

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**STOCHASTICKÉ MODELY ÚROKOVÝCH  
MIER V POISŤOVNÍCTVE**

Dizertačná práca

2015

Mgr. Gábor Szűcs

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



**STOCHASTICKÉ MODELY ÚROKOVÝCH  
MIER V POISŤOVNÍCTVE**

Dizertačná práca

Študijný program: Aplikovaná matematika  
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Školiteľ: doc. RNDr. Rastislav Potocký, PhD.

**Bratislava, 2015**

**Mgr. Gábor Szűcs**



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Mgr. Gábor Szűcs  
**Študijný program:** aplikovaná matematika (Jednoodborové štúdium,  
doktorandské III. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** dizertačná  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Stochastické modely úrokových mier v poisťovníctve  
*Stochastic models of interest rates in insurance*

**Cieľ:** Tvorba modelov v životnom a dôchodkovom poistení pre časovo závislú a náhodne sa meniacu úrokovú mieru s možnosťou aplikácie na vyplácanie dôchodkov zo starobného dôchodkového sporenia na Slovensku

**Školiteľ:** doc. RNDr. Rastislav Potocký, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

**Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce:**  
bez obmedzenia

**Dátum zadania:** 01.09.2011

**Dátum schválenia:** 10.03.2011

prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
školiteľ

## Abstrakt

Táto dizertačná práca sa zaoberá modelovaním stochastických úrokových mier a výnosov dlhopisov v oblasti životného poistenia a skúmaním vyplácania dôchodkov z úspor v druhom pilieri na Slovensku. Práca obsahuje podrobnú charakterizáciu Vašíčkovho, CIR, Nelsonovho-Siegelovho a Svenssonovho modelu výnosových kriviek štandardných bezkupónových dlhopisov. Jej ďalšou súčasťou sú teoretické kapitoly o základoch matematiky životného poistenia a metóde spárovania aktív a pasív životnej poisťovne. Hlavným výsledkom práce sú špeciálne formuly odvodené pre výpočet výšky doživotných dôchodkov vyplácaných z druhého piliera, návrh riešenia úlohy metódy spárovania aktív a pasív a detailné analýzy modelového vyplácania dôchodkov z druhého piliera a stresových scenárov pre úrokové a demografické riziká.

*Kľúčové slová:* stochastické modely úrokových mier, metóda spárovania aktív a pasív životnej poisťovne, dôchodky z druhého piliera, stresové testy, dlhovekosť.

# Abstract

This dissertation deals with modelling of stochastic interest rates and bond yields in area of life insurance and examining the payout of pension benefits from the second pension pillar in Slovakia. The thesis contains a detailed characterization of Vasicek, CIR, Nelson-Siegel and Svensson yield curve models of standard zero-coupon bonds. It also includes the basics of life insurance mathematics and asset-liability matching method for life insurance companies. The main results of the thesis are special formulas derived for the calculation of the pension benefits paid out from the second pillar, proposal of solution for optimization problem the asset-liability matching method and detailed analysis of annuity payouts from the Slovak second pillar and stress scenarios for interest rate risk and demographic risk.

*Keywords:* stochastic models of interest rates, asset-liability matching method for life insurance companies, annuities from second pillar, stress scenarios, longevity.

# Predhovor

Stochastické modely úrokových mier sú v dnešnej dobe neoddeliteľnou súčasťou modernej teórie životného poistenia. Tie najpoužívanejšie modely náhodne sa meniacich úrokových mier postupne prenikli z oboru finančnej matematiky a finančného modelovania aj do sveta poisťovníctva. Trhovo konzistentná valuácia poistných produktov je dnes už prirodzenou súčasťou aparátu životných poisťovní a aj regulačného balíka Solventnosť II. Túto výskumnú oblasť považujem za zaujímavú a progresívnu, preto som sa rozhodol, že práve tejto tematike sa budem venovať počas doktorandského štúdia. Výsledkom je predložená práca, ktorá okrem zhrnutia učebnicových modelov úrokových mier obsahuje aj ukážku ich aplikácie v životnom poistení.

