoré budú ďalej uvedené. Je tiež zaujímavá aj vzhľadom na Godsilov článok [Go 85].

Lema 1.3. *Nech **A** je štvorcová matica rádu n . Potom **A** je diagonálne podobná s nejakou nezápornou maticou práve vtedy, keď **A** je (0,1,-1)-diagonálne podobná s nejakou nezápornou maticou.*

Dôkaz: Postačujúca podmienka je triviálna. Aby sme dokázali nutnú podmienku, uvažujme diagonálnu maticu $\mathbf{C}$, pre ktorú $\mathbf{CAC}^{-1} = \mathbf{B}$ je nezáporná matica. Nech matica $\mathbf{E}$ značí signum matice $\mathbf{C}$ t.j. $\mathbf{E} = \mathbf{s}(\mathbf{C})$. Položme $\bar{\mathbf{C}} = (\bar{c}_{ij}) = (c_{ii} c_{jj}^{-1})$ a $\bar{\mathbf{E}} = (\bar{e}_{ij}) = (e_{ii} e_{jj}^{-1})$. Zrejme matice $\bar{\mathbf{C}}$ a $\bar{\mathbf{E}}$ majú rovnaké signum a z nezápornosti matice $\mathbf{CAC}^{-1} = \mathbf{A} * \bar{\mathbf{C}}$ vyplýva nezápornosť matice $\mathbf{EAE}^{-1} = \mathbf{A} * \bar{\mathbf{E}}$. ■

Dôsledok 1.4. Štvorcová matica $\mathbf{A}$ je diagonálne podobná nezápornej matici práve vtedy, keď $\mathbf{A}$ je diagonálne podobná matici $\mathbf{A}_{||} = (|a_{ij}|)$.

Dôkaz: Dôkaz vyplýva priamo z lemy 1.3. a lemy 1.1. ■

Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu n a nech α a β sú neprázdne podmnožiny množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Nech $|S|$ značí kardinalitu množiny S . Potom $\mathbf{A}[\alpha|\beta]$ je $|\alpha| \times |\beta|$ podmatica matice $\mathbf{A}$, ktorá obsahuje riadky matice $\mathbf{A}$ s indexami v α a stĺpce matice $\mathbf{A}$ s indexami v β v priradenom poradí. Napr. pre $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dostaneme $\mathbf{A}[\{1\}|\{1, 2\}] = (1, 2)$. Dokážeme teraz hlavný výsledok tejto kapitoly.

Veta 1.5. Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu n . Potom $\mathbf{A}$ je diagonálne podobná nezápornej matici práve vtedy, keď existuje rozklad indexovej množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ na neprázdne množiny α a β s vlastnosťou, že $\mathbf{A}[\alpha|\alpha]$ a $\mathbf{A}[\beta|\beta]$ sú nezáporné matice a $\mathbf{A}[\alpha|\beta]$ a $\mathbf{A}[\beta|\alpha]$ sú nekladné matice.

Dôkaz: Najskôr dokážeme nutnú podmienku. Nech $\mathbf{C}$ je diagonálna matica taká, že matica $\mathbf{CAC}^{-1}$ je nezáporná. Podľa lemy 1.3. môžeme predpokladať, že $\mathbf{C}$ je $(0, 1, -1)$ -matica. Definujeme $\alpha = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid c_{ii} = 1\}$ a

$\beta = \{j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid c_{ij} = -1\}$. Zrejme $\alpha \cap \beta = \emptyset$ a keďže $\mathbf{C}$ je regulárna diagonálna $(0, 1, -1)$ -matica, je tiež $\alpha \cup \beta = \{1, 2, \dots, n\}$. Podľa definície matice $\overline{\mathbf{C}} = (\overline{c_{ij}}) = (c_{ii} \ c_{jj})$ a α dostaneme, že $\overline{\mathbf{C}}[\alpha \mid \alpha] = (c_{ii} \ c_{jj})$ kde $i \in \alpha$ a $j \in \alpha$ je nezáporná matica. Z nezápornosti matice $\mathbf{A}[\alpha \mid \alpha] * \overline{\mathbf{C}}[\alpha \mid \alpha]$ vyplýva, že matica $\mathbf{A}[\alpha \mid \alpha]$ je tiež nezáporná. Podobne, z nezápornosti matice $\mathbf{A}[\alpha \mid \alpha] * \overline{\mathbf{C}}[\beta \mid \beta]$ a $\overline{\mathbf{C}}[\beta \mid \beta]$ vyplýva nezápornosť matice $\mathbf{A}[\beta \mid \beta]$. Na druhej strane z toho, že matica $\overline{\mathbf{C}}[\alpha \mid \beta]$ resp. $\overline{\mathbf{C}}[\beta \mid \alpha]$ a $\mathbf{A}[\alpha \mid \beta] * \overline{\mathbf{C}}[\alpha \mid \beta]$ resp. $\mathbf{A}[\beta \mid \alpha] * \overline{\mathbf{C}}[\beta \mid \alpha]$ je nekladná vyplýva, že matica $\mathbf{A}[\alpha \mid \beta]$ resp. $\mathbf{A}[\beta \mid \alpha]$ je nekladná.

Na dôkaz postačujúcej podmienky predpokladajme, že existuje rozklad množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ na množiny α a β s vlastnosťami opísanými v znení vety. Definujme štvorcovú maticu $\mathbf{C} = (c_{ij})$ rádu n nasledovne:

$$c_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{ak } i = j, \ i, j \in \alpha \\ -1 & \text{ak } i = j, \ i, j \in \beta \\ 0 & \text{ak } i \neq j \end{cases}$$

Je zřejmé, že takto definovaná matica $\mathbf{C}$ je regulárna diagonálna matica s vlastnosťou, že matica $\mathbf{CAC}^{-1}$ je nezáporná. ■

Nasledujúci dôsledok je preformulovanie vety 1.5.

Dôsledok 1.6. *Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu n . Potom $\mathbf{A}$ je diagonálne podobná s nejakou nezápornou maticou práve vtedy, ak existuje taká permutačná matica $\mathbf{P}$, že*

$$\mathbf{PAP}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{A}_{11}$ a $\mathbf{A}_{22}$ sú nezáporné štvorcové matice a matice $\mathbf{A}_{12}$ a $\mathbf{A}_{21}$ sú nekladné.

V ďalšom bude užitočné previesť preformulovanie výsledku z vety 1.5. na grafy resp. digrafy priradené štvorcovej matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Graf resp. digraf priradíme matici nasledovne:

1./ Matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ priradíme ohodnotený digraf $\mathbf{D}\{\mathbf{A}\}$ s vrcholmi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ kde orientovaná hrana ide z vrchola $\mathbf{v}_i$ do vrchola $\mathbf{v}_j$ práve vtedy, keď $a_{ij} \neq 0$ a ohodnotenie je definované rovnosťou $l([\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j]) = a_{ij}$.

2./ matici $\mathbf{A}$ môžeme priradiť aj ohodnotený neorientovaný bigraf $\mathbf{G}_b\{\mathbf{A}\}$ s $2n$ vrcholmi $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ a $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$, kde $\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{c}_j$ sú susedné práve vtedy, keď $a_{ij} \neq 0$ a ohodnotenie l je definované rovnosťou $l(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j) = a_{ij}$. Množiny $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n\}$ a $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ tvoria bipartíciu bigrafu $\mathbf{G}_b\{\mathbf{A}\}$.

Poznámka. Pri úvahách o súvislosti bigrafov a matíc sa zvyčajne dáva prednosť orientovaným bigrafom. (Pod orientovaným bigrafom s bipartíciou (R, C) rozumieme digraf, v ktorom orientované hrany idú z vrcholov množiny R do vrcholov množiny C). V tejto práci budeme používať len neorientované bigrafy; bude to užitočné aj vzhľadom na vetu 2.4 v druhej kapitole a výsledky v ktorých sa táto veta využíva. Všetky tieto výsledky je možné transformovať pre orientované bigrafy.

Dôsledok 1.7. *Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu n a nech $\mathbf{G}_b\{\mathbf{A}\}$ je bigraf priradený matici $\mathbf{A}$. Potom $\mathbf{A}$ je diagonálne podobná nezápornej matici práve vtedy, keď existuje taký rozklad množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ na neprázdne podmnožiny α a β , že podbigraf $\mathbf{G}_{b\alpha}$ resp. $\mathbf{G}_{b\beta}$ bigrafu $\mathbf{G}_b\{\mathbf{A}\}$ indukovaný vrcholovou množinou $\{\mathbf{r}_i | i \in \alpha\} \cup \{\mathbf{c}_i | i \in \alpha\}$, resp. $\{\mathbf{r}_i | i \in \beta\} \cup \{\mathbf{c}_i | i \in \beta\}$ obsahuje všetky hrany z bigrafu $\mathbf{G}_b\{\mathbf{A}\}$ ohodnotené kladnými číslami a neobsahuje žiadnu hranu ohodnotenú záporným číslom.*

Preformulujeme ďalej vetu 1.5. pre digraf $\mathbf{D}\{\mathbf{A}\}$. Aby sme to mohli urobiť potrebujeme zaviesť niektoré označenia. Nech $\mathbf{D}$ je daný

(ohodnotený) digraf. **Priradený graf** k digrafu D je graf, ktorý dostaneme zanedbaním orientácie (a ohodnotenia) orientovaných hrán digrafu D a budeme ho označovať symbolom G^D . Digraf D sa nazýva **slabo súvislý**, ak graf G^D je súvislý; digraf, ktorý nie je slabo súvislý sa nazýva **nesúvislý**.

Nech $V_1, V_2, \dots, V_k$ sú po dvojiciach disjunktné podmnožiny vrcholovej množiny neohodnoteného grafu G . Potom $G|V_1, V_2, \dots, V_k$ je graf, ktorý dostaneme z G spojením všetkých vrcholov z V_i do jedného vrchola pre všetky $i=1, \dots, k$ a spojením všetkých výsledných násobných hrán do jednej. Pre podgrafy $H_1, H_2, \dots, H_k$ grafu G budeme písať $G|H_1, H_2, \dots, H_k$ namiesto $G|V_1(H_1), \dots, V_k(H_k)$. Symbol D_+ resp. D_- bude značiť faktor digrafu D vytvorený z hrán ohodnotených klanými, resp. zápornými číslami. Ak D je digraf priradený k matici A , t.j. $D = D(A)$, potom symbolom $G^{D(A)}$ označíme graf priradený k tomuto digrafu D .

Dôsledok 1.8. *Nech A je štvorcová matica rádu n a nech D je digraf priradený matici A . Potom A je diagonálne podobná s nejakou nezápornou maticou práve vtedy, keď*

- (i) D_+ je nesúvislý digraf so slabo súvislými komponentami $C_1, C_2, \dots, C_k$ ($k \geq 2$);
- (ii) indukovaný digraf $D[C_i]$ pre všetky $i=1, \dots, k$ je digraf, ktorého hranová množina je prázdna;
- (iii) graf $G^D|C_1, C_2, \dots, C_k$ je bigraf.

Dôkaz: Podľa dôsledku 1.6. existuje taká permutačná matica P , že:

$$B = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{X}$ a $\mathbf{V}$ sú nezáporné neprázdne štvorcové matice a $\mathbf{Y}$ a $\mathbf{U}$ sú nekladné. Označme symbolmi $W(\mathbf{X})$ resp. $W(\mathbf{V})$ množinu silne súvislých komponentov digrafu priradeného matici $\mathbf{X}$, resp. matici $\mathbf{V}$. Potom $W(\mathbf{X}) \cup W(\mathbf{V}) = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ je množina všetkých slabých komponentov digrafu $\mathbf{D}_+$; zrejme $k \geq 2$ a teda $\mathbf{D}_+$ je nesúvislý. Naviac $\mathbf{D}[C_i]$ obsahuje len kladne ohodnotené hrany, keďže tieto korešpondujú s podmaticou nezápornej matice $\mathbf{X}$ alebo $\mathbf{V}$. Z toho vyplýva, že $\mathbf{D}[C_i]$ je graf, ktorého hranová množina je prázdna a tým sme dokázali (ii).

Budeme teraz dokazovať (iii). Označme si ako α_i (resp. β_i) podmnožinu množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, ktorá zodpovedá riadkom (resp. stĺpcom) korešpondujúcim s $V(C_i)$, inými slovami $\mathbf{D}[\mathbf{B}[\alpha_i | \beta_i]] = C_i$. Potom $\bar{\alpha} = \{\alpha_i | i = 1, \dots, k\}$ a $\bar{\beta} = \{\beta_i | i = 1, \dots, k\}$ sú rozklady indexovej množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Naviac $\bar{\alpha} = \alpha^1 \cup \alpha^2$ a $\bar{\beta} = \beta^1 \cup \beta^2$ kde pre všetky $\alpha \in \alpha^1$ a $\beta \in \beta^1$ matica $\mathbf{B}[\alpha | \beta]$ je podmatica matice $\mathbf{X}$ a pre všetky $\alpha \in \alpha^2$ a $\beta \in \beta^2$ je matica $\mathbf{B}[\alpha | \beta]$ podmatica matice $\mathbf{V}$. Budeme definovať nasledovnú štvorcovú (0,1)-maticu $\bar{\mathbf{B}} = (\bar{b}_{ij})$ rádu k :

$$\bar{b}_{ij} = 1 \text{ práve vtedy, keď } \mathbf{B}[\alpha_i | \beta_i] \text{ obsahuje aspoň jednu zápornú hodnotu}$$

$$\bar{b}_{ij} = 0, \text{ inak}$$

Potom graf $\mathbf{G}^{\mathbf{D}(\bar{\mathbf{B}})}$ je izomorfný s grafom $\mathbf{G}^{\mathbf{D}} \mid C_1, C_2, \dots, C_k$ a z definície matice $\bar{\mathbf{B}}$ vyplýva, že

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_1 & \bar{\mathbf{Y}} \\ \bar{\mathbf{U}} & \mathbf{O}_2 \end{pmatrix};$$

kde $\mathbf{O}_1$ a $\mathbf{O}_2$ sú štvorcové neprázdne nulové matice. Teda graf $\mathbf{G}^{\mathbf{D}(\bar{\mathbf{B}})}$ ako aj graf $\mathbf{G}^{\mathbf{D}} \mid C_1, C_2, \dots, C_k$ je bigraf a dôkaz (iii) je skončený.

Obrátene, predpokladajme, že $\mathbf{A}$ spĺňa (i) až (iii) a nech $\overline{\mathbf{A}}$ je skonštruovaná z $\mathbf{A}$ takým istým spôsobom ako $\overline{\mathbf{B}}$ z $\mathbf{B}$. Potom (iii) implikuje, že existuje permutačná matica $\mathbf{P}$ rádu k s vlastnosťou, že:

$$\mathbf{P}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}'_1 & \mathbf{Y}' \\ \mathbf{U}' & \mathbf{O}'_2 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{O}'_1$ a $\mathbf{O}'_2$ sú štvorcové neprázdné nulové matice. Naviac (i) implikuje, že matica $\mathbf{P}$ môže byť vybraná tak, že (nulové) podmatice $\mathbf{A}_-[\alpha_i | \beta_i]$ korešpondujú s diagonálnymi hodnotami matice $\mathbf{P}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{P}^{-1}$.

