

VEDECKÁ RADA FAKULTY MATEMATIKY,
FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

RNDr. Beáta Stehlíková

Autoreferát dizertačnej práce

Matematická analýza modelov úrokových mier

na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia:
11-14-09 Aplikovaná matematika

Bratislava 2008

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre aplikovanej matematiky a štatistiky, Fakulty matematiky, fyziky a informatiky (FMFI) Univerzity Komenského (UK) v Bratislave.

Predkladateľ: RNDr. Beáta Stehlíková
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI - UK v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Školiteľ: Doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI - UK v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Oponenti:
Prof. RNDr. Magda Komorníková, CSc.
KMaDG, Stavebná fakulta STU, Radlinského 11, 813 68 Bratislava

Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
KAMŠ, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 28 Bratislava

Mgr. Alexandra Urbánová Csajková, PhD.
Národná banka Slovenska, Imricha Karvaša 1, 813 25 Bratislava

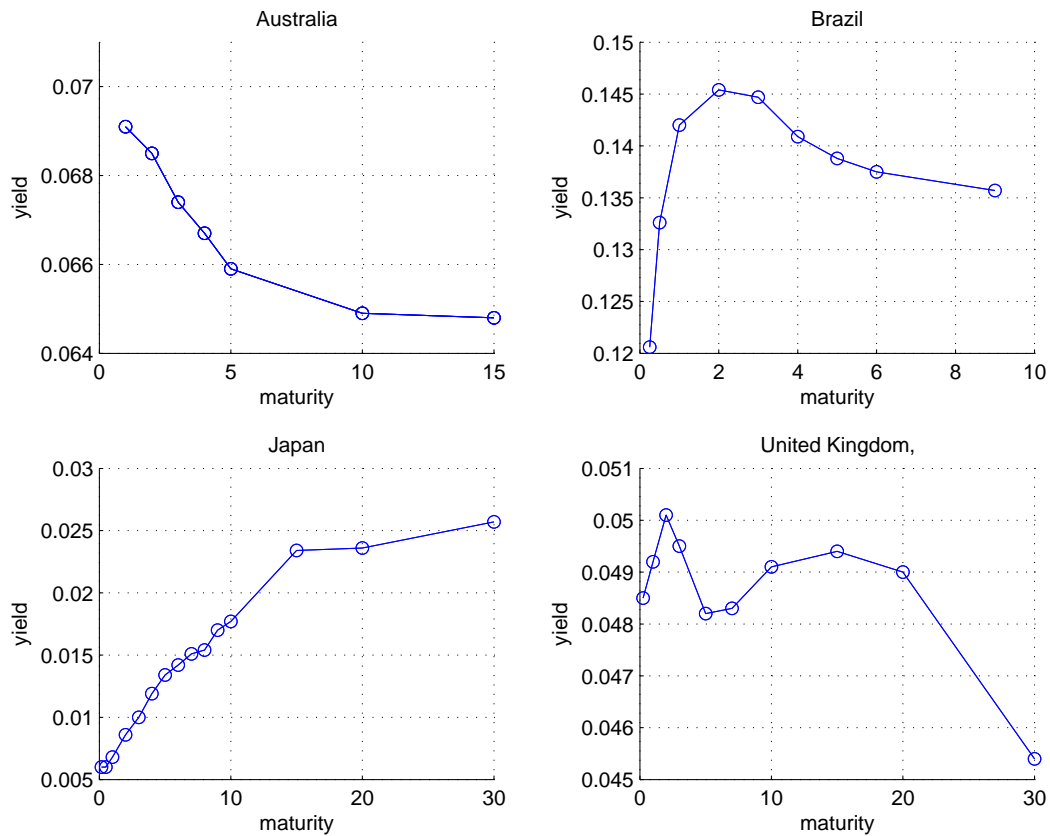
Autoreferát bol rozoslaný dňa:

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa: o pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia 11-14-09 Aplikovaná matematika vymenovanou podpredsedom spoločnej odborovej komisie dňa na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Podpredseda spoločnej odborovej komisie:
Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI - UK v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

1 Úvod

Modely úrokových mier popisujú časovú štruktúru úrokových mier, t.j. závislosť výnosu diskontného bezkupónového dlhopisu od času zostávajúceho do jeho splatnosti. Tieto modely sú často formulované pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice pre okamžitú úrokovú mieru. Pomocou konštrukcie bezrizikového portfólia a princípu vylúčenia arbitráže sa potom odvodí parciálna diferenciálna rovnica pre ceny dlhopisov (pozri napr. [4]). Ceny dlhopisov P potom určujú úrokové miery R vzťahom $P = e^{-R\tau}$, kde τ je čas do splatnosti dlhopisu. Ukážky reálnych výnosových kriviek a ich rôzne možné tvary môžeme vidieť na obr. 1.



Obr. 1: Výnosy štátnych dlhopisov: Austrália, Brazília, Japonsko, Spojené kráľovstvo (27. máj 2008).

V jednofaktorových modeloch je vývoj okamžitej úrokovej miery popísaný stochastickou diferenciálnou rovnicou tvaru

$$dr = \mu(t, r)dt + \sigma(r, t)dw, \quad (1)$$

kde w je Wienerov proces. Ak je čas t hodnota okamžitej úrokovej miery rovná r , tak cena $P(t, r)$ diskontného dlhopisu so splatnosťou v čase T je riešením parciálnej

diferenciálnej rovnice

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu(t, r) - \lambda(t, r)\sigma(t, r))\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2(t, r)}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad (2)$$

ktorá platí pre všetky $t \in (0, T)$, $r \in (0, \infty)$, s koncovou podmienkou $P(T, r) = 1$ pre všetky $r \in (0, \infty)$. Funkcia $\lambda(t, r)$, vystupujúca v rovnici (2) je tzv. trhová cena rizika. Príkladom jednofaktorových modelov je napríklad Vasıckov model a Cox-Ingersoll-Rossov (CIR) model, pre ktoré je pri vhodnej voľbe trhovej ceny rizika možné explicitne vyjadriť riešenie rovnice (2). Modely túto vlastnost vo všeobecnosti nemajú, príkladom je napríklad známe zovšeobecnenie uvedených modelov, ktoré navrhli Chan, Karolyi, Longstaff a Sanders.

V jednofaktorových modeloch je výnosová krivka určena okamžitou úrokovou mierou a parametrami modelu. To však znamená, že po ˇspecifikacii parametrov modelu je výnosová krivka jednoznačne určena hodnotou okamžitej úrokovej miery. Toto je zjednodušením reality, kde máme v rôznych ˇcasovych okamihoch moznost pozorovať rôzne výnosové krivky vychádzajúce z tej istej okamžitej úrokovej miery. Na zachytenie tohto javu sa pouzivaju dvojfaktorove modely, v ktorých sú dva zdroje neistoty. Vo formulácii modelu pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice to znamená prıtomnost dvoch Wienerovych procesov. Dlhopisy sa znovu oceňujú pomocou parcialnej diferenciálnej rovnice, ktorá sa odvodí podobne ako v prípade jednofaktorových modelov. Dlhopisy, a teda aj výnosové krivky, sú teraz funkciou oboch faktorov. V závislosti od hodnoty druhého faktora teda dostávame rôzne výnosové krivky aj pri rovnakej hodnote okamžitej úrokovej miery. Je viacero spôsobov ako do modelu zahrnut druhý faktor - stochastický charakter niektorého z parametrov jednofaktorového modelu, konštrukcia okamžitej úrokovej miery pomocou viacerých procesov alebo uvažovanie náhodnej premennej, ktorá súvisí s okamžitou úrokovou mierou a ovplyvňuje ju.

