



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



Mgr. Gábor Szűcs

Autoreferát dizertačnej práce

## Stochastické modely úrokových mier v poisťovníctve

na získanie akademického titulu *philosophiae doctor*

v odbore doktorandského štúdia:

9.1.9 Aplikovaná matematika

Bratislava 2015

**Dizertačná práca bola vypracovaná:**

v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre aplikovanej matematiky a štatistiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

**Predkladateľ:** Mgr. Gábor Szűcs  
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzity Komenského v Bratislave  
Mlynská dolina  
842 48 Bratislava

**Školiteľ:** Doc. RNDr. Rastislav Potocký, PhD.  
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzity Komenského v Bratislave  
Mlynská dolina  
842 48 Bratislava

**Oponenti:** prof. RNDr. Gejza Wimmer, PhD.  
doc. JUDr. Ing. Ján Šebo, PhD.  
doc. RNDR. Lea Škrovánková, PhD.

Obhajoba dizertačnej práce sa koná 27. augusta 2015 o 11:00 hod.  
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie dňa 27. júla 2015.

v študijnom odbore 9.1.9 Aplikovaná matematika

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave,  
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

**Predseda odborovej komisie:**

prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.  
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzity Komenského v Bratislave  
Mlynská dolina  
842 48 Bratislava

# 1. Úvod

Stochastické modelovanie vo finančníctve a poisťovníctve patrí medzi známe a často skúmané odvetvia aplikovanej matematiky. Rozmach stochastického prístupu vo finančnej matematike nastal v 60-tych a 70-tych rokoch 20. storočia, práve v tomto období boli publikované práce takých významných odborníkov, ako Friedman, Itō, Black, Scholes či Merton. Nový impulz spôsobený rozšírením výkonných osobných počítačov prišiel okolo roku 1990 a odvtedy zažíva stochastické finančné modelovanie veľkú expanziu, napríklad aj v oblasti poisťovníctva. Stochastické modely úrokových mier sú totiž neoddeliteľnou súčasťou modernej teórie životného poistenia a trhovo konzistentná valuácia poistných produktov je dnes už prirodzenou súčasťou aparátu životných poisťovní a aj regulačného balíka Solventnosť II.

Počas tvorby dizertačnej práce sme sa zaoberali viacerými súvisiacimi oblasťami a skúmali sme odborné publikácie napríklad z teórie finančnej matematiky a finančného modelovania, z okruhu stochastických procesov, ale aj z oboru aktuárskej matematiky či penzijného poistenia. Pri štúdiu teórie finančného modelovania sme sa predovšetkým spoliehali na knihu [9] od Melicherčíka a kol., článok [21] od Vašíčka, publikáciu [3] od Coxa a kol. či prácu [18] od Ševčoviča a Urbánovej Csajkovej. Základy matematiky životného poistenia sme zhrnuli pomocou teórie z knihy [4] od Gerbera a monografie [14] od Potockého, kým počas štúdií penzijných schém sme čerpali z diela [2] od Cipru, z učebnice [19] od Škrovánkovej a kol. a z ďalších odborných publikácií. Pri konštrukcii našich demografických modelov sme používali článok [13] od Pastora a Raučinovej, resp. známu publikáciu [8] od amerických demografov Leea a Cartera.

Praktickú motiváciu do nášho výskumu dávalo začatie vyplácania dôchodkov z úspor v starobnom dôchodkovom sporení na Slovensku. Išlo o veľmi aktuálnu tému, keďže prví dôchodcovia začali poberať svoje dôchodky z druhého piliera na začiatku roku 2015. S podobnou tematikou sme sa zaoberali aj v našich ďalších odborných príspevkoch [10] a [11] publikovaných v roku 2014, resp. 2015. V prvom z uvedených článkov sme analyzovali vplyv rizikových faktorov na zisk životnej poisťovne pri doživotných dôchodkoch vyplácaných z úspor v druhom dôchodkovom pilieri. Dôraz sme kládli predovšetkým na testovanie ziskovosti doživotných anuit z hľadiska životnej poisťovne pri kolísavých úrokových výnosoch a dlhovekosti dôchodcov, pričom sme používali statickú verziu metódy spárovania aktív a pasív životnej poisťovne. V druhom našom článku [11] sme sa zaoberali jednak sporivou etapou slovenskej súkromnej penzijnej schémy, ale aj výplatnou fázou druhého piliera. V publikácii sme uviedli dynamický model pre optimálne investičné rozhodnutia sporiteľa, pričom ceny akcií sme modelovali pomocou geometrického Brownovho pohybu a úrokové miery prostredníctvom CIR modelu. Hľadali sme predovšetkým optimálny podiel investícií v akciovom, resp. dlhopisovom investičnom fonde a prezento-

vali sme aj analýzu citlivosti a stresové testovanie. Akumulovanú hodnotu investícií sme merali v ročných platoch účastníka a na záver sme previedli celkovú nasporenú sumu na mesačne vyplácanú doživotnú anuitu. V ďalšom článku [17] zverejnenom v týždenníku *.týždeň* sme diskutovali o možných dôvodoch vzniku rozdielov vo výškach mesačných dôchodkových dávok pri rôznych predpokladoch a nastaveniach vyplácania dôchodkov.