Rozšírením $\overline{\mathbf{A}}$ na $n \times n$ maticu $\mathbf{A}_-$ dostávame, že existuje taká permutačná matica $\mathbf{Q}$, že :

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}_-\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{O}}_1 & \mathbf{Y} \\ \mathbf{U} & \overline{\mathbf{O}}_2 \end{pmatrix},$$

kde $\overline{\mathbf{O}}_1$ a $\overline{\mathbf{O}}_2$ sú štvorcové neprázdné nulové matice a $\mathbf{A}_-[\alpha_i | \beta_i]$ sú nulové diagonálne podmatice matíc $\mathbf{O}_1$ a $\mathbf{O}_2$. teda

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{F}_1 & 0 & 0 & \\ 0 & \mathbf{F}_2 & 0 & \mathbf{Y}' \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{F}_m & \\ & \mathbf{U}' & & \mathbf{F}_{m+1} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \mathbf{F}_{m+2} & 0 \\ \hline & & & 0 & 0 & \mathbf{F}_k \end{array} \right),$$

kde $m \geq 1$ je kardinalita množiny α^1 . Keďže pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$ matica $\mathbf{F}_i$ korešponduje so silne súvislým komponentom $\mathbf{C}_i$, podľa (ii) je $\mathbf{F}_i$ nezáporná matica a $\mathbf{U}' = \mathbf{U}$ ako aj $\mathbf{Y}' = \mathbf{Y}$ sú nezáporné matice. Aplikovaním dôsledku 1.6 dostávame, že matica $\mathbf{A}$ je diagonálne podobná nezápornej matici. ■

Zosumarizovaním výsledkov o celočíselných maticiach dostávame:

Veta 1.9. *Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu n . Potom nasledovné podmienky sú ekvivalentné:*

- (a) $\mathbf{A}$ je diagonálne podobná nezápornej matici;
- (b) $\mathbf{A}$ je $(0,1,-1)$ -diagonálne podobná nezápornej matici;
- (c) $\mathbf{A}$ je diagonálne podobná $\mathbf{A}_{||}$;
- (d) Existuje permutačná matica $\mathbf{P}$ typu $n \times n$ s vlastnosťou, že

$$\mathbf{PAP}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{U} & \mathbf{V} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{X}$ a $\mathbf{V}$ sú nezáporné štvorcové matice a $\mathbf{U}$ a $\mathbf{Y}$ sú nekladné;

- (e) existuje taký rozklad množiny $\{1,2,\dots,n\}$ na neprázdne podmnožiny α a β , že podbigraf $\mathbf{G}_{\alpha\omega}$ resp. $\mathbf{G}_{\beta\beta}$, bigrafu $\mathbf{G}_{\mathbf{b}}(\mathbf{A})$ indukovaný vrcholovou množinou $\{r_i | i \in \alpha\} \cup \{c_i | i \in \alpha\}$, resp. $\{r_i | i \in \beta\} \cup \{c_i | i \in \beta\}$, obsahuje všetky hrany z bigrafu $\mathbf{G}_{\mathbf{b}}(\mathbf{A})$ ohodnotené kladnými číslami a neobsahuje žiadnu hranu ohodnotenú záporným číslom.;
- (f) Nech $\mathbf{D}$ je digraf priradený matici $\mathbf{A}$, t.j. $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{A})$. Potom platí
 - (i) $\mathbf{D}_+$ je nesúvislý digraf so slabo súvislými komponentami $C_1, C_2, \dots, C_k$ ($k \geq 2$);
 - (ii) indukovaný digraf $\mathbf{D}[C_i]$ pre všetky $i=1,\dots,k$ je digraf, ktorého hranová množina je prázdna;
 - (iii) graf $\mathbf{G}^{\mathbf{D}} \setminus C_1, C_2, \dots, C_k$ je bigraf.

II. Výsledky pre grafy.

V predchádzajúcej kapitole sme priradili štvorcovej matici $\mathbf{A}$ ohodnotený digraf $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ a ohodnotený bigraf $\mathbf{G}_b(\mathbf{A})$. Obrátene, pre ohodnotený digraf $\mathbf{D}$ s n vrcholmi $\mathbf{A}(\mathbf{D})$ bude značiť maticu, pre ktorú $\mathbf{D}(\mathbf{A}(\mathbf{D})) = \mathbf{D}$. Ohodnotený graf $\mathbf{G}$ môžeme považovať za symetrický ohodnotený digraf $\mathbf{D}$; to znamená, že každá hrana $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ grafu $\mathbf{G}$ (s ohodnotením $l(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_0$) je považovaná za dvojicu orientovaných hrán $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ a $[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$ digrafu $\mathbf{D}$ ohodnotených rovnakým ohodnotením l_0 . Je zrejmé, že $\mathbf{A}(\mathbf{D})$ je štandardná matica susednosti digrafu $\mathbf{D}$.

Nech $\mathbf{D}$ je ohodnotený digraf s maticou susednosti $\mathbf{A}(\mathbf{D})$. Označme symbolom $\mathbf{D}^{-1}$ digraf priradený k matici $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{D})$ t.j. $\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{D}))$; inými slovami $\mathbf{D}^{-1}$ je ohodnotený digraf, ktorý korešponduje s inverznou maticou k matici susednosti digrafu $\mathbf{D}$. Označme symbolom $\mathbf{D}^{+}$ ohodnotený digraf, ktorý dostaneme z digrafu $\mathbf{D}^{-1}$ zámenou všetkých záporných ohodnotení za ich absolútnu hodnotu. Symbol $\mathbf{D}_+^{-1}$, resp. $\mathbf{D}_-^{-1}$, pre digraf $\mathbf{D}^{-1}$ má ten istý význam ako symbol $\mathbf{D}_+$, resp. $\mathbf{D}_-$, pre digraf $\mathbf{D}$ v predchádzajúcej kapitole. Podobne, $\mathbf{G}^{\mathbf{D}^{-1}}$ označuje graf priradený digrafu $\mathbf{D}^{-1}$.

Prirodzeným rozšírením silnej invertability pre všetky ohodnotené digrafy je nasledovná definícia: ohodnotený digraf $\mathbf{D}$ sa nazýva **silne invertovateľný**, ak existuje ohodnotený digraf $\mathbf{H}$, ktorého všetky orientované hrany sú označené kladnými číslami a s vlastnosťou, že matica $\mathbf{A}(\mathbf{D}^{-1})$ je diagonálne podobná s maticou $\mathbf{A}(\mathbf{H})$.

V tejto kapitole budeme aplikovať výsledky predchádzajúcej kapitoly na odvodenie nutnej a postačujúcej podmienky pre silnú invertabilitu digrafu $\mathbf{D}$. Žiaľ táto nutná a postačujúca podmienka neodráža štruktúru

digrafu D – ak chceme zistiť, či digraf D je silne invertovateľný musíme poznať digraf D^{-1} .

V závere kapitoly uvedieme pre ohodnotený bigraf G s jediným 1-faktorom čisto grafovú konštrukciu grafu G^{-1} (pripomíname, že každý neohodnotený graf môžeme považovať za ohodnotený tak, že každej hrane priradíme hodnotu 1). Potom danému bigrafu G s jediným 1-faktorom môžeme jednoznačne priradiť podľa vety 2.4 bigraf G^{-1} a ak tento bigraf G^{-1} považujeme za orientovaný digraf (zámenou každej hrany za dvojicu opačne orientovaných hrán) môžeme podľa vety 2.1 určiť, či pôvodný bigraf G je alebo nie je silne invertovateľný.

Veta 2.1. *Nech D je ohodnotený digraf ktorého matica susednosti $A(D)$ je regulárna. Potom nasledovné tvrdenia sú ekvivalentné:*

(a) D je silne invertovateľný

(b) D^+ je inverzný graf ku D

(c) platia nasledovné tri podmienky:

(i) D_+^{-1} je nesúvislý digraf so slabo súvislými komponentmi

$C_1, C_2, \dots, C_k$ kde $k \geq 2$;

(ii) indukovaný digraf $D^{-1}[C_i]_-$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, k$ je digraf ktorého hranová množina je prázdna;

(iii) graf $G^{D^+} \mid C_1, C_2, \dots, C_k$ je bigraf.

Dôkaz: Tvrdenie vety vyplýva priamo z tvrdení (a), (c) a (f) vety 1.9.

Nech G je bigraf s maticou susednosti $A = A(G)$ a nech $B = B(G)$ je bipartitná matica bigrafu G . Zrejme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$$

a matica B je regulárna práve vtedy, keď A je regulárna a

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{B}^T)^{-1} \\ \mathbf{B}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Naviac platí:

Lema 2.2. *Nech $\mathbf{B}$ je štvorcová matica. Ak $\mathbf{B}$ je diagonálne podobná s nezápornou maticou, potom $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & 0 \end{pmatrix}$, je tiež diagonálne podobná s nezápornou maticou.*

Dôkaz: Nech $\mathbf{D}$ je diagonálna $(0,1,-1)$ -matica taká, že $\mathbf{DBD}$ je nezáporná. Položme $\bar{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix}$. Potom priamym výpočtom a použitím jednoduchých vlastností matice $\mathbf{D}$, že $\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}$ a $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$ dostávame

$$\bar{\mathbf{D}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{D}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{DBD} \\ (\mathbf{DBD})^T & 0 \end{pmatrix}$$

Z predpokladu nezápornosti matice $\mathbf{DBD}^{-1} = \mathbf{DBD}$ vyplýva nezápornosť matice $\bar{\mathbf{D}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{D}}^{-1}$. ■

Dôsledok 2.3. *Nech G je bigraf, ktorého bipartitná matica $\mathbf{B}(G)$ je regulárna. Ak matica $\mathbf{B}^{-1}(G)$ je diagonálne podobná s nezápornou maticou, potom bigraf G^+ je silne inverzný graf ku G .*

Obrátené tvrdenie z lemy 2.2 a dôsledku 2.3 neplatí a teda silná invertibilita G neimplikuje, že matica $\mathbf{B}^{-1}(G)$ je diagonálne podobná s nezápornou maticou, je to postačujúca, ale nie nutná podmienka. Inými slovami môžeme použiť dôsledok 2.3 na dôkaz silnej invertibility

bipartitného grafu G , ale nie na dôkaz toho, že G nie je silne invertovateľný.

Dôsledok 2.3 bol v Godsilovom článku [Go 85] implicitne použitý, hoci nebol ani vyslovený ani dokázaný.

Konštrukcia grafu G^{-1}

Na začiatku tejto kapitoly sme uviedli, že na to, aby sme mohli aplikovať vetu 2.1 na zistenie silnej invertibility bigrafu G musíme poznať graf G^{-1} . Túto kapitolu zakončíme čisto grafovou konštrukciou grafu G^{-1} pre triedu bigrafov s jediným 1-faktorom.

Poznámka. Je známe [Go 85], že graf G s $2n$ vrcholmi má jediný 1-faktor práve vtedy, keď jeho vrcholy môžeme očíslovať číslami $1, 2, \dots, n$ a číslami $1', 2', \dots, n'$ tak, že hrana ide z vrcholu i do vrcholu j' len keď $i \geq j'$. Znamená to, že bipartitná matica $B(G)$ tohto grafu G je dolná trojuholníková matica s jednotkami na diagonále. Nasledujúcu vetu 2.4 možno považovať aj za návod na invertovanie regulárnej trojuholníkovej matice (ktorú možno pomocou permutácií riadkov a stĺpcov previesť na dolnú trojuholníkovú maticu s jednotkami na diagonále) pomocou grafov. O invertovaní trojuholníkových regulárnych matíc sú známe vety, ktoré využívajú grafy, napr. [Fi 81, veta 13.1] ale aj ďalšie práce: [Fi 77], [Fi 63]. Vo vete 2.4 však popíšeme inú metódu invertovania, ktorá bude užitočná pre odvodenie výsledkov v nasledujúcich kapitolách.

Nech G je bigraf bez násobných hrán s jediným 1-faktorom $M(G)$. Nech u a v sú ľubovoľné vrcholy v G , potom $p_+(u, v)$ (resp. $p_-(u, v)$) značí počet všetkých párných (resp. nepárnych) alternujúcich ciest spájajúcich vrcholy u a v .

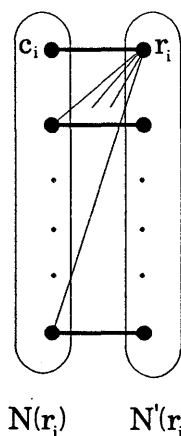
Veta 2.4. *Nech G je bigraf s jediným 1-faktorom $M(G)$. Potom (ohodnotený) bigraf G^{-1} s ohodnotením $l: E(G) \rightarrow Z$ dostaneme nasledovne:*

$$(a) V(G^{-1}) = V(G)$$

(b) *nech vrcholy $u, v \in V(G^{-1})$. Potom hrana $(u, v) \in E(G^{-1})$ práve vtedy, keď $p_+(u, v) \neq p_-(u, v)$ a $l(u, v) = p_+(u, v) - p_-(u, v)$.*

Dôkaz: Je zrejmé že graf G^{-1} skonštruovaný vo vete 2.4 je bigraf. Navyše, ak (R, C) je taká bipartícia grafu G , že bipartitná matica $\mathbf{B}_{RC}(G)$ grafu G je dolná trojuholníková s jednotkami na diagonále, zrejmé aj bipartitná matica $\mathbf{B}_{RC}(G^{-1})$ bigrafu G^{-1} má túto vlastnosť. Stačí dokázať, že $\mathbf{B}_{RC}(G^{-1}) = \mathbf{B}_{RC}^{-1}(G)$. Definujeme maticu $\mathbf{D} = (d_{ij}) = \mathbf{B}_{RC}(G)\mathbf{B}_{RC}(G^{-1})$. Dokážeme, že $\mathbf{D} = \mathbf{I}$, kde $\mathbf{I}$ je jednotková matica.

Nech $\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{c}_j$ sú ľubovoľné vrcholy grafu G^{-1} a nech $\mathbf{r}_i \in R$ a $\mathbf{c}_j \in C$. Označme okolie $\mathbf{r}_i$ v G ako $N(\mathbf{r}_i)$ a definujme $N'(\mathbf{r}_i) = \{u \in V(G) \mid (u, v) \in M \text{ a } v \in N(\mathbf{r}_i)\}$, t.j množina $N'(\mathbf{r}_i)$ obsahuje tie vrcholy z množiny R , ktoré sú v 1-faktore M s vrcholmi množiny $N(\mathbf{r}_i)$ (obr.2). Zrejme $\mathbf{r}_i \in N'(\mathbf{r}_i)$.