Podrobnejsie informácie o modelovaní úrokových mier a pouzivanych modeloch sa dajú najst napríklad v knihách [1], [4] a mnohých iných.

2 Ciele práce

- Približné analytické riešenie pre ceny dlhopisov v jednofaktorovom modeli - dôkaz jednoznačnosti riešenia rovnice pre ceny dlhopisov, odhad chyby približného analytického riešenia [2], vylepšenie aproximácie.
- Kalibrácia jednofaktorových modelov - otázka existencie Gaussovkych odhadov [5], použitie približného analytického riešenia z predchádzajúceho bodu pri kalibrácii.
- Spriemernenia v dvojfaktorových modeloch - výpočet pravdepodobnostných rozdelení a spriemernenı cien dlhopisov a úrokových mier vzhľadom na limitné rozdelenie skrytých faktorov, ich vlastnosti.

3 Hlavné výsledky dizertačnej práce

3.1 Približné analytické riešenie ceny dlhopisu v jednofaktorovom modeli

Zaoberáme sa približným analytickým riešením pre ceny dlhopisov, ktoré navrhli Choi a Wirjanto v článku [2]. Uvažujeme teda model pre okamžitú úrokovú mieru v rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere v tvare

$$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^\gamma dw.$$

Cena dlhopisu je v tomto prípade riešením parciálnej diferenciálnej rovnice

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 r^{2\gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (\alpha + \beta r) \frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0 \quad (3)$$

pre $r > 0$ a $\tau \in (0, T)$, so začiatočnou podmienkou $P(0, r) = 1$.

Veta 3.1. [2, Veta 2] Približné analytické riešenie P^{ap} je dané nasledovným vzťahom:

$$\begin{aligned} \ln P^{ap}(\tau, r) = & -rB + \frac{\alpha}{\beta}(\tau - B) + (r^{2\gamma} + q\tau) \frac{\sigma^2}{4\beta} \left[B^2 + \frac{2}{\beta}(\tau - B) \right] \\ & - q \frac{\sigma^2}{8\beta^2} \left[B^2(2\beta\tau - 1) - 2B \left(2\tau - \frac{3}{\beta} \right) + 2\tau^2 - \frac{6\tau}{\beta} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

kde $q(r) = \gamma(2\gamma - 1)\sigma^2 r^{2(2\gamma-1)} + 2\gamma r^{2\gamma-1}(\alpha + \beta r)$ a $B(\tau) = (e^{\beta\tau} - 1)/\beta$.

Odvodenie tohto približného riešenia je založené na reprezentácii presného riešenia P^{ex} pomocou strednej hodnoty vzhľadom na rizikovo neutrálnu pravdepodobnosť a na aproximácii integrálu vystupujúceho v uvedenej strednej hodnote. Autori ukázali, že ich približné riešenie sa zhoduje s presným v prípade Vašíčkovho modelu a numericky porovnali presné riešenie s približným v prípade CIR modelu.

V dizertačnej práci odvodzujeme rád presnosti tejto aproximácie pomocou odhadu rozdielu $\ln P^{ap} - \ln P^{ex}$:

Veta 3.2. Nech P^{ap} je približné riešenie (4) a P^{ex} je presné riešenie rovnice (3). Potom

$$\ln P^{ap}(\tau, r) - \ln P^{ex}(\tau, r) = c_5(r)\tau^5 + o(\tau^5)$$

pre $\tau \rightarrow 0^+$, kde

$$\begin{aligned} c_5(r) = & -\frac{1}{120}\gamma r^{2(\gamma-2)}\sigma^2 \left[2\alpha^2(-1 + 2\gamma)r^2 + 4\beta^2\gamma r^4 - 8r^{3+2\gamma}\sigma^2 \right. \\ & + 2\beta(1 - 5\gamma + 6\gamma^2)r^{2(1+\gamma)}\sigma^2 + \sigma^4 r^{4\gamma}(2\gamma - 1)^2(4\gamma - 3) \\ & \left. + 2\alpha r (\beta(-1 + 4\gamma)r^2 + (2\gamma - 1)(3\gamma - 2)r^{2\gamma}\sigma^2) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Konvergencia je rovnomerná vzhľadom na r na kompaktných intervaloch $[r_1, r_2] \subset (0, \infty)$.

Tabuľka 1: L_∞ a L_2 – chyba aproximácií $\ln P_{CIR}^{ap}$ a $\ln P_{CIR}^{ap2}$.

τ	$\ \ln P^{ap} - \ln P^{ex}\ _\infty$	EOC	$\ \ln P^{ap2} - \ln P^{ex}\ _\infty$	EOC
1	2.774×10^{-7}	4.930	4.682×10^{-10}	7.039
0.75	6.717×10^{-8}	4.951	6.181×10^{-11}	7.029
0.5	9.023×10^{-9}	4.972	3.576×10^{-12}	7.004
0.25	2.876×10^{-10}	–	2.786×10^{-14}	–

τ	$\ \ln P^{ap} - \ln P^{ex}\ _2$	EOC	$\ \ln P^{ap2} - \ln P^{ex}\ _2$	EOC
1	6.345×10^{-8}	4.933	9.828×10^{-11}	7.042
0.75	1.535×10^{-8}	4.953	1.296×10^{-11}	7.031
0.5	2.061×10^{-9}	4.973	7.492×10^{-13}	7.012
0.25	6.563×10^{-11}	–	5.805×10^{-15}	–

Z predchádzajúcej vety vyplýva, že $\ln P^{ap} - c_5(r)\tau^5$ je presnejšou aproximáciou $\ln P^{ex}$ ako pôvodná aproximácia $\ln P^{ap}$. Je však možné odvodiť aj člen rádu $O(\tau^6)$ a získať tak takú aproximáciu P^{ap2} , že rozdiel $\ln P^{ap2} - \ln P^{ex}$ je rádu $o(\tau^6)$.

Nech $\ln P^{ap}$ je dané vzťahom (4) a $c_5(\tau)$ vzťahom (5) vo vete 1 a

$$c_6(r) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \sigma^2 r^{2\gamma} c_5''(r) + (\alpha + \beta r) c_5'(r) - k_5(r) \right)$$

kde c_5' a c_5'' je prvá a druhá derivácia $c_5(r)$ podľa r a

$$\begin{aligned} k_5(r) = & \frac{\gamma \sigma^2}{120} r^{2(-2+\gamma)} \left[6\alpha^2 \beta (-1 + 2\gamma) r^2 + 12\beta^3 \gamma r^4 - 10(1 - 2\gamma)^2 r^{1+4\gamma} \sigma^4 \right. \\ & + 6\beta^2 \sigma^2 (1 - 5\gamma + 6\gamma^2) r^{2(1+\gamma)} \\ & + \beta r^{2\gamma} \sigma^2 (-10(5 + 2\gamma) r^3 + 3(1 - 2\gamma)^2 (-3 + 4\gamma) r^{2\gamma} \sigma^2) \\ & + 2\alpha r \left(3\beta^2 (-1 + 4\gamma) r^2 + 3\beta (2 - 7\gamma + 6\gamma^2) r^{2\gamma} \sigma^2 \right. \\ & \left. \left. - 5(-1 + 2\gamma) r^{1+2\gamma} \sigma^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Definujme

$$\ln P^{ap2}(\tau, r) = \ln P^{ap}(\tau, r) - c_5(r)\tau^5 - c_6(r)\tau^6. \quad (7)$$

Potom platí:

Veta 3.3. Pre rozdiel medzi novou aproximáciou $\ln P^{ap2}$ a presnou hodnotou $\ln P^{ex}$ platí: $\ln P^{ap2} - \ln P^{ex} = o(\tau^6)$.