Môj výskum dostal nový impulz na začiatku roku 2014, keď sa intenzívnejšie začala riešiť otázka vyplácania dôchodkov z druhého dôchodkového piliera. Išlo o veľmi citlivú záležitosť, pretože “v hre” bol osud dlhoročných úspor sporiteľov v dôchodkovom sporení. Svoju pozornosť a praktickú časť tejto práce som preto venoval modelovaniu vyplácania doživotných anuit z druhého piliera. Okrem iného som chcel poukázať aj na to, aké rizikové faktory môžu pri takýchto dlhodobých produktoch ohrozovať účastníkov poistných kontraktov. Výsledkom mojej práce sú podrobné analýzy a komentáre, ktoré verím, že budú použiteľné aj v reálnom živote.

autor

# Obsah

Úvod	8
1. Základy finančnej matematiky a finančného modelovania	11
1.1 Zložené úrokovanie, súčasná a akumulovaná hodnota	11
1.2 Štandardný dlhopis a jeho časová štruktúra	12
1.3 Stochastický kalkulus	15
1.3.1 Náhodné procesy a ich vlastnosti	15
1.3.2 Itōov proces, Itōova lema	18
1.4 Smery finančného modelovania	20
1.4.1 Afinné modely	20
1.4.2 Bezarbitrážne modely	20
1.4.3 Rovnovážne modely	23
1.4.4 Priame modely výnosových a forwardových kriviek	24
2. Modely úrokových mier a výnosových kriviek	25
2.1 Rovnovážne modely úrokových mier	25
2.2 Vašíčkov model	27
2.2.1 Vlastnosti Vašíčkovho modelu	28
2.2.2 Odhad parametrov Vašíčkovho modelu	33
2.2.3 Posúdenie kvality odhadnutého Vašíčkovho modelu	40
2.2.4 Zovšeobecnenia Vašíčkovho modelu	41
2.3 Coxov-Ingersollov-Rossov model	43
2.3.1 Odhad parametrov CIR modelu	46
2.3.2 Posúdenie kvality odhadnutého CIR modelu	49
2.4 Modely výnosových a forwardových kriviek	50
2.4.1 Nelsonov-Siegelov model forwardovej a výnosovej krivky	50
2.4.2 Svenssonov model forwardovej a výnosovej krivky	52
2.4.3 Odhad parametrov výnosových kriviek a určenie kvality fitu	52
2.4.4 Dynamika výnosových kriviek	55
3. Životné poistenie	56
3.1 Právna úprava životného poistenia na Slovensku	56
3.1.1 Investičná politika životných poisťovní	57
3.2 Klasická teória životného poistenia	58
3.2.1 Základy klasickej teórie životného poistenia	59
3.2.2 Klasické poistné produkty v prípade netto-princípu	61
3.2.3 Určenie výšky poistného v prípade brutto-princípu	66
3.3 Modelové dôchodky z úspor v starobnom dôchodkovom sporení	67
3.3.1 Prípád mesačne vyplácaného doživotného starobného dôchodku bez zvyšovania dôchodku	67
3.3.2 Prípád mesačne vyplácaného doživotného starobného dôchodku so zvyšovaním dôchodku	71

4. Metóda spárovania aktív a pasív a modely penzijných schém	72
4.1 Metóda spárovania aktív a pasív	72
4.1.1 Základy metódy spárovania aktív a pasív	73
4.1.2 Úloha metódy spárovania aktív a pasív a jej riešenie	79
4.2 Modely penzijných schém	83
5. Modelovanie vyplácania dôchodkov z druhého dôchodkového piliera na Slovensku	92
5.1 Vyplácanie dôchodkov z úspor v druhom dôchodkovom pilier	95
5.2 Demografické modely	96
5.2.1 Metóda posunutých pravdepodobností	97
5.2.2 Leeho-Carterov model	100
5.3 Odhadnuté modely úrokových mier a výnosových kriviek	109
5.3.1 Dátové súbory	109
5.3.2 Odhadnutý Vašíčkov model	110
5.3.3 Odhadnuté CIR modely	112
5.3.4 Odhadnuté NS a SV modely	114
5.4 Modelové výpočty dôchodkových dávok	116
5.4.1 Technické predpoklady	116
5.4.2 Výsledky výpočtov – mesačné výšky dôchodkových dávok	119
5.5 Stresové testy doživotných dôchodkov pomocou statickej metódy spárovania aktív a pasív	125
5.5.1 Stresové testy pre úrokové miery	128
5.5.2 Stresové testy pre vývoj úmrtnosti	131
5.5.3 Kombinované stresové testy	135
5.6 Stresové testy doživotných dôchodkov pomocou dynamickej metódy spárovania aktív a pasív	136
Záver	142
Literatúra	144
Príloha A	152
Príloha B	157
Príloha C	164
Príloha D	170
Príloha E	174
Príloha F	178



# Úvod

Stochastické modelovanie vo finančníctve a poisťovníctve patrí medzi známe a často skúmané odvetvia aplikovanej matematiky. Rozmach stochastického prístupu vo finančnej matematike nastal v 60-tych a 70-tych rokoch 20. storočia, práve v tomto období boli publikované práce takých významných odborníkov, ako Friedman, Itô, Black, Scholes či Merton. Nový impulz spôsobený rozšírením výkonných osobných počítačov prišiel okolo roku 1990 a odvtedy zažíva stochastické finančné modelovanie veľkú expanziu.