Obr. 2

Preformulovaním násobenia matíc do reči grafov dostaneme, že prvok d_{ij} matice $\mathbf{D}$ sa rovná

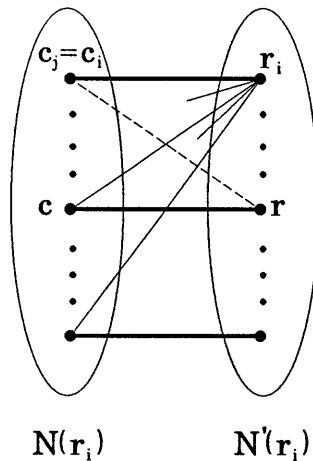
$$d_{ij} = \sum_{e \in E_{ij}} l(e)$$

kde $E_{ij} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{c}_j) \in E(\mathbf{G}^{-1}) \mid \mathbf{u} \in N(\mathbf{r}_i)\}$ je množina všetkých hrán v $\mathbf{G}^{-1}$, ktorá spája vrchol $\mathbf{x}_j$ s niektorými vrcholmi v $N'(\mathbf{r}_i)$.

Uvažujeme dva prípady:

(i) Nech $(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j) \in M$.

Keďže matice $\mathbf{B}_{RC}(\mathbf{G})$ a $\mathbf{B}_{RC}(\mathbf{G}^{-1})$ sú vybraté tak, že diagonálne hodnoty korešpondujú s 1-faktorom M , tento prípad je ekvivalentný s tým, že $i = j$. Predpokladajme, že existuje hrana v E_{ij} rôzna od $(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j)$, nech je to hrana $(\mathbf{r}, \mathbf{c}_j)$. Potom ale $\mathbf{r}_i \in N'(\mathbf{r}_i)$ a teda musí existovať cyklus $\mathbf{c}_j \mathbf{r}_i \mathbf{c} \mathbf{r}$ v $\mathbf{G}$ - to je spor (obr.3). Teda $E_{ij} = \{(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j)\}$ a podľa definície ohodnotenia l grafu $\mathbf{G}^{-1}$, $d_{ij} = d_{ii} = 1$ pre všetky i .



Obr. 3

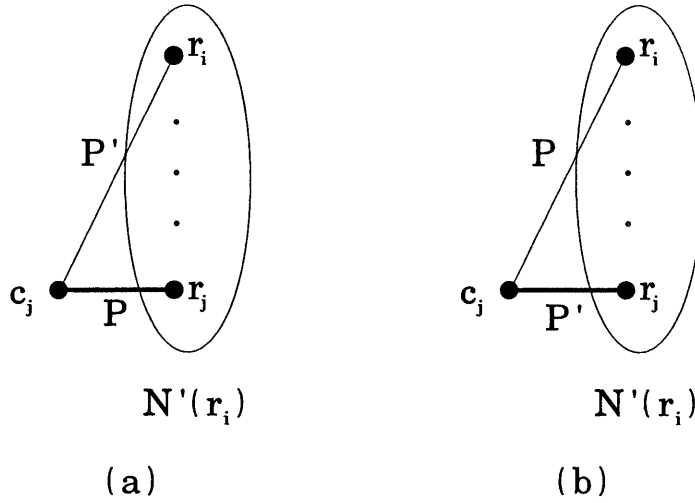
(ii) Nech $(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j) \notin M$.

Tento prípad zároveň zahrňuje aj prípad, keď $(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j) \notin E(\mathbf{G})$, navyše implikuje, že $i \neq j$. Označme ako $\Pi_+(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j)$ (resp. $\Pi_-(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j)$) množinu všetkých párnych (resp. nepárnych) alternujúcich ciest $\mathbf{P}$, ktoré spájajú vrchol $\mathbf{c}_j$ s vrcholmi v $N'(\mathbf{r}_i)$ a ako $\mu(\mathbf{P})$ označme počet hrán cesty $\mathbf{P}$, ktoré nepatria

do $M(G)$; všetky tieto cesty sú podgrafy grafu G . Z konštrukcie grafu G^{-1} dostávame, že $\sum_{e \in E_{ij}} l(e) = 0$ práve vtedy, keď počet párných alternujúcich ciest, ktoré spájajú vrchol c_j s vrcholmi v $N'(r_i)$ sa rovná počtu nepárnych alternujúcich ciest ktoré spájajú vrchol c_j s vrcholmi v $N'(r_i)$

Dokážeme, že pre každé $P \in \Pi_+(r_i, c_j)$ existuje cesta $P' \in \Pi_-(r_i, c_j)$ a naopak, pre každé $P \in \Pi_-(r_i, c_j)$ existuje cesta $P' \in \Pi_+(r_i, c_j)$.

Označme $\Pi(r_i, c_j) = \Pi_+(r_i, c_j) \cup \Pi_-(r_i, c_j)$ a uvažujme ľubovoľné $P \in \Pi(r_i, c_j)$. Najskôr nech $P = e$ je hrana v G . Ak $e \in \Pi_+(r_i, c_j)$, potom $e \in M$ a $l(e) = +1$ a teda $e = (r_i, c_j)$. Keďže $i \neq j$ a $r_i \in N'(r_i)$ dostaneme, že $(c_j, r_i) \in E(G) \setminus M$ a teda $(c_j, r_i) \in P' \in \Pi_-(r_i, c_j)$. Obrátene, ak $e \in \Pi_-(r_i, c_j)$, potom $c_j \in N(r_i)$ a z toho vyplýva, že $(c_j, r_i) \in P' \in \Pi_+(r_i, c_j)$ (obr.4b).



Obr. 4

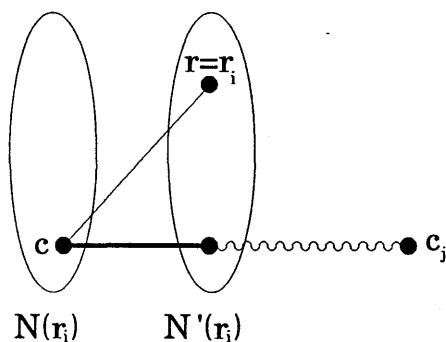
Teraz nech $\mu(P) > 1$. Jeden koncový vrchol cesty P je c_j a označme druhý ako r , $r \in N'(r_i)$. Ďalej uvažujeme opäť dva prípady: $r = r_i$ a $r \neq r_i$.

(a) $r = r_i$. Označme ako c vrchol cesty P susedný s r v P . Je zrejmé, že $c \in N(r_i)$ a navyše $c \neq c_j$, teda $\mu(P) > 1$. Označme ako $P' = P \setminus \{r, c\}$. Potom $P' \in \Pi(r_i, c_j)$ a navyše $\mu(P') = \mu(P) - 1$. Teda ak $P \in \Pi_+(r_i, c_j)$

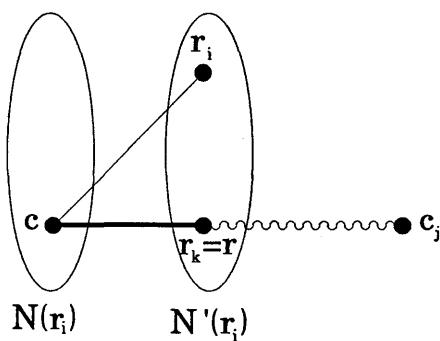
potom $\mathbf{P}' \in \Pi_-(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j)$ a naopak, ak $\mathbf{P} \in \Pi_-(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j)$ potom $\mathbf{P}' \in \Pi_+(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j)$ (obr.5a).

(b) $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_i$ (obr.5b). Potom existuje také k , že $\mathbf{r} = \mathbf{r}_k$. Potom $\mathbf{x}_k \in N(\mathbf{r}_i)$, $\mathbf{c}_k \neq \mathbf{c}_j$. Skutočne, inak by cesta obsahujúca hranu $(\mathbf{r}_k, \mathbf{c}_k) = (\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j)$ vytvárala cyklus v $\mathbf{G}$, v ktorom by M indukovalo 1-faktor - a to je spor. Teda $\mathbf{P}$ spolu s hranami $(\mathbf{r}_k, \mathbf{c}_k)$ a $(\mathbf{c}_k, \mathbf{r}_i)$ vytvára cestu $\mathbf{P}' \in \Pi_-(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j)$ s $\mu(\mathbf{P}') = \mu(\mathbf{P}) + 1$. Teda ak $\mathbf{P} \in \Pi_+(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j)$ potom $\mathbf{P}' \in \Pi_-(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j)$ a naopak, ak $\mathbf{P} \in \Pi_-(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j)$ potom $\mathbf{P}' \in \Pi_+(\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_j)$.

Dôkaz je skončený. ■



(a)



(b)

Obr. 5.

III. Invertovanie a duálny index stromov

V predchádzajúcej kapitole sme uviedli čisto grafovú konštrukciu (ohodnoteného) inverzného grafu G^{-1} pre graf G s jediným 1-faktorom.

Nech T je strom a nech $A(T)$ je jeho matica susednosti. Je známe [Go 85], že silne inverzný graf T^+ k stromu T existuje vždy, keď existuje aj inverzný graf T^{-1} (to je práve vtedy, keď T má 1-faktor). Inými slovami matica susednosti $A(T)$ stromu T je regulárna práve vtedy, keď T má 1-faktor a teda $A^{-1}(T) = A(T^{-1})$ existuje a navyše existuje aj regulárna $(0,1,-1)$ diagonálna matica C , že $A^+(T) = A(T^+) = CA^{-1}(T)C$.

Pripomíname, že graf T^+ dostaneme z grafu T^{-1} zámenou záporných ohodnotení za ich absolútnu hodnotu. Ďalej je známe, že matica susednosti $A^{-1}(T)$ grafu T^{-1} je $(0,1,-1)$ matica; čo znamená, že graf T^+ neobsahuje násobné hrany.

Godsil v [Go 85] dokázal aj nasledovné dva výsledky:

Veta A. *Nech G je bigraf s n vrcholmi a jediným 1-faktorom M a nech graf G/M je bipartitný. Potom platí:*

(i) *matica $A^{-1}(G)$ je diagonálne podobná nezápornej celočíselnej matici*

$$A^+(G)$$

(ii) $G \subset G^+$

(iii) *ak G je strom potom $G^+ \subset P_n^+$, kde P_n označuje cestu s n vrcholmi.*

Veta B. *Nech G je bigraf s n vrcholmi a jediným 1-faktorom M a nech graf G/M je bipartitný. Potom*

(i) $\lambda(G)\lambda^+(G) \geq 1$ a rovnosť platí práve vtedy, keď $G \cong G^+$

(ii) *ak G je les, potom $\lambda^+(G) \geq \lambda^+(P_n)$*

V tejto kapitole uvidíme modifikáciu konštrukcie z vety 2.4 pre silne inverzný graf T^+ k stromu T . Túto konštrukciu aplikujeme na odvodenie výsledkov týkajúcich sa duálneho indexu stromov v závislosti od koncových vrcholov stromu. Uvedieme tiež niektoré vlastnosti grafu T^+ . V závere tejto kapitoly skonštruujeme strom s n vrcholmi, ktorý má maximálny duálny index spomedzi všetkých stromov s n vrcholmi a 1-faktorom.

Konštrukcia a základné vlastnosti grafu T^+ .

Nech T je strom s 1-faktorom M . Konštrukcia grafu $T^+ = (V(T^+), E(T^+))$ je nasledovná:

$$(i) \quad V(T^+) = V(T)$$

(ii) $E(T^+) \supset E(T)$; T^+ získame z T tak, že do T pridáme novú hranu spájajúcu vrcholy u a v práve vtedy, keď vrcholy u a v sú v T spojené alternujúcou cestou dĺžky aspoň 3.

Keďže T je strom, alternujúca cesta medzi dvoma vrcholmi je jednoznačne určená (ak existuje) a je jediná t. j. graf T^+ je dobre definovaný.

Veta 3.1. *Nech T je strom s 1-faktorom. Potom graf T^+ skonštruovaný vyššie je silne inverzným grafom k stromu T .*

Dôkaz: Keďže v strome T medzi každými dvoma vrcholmi u a v existuje najviac jedna alternujúca cesta, ktorá je buď párna alebo nepárna (poznáme, že aj hranu (u,v) považujeme za párnú alternujúcu cestu ak $(u,v) \in M$ a za nepárnu alternujúcu cestu ak $(u,v) \notin M$) potom ohodnotenie hrán grafu T^{-1} je nasledovné:

$$l(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{ak existuje párna alternujúca cesta medzi vrcholmi } u \text{ a } v \\ -1 & \text{ak existuje nepárna alternujúca cesta medzi } u \text{ a } v \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Graf T^+ dostaneme z T^{-1} zámennou záporných ohodnotení hrán za kladné (pretože matica $A(T^{-1})$ je $(0,1,-1)$ -diagonálne podobná s maticou $A(T^+)$).