V rámci dizertačnej práce sme chceli poukázať na možné rizikové faktory, ktoré môžu vplývať na životné poisťovne počas trvania takých dlhodobých kontraktov, aké sú napr. zmluvy o doživotných dôchodkoch z druhého piliera. Osobitne sme analyzovali vplyv dlhovekosti budúcich dôchodcov a efekt náhodne sa meniacich trhových výnosov na súčasnú, resp. akumulovanú hodnotu zisku poisťovateľa. Pri modelovaní investičnej stratégie poisťovne sme používali statickú, resp. dynamickú metódu spárovania aktív a pasív.

## 2. Ciele práce

Našou prvotnou úlohou bolo prepojiť viaceré oblasti aplikovanej matematiky, ako napríklad finančné modelovanie, teóriu stochastických procesov, aktuársku demografiu či manažment aktív a pasív, a vytvoriť tak vhodný aparát na oceňovanie a testovanie poisťných produktov životného poistenia. V rámci dizertačného výskumu sme využívali modely stochastických úrokových mier a výnosových kriviek (napríklad Vašíčkov model, Coxov-Ingersollov-Rossov model alebo Nelsonov-Siegelov model), metódu spárovania aktív a pasív životnej poisťovne a rôzne demografické modely (napr. metódu posunutých pravdepodobností či Leeho-Carterov model).

Ako sme už spomínali v Úvode, časť našej inšpirácie sme čerpali z vyplácania dôchodkov z úspor v starobnom dôchodkovom sporení slovenského dôchodkového systému. Naším cieľom bolo získať aproximačné formuly pre prvotný výpočet mesačnej výšky doživotných dôchodkov vyplácaných z úspor v druhom pilieri, pričom pri ich odvodení sme prihliadali aj na niektoré zákonné predpisy špecifikované v aktuálnom znení Zákona č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení [22]. Ďalším cieľom práce bolo definovať aparát metódy spárovania aktív a pasív, a to špeciálne pre produkty životného poistenia, a formulovať optimalizačnú úlohu pre túto metódu s návrhom jej riešenia. V neposlednom rade by sme spomenuli aj náš zámer o dôkladnej analýze modelového vyplácania dôchodkov z druhého piliera s poukázaním na vplyv rizikových faktorov na životnú poisťovňu. V rámci našich výpočtov sme chceli jednak určovať “spravodlivú” výšku mesačného dôchodku pri danej výške nasporenej sumy, a tiež určiť veľkosť straty poisťovne pri rôznych kombináciách stresových scenárov dlhovekosti a vývoja úrokových mier.

### 3. Modely úrokových mier a výnosových kriviek

Štúdium modelov úrokových mier a výnosových kriviek tvorilo dôležitú časť nášho výskumu, ktorú sme potom vo veľkej miere využili v praktickej časti dizertačnej práce. Zaoberali sme sa základnými smermi finančného modelovania, a tiež sme sa venovali najznámejším typom rovnovážnych modelov úrokových mier. **Vašíčkov model** pre okamžité úrokové miery (*instantaneous short-rate model*), ktorý navrhol český ekonóm Oldřich Vašíček vo svojej publikácii [21], sme definovali vzťahom

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma dW_t, \quad (1)$$

kde  $r_t$  je hladina okamžitej úrokovej miery v čase  $t$ ,  $W_t$  je Wienerov proces na pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{S}, \Pr)$  a  $\kappa$ ,  $\theta$  a  $\sigma$  sú kladné reálne koeficienty modelu. Pri modelovaní výnosov štandardných bezkupónových dlhopisov sme používali výnosovú krivku odvodenú od Vašíčkovho short-rate modelu v tvare

$$R(\tau, r_t) \triangleq R_t(\tau, r_t) = -\frac{1}{\tau} \left( \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} (R_\infty - r_t) - R_\infty\tau - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (1 - e^{-\kappa\tau})^2 \right), \quad (2)$$

kde  $\tau$  je doba do maturity štandardného dlhopisu a  $R_\infty = \frac{\kappa\theta - \lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$ . Pri odhade neznámych parametrov podkladového Vašíčkovho modelu (1), či odhade samotnej Vašíčkovej výnosovej krivky sme postupovali podľa odporúčaných postupov z článku [5] od trojice autoriek Halgašová, Stehlíková, Bučková a podľa metodiky z práce [20] od Urbánovej Csajkovej.