Počas tvorby tejto práce sme sa zaoberali viacerými súvisiacimi oblasťami a skúmali sme odborné publikácie napríklad z teórie finančnej matematiky a finančného modelovania, z okruhu stochastických procesov, ale aj z oboru aktuárskej matematiky či penzijného poistenia. Pri príprave teórie finančného modelovania sme sa predovšetkým spoliehali na knihu [48] od Melicherčíka a kol., článok [80] od Vašíčka, publikáciu [21] od Coxa a kol. či prácu [76] od Ševčoviča a Urbánovej Csajkovej. Základy matematiky životného poistenia sme zhrnuli pomocou teórie z knihy [31] od Gerbera a monografie [64] od Potockého, kým počas štúdií penzijných schém sme čerpali z diela [19] od Cipru, z učebnice [77] od Škrovánkovej a kol. a z ďalších odborných publikácií.

Praktickú časť našej práce sme venovali modelovaniu a analýze vyplácania dôchodkov z úspor v starobnom dôchodkovom sporení. Išlo o veľmi aktuálnu tému, keďže prví dôchodcovia začali poberať svoje dôchodky z druhého piliera na začiatku roku 2015. S podobnou tematikou sme sa zaoberali aj v našich odborných príspevkoch [49] a [50] publikovaných v roku 2014, resp. 2015. V článku [73] zverejnenom v týždenníku *.týždeň* sme chceli poukázať na možné dôvody vzniku rozdielov vo výškach mesačných dôchodkových dávok, ktoré zverejnili odborníci z Inštitútu finančnej politiky Ministerstva financií Slovenskej republiky, resp. ktoré ponúkali životné poisťovne. V rámci našich analýz uvedených v tejto záverečnej práci sme predpokladali existenciu modelovej životnej poisťovne, ktorá vypláca doživotné dôchodky z druhého piliera, pričom berie do úvahy aj niektoré reálne obmedzenia (napr. právne špecifiká). Na druhej strane sme však použili aj množstvo takých predpokladov, ktoré zjednodušovali modelovanie vyplácania anuitných dávok. Keďže sme sa zaoberali len s dôchodkami vyplácanými

z druhého piliera a dôchodky zo štátneho prvého piliera sme neskúmali, komplexnú otázku dôchodkového zabezpečenia budúcich dôchodcov sme v tejto práci tiež neriešili.

Hlavnými prínosmi práce sú formuly pre prvotnú kalkuláciu výšky mesačných dôchodkov vyplácaných z úspor v druhom pilieri, pričom pri ich odvodení sme prihliadali aj na niektoré zákonné predpisy špecifikované v zákone o starobnom dôchodkovom sporení. Ďalším výsledkom práce je vlastná formulácia metódy spárovania aktív a pasív životnej poisťovne a návrh riešenia jej úlohy vo všeobecnom, aj v konkrétnom praktickom prípade. V neposlednom rade by sme spomenuli aj našu dôkladnú analýzu modelového vyplácania dôchodkov a skúmanie vplyvu možných rizikových faktorov v rámci rôznych stresových scenárov.

Predkladaná dizertačná práca obsahuje päť kapitol. Prvá kapitola sa zaoberá položením teoretických základov finančnej matematiky a finančného modelovania a definovaním dôležitých pojmov z teórie náhodných procesov. V poslednej časti kapitoly sú uvedené 4 základné smery finančného modelovania (afinné a bezarbitrážne modely, rovnovážne modely okamžitej úrokovej miery, priame modely výnosových kriviek a diskkrétne modely úrokových mier založené na modeloch časových radov).

V druhej kapitole, ktorá sa zaoberá modelmi úrokových mier a výnosových kriviek, sú najprv prezentované najznámejšie typy rovnovážnych modelov, potom sú dôkladne skúmané modely Vašíčka, resp. Coxa, Ingersolla a Rossa. V podkapitole 2.4 sú definované dva známe modely výnosových kriviek, a to Nelsonov-Siegelov model a Svenssonov model, pričom táto časť obsahuje aj ich vlastnosti a postupy kalibrácie.

Tretia kapitola obsahuje základy životného poistenia a poisťovej matematiky. V jej prvej časti je stručne predstavená zákonná úprava poisťovníctva na Slovensku, kým ďalšia časť je venovaná klasickej teórii životného poistenia. Podkapitola 3.3 zahŕňa odvodenia špeciálnych formúl pre prvotné oceňovanie modelových doživotných dôchodkov vyplácaných z úspor v starobnom dôchodkovom sporení.