Zrejme T^+ musí obsahovať všetky hrany, ktoré obsahuje T a ešte navyše nové hrany, ktoré spájajú vrcholy medzi ktorými existuje zväčšujúca alternujúca cesta dĺžky aspoň 3. ■

Uvedieme teraz zoznam niektorých jednoduchých ale zaujímavých a užitočných vlastností grafu T^+ :

Lema 3.2. *Nech T je strom, T^+ silne inverzný graf k stromu T .*

Potom:

(a) $T \subset T^+$

(b) *množina koncových vrcholov grafu T^+ je rovnaká ako množina koncových vrcholov stromu T .*

Dôkaz: (a) vyplýva z konštrukcie grafu T^+ . Zrejme koncový vrchol stromu T nemôže byť koncový vrchol žiadnej alternujúcej cesty dĺžky aspoň 3 a z toho vyplýva (b). ■

Lema 3.3. *Silne inverzný graf T^+ k stromu T je bipartitný graf s jediným 1-faktorom a $M(T) = M(T^+)$ je jediný 1-faktor v T^+ . Navyše bipartícia (R,C) stromu T je aj bipartíciou grafu T^+ .*

Lema 3.4. *Nech $F \subset T$ je les s 1-faktorom a vlastnosťou, že $M(F) \subset M(T)$. Potom každá alternujúca cesta v F je aj alternujúcou cestou v T , a platí $F^+ \subset T^+$.*

Poznámka 3.5. *Godsil v [Go 85] dokázal, že ak T je strom s n vrcholmi, potom $T^+ \subset P_n^+$ (veta A, (iii)). Podľa lemy 3.3. silne inverzný graf k ceste P_n je bigraf s jediným 1-faktorom a dá sa ľahko overiť, že P_n^+ má práve $m(m+1)/2$ hrán, kde $n = 2m$. Je zaujímavé, že vo všeobecnosti ak G je bigraf s jediným 1-faktorom a s $2m$ vrcholmi, tak $E(G) \leq m(m+1)$; toto vyplýva napr. z [Go 85], Lemma 2.1. Teda P_n^+ je extrémny graf vzhľadom na túto vlastnosť.*

Poznámka 3.6. *Podľa vety B, (i) $\lambda^+(T) = 1/\lambda(T)$ práve vtedy, keď $T \cong T^+$. Grafy s touto vlastnosťou budeme nazývať **samoinvertné**. Samoinvertné stromy boli charakterizované Godsilom v [Go 85]: Strom T s $2m$ vrcholmi a 1-faktorom je samoinvertný práve vtedy, keď môže byť zostrojený zo stromu $\bar{T}$ s m vrcholmi tak, že na každý vrchol v $\bar{T}$ zavesíme nový koncový vrchol. Túto charakterizáciu je možné získať aj z vety 3.1.*

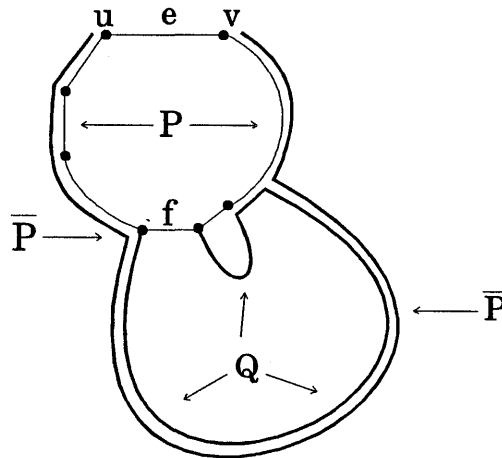
Poznámka 3.7. *Konštrukciu T^+ môžeme preformulovať aj nasledovne (je vhodnejšia pre praktické odvodenie T^+ z T). Pre každú dvojicu koncových vrcholov v T skonštruujeme inverzný graf k ceste (jednoznačne určenej), ktorá ich spája v T (k ceste ako podgrafu stromu T). Ak vo výslednom grafe dostaneme násobné hrany, tak berieme do úvahy len jednu z nich. Výsledný graf je T^+ .*

Poznámku 3.4. môžeme nasledovne zovšeobecniť:

Veta 3.8. *Nech T je strom s 1-faktorom a nech F je podles grafu T^+ s 1-faktorom takým, že $M(F) \subset M(T^+) = M(T)$. Potom $F^+ \subset\subset T^+$.*

Dôkaz: Nech e je hrana v F^+ . Ak $e \in E(F)$, potom $e \in E(T^+)$. Na druhej strane ak $e = (u, v) \notin E(F)$, potom musí existovať alternujúca cesta P dĺžky aspoň 3 v F , ktorá spája vrcholy u a v . Ak všetky hrany cesty P patria $E(T)$ potom (keďže $M(F) \subset M(T)$) P je tiež alternujúca cesta v T a teda $e \in E(T^+)$.

Nech teraz k hrán cesty P nepatrí T , vyberme jednu z nich, napr. f . Potom ak $f \in E(T^+)$ musí existovať alternujúca cesta Q v T taká, že obsahuje koncové vrcholy f . Môžeme teraz skombinovať cesty $P \setminus f$ a Q takým spôsobom, že dostaneme alternujúcu cestu $\bar{P}$ spájajúcu vrcholy u a v , ktorá obsahuje najviac $k-1$ hrán nepatriacich do T (obr.6.). Opakovaním tejto procedúry dostaneme alternujúcu cestu $\bar{P}$ v T spájajúcu vrcholy u a v , a teda $(u, v) \in E(T^+)$. ■



Obr. 6.

Ďalšie vlastnosti grafu T^+

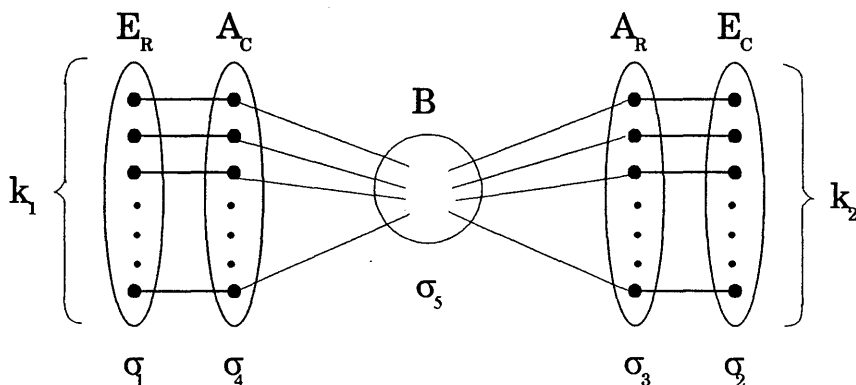
V nasledujúcich vetách sa budeme zaoberať extrémálnymi problémami vzhľadom na silne inverzné grafy k stromom.

Veta 3.9. *Nech T je strom s $2m$ vrcholmi s 1-faktorom a bipartíciou (R, C) . Nech počet koncových vrcholov stromu T , ktoré prislúchajú k množine R (resp. C) je rovný k_1 (resp. k_2). Potom pre $k_1 + k_2 < m$ platí nasledovný odhad pre počet hrán silne inverzného grafu T^+ ku stromu T :*

$$|E(T^+)| \leq e = \frac{1}{2}(m(m+1) - k_1(k_1-1) - k_2(k_2-2))$$

a tento odhad je najlepší možný.

Dôkaz: Podľa lemm 3.2. a 3.3., T^+ je nadgraf stromu T s bipartíciou (R, C) a koncové vrcholy v T^+ sú tiež koncové vrcholy v T (a obrátene). Uvažujme nasledovné množiny vrcholov v T^+ : E_R - množina koncových vrcholov v R , A_C - množina vrcholov v C , ktoré sú susedné s vrcholmi v množine E_R , E_C - množina koncových vrcholov v C , A_R - množina vrcholov v R , ktoré sú susedné s vrcholmi v E_C a nakoniec B - množina zvyšných vrcholov (obr.7.)



Obr. 7.

Je zrejmé, že

$$|E_R| = |A_C| = k_1$$

$$|E_C| = |A_R| = k_2$$

$$|B| = 2m - 2k_1 - 2k_2$$

Označme ako $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ a δ_5 sumu stupňov vrcholov v množinách E_R, E_C, A_R, A_C a B . Potom $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5$ je rovné sume stupňov všetkých vrcholov v $\mathbf{T}^+$, teda je rovné $2|E(\mathbf{T}^+)|$.

Podľa definície $\delta_1 = k_1, \delta_2 = k_2$.

Nech $\mathbf{v}$ je vrchol v A susedný s $\mathbf{u}$ v E . Zrejme vrchol $\mathbf{v}$ nie je susedný so žiadnym vrcholom v R ani so žiadnym vrcholom v E , okrem vrchola $\mathbf{u}$. Teda :

$$\delta_3(\mathbf{v}) = m - k_2 + 1 \text{ a teda } \delta_3 \leq k_2(m - k_2 + 1)$$

Podobne:

$$\delta_4 \leq k_1(m - k_1 + 1)$$

Uvažujme teraz množinu B . Keďže $\mathbf{T}^+$ je bigraf s jediným 1-faktorom, podgraf $\mathbf{F}$ grafu $\mathbf{T}^+$ indukovaný množinou B je bigraf s jediným 1-faktorom a teda (podľa poznámky 3.5.)

$$2|E(\mathbf{F})| \leq \frac{1}{2} |V(\mathbf{F})| (\frac{1}{2} |V(\mathbf{F})| + 1) = (m - k_1 - k_2)(m - k_1 - k_2 + 1)$$

Každý vrchol v B , ktorý patrí do R (resp. C) musí byť spojený s nejakým vrcholom v A_C (resp. A_R) v grafe $\mathbf{T}^+$. Toto implikuje nasledovné:

$$\begin{aligned} \delta_5 &\leq (m - k_1 - k_2)(m - k_1 - k_2 + 1) + (k_1 + k_2)(m - k_1 - k_2) = \\ &= (m + 1)(m - k_1 - k_2) \end{aligned}$$

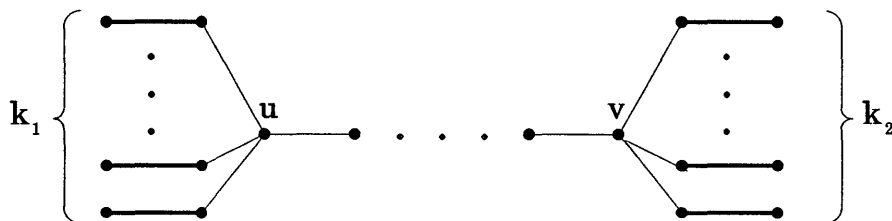
Zosumarizovaním predchádzajúcich výsledkov dostaneme:

$$\begin{aligned}
 2|E(\mathbf{T}^+)| &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 \\
 &\leq k_1 + k_2 + k_1(m - k_1 + 1) + k_2(m - k_2 + 1) + \\
 &\quad + (m + 1)(m - k_1 - k_2) \\
 &= k_1 - k_1^2 + k_2 - k_2^2 + (m + 1)(k_1 + k_2) + (m + 1)m - \\
 &\quad - (m + 1)(k_1 + k_2) \\
 &= m(m + 1) - k_1(k_1 + 1) - k_2(k_2 + 1)
 \end{aligned}$$

Tým sme dokázali nerovnosť z tvrdenia vety.

Aby sme dokázali, že tento odhad je najlepší možný, uvažujme graf z obr.8. Dĺžka l cesty spájajúcej vrcholy u a v z obrázka je rovná $l = 2m - 2k_1 - 2k_2$, $l > 0$ pretože podľa predpokladu $k_1 + k_2 < m$.

Nie je ťažké overiť, že počet hrán v inverznom grafe ku stromu $\mathbf{T}$ z obr. 8 je rovný hornému odhadu z tvrdenia vety. Tým je dôkaz skončený. ■



Obr. 8

Poznámka 3.10. V prípade, že $k_1 + k_2 = m$, nemôžeme na dôkaz rovnosti v (1) použiť strom z obr.8. Avšak podľa poznámky 3.6. toto je prípad samoinverzného grafu a v tomto prípade $|E(\mathbf{T}^+)| = |E(\mathbf{T})| = 2m - 1$. Navyše je zrejmé, že graf, ktorý má $k_1 + k_2 > m$ koncových vrcholov nie je invertovateľný. Veta 3.9. a poznámka 3.6. pokrývajú všetky prípady.

Podľa poznámky 3.2. T je kostra grafu T^+ . Ukážeme, že každý graf T^+ obsahuje inú zaujímavú kosť. Najskôr dokážeme nasledovnú lemu:

Lema 3.11. *Nech T je strom s $2m$ vrcholmi a s 1-faktorom. Označme S množinu všetkých vrcholov v T^+ , ktoré sú susedné s jeho koncovými vrcholmi. Potom podgraf grafu T^+ , ktorý je indukovaný množinou S je súvislý podgraf grafu $T^+ / M(T^+)$.*

Dôkaz: Dôkaz urobíme indukciou vzhľadom na m . Pre $m-1$ je lema triviálna. Nech $m > 1$ a nech v je koncový vrchol stromu T a nech vrchol u je susedný s v . Komponenty $T_1, \dots, T_k$ grafu $T \setminus \{u, v\}$ sú stromy s 1-faktorom, nech S_i je množina všetkých vrcholov v T_i , ktoré sú susedné s koncovými vrcholmi. Keďže T má 1-faktor, tak existuje najmenej jeden vrchol $s_i \in S_i$ taký, že existuje alternujúca cesta dĺžky aspoň 3 v T spájajúca u a s_i pre každé i , a teda $(u, s_i) \in E(T^+)$, navyše $(u, s_i) \notin M(T^+)$. Z druhej strany $T_i^+ \subset T$ pre každé i a podľa poznámky 3.4 a podľa indukčného predpokladu množina S_i indukuje súvislý podgraf v $T^+ / M(T^+)$. Teda $S \subset \bigcup_{i=1, \dots, k} S_i \cup \{u\}$ indukuje súvislý podgraf v $T^+ / M(T^+)$. ■

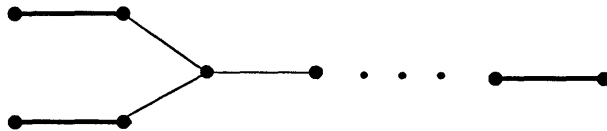
Veta 3.12. *Nech T je strom s 1-faktorom M . Potom T^+ obsahuje kosť, ktorá je samoinverzná.*

Dôkaz: 1-faktor $M = M(T)$ rozdeľuje vrcholy v T do dvojíc. Táto množina všetkých dvojíc môže byť rozdelená na dve disjunktné podmnožiny: na množinu A , ktorá obsahuje dvojice vrcholov, z ktorých práve jeden je koncovým vrcholom v T a na množinu B , ktorá obsahuje dvojice vrcholov, z ktorých ani jeden nie je koncovým vrcholom. Zoberme teraz z každej dvojice množiny A vrchol, ktorý nie je koncovým vrcholom a

označme množinu týchto vrcholov S . Množinu S vytvára indukovaný podgraf grafu T^+/M , ktorý je podľa lemy 3.11. súvislý.

Vyberme teraz ľubovoľný vrchol v v nejakej dvojici množiny B . Keďže T je strom s 1-faktorom je ľahké overiť, že existujú aspoň dva vrcholy u_1 a u_2 v S také, ktoré sú spojené s v cestou dĺžky aspoň 3. Navyše jedna z týchto ciest je alternujúca, nech je to cesta z vrcholu u_1 , preto existuje hrana (v, u_1) v T^+ , ktorá nepatrí do M . Z toho vyplýva, že existuje súvislý podgraf H grafu T^+/M , ktorý obsahuje práve jeden vrchol z každej dvojice $A \cup B$. Nech $\bar{H}$ je ľubovoľná kostra H a nech G je graf, ktorý dostaneme z $\bar{H}$ pridaním zvyšných vrcholov v dvojiciach z $A \cup B$, ktoré korešpondujú s hranami z H . Potom G je kostra grafu T^+ , ktorá je samoinverzná. ■

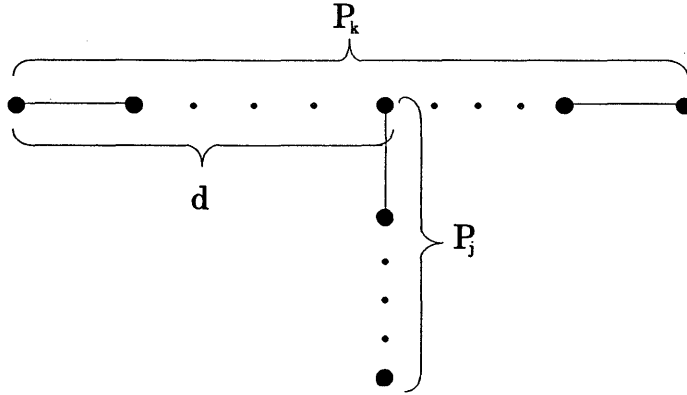
Podľa vety A, (iii) T^+ je podgraf silne inverzného grafu k ceste na rovnakom počte vrcholov n . Dokážeme trochu silnejší výsledok: Ak T nie je cesta, potom T^+ je podgraf grafu Z_n^+ , kde Z_n je graf s n vrcholmi podľa obr. 9.