Ďalší populárny model okamžitých úrokových mier, **Coxov-Ingersollov-Rossov model** (CIR model), ktorý bol publikovaný trojicou autorov v článku [3], sme uvažovali v tvare

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad (3)$$

kde  $\kappa$ ,  $\theta$  a  $\sigma$  sú kladné reálne parametre. Transformáciou pôvodných premenných sme zaviedli pomocné premenné  $\phi, \zeta, \varrho$

$$\phi = \exp(-\eta), \quad \zeta = \frac{\kappa + \lambda + \eta}{2\eta}, \quad \varrho = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2},$$

kde  $\eta = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$  a parameter  $\lambda$  je trhovú cenu rizika (*market price of risk*). Potom sme tvrdili (s odvolávaním na dielo [7] od Kwoka a prácu [18] od Ševčoviča a Urbánovej Csajkovej), že pre výnosovú krivku CIR modelu platnú v čase  $t$  platí

$$R(\tau, r_t) \triangleq R_t(\tau, r_t, \phi, \zeta, \varrho) = \frac{\ddot{B}(\tau)r_t - \ln \ddot{A}(\tau)}{\tau}, \quad (4)$$

kde  $\tau$  je doba do maturity a funkcie  $\ddot{A}(\tau)$  a  $\ddot{B}(\tau)$  sú definované napr. v [7] alebo [18]. Pri hľadaní optimálnych parametrov CIR modelu pre daný súbor historických úrokových mier

a výnosov sme postupovali podľa metodiky z publikácie [18] od Ševčoviča a Urbánovej Csajkovej.

Pri skúmaní výnosov štandardných dlhopisov sme okrem kriviek odvodených od rovnovážnych modelov okamžitej úrokovej miery používali aj priame modely výnosových kriviek.

**Nelsonov-Siegelov model** (NS model) z článku [12] s parametrami  $\beta_{0t}, \beta_{1t}, \beta_{2t}, \lambda_t$  sme definovali predpisom

$$R_t(\tau) = \beta_{0t} + \beta_{1t} \frac{1 - \exp(-\lambda_t \tau)}{\lambda_t \tau} + \beta_{2t} \left( \frac{1 - \exp(-\lambda_t \tau)}{\lambda_t \tau} - \exp(-\lambda_t \tau) \right), \quad (5)$$

kým **Svenssonov model** (SV model) publikovaný v štúdiu [16] s reálnymi parametrami  $\alpha_{0t}, \alpha_{1t}, \alpha_{2t}, \alpha_{3t}, \lambda_{1t}, \lambda_{2t}$  sme používali v tvare

$$R_t(\tau) = \alpha_{0t} + \alpha_{1t} \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1t}}\right)}{\frac{\tau}{\lambda_{1t}}} + \alpha_{2t} \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1t}}\right)}{\frac{\tau}{\lambda_{1t}}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1t}}\right) \right] + \\ + \alpha_{3t} \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2t}}\right)}{\frac{\tau}{\lambda_{2t}}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2t}}\right) \right], \quad \tau \in (0; T_{max}). \quad (6)$$

## 4. Metóda spárovania aktív a pasív

Solventnosť životnej poisťovne je veľmi dôležitým faktorom pri konštrukcii jej investičnej politiky, pretože poisťovňa musí nepretržite udržiavať požadovanú mieru solventnosti. Metóda spárovania aktív a pasív je postupom, ktorý v určitom zmysle prispieva k znižovaniu pravdepodobnosti insolventnosti poisťovne. V tomto kontexte aktíva poisťovne sú napr. dlhopisy, akcie, termínované vklady a pod., teda prostriedky, do ktorých poisťovňa investuje inkasované poistné v mene poistených. Pasíva poisťovne v tomto prípade znamenajú jej záväzky voči poistencom vyplývajúce z poistných kontraktov. Princíp spárovania aktív a pasív spočíva v tom, že poisťovňa ku každému záväzku (poistnému plneniu) pripojí vhodné aktívum s rovnakou (budúcou) hodnotou a totožným termínom splatnosti. Táto metóda sa dá použiť predovšetkým pri produktoch s garantovaným poistným plnením (garantovanou poistnou sumou alebo dôchodkovou dávkou) a pevným termínom (pevnými termínmi) výplaty poistného plnenia.