Definícia metódy spárovania aktív a pasív životnej poisťovne je prezentovaná vo štvrtjej kapitole tejto práce. Okrem definície metódy je sformulovaná aj jej úloha, ktorá je vlastne nelineárnou maximalizačnou úlohou s viacerými hraničnými podmienkami. V časti 4.2 sú uvedené teoretické poznatky a výsledky z odbornej literatúry, s ktorou sme sa zaoberali počas našich štúdií.

V piatej kapitole sú publikované praktické výsledky nášho výskumu. Najprv sú

uvedené naše modelové predpoklady vzťahujúce sa na vyplácanie doživotných dôchodkov zo starobného dôchodkového sporenia. V časti 5.2 sú prezentované demografické modely, ktoré sme špeciálne vytvorili pre slovenské podmienky pomocou metódy posunutých pravdepodobností a Leeho-Carterovho modelu. V ďalšej podkapitole sú uvedené odhadnuté modely úrokových mier a výnosov dlhopisov (opäť pre slovenské pomery) a ukazovatele ich kvality. V časti 5.4 sa nachádzajú výsledky našich výpočtov – prvotné odhady mesačných dôchodkových dávok pri rôznych kombináciách demografických a úrokových modelov pre prípad doživotných dôchodkov bez zvyšovania dávky. V posledných dvoch podkapitolách sú publikované výsledky, závery a komentáre našich stresových testov, ktoré boli vykonané pomocou statickej, resp. dynamickej metódy spárovania aktív a pasív pri rôznych nastaveniach demografických a úrokových stresových scenárov. Stresové testy boli zamerané na možnú dlhovekosť budúcich dôchodcov a možné výkyvy trhových úrokových mier.

# 1. Základy finančnej matematiky a finančného modelovania

Počas tvorby tejto záverečnej práce sme čerpali z bohatej teórie finančnej matematiky a finančného modelovania. V rámci tejto kapitoly sme prezentovali matematický aparát, ktorý sme používali pri našom výskume. V niektorých prípadoch sme uviedli zjednodušený výklad odborných pojmov a princípov finančnej matematiky. Ako sme už spomínali v Úvode, jedným z cieľov tejto práce bolo aplikovať metodiky finančného modelovania v rôznych aktuárskych výpočtoch zameraných hlavne na valuáciu produktov životného poistenia. Práve preto v niektorých prípadoch sme si dovolili upustiť od presného a hlbokého výkladu učebnicovej finančnej matematiky. Napriek tomu sme sa snažili, aby v rámci jednotlivých podkapitol nevznikli nekonzistentnosti, aby všetky vzťahy a súvislosti boli zrozumiteľné, a tiež aby táto dizertačná práca tvorila ucelený celok.

## 1.1 Zložené úrokovanie, súčasná a akumulovaná hodnota

Zložené úrokovanie sa používa vo viacerých oblastiach aktuárskej teórie, napr. aj v klasickej teórii životného poistenia (viď [31], [64]). Označenia uvedené v tejto podkapitole sme využívali aj v tretej kapitole, v rámci ktorej sme prezentovali základné formuly valuácie produktov životného poistenia.

*Pozn.:* Pri písaní tejto podkapitoly sme zvolili trochu voľnejší štýl a namiesto striktnej štruktúry *Definícia-Veta-Dôkaz* sme zaviedli jednotlivé pojmy vo voľnejšej forme, čím sme získali väčší priestor na interpretáciu vzťahov a vysvetlenie súvislostí medzi nimi.

Uvažujme nejakú časovú jednotku (označíme skratkou č. j.), pri ktorej sa definujú všetky nižšie uvedené veličiny. (V našich praktických aplikáciách sme najčastejšie používali ročnú alebo mesačnú časovú jednotku). V prípade diskrétného úročenia, nech  $i$  značí efektívnu úrokovú mieru (*effective interest rate*) za danú časovú jednotku, alebo investičnú úrokovú mieru, resp. efektívny výnos z nejakej investície. V prípade spojitého spôsobu úrokovania, nech  $r$  označuje intenzitu úrokovania (*force of interest*) za danú

časovú jednotku.<sup>1</sup> Hovoríme, že efektívna úroková miera  $i$  a intenzita úrokovania  $r$  sú **ekvivalentné**, ak platia medzi nimi nasledovné vzťahy

$$r = \ln(1 + i), \quad i = e^r - 1, \quad v = (1 + i)^{-1} = e^{-r}. \quad (1.1)$$