Obr. 9

Najskôr dokážeme tento výsledok pre stromy, ktoré majú práve 3 koncové vrcholy. Každý strom s 1-faktorom, ktorý má 3 koncové vrcholy môže byť skonštruovaný zlepením koncového vrcholu cesty P_j s ľubovoľným vrcholom (nie koncovým) cesty P_k , kde k je párne; vyberme niektorý koncový vrchol v ceste P_k a označme d vzdialenosť medzi vybraným koncovým vrcholom a vrcholom spojenia P_j s P_k (obr. 10).

Označme vyššie opísaný strom ako $T_{k,j,d}$. Je zrejmé, že $T_{k,j,0} \cong T_{k,j,k-1} \cong P_{k+j+1}$.

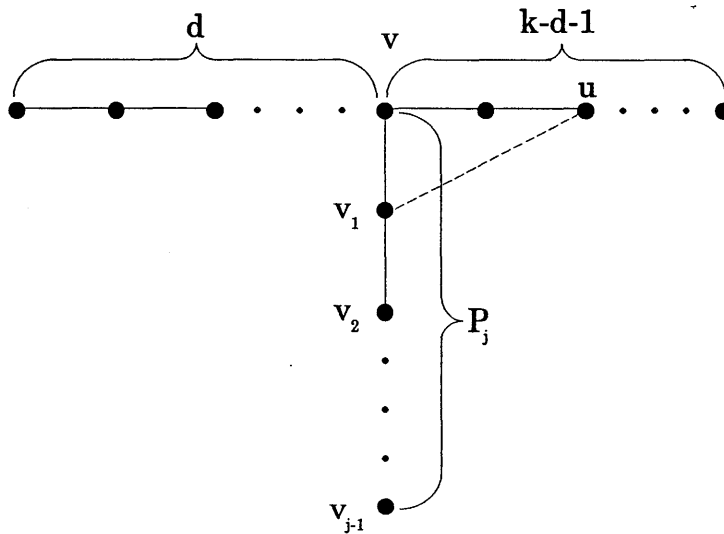


Obr. 10

Lema 3.13. *Nech strom $T_{k,j,d}$ má 1-faktor, k je párne a $k > 3$ a nech P_k je cesta v $T_{k,j,d}$. Potom*

- (a) $T_{k,j,d}^+ \supset T_{k,j,d+2}^+$ pre každé d párne, $d < k - 3$
- (b) $T_{k,j,d}^+ \subset T_{k,j,d+2}^+$ pre každé d nepárne, $d < k - 1$

Dôkaz: Nech $d < k - 3$ je párne a označme ako u vrchol v P_k , ktorého vzdialenosť od vybraného koncového vrchola v P_k je rovná $d + 2$ (obr. 11).



Obr. 11

Podľa konštrukcie silne inverzného grafu k stromu platí, že $E(T_{k,j,d}^+)$
 $= E(T_{k,j,d+2}^+) \cup \{(u,v), (u,v_3), (u,v_5), \dots, (u,v_{j-1})\}$. Prípad, keď d je nepárne je
 taký istý ako predchádzajúci, pretože $T_{k,j,d}$ je izomorfný s $T_{k,j,k-d-1}$ a k je
 párne (keďže P_k je alternujúca cesta v $T_{k,j,d}$), potom $k - d - 1$ je párne ak d
 je nepárne. ■

Lema 3.14. *Nech T je strom s n vrcholmi a s 1-faktorom. Nech T má práve 3 koncové vrcholy. Potom $T^+ \subset Z_n^+$.*

Dôkaz: T je izomorfný s nejakým $T_{k,j,d}$ pre nejaké k, j, d , kde P_k je
 cesta v $T_{k,j,d}$, kde d je párne, $0 < d < k - 1$ a j je nepárne. Ak $d < k - 1$,
 potom $T_{k,j,d}^+ \subset T_{k,j,2}^+$ (vyplýva z opakovaného použitia lemy 3.13. (a)).
 Platí $T_{k,j,2} \cong T_{k+j-3,3,j-1}$ kde P_{k+j-3} je alternujúca cesta v $T_{k+j-3,3,j-1}$.
 Keďže $j - 1$ je párne opäť z opakovaného použitia lemy 3.13.(a) vyplýva, že:

$$P_{k+j-3,3,j-1}^+ \subset P_{k+j-3,3,2}^+ \cong Z_n^+ . \blacksquare$$

Nasledujúca lema, týkajúca sa štruktúry stromov s 1-faktorom, nám umožní zovšeobecniť lemu 3.14.

Lema 3.15. *Nech T je strom s 1-faktorom, ktorý nie je izomorfný s P_n . Potom existuje maximálna voľná cesta v T párnej dĺžky r .*

Dôkaz: Najskôr dokážeme, že v strome T existuje cesta dĺžky 2, ktorej stupeň vnútorného vrcholu je 2. Nech k je počet koncových vrcholov v T . Vrcholy susedné s týmito koncovými vrcholmi sú po dvojiciach rôzne (pretože T má 1-faktor) a ak žiadnym z týchto vrcholov neprechádza cesta dĺžky 2, na ktorej stupeň vnútorného vrchola je 2, potom všetky tieto

vrcholy musia mať stupeň aspoň 3. Teda v $\mathbf{T}$ potom musí existovať aspoň k vrcholov stupňa 1, aspoň k vrcholov stupňa 3 a $n - 2k$ vrcholov stupňa 2 v $\mathbf{T}$. Potom platí:

$$\sum_{v \in V(\mathbf{T})} \deg(v) \geq 4k + 2(n - 2k) = 2n$$

a to je spor s tým, že $\mathbf{T}$ je strom. A teda preto musí niektorým vrcholom susedným s koncovým vrcholom prechádzať cesta dĺžky 2, ktorej vnútorný vrchol má stupeň 2.

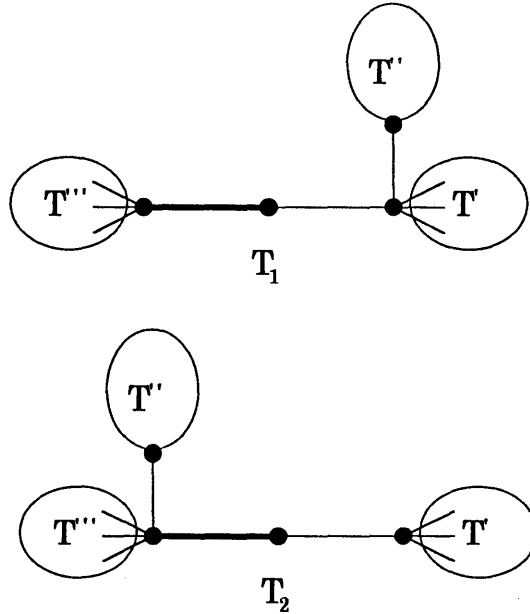
Teraz dokážeme lemu indukciou vzhľadom na n . Najmenšie n , pre ktoré existuje strom s 1-faktorom a nie je izomorfný s cestou je $n = 6$ a tento strom je jediný; je to $\mathbf{T}_{4,3,1}$. Nech $n > 6$ a vyberme nejakú maximálnu voľnú cestu $\mathbf{P}$, ktorej dĺžka je $r \geq 2$. Ak r je párne, tak sme s dôkazom hotoví. Ak r je nepárne, potom odstránime z $\mathbf{T}$ aspoň dva vrcholy na ceste $\mathbf{P}$ tak, aby sme dostali strom $\bar{\mathbf{T}}$. $\bar{\mathbf{T}}$ má menej vrcholov ako $\mathbf{T}$ a podľa indukčného predpokladu existuje maximálna voľná cesta $\bar{\mathbf{P}}$ v $\bar{\mathbf{T}}$, ktorá má požadované vlastnosti a párnú dĺžku $r > 0$. Ale cesta $\bar{\mathbf{P}}$ je tiež maximálnou voľnou cestou s požadovanými vlastnosťami párnej dĺžky v $\mathbf{T}$. ■

Veta 3.16. *Nech $\mathbf{T}$ je strom s n vrcholmi a s 1-faktorom. Ak $\mathbf{T}$ nie je izomorfný s $\mathbf{P}_n$ potom $\mathbf{T}^+ \subset \mathbf{Z}_n^+$.*

Dôkaz: Podľa lemy 3.15 existuje maximálna voľná cesta $\mathbf{P}_j$ párnej dĺžky $j - 1$ v $\mathbf{T}$; označme $\mathbf{v}$ vrchol spojenia tejto cesty v $\mathbf{T}$. Podľa definície maximálnej voľnej cesty stupeň vrchola $\mathbf{v}$ je aspoň 3. Položme $\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T} \setminus (\mathbf{P}_j \setminus \mathbf{v})$. Podľa vety A, (iii) $\bar{\mathbf{T}}^+ \subset \mathbf{P}_k^+$, kde $k = |V(\bar{\mathbf{T}})|$. Naviac, keďže na $\mathbf{v}$ sa môžeme pozeráť ako na vrchol v $\bar{\mathbf{T}}^+$ ako aj na vrchol v $\mathbf{P}_k^+$, tak platí $\bar{\mathbf{T}} \subset \bar{\mathbf{T}}^+ \subset \mathbf{P}_k^+$. Keďže $\mathbf{v}$ je vrchol v troch grafoch, stotožnením koncového

vrchola cesty P_j a v dostaneme tri grafy: pôvodný T (z $\bar{T}$) a dva nové grafy: H (z $\bar{T}^+$) a F (z P_k^+). Je zrejmé, že $T \subset H \subset F$. Podľa konštrukcie grafu F , F obsahuje $T_{k,j,d}$ pre nejaké d . Je zrejmé, že $F \subset T_{k,j,d}^+$. Keďže $\deg_T(v) \geq 2$ a v nie je koncový vrchol cesty P_k , v nemôže byť koncový vrchol grafu P_k^+ a preto platí $0 < d < k - 1$. Podľa lemy 3.14 dostávame $T_{k,j,d}^+ \subset Z_n^+$. Reťazec inklúzie je takto kompletný: $T \subset H \subset F \subset T_{k,j,d}^+ \subset Z_n^+$. A teda platí: $T \subset T_{k,j,d}^+$ a podľa vety 3.9 platí $T^+ \subset Z_n^+$. ■

Pomocou jednoduchšej metódy použitej v dôkaze lemy 3.11. môže byť veľa dvojíc stromov usporiadaných vzhľadom na duálny index. Napríklad, ak T_1 a T_2 sú stromy s 1-faktorom podľa obr. 12, potom $T_1^+ \subset T_2^+$ a platí $\lambda^+(T_2) \leq \lambda^+(T_1)$



Obr. 12

Dokázali sme niekoľko viet týkajúcich sa štrukturálnych vlastností inverzných grafov k stromom. Teraz ukážeme dôsledky pre duálny index.

Vlastnosti duálneho indexu.

Vety 3.9., 3.12., 3.16. majú priame dôsledky týkajúce sa duálneho indexu. Začneme dôsledkami vety 3.9. - táto veta dáva horné ohraničenie pre počet hrán v T^+ . Existuje veľa výsledkov v teórii matíc, ktoré odvodzujú horné ohraničenie indexu nezápornej matice zo súčtu jej prvkov.

Nasledujúci výsledok je grafovo-teoretickým preformulovaním Friedlandovho výsledku [Fr.85]. Poznamenávame, že v množine prirodzených čísel platí že pre každé číslo e existuje jediné k a jediné l tak, že $e = k(k - 1) + l$, $0 \leq l < 2k$.

Veta C (Friedland [Fr.85]). *Nech G je graf s e vrcholmi, nech $e = k(k-1) + l$, kde $0 \leq l < 2k$. Potom*

$$\lambda(G) \leq \frac{k-1 + \sqrt{(k-1)^2 + 2l}}{2}.$$

Dôkaz: [Fr.85], veta 9.

Veta 3.17. *Nech T je strom s 1-faktorom s $2m$ vrcholmi a s bipartíciou (R,C) . Nech k_1 koncových vrcholov patrí množine R a k_2 koncových vrcholov patrí množine C . Nech $e = \frac{1}{2}(m(m+1) - k_1(k_1-1) - k_2(k_2+1-1))$ a nech $e = k(k-1) + l$, $0 \leq l < 2k$. Potom*

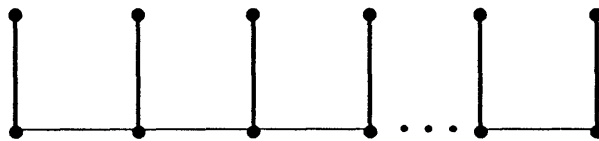
$$\frac{2}{k-1 + \sqrt{(k-1)^2 + 2l}} \leq \lambda^+(T)$$

Dôkaz: Označme $K = k - 1 + \sqrt{(k-1)^2 + 2l}$. Podľa vety 3.9 $|E(\mathbf{T}^+)| \leq e$ a teda podľa vety C $\lambda(\mathbf{T}^+) \leq K/2$. Pretože $\lambda^+(\mathbf{T}) = 1/\lambda(\mathbf{T}^+)$, dostávame $\lambda^+(\mathbf{T}) \geq 2/K$. ■

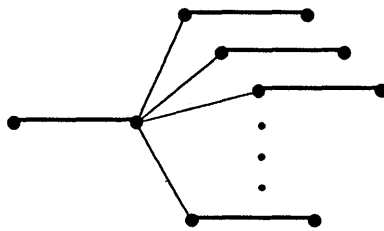
Definujme teraz $\delta_n = \max \lambda^+(\mathbf{T})$, kde maximum berieme cez množinu všetkých samoinverzných stromov na n vrchoch. Z vety 3.12. vyplýva, že ak $\mathbf{T}$ je strom na n vrchoch, potom $\lambda^+(\mathbf{T}) \leq \delta_n$. Pre samoinverzné stromy platí $\lambda^+(\mathbf{T}) = 1/\lambda(\mathbf{T})$ a problém určiť δ_n je ekvivalentný problému určiť $\min \lambda(\mathbf{T})$ na množine všetkých samoinverzných stromov na n vrchoch. Zodpovedajúci problém na množine všetkých stromov s n vrcholmi bol riešený dávnejšie nezávisle viacerými autormi, napr. Lovász a Pelikán [LoPe.73]. Metóda, ktorú použili títo autori, sa ukázala vhodná aj na riešenie tohto problému:

Lema 3.18. Označme ako $\overline{\mathbf{S}}_n$ a $\overline{\mathbf{P}}_n$ samoinverzné grafy podľa obr.13. Ak $\overline{\mathbf{T}}$ je ľubovoľný samoinverzný strom na n vrchoch, potom platí:

$$\lambda(\overline{\mathbf{P}}_n) \leq \lambda(\overline{\mathbf{T}}) \leq \lambda(\overline{\mathbf{S}}_n)$$



$\overline{\mathbf{P}}_n$



$\overline{\mathbf{S}}_n$

Obr. 13

Dôkaz: Použijeme označenia a niektoré lemy z článku [LoPe 73]. Označme ako $f_G(\lambda)$ charakteristický polynóm grafu G . Nech T_1 a T_2 sú ľubovoľné stromy. Budeme značiť, že $T_1 < T_2$ ak $f_{T_1}(\lambda) \geq f_{T_2}(\lambda)$ pre každé $\lambda \geq \lambda(T_2)$.