**Statickou metódou spárovania aktív a pasív** rozumieme takú verziu metódy spárovania, pri ktorej poisťovňa celé čisté poistné rozloží v čase podpisu poistnej zmluvy (t. j. v čase 0) tak, že do 1-ročných, 2-ročných, ...,  $T$ -ročných aktív investuje presne toľko prostriedkov technických rezerv, aká je výška očakávaného poistného plnenia alebo očakávanej dávky v čase maturity daného dlhopisu. Na rozdiel od statickej verzie spárovania, pri **dynamickej metóde spárovania** prepojenie aktív a pasív je možné vykonať

vo všetkých časových bodoch  $t = 0, 1, \dots, T$ . Akumulovanú hodnotu poistenia pri metóde spárovania aktív a pasív (*accumulated value*,  $AV$ ) v  $t$ -tom roku poistnej doby definujeme pomocou rekurentnej formuly

$$AV_t = p_{t+1}^P \times CF_{t+1}^P - p_{t+1}^S \times CF_{t+1}^S + \sum_{h=0}^{t-1} AV_h \times {}_h c_{t-h} \times \tilde{\mathcal{I}}_{h+1,t-h}, \quad (7)$$

kde  $p_{t+1}^P$ ,  $p_{t+1}^S$ , resp.  $CF_{t+1}^P$ ,  $CF_{t+1}^S$  sú prvky príslušných vektorov pravdepodobností, resp. vektorov peňažných tokov,  $\tilde{\mathcal{I}}$  je realizácia matice výnosových faktorov a  ${}_h c_k$  vyjadruje relatívnu časť investícií do  $k$ -ročných aktív vykonaných v čase  $h$ .

Jedným z hlavných cieľov životných poisťovní (ako obchodných spoločností) je dosiahnuť zisk a pri daných trhových, spoločenských, zákonných a zmluvných podmienkach maximalizovať jeho hodnotu. Úloha metódy spárovania aktív a pasív je úzko prepojená s touto ideou a definuje sa v tvare

$$\max_{\substack{{}_t c_k \\ t \in \{0, 1, \dots, T-1\} \\ k \in \{1, 2, \dots, T-t\}}} AV_T \quad (8)$$

pri podmienkach

$$AV_t \geq 0, \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, T-1\}, \quad (9)$$

$$\sum_{h=1}^{T-t} {}_t c_h = 1, \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, T-1\}, \quad (10)$$

$${}_t c_k \in \langle 0; 1 \rangle, \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, T-1\}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, T-t\}, \quad {}_{T-1} c_1 = 1. \quad (11)$$

Podmienku (9) uvedenú vyššie pracovne nazývame pravidlom solventnosti poisťovne, pretože hovorí o tom, že poisťovňa v každom čase  $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$  musí dodržiavať zásadu solventnosti (v tom našom prípade akumulovaná hodnota poistenia nemôže klesnúť do záporných čísel). Môžeme si všimnúť, že úlohou metódy spárovania aktív a pasív je vlastne maximalizácia zisku pri daných podmienkach v čase ukončenia poistného kontraktu  $T$ . Hľadanie optimálnych investičných koeficientov  ${}_t c_k$ , ktoré maximalizujú akumulovanú hodnotu zisku poisťovne v čase  $T$ , je vysokodimenzionálnym optimalizačným problémom, ktorý (okrem niekoľkých triviálnych prípadov) nie je možné riešiť analytickým spôsobom. Práve preto sme zvolili vhodný numerický postup založený na penalizačnej metóde a maximalizácii pomocnej účelovej funkcie (podľa knihy [1] od Buchanana a Turnera), pomocou ktorej sme boli schopní vyriešiť túto maximalizačnú úlohu (v našich praktických aplikáciách).

## 5. Demografické modely

Jednou z kľúčových úloh počas analýzy vyplácania dôchodkov z druhého piliera bolo zostavenie vhodných demografických modelov zameraných na prežívanie poistencov – dôchodcov z druhého piliera. Ako sme už spomínali v úvode tejto kapitoly, osobitnú pozornosť sme venovali modelovaniu dlhovekosti dôchodcov. Je známe, že stredná budúca dĺžka života slovenskej populácie rastie. Spôsobuje to neustále sa zvyšujúci životný štandard obyvateľstva, postupné skvalitňovanie zdravotnej starostlivosti, pokrok v medicíne a niekoľko ďalších faktorov. Pre kalibráciu našich demografických modelov sme zvolili dva postupy: **metódu posunutých pravdepodobností** publikovanú autormi Pastor a Raučinová v článku [13] a **Leeho-Carterov model** zverejnený v článku [8].

Prvý postup je založený na predpoklade, že pravdepodobnosti úmrtia do jedného roka sa znížia v každom veku  $x$  rovnakým koeficientom  $u_x \equiv u \in (0; 1)$ . Nové pravdepodobnosti úmrtia získané znížením pôvodných pravdepodobností nazývame posunutými alebo šokovými pravdepodobnosťami, keďže zmena (posun) sa prejaví okamžite, vo forme jednorazového šoku. Ďalší vektor pravdepodobností úmrtia, takzvaný vektor prechodných pravdepodobností, môžeme získať tak, že predpokladáme postupný prechod od základných pravdepodobností k tým posunutým. Takto skonštruovaný vektor teda už počíta s postupnou zmenou mier úmrtnosti, nie s jednorazovým (šokovým) pádom.