Ďalej nech  $d$  označuje diskontnú mieru (*discount rate*) za danú časovú jednotku a  $v$  diskontný faktor (odúročiteľ, *discount factor*) za danú časovú jednotku. Za predpokladu, že  $d$  je ekvivalentná s efektívnou mierou  $i$ , resp. intenzitou úrokovania  $r$  a  $v$  k nim patriaci diskontný faktor, platia vzťahy

$$d = \frac{i}{1 + i} = 1 - e^{-r}, \quad v = (1 + i)^{-1} = e^{-r} = 1 - d. \quad (1.2)$$

Nech  $T \in \langle 0; \infty \rangle$  je dĺžka investičnej doby vyjadrená v danej časovej jednotke (pri ktorej sú vyjadrené aj veličiny  $i$ ,  $r$ ,  $d$  a  $v$ ). **Súčasnú hodnotu** jednej peňažnej jednotky (p. j.) splatnej o  $T$  č. j. pri efektívnej úrokovej miere  $i$ , resp. ekvivalentnej intenzite úrokovania  $r$  označujeme  $P$  a počítame ako

$$P = 1 \text{ p. j.} \times (1 + i)^{-T} = 1 \text{ p. j.} \times e^{-rT} = 1 \text{ p. j.} \times v^T. \quad (1.3)$$

**Akumulovanú hodnotu** jednej p. j. investovanej pri efektívnej úrokovej miere  $i$ , resp. ekvivalentnej intenzite úrokovania  $r$  označujeme ako  $S$  a počítame pomocou rovnice

$$S = 1 \text{ p. j.} \times (1 + i)^T = 1 \text{ p. j.} \times e^{rT}. \quad (1.4)$$

*Pozn.:* Kvôli úspornejším zápisom v ďalšej časti tejto kapitoly nepíšeme skratku peňažnej jednotky (p. j.) do jednotlivých vzťahov.

## 1.2 Štandardný dlhopis a jeho časová štruktúra

Nech platia všetky označenia z podkapitoly 1.1. Vo finančnej matematike sa často používa všeobecnejší nástroj na diskontovanie peňažných veličín, tzv. **diskontný dlhopis**, ktorý je bezkupónovým cenným papierom (*zero coupon bond*, ZCB) s nominálnou hodnotou 1 p. j. V ďalšej časti práce sme pre takéto cenný papier používali pomenovanie **štandardný dlhopis**. Za predpokladu, že efektívna úroková miera  $i$ , resp. s ňou ekvivalentná intenzita úrokovania  $r$  sú konštantné, pre (súčasnú, diskontovanú)

---

<sup>1</sup>Niekedy sa používa aj pomenovanie *spojitá úroková miera*, čo je rovnocenné s termínom *intenzita úrokovania*.

hodnotu v čase  $t$  štandardného dlhopisu so splatnosťou (maturitou) v čase  $T$  platí vzťah

$$P_t = (1 + i)^{-(T-t)} = e^{-r(T-t)} = v^{T-t}. \quad (1.5)$$

Všeobecnejšie, uvažujme tzv. **časovú štruktúru** (*term structure*) ceny a výnosu štandardného dlhopisu s maturitou v čase  $T$ . Označme výnos do splatnosti<sup>2</sup> (*yield to maturity*, YTM) štandardného dlhopisu v čase  $t$  ako  $R(t, T)$ ,  $t \in \langle 0; T \rangle$ . Hodnota štandardného dlhopisu v čase  $t$  sa označuje symbolom  $P(t, T)$ , pričom platí

$$P(t, T) = e^{-R(t, T) \times (T-t)}, \quad (1.6)$$

pričom platí  $P(T, T) = 1$  pre všetky  $T > 0$ . Zo vzťahu (1.6) priamo vyplýva, že pre výnos (spojitú úrokovú mieru) v čase  $t$  bezkupónového dlhopisu s maturitou v čase  $T$  platí

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}. \quad (1.7)$$

Nech  $\tau$  vyjadruje čas do maturity (v čase  $t$ ) definovaný vzťahom  $\tau = T - t$ . Potom pre cenu, resp. výnos štandardného dlhopisu v čase  $t$  platí

$$P_t(\tau) = e^{-\tau R_t(\tau)}, \quad R_t(\tau) = -\frac{\ln P_t(\tau)}{\tau}, \quad (1.8)$$

pričom krivku  $\{R_t(u) : u \in \Upsilon\}$ , kde množina  $\Upsilon$  je obvykle nejakým uzavretým intervalom typu  $(T_{min} = 0; T_{max})$ , nazývame **výnosovou krivkou** (*yield curve*, YC) štandardného dlhopisu (vyjadrenou v čase  $t$ ). Výnosovým krivkám, ich typickým tvarom a ďalším vlastnostiam sme sa venovali v druhej kapitole tejto práce.