Uvedieme základné vlastnosti relácie $<$:

$$(i) T_1 < T_2 \Rightarrow \lambda(T_1) \leq \lambda(T_2)$$

$$(ii) T_1 \leq T_2 \Rightarrow T_1 < T_2$$

(iii) Nech $e = (u_1, v_1)$ a $e' = (u_2, v_2)$ sú hrany v T_1 a T_2 . Potom

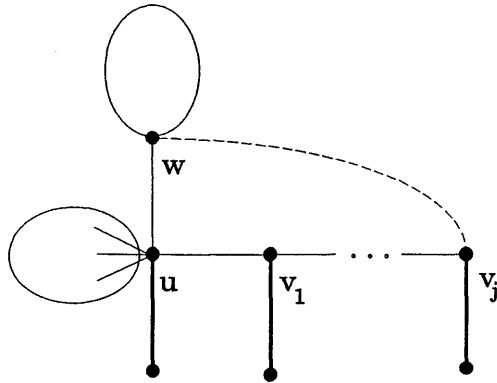
$$(T_2 \setminus (u_2, v_2)) < (T_1 \setminus (u_1, v_1))$$

$$a \quad (T_1 \setminus \{u_1, v_1\}) > (T_2 \setminus \{u_2, v_2\})$$

implikuje $T_2 < T_1$ ([LoPe 73], lemy 2 a 3).

Nech $\bar{T}$ je ľubovoľný samoinverzný strom s $n = 2m$ vrcholmi a nech T je priradený strom s m vrcholmi, ktorý dostaneme z $\bar{T}$ odstránením jeho koncových vrcholov. Najskôr dokážeme, že $\bar{P}_n < \bar{T}$.

Musíme dokázať, že ak $\bar{T}$ je samoinverzný strom s n vrcholmi s vlastnosťou, že neexistuje iný samoinverzný strom $\bar{T}^*$ s rovnakým počtom vrcholov a $\bar{T}^* < \bar{T}$, potom $\bar{T} = \bar{P}_n$. Predpokladajme, že existuje vrchol u stupňa aspoň 3 v priradenom strome T a nech aspoň jeden komponent grafu $T \setminus u$ je cesta. Označme v_1 a v_2 koncové vrcholy tejto cesty, v_1 nech je susedný s u v T . Nech (w, u) je iná hrana incidentná s u a položme $\bar{T}^* = (\bar{T} \setminus (w, u_2) \cup (w, v_2))$ (obr.14). Je ľahké overiť, že $\bar{T}^*$ je samoinverzný strom, navyše T^* má viac koncových vrcholov ako T a teda $\bar{T}^* \equiv \bar{T}$. Ďalej $\bar{T} \setminus (w, u) \equiv \bar{T}^* \setminus (w, u_2)$ a $\bar{T} \setminus \{u, v\}$ je izomorfný podgrafu stromu $\bar{T}^* \setminus \{u, v_2\}$. Preto podľa (i) a (ii) dostaneme, že $\bar{T}^* < \bar{T}$ a to je spor.



Obr. 14

Nerovnosť $\overline{\mathbf{T}} < \overline{\mathbf{S}}_n$ dokážeme indukciou vzhľadom na n . Prvý zaujímavý prípad je pre $n = 8$ - v tomto prípade existujú práve dva neizomorfné samoinverzné stromy a to $\overline{\mathbf{P}}_8$ a $\overline{\mathbf{S}}_8$ a platí $\overline{\mathbf{P}}_8 < \overline{\mathbf{S}}_8$. Teraz nech $n \geq 10$. Nech $\mathbf{u}$ je koncový vrchol priradeného stromu $\mathbf{T}$ a nech $(\mathbf{w}, \mathbf{u})$ je hrana v $\mathbf{T}$. Potom $\overline{\mathbf{T}} \setminus (\mathbf{w}, \mathbf{u}) \cong \mathbf{T}_1 \cup \mathbf{K}_2$, kde $\mathbf{T}_1$ je samoinverzný strom s $n - 2$ vrcholmi. Nech $e = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je nejaká hrana hviezdy priradenej ku grafu $\overline{\mathbf{S}}_n$. Potom $\overline{\mathbf{S}}_n \setminus e \cong \overline{\mathbf{S}}_{n-2} \cup \mathbf{K}_2$. Podľa indukčného predpokladu $\overline{\mathbf{T}} < \overline{\mathbf{S}}_{n-2}$ a teda $f_{\overline{\mathbf{T}}_1}(\lambda) \geq f_{\overline{\mathbf{S}}_{n-2}}(\lambda)$ platí pre každé $\lambda \geq \lambda(\overline{\mathbf{S}}_{n-2})$. Charakteristický polynóm grafu $\overline{\mathbf{T}}_1 \cup \mathbf{K}_2$ je rovný $(\lambda^2 - 1) \cdot f_{\overline{\mathbf{T}}_1}(\lambda)$ a pre $\overline{\mathbf{S}}_{n-2} \cup \mathbf{K}_2$ je rovný $(\lambda^2 - 1) \cdot f_{\overline{\mathbf{S}}_{n-2}}(\lambda)$. Keďže $\lambda(\mathbf{G}) \geq 1$ pre ľubovoľný graf $\mathbf{G}$, ktorý má aspoň jednu hranu, $f_{\overline{\mathbf{T}}_1}(\lambda) \geq f_{\overline{\mathbf{S}}_{n-2}}(\lambda)$ pre každé $\lambda \geq \lambda(\overline{\mathbf{S}}_{n-2})$ implikuje $(\lambda^2 - 1) \cdot f_{\overline{\mathbf{T}}_1}(\lambda) \geq (\lambda^2 - 1) \cdot f_{\overline{\mathbf{S}}_{n-2}}(\lambda)$ pre každé $\lambda \geq \lambda(\overline{\mathbf{S}}_{n-2})$ a teda $\overline{\mathbf{T}} \setminus (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cong \overline{\mathbf{T}}_1 \cup \mathbf{K}_2 < \overline{\mathbf{S}}_{n-2} \cup \mathbf{K}_2 \cong \overline{\mathbf{S}}_n \setminus e$. Z druhej strany $\overline{\mathbf{S}}_n \setminus \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \overline{\mathbf{T}} \setminus \{\mathbf{w}, \mathbf{u}\}$ a platí $(\overline{\mathbf{S}}_n \setminus \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}) < (\overline{\mathbf{T}} \setminus \{\mathbf{w}, \mathbf{u}\})$ podľa (ii). Teda $\overline{\mathbf{T}} < \overline{\mathbf{S}}_n$ podľa (iii). Dokázali sme, že $\overline{\mathbf{P}}_n < \overline{\mathbf{T}} < \overline{\mathbf{S}}_n$. Podľa (i) toto implikuje $\lambda(\overline{\mathbf{P}}_n) \leq \lambda(\overline{\mathbf{T}}) \leq \lambda(\overline{\mathbf{S}}_n)$. ■

Z lemy 3.18 vyplýva nasledovná veta:

Veta 3.19. *Nech T je strom s n vrcholmi. Potom*

$$\lambda^+(T) \leq \lambda^+(\overline{P_n})$$

Veta 3.19 rieši problém určenia stromu s n vrcholmi a 1-faktorom, ktorý má maximálny duálny index. Ako už bolo uvedené na začiatku tejto kapitoly, problém určiť strom s minimálnym duálnym indexom bol vyriešený Godsilom (minimálny duálny index má cesta P_n). Priamym dôsledkom vety 3.16 je, že strom s druhým najmenším duálnym indexom je Z_n .

Veta 3.20. *Nech T je strom s n vrcholmi a s 1-faktorom, ktorý nie je izomorfný s P_n . Potom*

$$\lambda^+(Z_n) \leq \lambda^+(T)$$

Ak zosumarizujeme uvedené výsledky dostaneme:

Nech T je strom z vety 3.20, potom

$$\lambda^+(P_n) < \lambda^+(Z_n) \leq \lambda^+(T) \leq \lambda^+(\overline{P_n}).$$

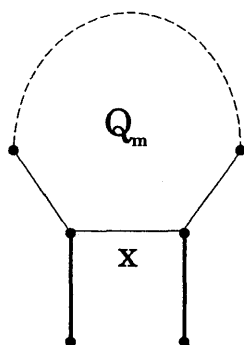
IV. Invertovanie grafov s jediným 1-faktorom

V tejto kapitole sa budeme zaoberať prevažne triedou **P-grafov** - triedou bigrafov s jediným 1-faktorom, ktoré sú po kontrakcii po hranách 1-faktora bipartitné. Na začiatku však ukážeme, že trieda silne invertovateľných grafov sa dá rozšíriť. Skonstruujeme graf s jediným 1-faktorom, ktorý nie je po kontrakcii po hranách 1-faktora bipartitný a je silne invertovateľný. Potom zadefinujeme binárnu operáciu na grafoch o ktorej ukážeme, že zachováva silnú invertovateľnosť.

Godsil v [Go 85] dokázal vetu, ktorá hovorí, že ku každému P-grafu G môžeme zostrojiť inverzný graf G^+ : vypočítame inverznú maticu k bipartitnej matici tohoto grafu a zameníme záporné hodnoty za kladné - t.j. každý P-graf je silne invertovateľný. Takto dostaneme bipartitnú maticu silne inverzného grafu G^+ ku grafu G . V druhej kapitole sme uviedli konštrukciu grafu G^{-1} . V tejto kapitole modifikujeme túto konštrukciu pre P-grafy tak, aby výsledkom bol inverzný graf G^+ ku grafu G (teda spôsob ako získať inverzný graf k P-grafu bez počítania inverznej matice). Túto konštrukciu potom použijeme na dôkaz charakterizácie inverzných grafov k stromom.

V triede stromov s 1-faktorom má cesta zvláštny význam - duálny index cesty má najmenšiu hodnotu. V tejto kapitole je uvedená konštrukcia špeciálneho grafu L_m , ktorý má takýto význam pre triedu P-grafov.

Graf s 1-faktorom a $n = 2m$ vrcholmi budeme označovať Q_m , ak ho môžeme dostať z kružnice s $2(m - 1)$ vrcholmi tak, že na jej dva susedné vrcholy zavesíme po jednom novom koncovom vrchole (obr. 15).



Obr. 15

Lema 4.1. *Graf Q_m je silne invertovateľný.*

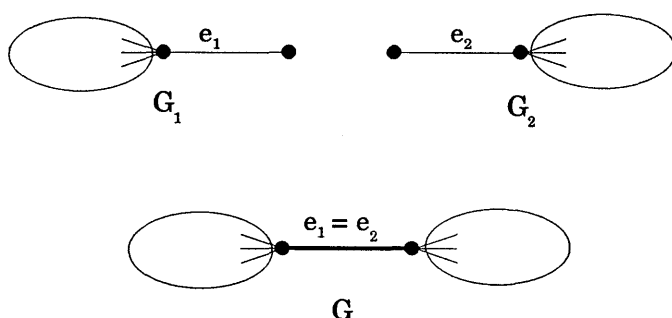
Dôkaz. Zrejme pre každé m je graf Q_m bigraf s jediným 1-faktorom M a ak m je párne tak Q_m/M je bigraf a teda graf Q_m je silne invertovateľný. Dá sa ľahko overiť, že bipartitná matica grafu Q_m v dolnom trojuholníkovom tvare $B(Q_m) = (b_{ij})$ sa líši od bipartitnej matice cesty P_{2m} v dolnom trojuholníkovom tvare len v prvku b_{m1} , pre graf Q_m je $b_{m1} = 1$. Ak m je nepárne potom matica $CB^{-1}(Q_m)C$, je nazáporná matica (dokonca $(0,1)$ -matica), pričom diagonálna $(0,1,-1)$ -matica C je totožná s maticou, ktorá transformuje maticu $B^{-1}(P_{2m})$ na nezápornú maticu. ■

Veta 4.2. *Nech G je P-graf. Silne inverzný graf G^+ ku grafu G dostaneme tak, že ku G pridáme nové hrany nasledovne: každé dva vrcholy u a v spojíme toľkými novými hranami, koľko je alternujúcich ciest dĺžky aspoň 3 medzi u a v v grafe G .*

Dôkaz: V dôkaze využijeme vetu 2.4. Keďže G je P-graf, potom ak medzi u a v je nejaká párna (nepárna) alternujúca cesta, tak všetky alternujúce cesty medzi u a v musia byť párne (nepárne). Keďže podľa [Go85] každý P-graf je silne invertovateľný, silne inverzný graf G^+

dostaneme z G^{-1} zámenou každej záporne ohodnotenej hrany za kladne ohodnotenú hranu, resp. za príslušný počet hrán (ohodnotených 1). ■

Vetu 4.1. využijeme na dôkaz charakterizácie inverzných grafov k stromom. Najskôr však zavedieme nasledovnú operáciu "**prekrývania hrán**" na grafoch. Nech G_1 a G_2 sú dva grafy, ktoré majú aspoň jeden koncový vrchol. Hranu incidentnú s koncovým vrcholom budeme nazývať **koncová hrana**. Nech teda G_1 má koncovú hranu e_1 a G_2 nech má koncovú hranu e_2 . Hovoríme, že graf G sme získali operáciou "prekrývania hrán" z grafov G_1 a G_2 ak hrany e_1 a e_2 stotožníme (obr.16) a označme túto novú hranu e . Je zrejmé, že hrana e je v grafe G mostom.