Leeho-Carterov model (LC model) pre predpoveď budúcich mier úmrtnosti je oveľa komplexnejší ako metóda posunutých pravdepodobností. LC model totiž využíva celú historickú databázu minulých údajov o úmrtnosti (nie len posledný známy vektor pravdepodobností úmrtia, ako sme to prezentovali pri prvom postupe). V rámci nášho výskumu sme používali úmrtnostné tabuľky Štatistického úradu Slovenskej republiky (ŠÚSR, [26]) pre Slovensko z obdobia od 1996 do 2013 a na tejto báze sme odhadli parametre LC modelu. Pomocou balíka `demography` [6] v štatistickom softvéri  $\mathcal{R}$  [15] sme potom spravili aj predikciu pre budúce miery úmrtia v období 2014-2055 a predpovedané pravdepodobnosti sme využívali na modelovanie života dôchodcov z druhého piliera.

## 6. Modelové dôchodky z úspor v druhom pilieri

Ako sme už uviedli, jednou z hlavných motivácií nášho výskumu bolo modelovať a analyzovať vyplácanie dôchodkov zo starobného dôchodkového sporenia na Slovensku. Potrebovali sme preto odvodiť výpočtové formuly, pomocou ktorých sme potom dokázali vypočítať približné výšky mesačne polehotne vyplácaných dávok. Pri odvodení formúl sme využívali klasický netto- a brutto-princíp ekvivalencie, predpoklady deterministického a stochastického modelu životného poistenia a niektoré právne špecifiká zo zákona [22] týkajúce sa vyplácania dôchodkov z úspor v starobnom dôchodkovom sporení. Uvažovali



sme modelovú životnú poisťovňu, ktorá vypláca anuity z úspor v druhom pilieri a skúmali sme prípad doživotného mesačne vyplácaného starobného dôchodku bez pozostalostných dôchodkov a

- (i) bez zvyšovania dôchodku,
- (ii) so zvyšovaním dôchodku konštantným tempom,
- (iii) so zvyšovaním dôchodku premenlivým tempom.

Podrobne sme sa zaoberali prípadom (i) a na určenie mesačnej výšky dávky sme odvodili výpočtové vzorce pre prípad

- (a) konštantnej technickej úrokovej miery,
- (b) trhového výpočtu dávky pomocou výnosovej krivky.

Pri kalibrácii našich modelov výnosových kriviek sme používali historické dátové súbory úrokových mier EURIBOR (*Euro Interbank Offered Rate*, [24]) s jedno- až dvanásťmesačnou splatnosťou a výnosy slovenských vládnych dlhopisov (VSVD, [25]) s 5-, resp. 10-ročnou dobou splatnosti od januára 2011 do decembra 2014. Postupne sme odhadli parametre výnosových kriviek (2), (4), (5) a (6), a odhadnuté krivky sme použili aj na valuáciu peňažných tokov spojených s doživotným dôchodkom, aj pri analýze stresových scenárov.

Pri kalkulácii mesačnej dôchodkovej dávky sme používali rôzne kombinácie demografických modelov (napr. základné úmrtnostné tabuľky ŠÚSR, LeeHo-Carterov model pre rok 2015, LeeHo-Carterov model dlhovekosti) a modelov úrokových mier, resp. výnosov dlhopisov (napr. rôzne technické úrokové miery, Vašíčkov, CIR, NS či SV model). Všetky naše výpočty sme vykonali v prostredí štatistického softvéru  $\mathcal{R}$  [15] pomocou nami implementovaných funkcií a algoritmov. Pri analýzach sme ukázali, ako závisí výška dávky od voľby demografických a úrokových predpokladov. Dospeli sme k záveru, že čím “prísnejší” demografický model zvolíme, tým bude dávka nižšia. To, že daný demografický model je “prísny”, sme brali z uhla pohľadu modelovej životnej poisťovne a v tom zmysle, že pri danom “prísnom” modeli by sa poistenci dožili vyššieho očakávaného veku ako pri iných (základných) modeloch. Tiež sme zistili, že čím pesimistickejšie predpokladané investičné zhodnotenie prostriedkov predpokladáme, tým bude mesačný dôchodok nižší. Tento efekt bol spôsobený skutočnosťou, že pri pesimistických nastaveniach modelov výnosov by modelová poisťovňa dosiahla nižšie úrokové príjmy a kvôli tomu menej prostriedkov by mohla vyplácať aj svojim klientom – dôchodcom.