Časová štruktúra štandardného dlhopisu sa dá popísať aj pomocou tzv. okamžitej forwardovej úrokovej miery (*instantaneous forward rate*), ktorú označujeme zápisom  $f(t, T)$ . Okamžitá forwardová úroková miera je úrokovou mierou dohodnutou “dnes” (v čase  $t$ ), prinášajúcou úroky v čase  $T$ , na krátku dobu. Za predpokladu vylúčenia arbitráže medzi cenou dlhopisu  $P(t, T)$  a forwardovou mierou  $f(t, T)$  platí vzťah (odvodenie vid’ napr. v knihe [48])

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}. \quad (1.9)$$

---

<sup>2</sup>Dalej používame len skrátené pomenovanie *výnos*, pričom tým myslíme výnos za danú časovú jednotku, napr. ročný alebo mesačný výnos.

V praktických aplikáciách nás často zaujíma aj vzťah medzi výnosom do splatnosti  $R(t, T)$  a forwardovou mierou  $f(t, T)$ . Zo vzťahov (1.6) a (1.9) vyplýva, že

$$f(t, T) = R(t, T) + (T - t) \frac{\partial R(t, T)}{\partial T}. \quad (1.10)$$

Ak opäť uvažujeme označenie  $\tau = T - t$ , tak môžeme písať

$$f_t(\tau) = -\frac{d \ln P_t(\tau)}{d\tau} = R_t(\tau) + \tau \frac{dR_t(\tau)}{d\tau}, \quad (1.11)$$

kde  $\{f_t(u) : u \in \Upsilon\}$  je okamžitá forwardová krivka (*instantaneous forward rate curve*) štandardného dlhopisu platná v čase  $t$ . Pre úplnosť doplníme aj opačné vyjadrenie medzi výnosom do splatnosti a forwardovou mierou, resp. medzi výnosovou krivkou a forwardovou krivkou štandardného dlhopisu

$$R(t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T f(t, u) du, \quad R_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_t(u) du. \quad (1.12)$$

*Pozn.:* V niektorých odborných publikáciách (aj v rámci tejto práce, pri niektorých úvahách) pre výnosovú krivku, resp. okamžitú forwardovú krivku štandardného dlhopisu sa používa označenie  $R(t, T)$ , resp.  $f(t, T)$  (s premennou  $T$ ).

*Pozn.:* V praktických aplikáciách ak poznáme jednu z trojice časových štruktúr  $P(t, T)$ ,  $R(t, T)$ ,  $f(t, T)$  pre všetky  $T \in \Upsilon$  v danom časovom bode  $t$ , tak dokážeme jednoznačne určiť aj zvyšné dve časové štruktúry, a to pomocou vzťahov (1.6), (1.7), (1.9), (1.10).

Výnosové krivky  $R(t, T)$  a k nim patriace forwardové krivky  $f(t, T)$  môžu mať viacero možných priebehov, jedna vlastnosť je však vždy nemenná: krivky majú spoločný začiatočný bod, ktorý označíme symbolom  $r_t$  a formálne môžeme písať

$$r_t = R(t, t) = f(t, t) \quad \forall t \in \langle 0; t_{max} \rangle,$$

kde  $t_{max}$  je hornou hranicou sledovaného časového obdobia. Veličinu  $r_t$  nazývame okamžitou úrokovou mierou (*instantaneous short rate*) v čase  $t$  a definujeme ju jedným zo vzťahov

$$r_t \triangleq r(t) = \lim_{T \searrow t} R(t, T) = \lim_{T \searrow t} f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} \Big|_{T=t}. \quad (1.13)$$

Vo vyššie uvedených vzťahoch pre časové štruktúry sme predpokladali, že  $P(t, T)$ ,  $R(t, T)$  a  $f(t, T)$  sú spojité funkcie premennej  $T \in \Upsilon$  v každom časovom bode  $t \leq T$ . V niektorých aplikáciách je možné dodržať tento predpoklad, keď niektorú z časových

štruktúr modelujeme vhodnou spojitou funkciou. V praxi však ceny štandardných dlhopisov, resp. ich výnosy sledujeme v diskretných časových okamihoch  $t$  a pri konečnom (diskretnom) počte maturít  $T$ . Napriek tomu sa s časovými štruktúrami  $P(t, T)$ ,  $R(t, T)$  a  $f(t, T)$  po špecifikovaní dodatočných predpokladov dá pracovať aj v prípade, keď definičný obor  $\Upsilon$  je diskretnou množinou maturít  $T$ . S modelmi výnosových a forwardových kriviek sme sa ďalej zaoberali v podkapitole 1.4 a v druhej kapitole.