V tabuľke 1 uvádzame experimentálny rád konvergenzie v prípade CIR modelu.

3.2 Kalibrácia jednofaktorových modelov

Uvažujeme jednofaktorové modely okamžitej úrokovej miery, ktoré majú lineárny drift pri reálnej aj rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti a ich volatilita má tvar σr^γ . Tieto predpoklady o tvare procesu nám umožňujú použiť približné riešenie rovnice pre oceňovanie dlhopisov (a teda približné výnosové krivky) z predchádzajúcej časti, a tiež Gaussovskú metológiu [5] založenú na aproximácii funkcie vierohodnosti. Poznamenajme, že volatilita procesu v rizikovo neutrálnej a reálnej pravdepodobnosti je rovnaká. Drift je rôzny, rozdiel určuje trhovú cenu rizika.

V súvislosti s Gaussovskou metodológiou odhadovania parametrov sa zaoberáme otázkou existencie odhadov. Použitá aproximácia funkcie vierohodnosti modelu

$$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^\gamma dw$$

sa až na konštantu rovná

$$\log L = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^N \left(\log \nu_t^2 + \frac{\varepsilon_t^2}{\nu_t^2} \right), \quad (8)$$

kde

$$\nu_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\beta} (e^\beta - 1) r_{t-1}^{2\gamma}, \quad \varepsilon_t = r_t - \frac{\alpha}{\beta} (e^\beta - 1) - e^\beta r_{t-1}. \quad (9)$$

Môže sa však stať, že vierohodnostná funkcia nemá maximum, a teda maximálne vierohodný odhad neexistuje. Hlavným výsledkom je tvrdenie, podľa ktorého nutnou a postačujúcou podmienkou existencie odhadov je splnenie nerovnosti

$$\left(\sum_{t=2}^N r_t r_{t-1}^{-2\gamma} \right) \left(\sum_{t=2}^N r_{t-1}^{1-2\gamma} \right) - \left(\sum_{t=2}^N r_t r_{t-1}^{1-2\gamma} \right) \left(\sum_{t=2}^N r_{t-1}^{-2\gamma} \right) < 0. \quad (10)$$

Skonstruovali sme teoretický príklad, v ktorom neexistuje maximum vierohodnostnej funkcie a zisťovali sme jeho existenciu, resp. neexistenciu v prípade reálnych dát. Výsledky pre rôzne hodnoty parametra γ sú veľmi podobné - v prípade malého počtu pozorovaní je problém s neexistenciou odhadov častejší, pri použití dát z jedného mesiaca už odhady existujú takmer vždy.

Pri použití približných výnosových kriviek pri kalibrácii ich porovnávame so skutočnými výnosovými krivkami. Uvažujeme pritom model

$$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^\gamma dw$$

pri rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti. Vychádzame pritom z článkov [6], [7], kde autori minimalizujú účelovú funkciu

$$F = \sum_{i,j} w_{ij} (R(r_i, \tau_j) - R_{ij})^2,$$

kde R_{ij} sú skutočné úrokové miery a $R(r_i, \tau_j)$ sú úrokové miery dané modelom. Váhy w_{ij} vyjadrujú, aký vplyv majú rozdiely medzi výnosovými krivkami v rôznych časoch a pre rôzne maturity. Zvolíme hodnotu parametra γ a Gaussovskou metódou odhadneme parameter σ . Zostáva teda odhadnúť drift procesu, budeme odhadovať parametre α a β z rizikovo neutrálnej formulácie modelu. Použijeme aproximáciu výnosových kriviek R^{ap} , účelová funkcia potom je

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (\tau_j R_{ij} + \ln P^{ap}(r_i, \tau_j))^2.$$

Po dosadení R^{ap} sa F dá napísať ako kvadratická funkcia premennej α . Pre každú hodnotu β teda vieme dopočítať optimálnu hodnotu α . Optimalizačná úloha sa teda dá zredukovať na jednorozmernú. Najskôr minimalizujeme funkciu

$$F(\beta) = -\frac{\left[\sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_2(\tau_j R_{ij} + c_1)\right]^2}{\sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_2^2} + \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (\tau_j R_{ij} + c_1)^2, \quad (11)$$

čím dostaneme optimálnu hodnotu β . Optimálna α sa následne vypočíta zo vzťahu

$$\alpha(\beta) = -\frac{\sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_2(\tau_j R_{ij} + c_1)}{\sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_2^2},$$

kde

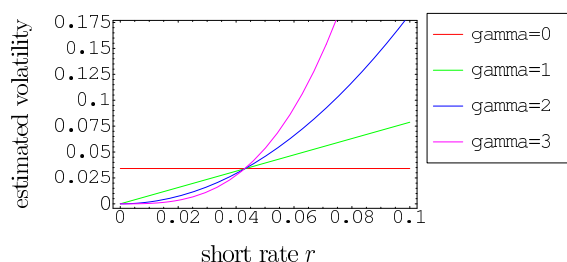
$$\begin{aligned} c_1 &= c_1(r, \tau, \beta, \sigma, \gamma) = -rB + \frac{\sigma^2}{4\beta} \left(B^2 + \frac{2}{\beta}(\tau - B) \right) (r^{2\gamma} + q_2\tau) - \\ &\quad - q_2 \frac{\sigma^2}{8\beta^2} \left(B^2(2\beta\tau - 1) - 2B \left(2\tau - \frac{3}{\beta} \right) + 2\tau^2 - \frac{6\tau}{\beta} \right), \\ c_2 &= c_2(r, \tau, \beta, \sigma, \gamma) = \frac{\tau - B}{\beta} + q_1\tau \frac{\sigma^2}{4\beta} \left(B^2 + \frac{2}{\beta}(\tau - B) \right) - \\ &\quad - q_1 \frac{\sigma^2}{8\beta^2} \left(B^2(2\beta\tau - 1) - 2B \left(2\tau - \frac{3}{\beta} \right) + 2\tau^2 - \frac{6\tau}{\beta} \right) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(r, \gamma) = 2\gamma r^{2\gamma-1}, \\ q_2 &= q_2(r, \gamma, \sigma) = \gamma(2\gamma - 1)\sigma^2 r^{3(3\gamma-1)} + 2\gamma r^{2\gamma}. \end{aligned}$$

Postup, ktorý navrhujeme, je teda nasledovný:

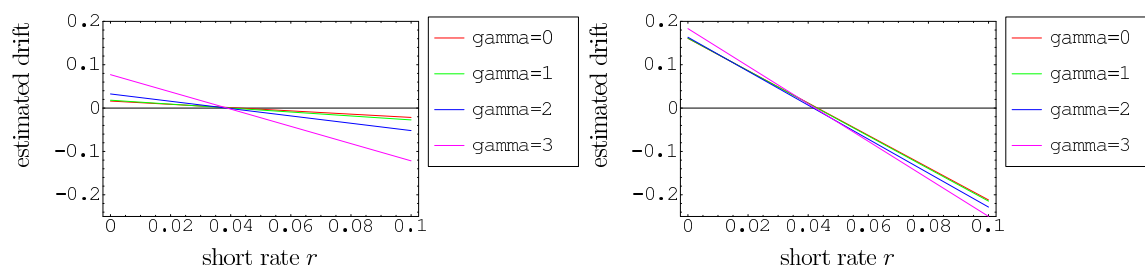
1. Gaussovskou metodológiou odhadneme parameter σ z volatility.
2. Zvolíme váhy w_{ij} a zostávajúce parametre rizikovo neutrálneho procesu odhadneme pomocou výnosových kriviek.

Obr. 2: Odhadnutá volatilita σr^γ (Euribor, 2007).

3. Zopakujeme pre všetky uvažované hodnoty parametra γ a vyberieme optimálnu.

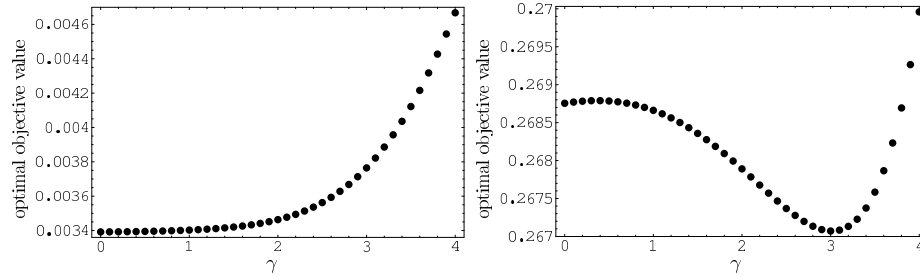
Aplikovali sme ho na dáta Euriboru z roku 2007. Výsledky pre dve voľby váhovej funkcie, $w_{ij} = \tau_j^2$ a $w_{ij} = 1/\tau_j^2$, sú na nasledujúcich obrázkoch:

- Obr. 2: Odhadnutá volatilita procesu.
- Obr. 3: Odhadnutý rizikovo neutrálny drift procesu.
- Obr. 4: Voľba parametra γ - znázorníme optimálnu hodnotu účelovej funkcie dosiahnuteľnú pre daný parameter γ . Optimálna γ je tá, kde táto funkcia nadobúda minimum. Ako vidíme, táto optimálna hodnota závisí od použitých váh.

Obr. 3: Odhadnutý drift $\alpha + \beta r$ (Euribor, 2007) pre váhy $w_{ij} = \tau_j^2$ (vľavo) a $w_{ij} = 1/\tau_j^2$ (vpravo).

3.3 Pravdepodobnostné rozdelenia cien dlhopisov a úrokových mier v dvojfaktorových modeloch a ich spriemernenia

Zaoberáme sa dvojfaktorovým Vašíčkovým modelom, dvojfaktorovým CIR modelom a Fong-Vašíčkovým modelom. Vo všetkých týchto modeloch vystupujú nepozorovateľné premenné. Dvojfaktorový Vašíčkov a CIR model je formulovaný pomocou dvoch faktorov, ktorých súčet určuje okamžitú úrokovú mieru. Tieto faktory však nepozorujeme,



Obr. 4: Účelová funkcia F ako funkcia parametra γ pre váhy $w_{ij} = \tau_j^2$ (vľavo) a $w_{ij} = 1/\tau_j^2$ (vpravo).

známy je len ich súčet. Podobne vo Fong-Vašíčkovom modeli vystupuje volatilita úrokovej miery, ktorej hodnota nie je známa. Zaujímá nás preto limitné rozdelenie týchto skrytých veličín. Dlhopisy a úrokové miery, ktoré od nich závisia, potom považujeme za náhodné premenné vzhľadom na uvedené limitné rozdelenie.

3.3.1 Dvojfaktorový Vašíčkov model

- Model: Okamžitá úroková miera r sa modeluje ako súčet $r = r_1 + r_2$, kde r_1, r_2 sú nezávislé procesy, vyhovujúce stochastickým diferenciálnym rovniciam

$$dr_i = \kappa_i(\theta_i - r_i)dt + \sigma_i dw_i. \quad (12)$$

- Ceny dlhopisov: Ak trhové ceny rizika jednotlivých faktorov sú konštanty λ_1, λ_2 , tak cena dlhopisu $P(\tau, r_1, r_2)$ sa dá napísať v tvare

$$P(\tau, r_1, r_2) = P_1(\tau, r_1)P_2(\tau, r_2),$$

kde

$$P_i(\tau, r_i) = A_i(\tau)e^{-B_i(\tau)r},$$

$$B_i(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa_i\tau}}{\kappa_i}, \quad A_i(\tau) = \exp \left[(B_i(\tau) - \tau) \left(\theta_i - \frac{\sigma_i^2}{2\kappa_i^2} - \frac{\sigma_i\lambda_i}{\kappa_i} \right) - \frac{\sigma_i^2 B_i(\tau)^2}{4\kappa_i} \right].$$

- Limitné rozdelenie: Je známe, že limitné rozdelenie procesov (12) je normálne rozdelenie so strednou hodnotou θ_i a disperziou $\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{\sigma_i^2}{2\kappa_i}$.
- Dosiahnuté výsledky: Keďže súčet faktorov je známa hodnota (aktuálna úroveň okamžitej úrokovej miery), uvažujeme z hore uvedeného limitného normálneho rozdelenia faktorov podmienené rozdelenie, ak $r_1 + r_2 = r$. Rozdelenia a momenty v nasledujúcich tvrdeniach sú počítané vzhľadom na toto podmienené rozdelenie.

Veta 3.4. 1. Podmienené rozdelenie úrokovej miery $R(\tau, r_1, r_2)$, ak $r_1 + r_2 = r$, je dané hustotou

$$f_R(x; \tau, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_R^2}} e^{-\frac{(x-\mu_R)^2}{2\sigma_R^2}},$$

kde

$$\begin{aligned} \mu_R &= -\left(\frac{\ln A_1}{\tau} + \frac{\ln A_2}{\tau}\right) + \frac{1}{\tau} \left[B_1\theta_1 + B_2\theta_2 + \frac{B_1\tilde{\sigma}_1^2 + B_2\tilde{\sigma}_2^2}{\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2} (r - (\theta_1 + \theta_2)) \right], \\ \sigma_R^2 &= \frac{1}{\tau^2} (B_1^2\tilde{\sigma}_1^2 + B_2^2\tilde{\sigma}_2^2) \left(1 - \frac{(B_1\tilde{\sigma}_1^2 + B_2\tilde{\sigma}_2^2)^2}{(\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2)(B_1^2\tilde{\sigma}_1^2 + B_2^2\tilde{\sigma}_2^2)} \right). \end{aligned}$$