Počas nášho výskumu sme vytvorili aj niekoľko modelových stresových scenárov a testovali sme, ako by sa správala ziskovosť poisťného produktu (doživotného dôchodku) pri rôznych výškach dôchodkovej dávky a rôznych stresových scenároch. Opäť sme sa zamerali na možné negatívne výkyvy trhových výnosov a vplyv dlhovekosti dôchodcov a postupne sme vykonali

- stresové testy pre trhové úrokové miery, resp. výnosy pomocou statickej metódy spárovania aktív a pasív,
- stresové testy pre vývoj úmrtnosti pomocou statickej metódy spárovania aktív a pasív,
- kombinované stresové testy pomocou statickej metódy spárovania aktív a pasív,
- stresové testy pre trhové úrokové miery, resp. výnosy pomocou dynamickej metódy spárovania aktív a pasív.

V prípade testov pre výnosy sme dospeli k zisteniu, že pri pesimistických modeloch vývoja trhových výnosov by modelová poisťovňa utrpela stratu, a to bez ohľadu na to, ktorý demografický model aplikovala pri výpočte mesačnej dávky. Ďalej, pri analýze scenárov dlhovekosti sme ukázali, akú stratu môže utpieť poisťovňa, keď úmrtnosť dôchodcov sa riadi iným spôsobom, aký predpokladala. Skúmali sme aj odolnosť našich modelov dlhovekosti voči odporúčaným stresovým scenárom Európskeho orgánu pre poisťovníctvo a dôchodkové poistenie zamestnancov [23]. Zistili sme, že naše demografické modely dlhovekosti by úspešne absolvovali miernejší stresový test, no prísnejším testom by neprešli.

## 7. Záver

Na záver by sme skonštatovali, že naša dizertačná práca splnila stanovené ciele. Počas jej tvorby sme vybudovali pevnú teoretickú základňu zameranú na modelovanie úrokových mier a výnosov dlhopisov v oblasti životného poistenia, ktorú sme potom úspešne aplikovali pri analýze a modelovaní vyplácania dôchodkov zo starobného dôchodkového sporenia na Slovensku.

Hlavnými prínosmi práce sú formuly pre prvotnú kalkuláciu výšky mesačných dôchodkov vyplácaných z úspor v druhom pilieri, pričom pri ich odvodení sme prihliadali aj na niektoré zákonné predpisy špecifikované v zákone o starobnom dôchodkovom sporení. Ďalším výsledkom práce je vlastná formulácia metódy spárovania aktív a pasív životnej poisťovne a návrh riešenia jej úlohy vo všeobecnom (aj v konkrétnom praktickom prípade). V neposlednom rade by sme spomenuli aj našu dôkladnú analýzu modelového vyplácania dôchodkov a skúmanie vplyvu možných rizikových faktorov v rámci rôznych stresových scenárov.

# Thesis Overview

This dissertation deals with modelling of stochastic interest rates and bond yields in area of life insurance and examining the payout of pension benefits from the second pension pillar in Slovakia. The thesis contains the basics of the financial calculus and detailed characterization of the

- Vasicek instantaneous short-rate model [21],
- Cox-Ingersoll-Ross instantaneous short-rate model [3],
- Nelson-Siegel yield curve model [12] and
- Svensson yield curve model [16].

The dissertation also includes fundamentals of the life insurance mathematics and the asset-liability matching method for life insurance companies. It contains the Lee-Carter approach to forecasting mortality in Slovakia and an alternative longevity model based on shifted probabilities of death.

The first result of the thesis is the derivation of special formulas for the calculation of the pension benefits paid out from the second pillar in case of

- (i) fixed perpetuity-immediate with monthly payments and
- (ii) increasing perpetuity-immediate with monthly payments.

The second result of the thesis is the proposal of solution for optimization problem of the asset-liability matching method and a detailed analysis of annuity payouts from the Slovak second pillar. Results of the stress tests for interest rate risk and longevity risk are also discussed.