Obr. 16

Nasledovné dve vety využijeme v ďalšom:

Veta 4.3. *Nech G_1 a G_2 sú grafy s jediným 1-faktorom a nech sú silne invertovateľné. Nech G je graf, ktorý dostaneme operáciou prekrývania hrán z grafov G_1 a G_2 a nech $B(G)$ je jeho bipartitná matica. Potom matica $B(G)^{-1}$ je diagonálne podobná nezápornej celočíselnej $B^+(G)$ matici, t.j. graf G je silne invertovateľný:*

$$B^+(G) = B(G^+)$$

Dôkaz: Keďže $\mathbf{G}$ dostaneme operáciou prekryvania hrán incidujúcich s koncovými vrcholmi z grafov $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$ môžeme maticu $\mathbf{B}(\mathbf{G})$ napísať v tvare:

$$\mathbf{B}(\mathbf{G}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}'(\mathbf{G}_1) & 0 & 0 \\ \mathbf{b}_1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2^T & \mathbf{B}'(\mathbf{G}_2) \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{B}(\mathbf{G}_1) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}'(\mathbf{G}_1) & 0 \\ \mathbf{b}_1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B}(\mathbf{G}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{b}_2^T & \mathbf{B}'(\mathbf{G}_2) \end{pmatrix}$, t.j. predpokladáme, že bipartitné matice grafov $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$ sú v dolnom trojuholníkovom tvare (to sa dá vždy zariadiť). Vypočítame $\mathbf{B}(\mathbf{G})^{-1}$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{G})^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{B}'(\mathbf{G}_1)} & 0 & 0 \\ \overline{\mathbf{b}_1} & 1 & 0 \\ \mathbf{Q} & \overline{\mathbf{b}_2^T} & \mathbf{B}(\mathbf{G}_2) \end{pmatrix},$$

$$\text{kde } \mathbf{B}(\mathbf{G}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{B}'(\mathbf{G}_1)} & 0 \\ \overline{\mathbf{b}_1} & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}(\mathbf{G}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \overline{\mathbf{b}_2^T} & \mathbf{B}'(\mathbf{G}_2) \end{pmatrix}.$$

Lahko sa presvedčíme že $\mathbf{Q}$ je matica, ktorá má niektoré riadky nulové a v niektorých násobky vektora $\overline{\mathbf{b}_1}$ (vyplýva to z invertovania matic). Nech $\mathbf{D}_1$ resp. $\mathbf{D}_2$ je diagonálna matica, ktorá transformuje $\mathbf{B}(\mathbf{G}_1)^{-1}$, resp. $\mathbf{B}(\mathbf{G}_2)^{-1}$ na nezápornú celočíselnú maticu. Nech matica $\mathbf{D}_2$ má prvú diagonálnu hodnotu 1 a nech matica $\mathbf{D}_1$ má poslednú diagonálnu hodnotu

1. To sa dá vždy zariadiť, pretože ak matica $\mathbf{DB}^{-1}\mathbf{D}$ je nezáporná celočíselná, kde $\mathbf{D}$ je diagonálna matica, tak aj $-\mathbf{DB}^{-1}(-\mathbf{D})$ je taká.

Položme

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{D}_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mathbf{D}_2} \end{pmatrix}$$

$$\text{kde } \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{D}_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{\mathbf{D}_2} \end{pmatrix}$$

Ukážeme, že $\mathbf{DB}(\mathbf{G})^{-1}\mathbf{D}$ je nezáporná celočíselná matica. Podľa predpokladu podmatice

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{B}'(\mathbf{G}_1)} & 0 \\ \overline{\mathbf{b}_1} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \overline{\mathbf{b}_2^T} & \overline{\mathbf{B}'(\mathbf{G}_2)} \end{pmatrix}.$$

budú po transformovaní nezáporné celočíselné. Ak v matici $\mathbf{Q}$ je v nejakom riadku $c\overline{\mathbf{b}_1}$ resp. $-c\mathbf{b}_1$, kde $c \in N$ tak z vlastnosti matice $\mathbf{D}_2$ vyplýva, že v príslušnom riadku matice $\mathbf{D}$ musí byť diagonálna hodnota s rovnakým, resp. opačným znamienkom ako je prvá hodnota v podmatici $\mathbf{D}_2$. To znamená, že vynásobením matice $\mathbf{B}(\mathbf{G})^{-1}$ zľava maticou $\mathbf{D}$ budú v matici $\mathbf{Q}$ všetky násobky vektora $\overline{\mathbf{b}_1}$ s rovnakým znamienkom ako vektor $\overline{\mathbf{b}_1}$. Z toho vyplýva, že $\mathbf{DB}(\mathbf{G})^{-1}\mathbf{D}$ je nezáporná celočíselná matica. ■

Poznámka 4.4. Graf G z vety 4.3 je silne invertovateľný. Z grafu G a nejakého silne invertovateľného grafu G_3 môžeme opäť operáciou prekrývania hrán zostrojiť graf, ktorý je silne invertovateľný. Vetu 4.3

môžeme teda prirodzene rozšíriť na konečný počet grafov $G_1, G_2, \dots, G_n$, ktoré sú silne invertovateľné.

Popíšeme teraz grafovú konštrukciu inverzného grafu G , ktorý dostaneme operáciou prekryvania hrán grafov G_1 a G_2 . Označme si $N(x)$ okolie vrchola x , t.j. množinu všetkých vrcholov, ktoré susedia s vrcholom x .

Nech G_1 a G_2 sú silne invertovateľné bipartitné grafy s jediným 1-faktorom M_1 a M_2 a nech G_1^+ a G_2^+ sú ich inverzné grafy. Nech G_1 resp. G_2 má $2n$, resp. $2m$ vrcholov označených $v_1, \dots, v_n, v'_1, \dots, v'_n$, resp. $u_1, \dots, u_m, u'_1, \dots, u'_m$ tak, aby $(v_i, v'_i) \in M_1$ resp. $(u_j, u'_j) \in M_2$ a nech hrany (v_n, v'_n) a (u_1, u'_1) sú koncové.

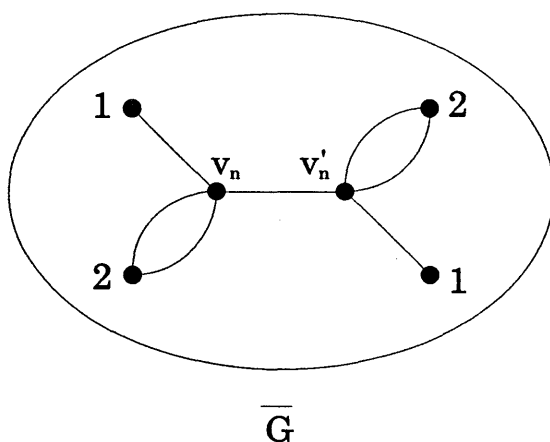
Veta 4.5. Nech G je graf, ktorý dostaneme zo silne invertovateľných grafov G_1 a G_2 operáciou prekryvania hrán (v_n, v'_n) a (u_1, u'_1) . Silne inverzný graf G^+ ku G dostaneme nasledovne:

- (i) z grafov G_1^+ a G_2^+ vytvoríme operáciou prekryvania hrán (v_n, v'_n) a (u_1, u'_1) nový graf $\bar{G}$ (vrcholy v_n a u_1, v'_n a u'_1 považujeme v $\bar{G}$ za totožné)
- (ii) Položme v grafe $\bar{G}$

$$V = N(v_n) - \{v'_n\}$$

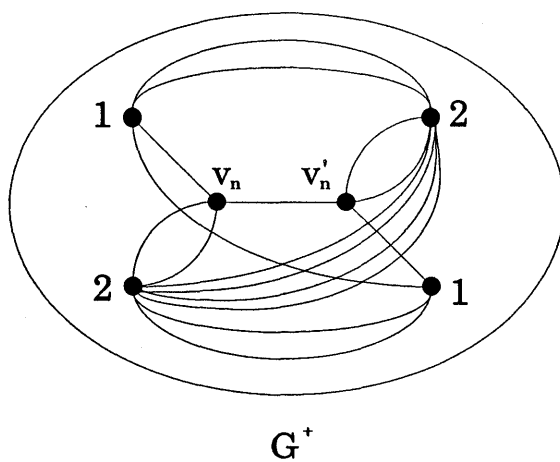
$$U = N(v'_n) - \{v_n\}$$

Každému vrcholu $v \in V$ resp. $u \in U$ priradíme číslo s , resp. číslo r , ktoré sa rovná počtu hrán (v, v'_n) , resp. (v'_n, u) (obr. 17).



Obr. 17

Každú dvojicu (u, v) , kde $v \in V$, $u \in U$ spojíme novými rs hranami (obr.18).



Obr. 18

Dôkaz: Ukážeme, že graf G^+ skonštruovaný podľa znenia vety je inverzným grafom ku G . Podľa dôkazu predchádzajúcej vety

$$\mathbf{B}(G)^+ = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{B}(G_1)} & 0 & 0 \\ \overline{\mathbf{b}_1} & 1 & 0 \\ \mathbf{Q}^+ & \overline{\mathbf{b}_2^T} & \mathbf{B}(G_2) \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{Q}^+$ je matica s vlastnosťou, že ak na i -tom mieste vo vektore $\overline{\mathbf{b}}_2^T$ je prvok k , tak na i -tom riadku matice $\mathbf{Q}^+$ je k -násobok vektora $\overline{\mathbf{b}}_1$. Nech $\overline{\mathbf{G}}$ dostaneme operáciou prekryvania hrán $(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_n)$ a $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}'_1)$ z grafov $\mathbf{G}_1^+$ a $\mathbf{G}_2^+$. Potom bipartitná matica grafu $\overline{\mathbf{G}}$ je

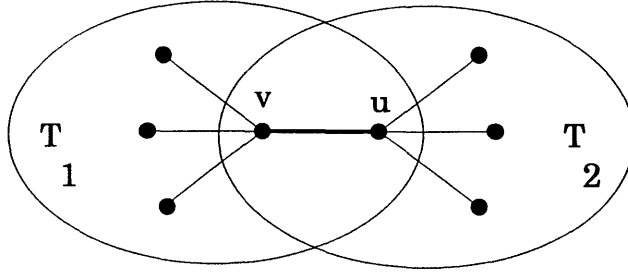
$$\mathbf{B}(\overline{\mathbf{G}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}(\mathbf{G}_1) & 0 & 0 \\ \mathbf{b}_1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2^T & \mathbf{B}'(\mathbf{G}_2) \end{pmatrix},$$

Vidíme, že z grafu $\overline{\mathbf{G}}$ dostaneme graf $\mathbf{G}^+$ tak, že do $\overline{\mathbf{G}}$ pridáme hrany odpovedajúce matici $\mathbf{Q}^+$. Z vlastnosti matice $\mathbf{Q}^+$ vyplýva, že ak vrchol $\mathbf{u}_i$ susedí s vrcholom $\mathbf{u}'_1$ v $\overline{\mathbf{G}}$ cez r hrán, tak v grafe $\mathbf{G}^+$ bude $\mathbf{u}_i$ susediť s každým vrcholom $\mathbf{v}'_j$, ktorý susedí s $\mathbf{v}_n$ práve r s hranami, kde s je počet hrán $(\mathbf{v}'_j, \mathbf{v}_n)$. Teda v $\overline{\mathbf{G}}$ spojíme každú dvojicu vrcholov $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, kde $\mathbf{v} \in V$ a $\mathbf{u} \in U$ novými r s hranami. ■

Veta 4.5. (Charakterizácia inverzných grafov k stromom). Nech $\mathbf{G}$ je bipartitný graf s jediným 1-faktorom M a nech neobsahuje násobné hrany. Graf $\mathbf{G}$ je inverzným grafom k stromu $\mathbf{T}$ práve vtedy, keď pre každú hranu $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in M$ platí:

- (i) indukovaný podgraf H na vrcholovej množine $U \cup V$, kde $U = N(\mathbf{u}) \setminus \{\mathbf{v}\}$ a $V = N(\mathbf{v}) \setminus \{\mathbf{u}\}$ je kompletý bipartitný graf s bipartíciou (U, V)
- (ii) v grafe, ktorý dostaneme odstránením všetkých hrán grafu $\mathbf{G}$, ktoré patria podgrafu H je hrana $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ mostom
- (iii) ak $st(\mathbf{u})=1$ alebo $st(\mathbf{v})=1$ pre všetky $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in H$, tak $\mathbf{G}$ je strom.

Dôkaz: Nutná podmienka. Každý strom T s 1-faktorom môžeme dostať operáciou prekryvania hrán z dvoch stromov s perfektným párením T_1 a T_2 . Označme si (u,v) -hranu patriacu do párenia s vlastnosťou, že u je koncový vrchol stromu T_1 a v je koncový vrchol stromu T_2 (obr.19).



Obr. 19

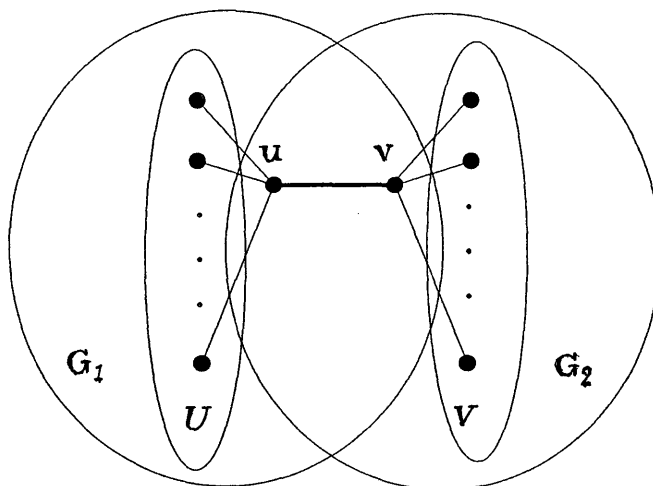
Podľa predchádzajúcej konštrukcie (veta 4.5) silne inverzný graf k stromu T zostrojíme tak, že vytvoríme grafy T_1 a T_2 a spojíme ich operáciou prekryvania hrán. Keďže matice $B(T_1)^+$ a $B(T_2)^+$ sú $(0,1)$ -matice, všetkým vrcholom v množinách U a V z vety 4.5 priradíme hodnotu 1. Z toho vyplýva, že každý vrchol $x \in U$ spojíme novou hranou s každým vrcholom $y \in V$. Dostávame, že podgraf indukovaný vrcholovou množinou $U \cup V$ je kompletný bipartitný graf s bipartíciou (U,V) . Zrejme, ak z G odstránime všetky hrany patriace podgrafu H , tak hrana (u,v) bude mostom.

Postačujúca podmienka: Nech sú splnené predpoklady vety. Indukciou dokážeme, že G je graf inverzný k nejakému stromu.

Nech $m=|M| \geq 2$.

1°. Pre $m = 2$ veta triviálne platí, pretože jediný graf spĺňajúci podmienka vety so štyrmi vrcholmi je cesta P_4 a tá je samoinverzná.

2°. Predpokladajme, že veta platí pre všetky grafy, pre ktoré $|M| < m$. Nech $(u,v) \in M$ a nech $st(u) \geq 2$ a $st(v) \geq 2$ (obr. 20).



Obr. 20

Ak taká hrana v grafe G neexistuje t.j. ak pre každú hranu $(u,v) \in M$ je $\deg(u) = 1$ alebo $\deg(v) = 1$, potom podľa [Go85] je G samoinverzný strom a veta platí.