2. Podmienené rozdelenie ceny dlhopisu $P(\tau, r_1, r_2)$, ak $r_1 + r_2 = r$, je dané hustotou

$$f_P(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_P^2}} e^{-\frac{(\ln x - \mu_P)^2}{2\sigma_P^2}}$$

pre $x > 0$ a $f_P(x; \tau, r) = 0$ inak, kde

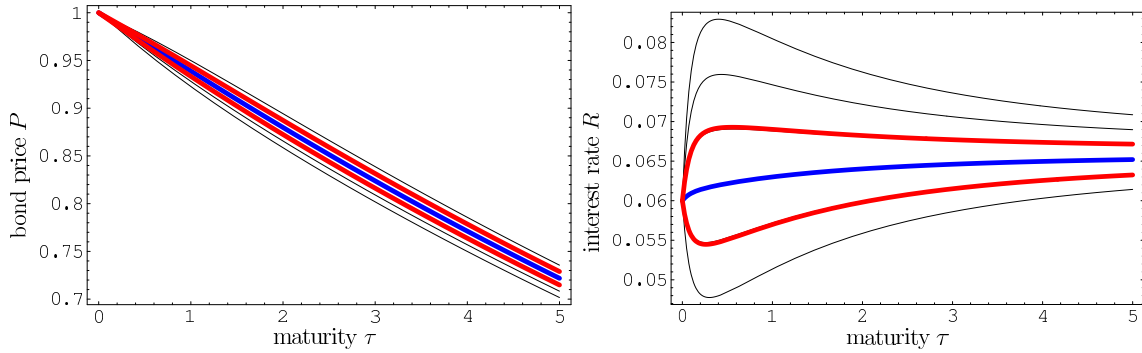
$$\begin{aligned} \mu_P &= \ln A_1 + \ln A_2 - \left((B_1\theta_1 + B_2\theta_2) + \frac{B_1\tilde{\sigma}_1^2 + B_2\tilde{\sigma}_2^2}{\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2} (r - (\theta_1 + \theta_2)) \right), \\ \sigma_P^2 &= (B_1^2\tilde{\sigma}_1^2 + B_2^2\tilde{\sigma}_2^2) \left(1 - \frac{(B_1\tilde{\sigma}_1^2 + B_2\tilde{\sigma}_2^2)^2}{(\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2)(B_1^2\tilde{\sigma}_1^2 + B_2^2\tilde{\sigma}_2^2)} \right). \end{aligned}$$

To znamená, že rozdelenie úrokových mier je normálne rozdelenie $N(\mu_R, \sigma_R^2)$ a rozdelenie cien dlhopisov je lognormálne, pričom logaritmus ceny dlhopisu má normálne rozdelenie $N(\mu_P, \sigma_P^2)$. Toto nám umožňuje jednoducho vypočítať spriemernené ceny dlhopisov a úrokových mier.

Veta 3.5. Spriemernené ceny dlhopisov $\tilde{P}(\tau, r) = \langle P(\tau, r_1, r_2) | r_1 + r_2 = r \rangle$ a spriemernené úrokové miery $\tilde{R}(\tau, r) = \langle R(\tau, r_1, r_2) | r_1 + r_2 = r \rangle$ sú nasledovné:

1. $\tilde{R}(\tau, r) = -\left(\frac{\ln A_1}{\tau} + \frac{\ln A_2}{\tau}\right) + \frac{1}{\tau} \left[B_1\theta_1 + B_2\theta_2 + \frac{B_1\tilde{\sigma}_1^2 + B_2\tilde{\sigma}_2^2}{\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2} (r - (\theta_1 + \theta_2)) \right],$
2. $\tilde{P}(\tau, r) = \tilde{A}(\tau) e^{-\tilde{B}(\tau)r}$, kde

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\tau) &= A_1 A_2 \exp \left(-(B_1 - B_2) \left(\theta_1 - (\theta_1 + \theta_2) \frac{\tilde{\sigma}_1^2}{\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}_1^2 \tilde{\sigma}_2^2}{\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2} (B_1 - B_2)^2 \right), \\ \tilde{B}(\tau) &= \frac{\tilde{\sigma}_1^2}{\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2} B_1 + \frac{\tilde{\sigma}_2^2}{\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2} B_2. \end{aligned} \tag{13}$$



Obr. 5: Spriemernené hodnoty a intervaly spoľahlivosti pre ceny dlhopisov a výnosové krivky v dvojfaktorovom Vašíčkovom modeli.

Ceny dlhopisov a úrokové miery sú (pre pevne zvolené τ a r) monotónnou funkciou faktora r_1 . Podmienené rozdelenie r_1 , ak $r_1 + r_2 = r$ je normálne a jeho parametre sa dajú ľahko vypočítať. Môžeme teda získať interval spoľahlivosti pre tento faktor v tvare (r_1^l, r_1^u) . Z monotónnej závislosti potom vyplýva, že dosadením krajných bodov tohto intervalu dostaneme hranice intervalu spoľahlivosti pre ceny dlhopisov a úrokové miery.

Pre dlhopisy a úrokové miery s dlhým časom do splatnosti klesá variabilita vzhľadom na skrytý faktor. Platí nasledovná veta:

Veta 3.6. 1. Podmienená disperzia úrokových mier $Var(R(\tau, r_1, r_2)|r_1 + r_2 = r)$ konverguje k nule pre $\tau \rightarrow \infty$.

2. Ak

$$\left(\theta_1 - \frac{\sigma_1 \lambda_1}{\kappa_1} - \frac{\sigma_1^2}{2\kappa_1^2}\right) + \left(\theta_2 - \frac{\sigma_2 \lambda_2}{\kappa_2} - \frac{\sigma_2^2}{2\kappa_2^2}\right) > 0 \quad (14)$$

tak podmienená disperzia cien dlhopisov $Var(P(\tau, r_1, r_2)|r_1 + r_2 = r)$ konverguje k nule pre $\tau \rightarrow \infty$.

Poznamenajme, že podmienka (14) v predchádzajúcej vete je ekvivalentná s tým, že limita výnosových kriviek pre $\tau \rightarrow \infty$ je kladná.