# Literatúra

- [1] BUCHANAN, J. I., TURNER, P. R. 1992. *Numerical methods and analysis*. Springer, New York. ISBN-13: 978-0070087170.
- [2] CIPRA, T. 2012. *Penze: kvantitatívny prístup*. Ekopress, Praha. 409 s. ISBN: 978-80-86929-87-3.
- [3] COX, J., INGERSOLL, J., ROSS, S. 1985a. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53, s. 385–407. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.fin.ntu.edu.tw/~tzeng/course/CIR%281985%29-Eca.pdf>.
- [4] GERBER, H. U. 1997. *Life insurance mathematics*. Third Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997. 217 s. ISBN 3-540-58858-3.
- [5] HALGAŠOVÁ, J., STEHLÍKOVÁ, B., BUČKOVÁ, Z. 2014. Estimating the short rate from the term structures in the Vasicek model. *Tatra Mt. Math. Publ.*, č. 61 (2014), s. 1–17. Článok prijatý na publikovanie.
- [6] HYNDMAN, R. J. (with contributions from Booth, H. Tickle, L. and Maindonald, J.). 2014. *demography: Forecasting mortality, fertility, migration and population data*. R package version 1.18. [cit. 26.03.2015.] Dostupné na adrese: <http://CRAN.R-project.org/package=demography>.
- [7] KWOK, Y. K. 1998. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag.
- [8] LEE, R. D., CARTER, L. R. 1992. Modeling and Forecasting U. S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, roč. 87, č. 419, s. 659-671. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.jstor.org/>.
- [9] MELICHERČÍK, I., OLŠÁROVÁ, L., ÚRADNÍČEK, V. 2005. *Kapitoly z finančnej matematiky*. Epos, Bratislava. ISBN 80-8057-651-3.
- [10] MELICHERČÍK, I., SZŰCS, G. 2014. Vplyv vybraných faktorov na zisk životnej poisťovne pri doživotných dôchodkoch vyplácaných z úspor v II. dôchodkovom pilieri na Slovensku. *Forum Statisticum Slovacum*, X. ročník, č. 6/2014, s. 103-114. ISSN 1336-7420.
- [11] MELICHERČÍK, I., SZŰCS, G., VILČEK, I. 2015. Investment Strategies in the Funded Pillar of the Slovak Pension System. *Ekonomický časopis*, Ekonomický ústav Slovenskej akadémie vied. Článok prijatý na publikovanie.
- [12] NELSON, C. R., SIEGEL, A. F. 1987. Parsimonious Modeling of Yield Curve. *Journal of Business*, 1987, roč. 60, č. 4, s. 473-489. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.math.ku.dk/~rolf/teaching/NelsonSiegel.pdf>.
- [13] PASTOR, K., RAUČINOVÁ, E. 1991. Parametrizácia úmrtnostných tabuliek a jej použitie v regionálnom plánovaní. *Acta Facultatis Rerum Naturalium Universitatis Comenianae*, s. 119-124.
- [14] POTOCKÝ, R. 2012. *Modely v životnom a neživotnom poistení*. Prvé vydanie, Vydavateľstvo STATIS Bratislava, 217 str. ISBN 978-80-85659-71-9.

- [15] R CORE TEAM. 2012. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0. Dostupné na adrese: <http://www.R-project.org/>.
- [16] SVENSSON, L. E. O. 1994. Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994. *National Bureau of Economic Research Working Paper*, Cambridge, Massachusetts, september 1994, č. 4871. [cit. 12.11.2014.] Dostupné na adrese: [http://www.nber.org/papers/w4871.pdf?new\\_window=1](http://www.nber.org/papers/w4871.pdf?new_window=1).
- [17] SZŮCS, G. 2015. Kde je pravda v spore o dôchodky? *Týždenník .týždeň*, ročník XII., č. 6/2015, 2. februára 2015, str. 28-29. ISSN 1336-5932.
- [18] ŠEVČOVIČ, D., URBÁNOVÁ CSAJKOVÁ, A. 2005. On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model. *Central European J. of Operation Research*, roč. 13, s. 169-188. [cit. 30.10.2014.] Dostupné na adrese: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/papers/cl26.pdf>.
- [19] ŠKROVÁNKOVÁ, L., ŠKROVÁNKOVÁ, P. 2010. *Dôchodkové, zdravotné a nemocenské poistenie*. Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava. 126 s. ISBN 978-80-225-2924-2.
- [20] URBÁNOVÁ CSAJKOVÁ, A. 2007. *Calibration of term structure models*. Dissertation Thesis. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University, Bratislava. [cit. 19.02.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/phd/urbanova/urbanova-thesis.pdf>.
- [21] VAŠÍČEK, O. A. 1977. An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, č. 5, s. 177-188. [cit. 24.10.2014.] Dostupné na adrese: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304405X77900162>.
- [22] ZÁKON Národnej rady Slovenskej republiky č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov. [cit. 11.03.2015.] Dostupné na adrese: [http://www.nbs.sk/\\_img/Documents/\\_Legislativa/\\_UplneZneniaZakonov/Z0432004.PDF](http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Legislativa/_UplneZneniaZakonov/Z0432004.PDF).