Podľa predpokladu (ii) indukovaný podgraf H na vrcholovej množine $U \cup V$ je kompletný bipartitný graf a odstránením všetkých hrán z podgrafu H bude hrana (u,v) mostom. Označme graf, ktorý vznikne odstránením hrán z podgrafu H ako $\bar{G}$. Odstránením hrán z podgrafu H "nepokazíme" vlastnosti podgrafov G_1 a G_2 (obr.20), t.j. podgrafy G_1 a G_2 budú spĺňať predpoklady vety. Podľa indukčného predpokladu sú G_1 a G_2 silne inverzné grafy k stromom T_1 a T_2 . Z vety 4.5 vyplýva, že G je inverzný graf k stromu T , ktorý dostaneme operáciou prekryvania hrán zo stromov T_1 a T_2 . ■

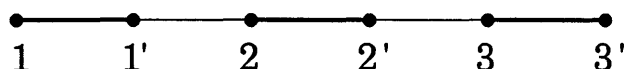
Poznámka 4.7. Veta 4.5 nám dáva návod ako spätne skonštruovať strom T z grafu G , o ktorom vieme, že je silne inverzným grafom k stromu T . Graf G môžeme rozkladať na menšie grafy, (ktoré sú opäť inverzné grafy k stromom s menším počtom vrcholov) až kým sa nedostaneme k

samoinverzným stromom. Spätným skladaním stromov dostaneme pôvodný strom.

Konštrukcia grafu L_m .

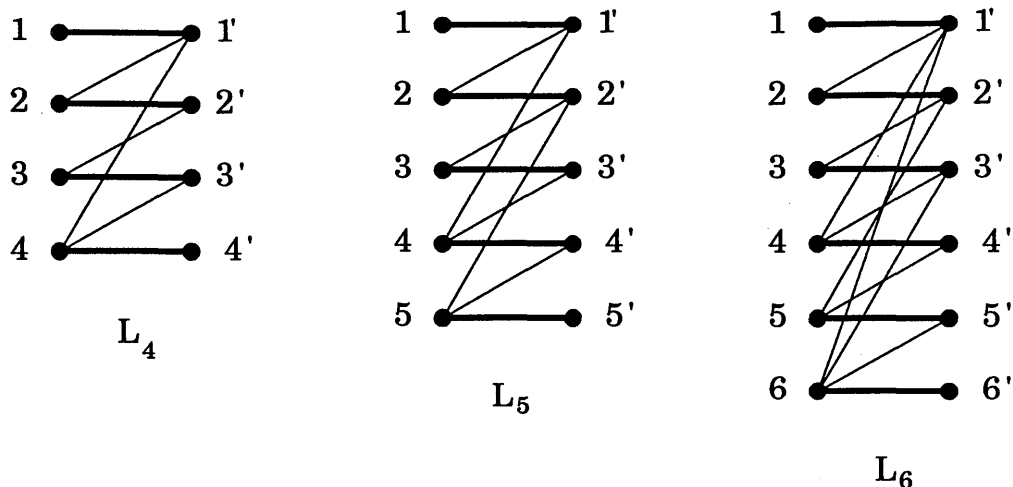
Nech G je bipartitný graf s jediným 1-faktorom M a s vlastnosťou, že G/M je bipartitný a $|V(G)| = 2m$. Náš cieľ je skonštruovať graf L_m s vlastnosťou $G^+ \subset L_m^+$. Graf L_m budeme konštruovať rekurentne.

1°. Graf L_1 , L_2 , resp. L_3 je izomorfný s cestou P_2 , P_4 , resp. P_6 a vrcholy P_6 označíme postupne $1, 1', 2, 2', 3, 3'$.



2°. Nech graf $L_{m-2} = L_{2(n-1)}$ máme skonštruovaný a nech vrcholy grafu $L_{2(n-1)}$ sú postupne označené $1, 1', 2, 2', \dots, (n-1), (n-1)'$. Ku grafu $L_{2(n-1)}$

pridáme dva nové vrcholy n a n' nasledovne: vrchol n spojíme s vrcholmi n' a $(n-1)'$ a vrcholmi $(n-3-2i)''$, kde $i = 0, 1, 2, \dots, [\frac{n-3}{2}]$.



Obr. 21

Na obr.21 je graf L_6 skonštruovaný z grafu L_5 a graf L_5 je skonštruovaný z grafu L_4 .

Poznámka 4.8. Konštrukciu grafu L_m môžeme popísať aj pomocou bipartitných matíc:

1°.

$$\mathbf{B}(L_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2°.

$$\mathbf{B}(L_m) = \begin{pmatrix} & & & & & 0 \\ & & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & 0 & \\ (m-1) \bmod 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámka 4.9. Je známe, že graf je bipartitný s jediným 1-faktorom práve vtedy, ak jeho vrcholy možno tak očíslovať, že jeho bipartitná matica je dolná resp. horná trojuholníková matica, ktorá má na diagonále samé jednotky. Z konštrukcie bipartitnej matice grafu L_m vyplýva, že graf L_m je bipartitný s jediným 1-faktorom. Ďalej graf L_m konštruujeme tak, že ak medzi dvoma vrcholmi u a v je nejaká párna (resp. nepárna) alternujúca cesta, tak potom všetky alternujúce cesty medzi vrcholmi u a v sú párne (resp. nepárne) a je ich maximálny možný počet. To ale znamená, že každá kružnica obsahujúca vrcholy u a v je po stiahnutí po hranách párenia párna. Teda graf L_m/M je bipartitný.

Poznámka 4.10. Z konštrukcie grafu L_m vyplýva, že má nasledovné vlastnosti:

- (i) ak pre vrcholy i a j' platí $(i + j) \bmod 2 = 0$, potom vrcholy i a j' sú spojené párnymi alternujúcimi cestami
- (ii) ak $(i + j) \bmod 2 = 1$, tak vrcholy i a j' sú spojené nepárnymi alternujúcimi cestami
- (iii) počet párných resp. nepárných alternujúcich ciest medzi vrcholmi i a j' je $|i - j| - 1$, ak $|i - j| > 1$ a je 1, ak $|i - j| \leq 1$.

Veta 4.11 Nech G je bigraf s jediným 1-faktorom M s $2n$ vrcholmi a nech graf G/M je bipartitný. Potom

$$G^+ \subset L_m^+.$$

Dôkaz: Využijeme vetu 2.4 o konštrukcii inverzného grafu. Nech $B(G) = (g_{ij})$ a $B(L_m) = (b_{ij})$ sú bipartitné matice ku grafom G a L_m v dolnom trojuholníkovom tvare s jednotkami na diagonále (podľa [Go 85])

takéto matice vždy existujú). Nech vrcholy grafu G zodpovedajúce riadkom matice $B(G)$ sú označené $1, \dots, n$ a vrcholy zodpovedajúce stĺpcom $1', \dots, n'$. Podľa vety 2.4 a vety 1.9. pre prvky matice $B^+(G) = (g_{ij}^+)$ platí :

$$g_{ij}^+ = |l((i, j'))| = |p_+(i, j') - p_-(i, j')|$$

kde $p_+(i, j')$ resp. $p_-(i, j')$ je počet párnych resp. nepárnych alternujúcich ciest medzi vrcholmi i a j' .

Keďže graf G má vlastnosť, že G/M je bigraf, tak všetky alternujúce cesty medzi vrcholmi i a j' musia byť buď len párne alebo nepárne. Keďže matica $B(G)$ je v dolnom trojuholníkovom tvare a keďže G/M je bigraf, tak počet týchto ciest nemôže byť väčší ako $|i - j| - 1$ pre $|i - j| > 1$ a nie je väčší ako jedna pre $|i - j| \leq 1$. Dokonca pre $|i - j| > 1$ platí, že ak $(i + j) \bmod 2 = 0$ resp. $(i + j) \bmod 2 = 1$ a i a j' sú spojené párnymi, resp. nepárnymi alternujúcimi cestami, tak počet týchto ciest je ostro menší ako $|i - j| - 1$. Podľa predchádzajúceho pre $|i - j| > 1$ platí:

$$g_{ij}^+ = |l((i, j'))| = |p_{\pm}(i, j')| \leq b_{ij}^+$$

a pre $|i - j| \leq 1$

$$g_{ij}^+ = |l((i, j'))| = |p_{\pm}(i, j')| \leq 1 = b_{ij}^+$$

kde $p_{\pm}(i, j')$ značí buď $p_+(i, j')$ alebo $p_-(i, j')$ podľa toho či medzi i a j' sú párne alebo nepárne alternujúce cesty. Takto sme dostali pre každé $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ nerovnosť $g_{ij}^+ \leq b_{ij}^+$ a teda $B(G^+) \leq B(L_m^+)$. ■

Dôsledok 4.12. *Nech G je bipartitný graf s jediným 1-faktorom M na $2n$ vrcholech a nech graf G/M je bipartitný. Potom platí*

$$\lambda^+(L_m) \leq \lambda^+(G).$$

Dôkaz: Keďže podľa vety 4.10 $\mathbf{G}^+ \subset \mathbf{L}_m^+$ tak $\lambda(\mathbf{G}^+) \leq \lambda(\mathbf{L}_m^+)$, a platí

$\lambda^+(\mathbf{G}) = \frac{1}{\lambda(\mathbf{G}^+)}$, $\lambda^+(\mathbf{L}_m) = \frac{1}{\lambda(\mathbf{L}_m^+)}$, potom dostávame nerovnosť

$$\lambda^+(\mathbf{L}_m) \leq \lambda^+(\mathbf{G}). \blacksquare$$

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

- [CDS80] D.M.Cvetković, M.Doob, H.Sachs, Spectra of Graphs, Academic Press, New York, 1980.
- [CDGT88] D.Cvetković, H.Doob, I.Gutman, A.Torgasev, Recent Results in the Theory of Graph Spectra, Anals of Discrete Mathematics 36, North-Holland, 1988.
- [CGuS78] D.M Cvetković, I.Gutman and S.K.Simić, On Self Pseudoinverse Graphs, Univ.Beograd, Publ.Elektrotechn, Fab., Ser.Math,Fiz, 602-633 (1978), 11-117.
- [CoSi57] L.Collatz, U.Sinogowitz, Spektren endlicher Grafen Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 21 (1957), 63-67.
- [Fi63] M. Fiedler, On Inverting Partitioned Matrices, Math. J. 13 (88)(1963), 574-586.
- [Fi77] M. Fiedler, Some Combinatorial Aspects in Matrix Theory and Numerical Algebra, In: Colloquia Mathematica Sociates János Balyai, 22. Numerical Methods, Kerzthely (Hungary), 1977.
- [Fi81] M. Fiedler, Speciální matice a jejich použití v numerické matematice, SNTL, Praha 1981.
- [Fr85] S.Friedland, The Maximal Eingenvale of 0 - 1 Matrices with Prescribed Number of Ones, Linear Algebra and its Aplications 64 (1985), 33-69.
- [Gan53] F.R.Gantmacher, Teoria matic, Gosudarstvennoje izdatel'stvo techniko-teoretičeskoj literatury, Moskva, 1953.

- [Go84] C.D.Godsil, Spectra of Trees, *Anal. of Discrete Mathematics*, 20 (1984), 151-159, North Holland.
- [Go85] C.D.Godsil, Inverses of Trees, *Combinatorica*, 5 (1985), 33-39.
- [GoMcK 78] C.D.Godsil and B.D. McKay, A New Graph Product and its Spectrum, *Bull.Austral.Math.soc.vol.18* (1978), 21-28.
- [GoGu 81] C.D.Godsil and I.Gutman, On the Theory of the Matching Polynomial, *J.Graph Theory* 5 (1981), 137-144.
- [Gu77] I.Gutman, Acyclic systems with extremal Hückel-electron energy, *Theoret. Chem. Acta*, 45, 1977, 79-87.
- [GuRo79] I.Gutman, D.H.Rouvray: An Approximate Topological Formula for the HOMO-LUMO Separation in Alternant Hydrocarbons, *Chemical-Physics Letters*, 62 (1979), 384-388.
- [Ha73] F.Harary, *Teoria grafov*, Mir, Moskva 1973.
- [HL72] O.J.Heilmann and E.H.Lieb, Theory of Monomer-Dimer Systems, *Commun.Math.Phys.* 25 (1972), 190-232.
- [HoYu86] Hong Yuan: The k -th Largest Eigenvalue of a Tree, *Linear Algebra and its Application*, 73 (1986), 151-155.
- [Hück31] E.Hückel, Quantentheoretische Beiträge zum Benzolproblem. *Z.Phys.* 70 (1931), 204-286.
- [Лих56] Л.М.Лихтенбаум Характеристические числа неособенного графа, *Ин: Труды 3-го Всес. Матем. Съезда, Том 1* (1956), 135-136.
- [LoPe73] L.Lovász, I.Pelikán, On the Eigenvalues of Trees, *Periodica Mathematica Hungarica* 3 (1-2), (1973), 175-182.

- [Pa94] S.Pavlíková, The Graph with Minimal Dual Index, *Mathematica Slovaca*, submitted.
- [PaKr90] S.Pavlíková, J.Krč-Jediný, On the Inverse and the Dual Index of a Tree, *Linear and Multilinear Algebra*, 28 (1990), 93-109.
- [PaKr94] S.Pavlíková, J.Krč-Jediný, On Invertable Graphs, *Mathematica Slovaca*, submitted.
- [Si87] S.K.Simić; Some Results on the Largest Eigenvalue of a Graph, *Ars Combinatorica*, 24A (1987), 211-219.
- [St 61] A.Streitmieser, *Molecular Orbital Theory for Organic Chemists*, Wiley, New York, (1961) chs.7,8.

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV

$A, A(G), A=(a_{ij})$	matica susednosti grafu G
$B, B(G), B=(b_{ij})$	bipartitná matica grafu G
$A^{-1}(G)$	inverzná matica
$\det(A)$	determinant matice
$s(A)$	signum matice
$A[\alpha \beta]$	podmatica matice A
G	neorientovaný graf
D	orientovaný graf, digraf
G^{-1}	inverzný graf
G^+	silne inverzný graf
G_b	bipartitný graf, bigraf
$G\{A\}$	graf priradený k matici
$V(G)$	vrcholová množina grafu G
$E(G)$	hranová množina grafu G
u, v, u_i, v_i, x	vrcholy
e	hrana
G^D	graf priradený k digrafu D
$G[U]$	indukovaný podgraf grafu G vrcholovou množinou U
$M, M(G)$	1-faktor grafu G
G/M	graf, ktorý dostaneme z G kontrakciou po hranách 1-faktora M
$\lambda_i(G)$	vlastné číslo grafu G
$\lambda(G)$	index grafu G
$\lambda^+(G)$	duálny index grafu G
P_n	cesta s n vrcholmi
(R, C)	bipartícia bigrafu
$l(u, v), l(e)$	ohodnotenie hrany $e = (u, v)$
$\deg(v)$	stupeň vrcholu v
$ R $	kardinalita množiny

G_+

faktor grafu vytvořený z hrán
ohodnotených kladnými čísly

 G_-

faktor grafu vytvořený z hrán
ohodnotených zápornými čísly