*Pozn.:* V ďalšej časti tejto kapitoly sme používali spojitú úrokovanie a pod pojmom *úroková miera* sme rozumeli spojitú úrokovú mieru (teda intenzitu úrokovania).

### 1.3 Stochastický kalkulus

K ďalšiemu postupu vo finančnom modelovaní úrokových mier či výnosových kriviek bolo nevyhnutné, aby sme uviedli základy stochastickej finančnej matematiky. V tejto kapitole sme zhrnuli všetky potrebné definície, označenia a vzťahy, ktoré boli dôležité pri našich ďalších úvahách. Uviedli sme základy stochastického kalkulu, definícia náhodného procesu a Brownovho pohybu, ďalšie pojmy ako podmienená stredná hodnota, martingal, filtrácia, Itōov integrál, Itōov proces a Itōova lema.

#### 1.3.1 Náhodné procesy a ich vlastnosti

**Definícia 1.1.** Uvažujme pravdepodobnostný priestor  $(\Omega, \mathcal{S}, \text{Pr})$ . *Stochastický proces* (alebo *náhodný proces*)  $\mathbb{X}$  je parametrický systém náhodných premenných definovaných na  $(\Omega, \mathcal{S}, \text{Pr})$  a označujeme ho ako

$$\mathbb{X} = \{X_t, t \in \Upsilon\} \triangleq \{X(t, \omega), t \in \Upsilon, \omega \in \Omega\},$$

kde  $\Upsilon$  je obvykle interval typu  $\langle a, b \rangle$ ,  $\langle a, b \rangle$ ,  $\langle a, \infty \rangle$  pre  $a < b$  alebo diskretná množina indexov, pričom premenná  $t$  sa nazýva čas.

Náhodný proces  $\mathbb{X}$  je vlastne funkciou dvoch premenných. Pre pevne zvolené  $t \in \Upsilon$  je  $X(t, \omega) = X(\omega)$  (obyčajnou) náhodnou premennou pre  $\omega \in \Omega$  na  $(\Omega, \mathcal{S}, \text{Pr})$ . Ak zafixujeme elementárnu udalosť  $\omega$ , tak  $X(t, \omega); \omega \in \Omega$  je funkciou času  $t$ , ktorú nazývame *trajektória*.

**Definícia 1.2.** Hovoríme, že stochastický proces  $\mathbb{X} = \{X_t, t \in \Upsilon\}$  je *gaussovský*, ak jeho konečnorozmerné rozdelenia sú multivariačné normálne rozdelenia.



*Pozn.:* Podrobnosti o konečnorozmerných rozdeleniach náhodného procesu sú uvedené napr. v knihe [53].

V nasledujúcej časti tejto podkapitoly sme zaviedli ďalšie dôležité pojmy a označenia, pomocou ktorých je možné charakterizovať stochastické procesy.

**Definícia 1.3.** [64] Hovoríme, že náhodný proces  $\mathbb{X} = \{X_t, t \in \Upsilon\}$  je *cadlag*, ak jeho trajektórie sú spojité sprava skoro všade a existujú limity zľava. Ak sú trajektórie spojité skoro všade, tak je proces  $\mathbb{X}$  *spojitý*.

Hovoríme, že náhodný proces  $\mathbb{X} = \{X_t, t \in \Upsilon\}$  má *nezávislé prírastky*, ak pre ľubovoľné prirodzené  $n$  a každé reálne delenie  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  sú náhodné premenné  $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  nezávislé. Ak navyše tieto náhodné premenné a náhodné premenné  $X_{t_1+h} - X_{t_0+h}, X_{t_2+h} - X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h}$  ako náhodné vektory majú rovnaké rozdelenie pre všetky  $h > 0$ , tak proces  $\mathbb{X}$  má *stacionárne prírastky*.

**Definícia 1.4.** Uvažujme náhodný proces  $\mathbb{X} = \{X_t, t \in \langle 0, \infty \rangle\}$  definovaný na pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{S}, \Pr)$ , pre ktorý sú splnené nasledovné predpoklady:

- a)  $\mathbb{X}$  má nezávislé prírastky a všetky prírastky typu  $X_{t+\tau} - X_t$  majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou  $\mu\tau$  a disperziou  $\sigma^2\tau$ ,
- b)  $X_0 = 0$ .

Potom proces  $\mathbb{X}$  sa nazýva *Brownov pohyb*.