Numerická ukážka výpočtu spriemernení a intervalov spoľahlivosti je na obr. 5

3.3.2 Dvojfaktorový CIR model

- Model: Okamžitá úroková miera r sa modeluje ako súčet $r = r_1 + r_2$, kde r_1, r_2 sú nezávislé procesy, vyhovujúce stochastickým diferenciálnym rovniciam

$$dr_i = \kappa_i(\theta_i - r_i)dt + \sigma_i\sqrt{r_i}dw_i. \quad (15)$$

- Ceny dlhopisov: Ak trhové ceny rizika jednotlivých faktorov sú násobkom odmocnín týchto faktorov, t.j. rovnajú sa $\lambda_1\sqrt{r_1}$, $\lambda_2\sqrt{r_1}$, tak cena dlhopisu $P(\tau, r_1, r_2)$ sa dá napísať v tvare

$$P(\tau, r_1, r_2) = P_1(\tau, r_1)P_2(\tau, r_2),$$

kde

$$P_i(\tau, r_i) = A_i(\tau)e^{-B_i(\tau)r},$$

$$A_i(\tau) = \left[\frac{2\xi_i e^{(\xi_i + \psi_i)\tau/2}}{(\xi_i + \psi_i)(e^{\xi_i\tau} - 1) + 2\xi_i} \right]^{2\kappa_i\theta_i/\sigma_i^2}, \quad B_i(\tau) = \frac{2(e^{\xi_i\tau} - 1)}{(\xi_i + \psi_i)(e^{\xi_i\tau} - 1) + 2\xi_i},$$

$$\psi_i = \kappa_i + \lambda_i\sigma_i, \quad \xi_i = \sqrt{\psi_i^2 + 2\sigma_i^2}.$$

- Limitné rozdelenie: Je známe, že limitné rozdelenie procesov (15) je gama rozdelenie s hustotou

$$f_i(x) = \frac{a_i^{b_i}}{\Gamma(b_i)} e^{-a_i x} x^{b_i-1} \quad \text{pre } x > 0 \quad (16)$$

a $f_i(x) = 0$ inak, s parametrami

$$a_i = \frac{2\kappa_i}{\sigma_i}, \quad b_i = \frac{2\kappa_i\theta_i}{\sigma_i}$$

- Dosiahnuté výsledky: Rovnako ako v prípade dvojfaktorového Vašíčkovho modelu, aj teraz uvažujeme podmienené rozdelenie vzhľadom na daný súčet $r_1 + r_2 = r$.

Veta 3.7. 1. Podmienené rozdelenie úrokovej miery $R(\tau, r_1, r_2)$, ak $r_1 + r_2 = r$, je dané hustotou

$$f_R(x) = \frac{g_1(\tilde{r})g_2(r - \tilde{r})}{\int_0^r g_1(r_1)g_2(r - r_1)dr_1} \frac{1}{|B_2(\tau) - B_1(\tau)|}, \quad (17)$$

kde

$$\tilde{r} = \frac{\tau x - (-\ln A(\tau) + B_2(\tau)r)}{B_1(\tau) - B_2(\tau)}$$

pre x medzi $-\frac{1}{\tau} \ln A(\tau) + \frac{1}{\tau} B_1(\tau)r$ a $-\frac{1}{\tau} \ln A(\tau) + \frac{1}{\tau} B_2(\tau)r$ a $f_R(x) = 0$ otherwise.

2. Podmienené rozdelenie ceny dlhopisu $P(\tau, r_1, r_2)$, ak $r_1 + r_2 = r$, je dané hustotou

$$f_P(x) = \frac{1}{\tau x} f_R\left(-\frac{1}{\tau} \ln x\right), \quad (18)$$

kde f_R je hustota úrokovej miery (17).

Veta 3.8. 1. Spriemernené ceny dlhopisov $\tilde{P}(\tau, r) = \langle P(\tau, r_1, r_2) | r_1 + r_2 = r \rangle$ sú dané vzorcom

$$\tilde{P}(\tau, r) = A_1 A_2 e^{-Br} \frac{{}_1F_1(b_1, b_1 + b_2, -((B_1 - B_2) + (a_1 - a_2)r))}{{}_1F_1(b_1, b_1 + b_2, -(a_1 - a_2)r)},$$

kde ${}_1F_1$ je Kummerova konfluentná hypergeometrická funkcia.

2. Spriemernené úrokové miery $\tilde{R}(\tau, r) = \langle R(\tau, r_1, r_2) | r_1 + r_2 = r \rangle$ sú dané vzorcom

$$\tilde{R}(\tau, r) = -\frac{\ln A_1 A_2}{\tau} + \frac{B_2}{\tau} r + \left(\frac{B_1}{\tau} - \frac{B_2}{\tau} \right) r \frac{b_1}{b_1 + b_2} \frac{{}_1F_1(b_1, b_1 + b_2 + 1, -(a_1 + a_2)r)}{{}_1F_1(b_1, b_1 + b_2, -(a_1 + a_2)r)},$$

kde ${}_1F_1$ je Kummerova konfluentná hypergeometrická funkcia.

Rovnako ako v prípade dvojfaktorového Vašíčkovho modelu, ceny dlhopisov a úrokové miery sú pri danom r a τ monotónne funkcie faktora r_1 , a teda môžeme analogickým spôsobom konštruovať intervaly spoľahlivosti.

Veta 3.9. Podmienené disperzie úrokových mier $Var(R(\tau, r_1, r_2) | r_1 + r_2 = r)$ a cien dlhopisov $Var(P(\tau, r_1, r_2) | r_1 + r_2 = r)$ konvergujú k nule pre $\tau \rightarrow \infty$.

3.3.3 Fong-Vašíčkov model so stochastickou volatilitou

- Model: Volatilita okamžitej úrokovej miery je náhodná, ich spoločný vývoj je popísaný systémom stochastických diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} dr &= \kappa_1(\theta_1 - r)dt + \sqrt{y}dw_1, \\ dy &= \kappa_2(\theta_2 - y)dt + v\sqrt{y}dw_2, \end{aligned} \quad (19)$$

kde korelácia $E(dw_1 dw_2)$ medzi prírastkami Wienerových procesov w_1 a w_2 je ρdt .

- Ceny dlhopisov: Ak sú trhové ceny rizika násobkami hodnoty \sqrt{y} , t.j. rovnajú sa $\lambda_1 \sqrt{y}$, $\lambda_2 \sqrt{y}$, tak cena dlhopisu $P(\tau, r, y)$ má tvar

$$P(\tau, r, y) = A(\tau) e^{-B(\tau)r - C(\tau)y},$$

pričom funkcie $A = A(\tau)$, $B = B(\tau)$, $C = C(\tau)$ vyhovujú systému obyčajných diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} A'(\tau) &= -A(\kappa_1 \theta_1 B + \kappa_2 \theta_2 C), \\ B'(\tau) &= -\kappa_1 B + 1, \\ C'(\tau) &= -\lambda_1 B - \kappa_2 C - \lambda_2 v C - \frac{B^2}{2} - \frac{v^2 C^2}{2} - v \rho B C, \end{aligned} \quad (20)$$

so začiatocnými podmienkami $A(0) = 1$, $B(0) = 0$, $C(0) = 0$. Z toho vyplýva, že tieto funkcie sa dajú reprezentovať nasledovným spôsobom, ktorý ďalej využívame v dôkaze tvrdení:

$$B(\tau) = \frac{1}{\kappa_1} (1 - e^{-\kappa_1 \tau}), \quad (21)$$

$$C'(\tau) = -\lambda_1 B - \frac{B^2}{2} - (\kappa_2 + \lambda_2 v + v\rho B) C - \frac{v^2}{2} C^2, \quad C(0) = 0, \quad (22)$$

$$A(\tau) = \exp\left(-\theta_1 \tau + \theta_1 B - \kappa_2 \theta_2 \int_0^\tau C(s) ds\right). \quad (23)$$

- Limitné rozdelenie: Procesom toho istého typu, ako je proces riadiaci volatilitu y , sme sa už zaoberali. Jeho limitné rozdelenie je gama rozdelenie s parametrami $\beta = \frac{2\kappa_2}{v^2}$, $\alpha = \frac{2\kappa_2}{v^2} \theta_2$ a hustotou

$$f_y(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1} \quad (24)$$

pre $x > 0$ a $f_y(x) = 0$ inak.