#### Internetové zdroje:

- [23] EIOPA [online]. EIOPA Stress Test 2014. [cit. 11.11.2014.] Dostupné na adrese: [https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx\\_dam/files/activities/financial\\_stability/insurance\\_stress\\_test\\_2014/eiopa-14-215\\_stress\\_test\\_2014\\_specifications.pdf](https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/activities/financial_stability/insurance_stress_test_2014/eiopa-14-215_stress_test_2014_specifications.pdf).
- [24] EMMI [online]. Historické dáta o úrokových mierach EURIBOR (1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 12M) a EONIA. [cit. 22.12.2014.] Dostupné na adrese: <http://www.emmi-benchmarks.eu/>.
- [25] NBS [online]. *Výnosy do splatnosti vybraných vládnych dlhopisov*. Webová stránka Národnej banky Slovenska, Bratislava, Slovenská republika. [cit. 08.02.2013.] Dostupné na adrese: [http://www.nbs.sk/\\_img/Documents/STATIST/US/VDSVD\\_CR.xls](http://www.nbs.sk/_img/Documents/STATIST/US/VDSVD_CR.xls).
- [26] ŠÚSR [online]. Tabuľky úmrtnosti (roky 1996 - 2013): Slovenská republika. *Obyvateľstvo a migrácia: Tabuľky života*. Štatistický úrad Slovenskej republiky. [cit. 21.10.2014.] Dostupné na adrese: [http://slovak.statistics.sk/wps/wcm/connect/221c1ae4-1e73-491a-ba30-744fba17f037/Umrtnostne\\_tabulky\\_SR\\_1996\\_2013.zip?MOD=AJPERES](http://slovak.statistics.sk/wps/wcm/connect/221c1ae4-1e73-491a-ba30-744fba17f037/Umrtnostne_tabulky_SR_1996_2013.zip?MOD=AJPERES).

# Vedecká činnosť

## Zoznam publikácií

- [A1] Melicherčík, I., Szűcs, G., Vilček, I. 2015. Investment Strategies in the Funded Pillar of the Slovak Pension System. In: *Ekonomický časopis*, Ekonomický ústav Slovenskej akadémie vied. Článok prijatý na publikovanie.
- [A2] Szűcs, G. 2015. Kde je pravda v spore o dôchodky? In: *Týždenník .týždeň*, ročník XII., číslo 6/2015, 2. februára 2015, str. 28-29. ISSN 1336-5932.
- [A3] Melicherčík, I., Szűcs, G. 2014. Vplyv vybraných faktorov na zisk životnej poisťovne pri doživotných dôchodkoch vyplácaných z úspor v II. dôchodkovom pilieri na Slovensku. In: *Forum Statisticum Slovacum*, X. ročník, č. 6/2014, str. 103-114. ISSN 1336-7420.
- [A4] Szűcs, G. 2013. Schröterova trieda rozdelení. In: *Forum Statisticum Slovacum*, IX. ročník, č. 7/2013, 2013, str. 227-232. ISSN 1336-7420. (pdf)
- [A5] Szűcs, G. 2013. Stochastic interest rates in life insurance mathematics. In: *Proceedings*, 18th European Young Statisticians Meeting (EYSM), Osijek, Chorvátsko, str. 157-161. ISBN 978-953-6931-70-5.
- [A6] Szűcs, G. 2012. Využitie kopula funkcií v štatistickom programe R. In: *Forum Statisticum Slovacum*, VIII. ročník, č. 7/2012, str. 191-196. ISSN 1336-7420.

## Účasť na konferenciách

- 23. medzinárodný seminár *Výpočtová štatistika*, Slovenská štatistická a demografická spoločnosť, Bratislava, 2014,
- *Letná aktuárska škola*, Slovenská spoločnosť aktúarov, Dunajská Streda, 2014,
- 22. medzinárodný seminár *Výpočtová štatistika*, Slovenská štatistická a demografická spoločnosť, Bratislava, 2013,
- *18th European Young Statisticians Meeting (EYSM)*, European Regional Committee of the Bernoulli Society and J.J. Strossmayer University of Osijek, Osijek, Chorvátsko, 2013,
- 21. medzinárodný seminár *Výpočtová štatistika*, Slovenská štatistická a demografická spoločnosť, Bratislava, 2012.

## Grantová aktivita

- Analýza vyplácania doživotných dôchodkov z úspor v druhom dôchodkovom pilieri na Slovensku (hlavný riešiteľ)  
Grant UK/43/2015
- Diskrétne a spojité pravdepodobnostné modely a ich aplikácie (spoluriešiteľ)  
VEGA 2/0047/15  
*Hlavný riešiteľ:* prof. RNDr. Wimmer Gejza, DrSc.
- Dynamická regulácia systému starobného dôchodkového sporenia (spoluriešiteľ)  
APVV-0465-12  
*Hlavný riešiteľ:* doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
- Stochastické úrokové miery v životnom poistení (hlavný riešiteľ)  
Grant UK/160/2013
- Nové metódy matematickej štatistiky (spoluriešiteľ)  
VEGA 2/0038/12  
*Hlavný riešiteľ:* doc. RNDr. František Rublík, CSc.