- Dosiahnuté výsledky: V ďalšom predpokladáme, že je splnená podmienka

$$\lambda_1 \leq -\frac{1}{2\kappa_1}.$$

pre trhovú cenu rizika. Dá sa dokázať, že kladná hodnota λ_1 by viedla k záporným úrokovým mieram. Podmienka, ktorej splnenie predpokladáme, je silnejšia, ale potrebujeme ju na dôkaz nasledovných tvrdení.

Veta 3.10. 1. Rozdelenie dlhopisov $P(\tau, r, y)$ je dané hustotou

$$f_P(x) = f_y\left(-\frac{B(\tau)}{C(\tau)}r - \frac{1}{C(\tau)} \ln \frac{x}{A(\tau)}\right) \frac{1}{C(\tau)x}, \quad (25)$$

kde f_y je limitná hustota volatility (24).

2. Rozdelenie úrokových mier $R(\tau, r, y)$ je dané hustotou

$$f_R(x) = f_y\left(\frac{1}{C(\tau)} (\tau x + \ln A(\tau) - B(\tau))\right) \frac{\tau}{C(\tau)}, \quad (26)$$

kde f_y je limitná hustota volatility (24).

Veta 3.11. 1. Spriemerené ceny dlhopisov $\tilde{P}(\tau, r) = \langle P(\tau, r, y) \rangle_y$ sú dané vzorcom

$$\tilde{P}(\tau, r) = A(\tau) e^{-B(\tau)r} \left(1 + \frac{C(\tau)}{\beta}\right)^{-\alpha}.$$

2. Spriemernené úrokové miery $\tilde{R}(\tau, r) = \langle R(\tau, r, y) \rangle_y$ sú dané vzorcom

$$\tilde{R}(\tau, r) = -\frac{1}{\tau} \ln A(\tau) + \frac{B(\tau)}{\tau} r + \frac{C(\tau)}{\tau} \theta_2.$$

Cena dlhopisu aj úroková miera je monotónna funkcia volatility y , preto môžeme pre ne konštruovať intervaly spoľahlivosti rovnakým spôsobom ako v predchádzajúcich modeloch.

Veta 3.12. Disperzia cien dlhopisov $Var_y P(\tau, r, y)$ a úrokových mier $Var_y R(\tau, r, y)$ konverguje k nule pre $\tau \rightarrow \infty$.

3.4 Vzťah spriemernenia v dvojfaktorovom modeli a jednofaktorových modelov.

Spriemernená cena dlhopisu je vo všetkých študovaných prípadoch funkciou okamžitej úrokovej miery r a maturity τ . Je to závislosť rovnakého typu ako v prípade jednofaktorových modelov. Preto nás zaujímalo, či sa dá nájsť taký jednofaktorový model, v ktorom sa cena dlhopisu rovná spriemerneným hodnotám z uvedených dvojfaktorových modelov.

Obmedzíme sa pritom na triedu jednofaktorových modelov tvaru

$$dr = \mu(r)dt + \sigma(r)dw,$$

v ktorých drift a volatilita sú spojité funkcie závislé len od úrokovej miere r a nie čase t . To isté predpokladáme aj o trhovej cene rizika $\lambda(r)$. V prípade dvojfaktorového CIR modelu a Fong-Vašíčkovho modelu navyše predpokladáme, že $\sigma(0) = 0$. Tento predpoklad je potrebný na zabezpečenie kladnosti procesu r .

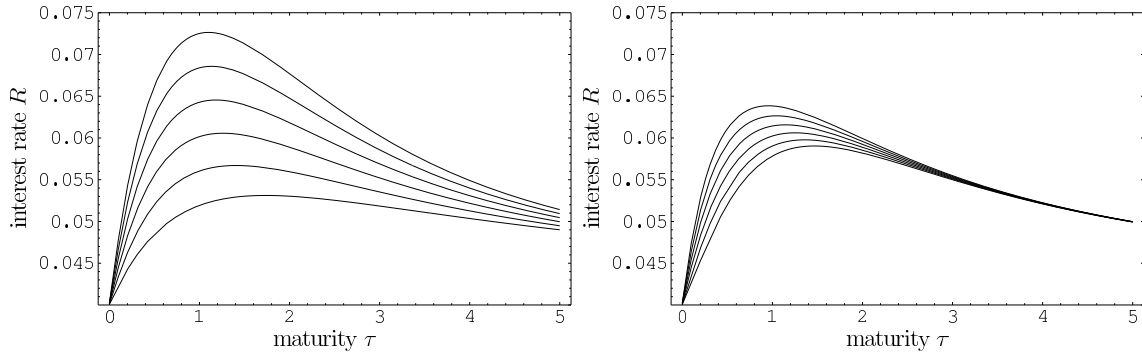
Odpoveď, ktorá je v dizertačnej práci dokázaná pre všetky tri modely, je negatívna. Jednofaktorový model, pre ktorý by spriemernené ceny y dvojfaktorového modelu spĺňali príslušnú rovnicu pre ceny dlhopisov, neexistuje.

3.5 Rýchla časová škála volatility vo Fong-Vašíčkovom modeli

Rýchlejšia časová škála, v ktorej sa pohybuje volatilita, je empiricky potvrdená pre viaceré finančné trhy, pozri napr. [3]. Touto problematikou sa zaoberáme v prípade Vašíčkovho modelu pre úrokové miery. Najskôr vylúčime prípad, ktorý vedie k nekonečne veľkým úrokovým mieram pre rýchlu časovú škálu volatility. Potom dokážeme, že závislosť rozdielu úrokových mier pre rovnakú úroveň volatility od rýchlosti časovej škály je monotónne klesajúca. Tento efekt je znázornený na obrázku 6.

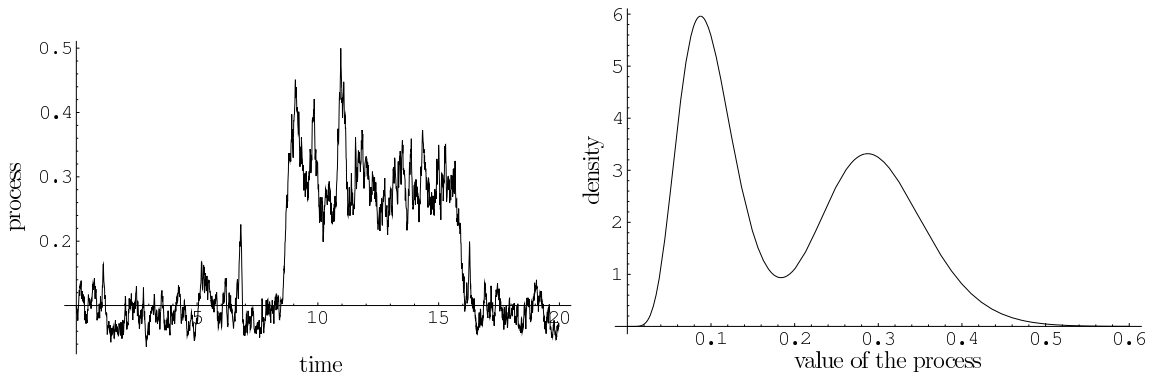
3.6 Zhlukovanie volatility

Vo Fong-Vašíčkovom modeli má volatilita limitne gama rozdelenie. Je to rozdelenie, ktorého hustota má jedno maximum, ktoré zodpovedá dlhodobej limitnej úrovni volatility. Zaoberáme sa zovšeobecnením tohto modelu, v ktorom má výsledná limitná



Obr. 6: Výnosové krivky y a zvyšujúcu sa rýchlosť volatility. Výnosové krivky na každom grafe zodpovedajú tým istým hodnotám volatility. Líšia sa však časová škála volatility, časová škála vpravo je rýchlejšia.

hustota dve lokálna maximá. Tieto zodpovedajú dvom hodnotám volatility, okolo ktorých proces osciluje. Ukážka takéhoto procesu a jeho limitnej hustoty je na obr. 7. Pre zadanú limitnú hustotu v tvare kombinácie dvoch gama rozdelení skonštruujeme proces, ktorý ju generuje.



Obr. 7: Simlácia procesu (vľavo) a jeho limitná hustota (vpravo).

4 Záver

Hlavné výsledky dizertačnej práce sú:

1. Dôkaz jednoznačnosti riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice pre oceňovanie dlhopisov v jednofaktorovom modeli. Odvodenie presnosti aproximácie približného analytického riešenia, navrhnutie aproximácie vyššieho rádu.
2. Štúdium existencie Gaussovských odhadov. Použitie približného analytického riešenia pri kalibrácii modelov.

3. Výpočet pravdepodobnostného rozdelenia cien dlhopisov a výnosových kriviek vzhľadom na limitné rozdelenie nepozorovateľných faktorov v dvojfaktorových modeloch (dvojfaktorový Vašíčkov model, dvojfaktorový CIR model, Fong-Vašíčkov model). Výpočet priemerných hodnôt a intervalov spoľahlivosti.
4. Dôkaz neexistencie jednofaktorového modelu generujúceho rovnaké ceny dlhopisov, ako sú priemerné ceny z dvojfaktorového modelu uvedené v predchádzajúcom bode.
5. Rýchla časová škála volatility vo Fong-Vašíčkovom modeli - dôkaz monotónnej klesajúcej závislosti rozdielu medzi úrokovými mierami zodpovedajúcimi tej istej úrovni volatility od rýchlosti časovej škály.
6. Zhukovanie volatility - konštrukcia procesu pre volatility, ktorého limitné rozdelenie je kombinácia dvoch gama rozdelení.

Literatúra

- [1] Brigo, D., Mercurio, F.: Interest rate models - Theory and practice. With smile, inflation and credit. Springer, 2006.
- [2] Choi, Y., Wirjanto, T. S.: An analytic approximation formula for pricing zero coupon bonds. Finance Research Letters 4 (2), 2007, 116-126.
- [3] Fouque, J.-P. , Papanicolaou, G., Sircar, K. R.: Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility. Cambridge University Press, 2000.
- [4] Kwok, Y. K.: Mathematical Models of Financial Derivatives. Springer, 1998.
- [5] Nowman, K. B.: Gaussian estimation of single-factor continuous time models of the term structure of interest rates. Journal of Finance 52, 1997, 1695-1706.
- [6] Ševčovič, D., Urbánová Csajková, A.: Calibration of one factor interest rate models, Journal of Electrical Engineering 55 (12/s), 2004, 46-50.
- [7] Ševčovič, D., Urbánová Csajková, A.: On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model, Central European Journal of Operation Research 13, 2005, 169-188.

Abstract

In the thesis we study and analyze several questions and problems that are related to short rate interest rate models. The main goals of the thesis can be summarized as follows:

1. Approximate analytical solution for one-factor models. We study the approximate analytical solution for bond prices derived by Choi and Wirjanto. We prove the order of accuracy of their formula and present numerical examples. Afterwards, we provide a new approximation of higher order of accuracy.
2. Calibration of one-factor models. We use the approximate analytical solution mentioned above to calibrate one-factor models. We use Nowman's Gaussian estimates to estimate the volatility and the comparison of real term structures with theoretical ones to estimate the drift. Here we also study the question of existence of the estimates, i.e. the existence of maximum of likelihood function. Then we consider different weights when comparing the term structures and we see the differences in estimates caused by different criteria used.
3. Averaging in two-factor models. We consider the following two-factor models: two-factor Vasicek, two-factor Cox-Ingersoll-Ross and Fong-Vasicek. In all these models, not all of the factors is are observable on the market. We consider their limiting distribution and compute the distribution of bond priced and interest rates. Afterwards, we compute their averaging, i.e. the expected values with respect to limiting distribution of unobservable factors. The averaged bond prices are functions of maturity and short rate. It is the same dependence as in one-factor models. Hence we study the question, whether there exists a one-factor model, which yields the same bond prices as the averaged values from the two-factor model. In all the models considered, the answer is negative.

Zoznam vlastných publikácií

- [s1] Stehlíková, B., Ševčovič, D.: Approximate formulae for pricing zero coupon bonds and their asymptotic analysis. To appear in: International Journal of Numerical Mathematics and Modeling.
- [s2] Stehlíková, B.: Averaged Bond Prices for Fong-Vasicek and the Generalized Vasicek Interest Rates Models. Proceeding of MMEI, Eds. K. Cechlárová, M. Halická, V. Borbeľová, V. Lacko, 2007, 166-175.
- [s3] Stehlíková, B.: Averaged Bond Prices in Generalized Cox-Ingersoll-Ross Model of Interest Rates. Proceedings of 5th Actuarial and Financial Mathematics Day, Eds. M. Vanmaele, G. Deelstra, A. De Schepper, J. Dhaene, H. Reynaerts, W. Schoutens, P. Van Goethem, Koninklijke Vlaamse Academie van België voor Wetenschappen en Kunsten, 2007, 77-87.
- [s4] Stehlíková, B.: Fast Mean Reverting Volatility in Fong-Vasicek Model of Interest Rates. Journal of Electrical Engineering 57 (12/s), 2006, 65-97.
- [s5] Stehlíková, B.: Modeling Volatility Clusters with Application to Two-Factor Interest Rate Models. Journal of Electrical Engineering 56 (12/s), 2005, 90-93.
- [s6] Stehlíková, B., Ševčovič, D.: On a Volatility Averaging in a Two-Factor Interest Rate Model. Proceedings of Algoritmy 2005, Eds. A. Handlovičová, Z. Krivá, K. Mikula, D. Ševčovič, 2005, 325-333.

Výsledky boli ústne prezentované na konferenciách:

- 1st Bratislava Economic Meeting, Bratislava (SR), jún 2008
- Mathematical Methods in Economics and Industry, Herľany (SR), jún 2007
- SemStat 2007 - Statistics for stochastic differential equations models, La Manga del Mar Menor (Španilsko), máj 2007
- 5th Actuarial and Financial Mathematics Day, Brusel (Belgicko), február 2007
- Discontinuous change in behaviour issues of partial differential equations, Anogia (Kréta, Grécko), jún 2006
- ISCAM 2006, Bratislava (SR), apríl 2006
- ISCAM 2005, Bratislava (SR), apríl 2005
- Algoritmy 2005, Podbanské (SR), marec 2005