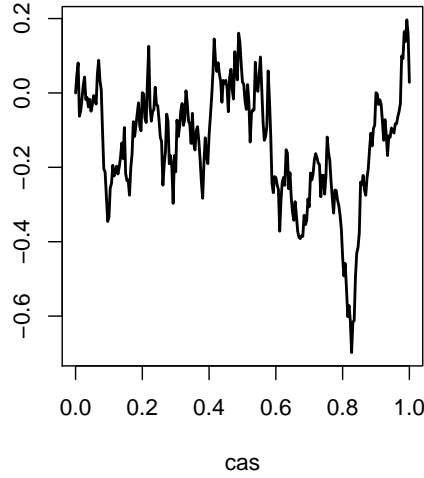
**Definícia 1.5.** Brownov pohyb s parametrami  $\mu = 0$  a  $\sigma^2 = 1$  sa nazýva *Wienerov proces*.

*Pozn.:* Wienerov proces je v niektorých publikáciách uvedený pod názvom *štandardný Brownov pohyb*.

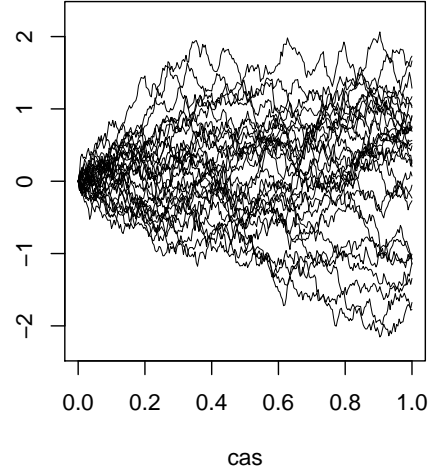
Brownov pohyb bol pomenovaný po škótskom botanikovi Robertovi Brownovi (1773-1858), ktorý svoje najväčšie vedecko-výskumné úspechy dosiahol v 20-tych rokoch 19. storočia. Matematickú teóriu o Brownovom pohybe rozvinuli až o sto rokov neskôr takí významní vedci ako Louis Bachelier, Albert Einstein či Norbert Wiener. V nasledovnej vete sú uvedené najdôležitejšie vlastnosti Brownovho pohybu.

**Veta 1.1.** Nech  $\mathbb{B} = \{B_t, t \in \langle 0, \infty \rangle\}$  je Brownov pohyb,  $s, t \in \langle 0, \infty \rangle$ . Platí

Jedna realizácia Wienerovho procesu



30 realizácií Wienerovho procesu



Obr. 1: Ukážka realizácií Wienerovho procesu (Zdroj: vlastné spracovanie)

- a) Brownov pohyb  $\mathbb{B}$  je gaussovský náhodný proces s funkciou strednej hodnoty  $E[B_t] \triangleq \mu_{\mathbb{B}}(t) = \mu t$  a kovariančnou funkciou

$$\text{cov}(B_s, B_t) \triangleq \gamma_{\mathbb{B}}(s, t) = \sigma^2 \min(s, t),$$

- b) náhodné premenné  $B_{t-s}$  a  $B_t - B_s$  majú  $\mathcal{N}(0, t-s)$  rozdelenie pre  $s < t$ ,  
 c) trajektórie Brownovho pohybu sú spojité s pravdepodobnosťou 1,  
 d) trajektórie Brownovho pohybu nie sú diferencovateľné v žiadnom bode.

*Dôkaz.* Vid' v knihe [53] na stranách 35 až 42.

**Definícia 1.6.** [64] Uvažujme  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{S}$  a rastúci systém  $\sigma$ -algebier  $\{\mathcal{S}_t, t \in \Upsilon\} \triangleq \{\mathcal{S}_t\}$ , t. j. pre všetky  $s, t \in \Upsilon$ ,  $s < t$  platí  $\mathcal{S}_s \subset \mathcal{S}_t$ . Systém  $\sigma$ -algebier  $\{\mathcal{S}_t\}$  nazývame *filtráciou* na  $\mathcal{S}$ , ak  $\mathcal{S}_t \subset \mathcal{S}$  pre všetky  $t \in \Upsilon$ .

Hovoríme, že náhodný proces  $\mathbb{X} = \{X_t, t \in \Upsilon\}$  je *adaptovaný* na  $\{\mathcal{S}_t\}$ , ak funkcia  $X_t$  je  $\mathcal{S}_t$ -merateľná pre všetky  $t \in \Upsilon$ .

*Prirodzenou filtráciou* náhodného procesu  $\mathbb{X}$  rozumieme najmenšiu filtráciu, na ktorú je proces  $\mathbb{X}$  adaptovaný.

**Definícia 1.7.** [64] Náhodný proces  $\mathbb{X} = \{X_t, t \in \Upsilon\}$  je  $\mathcal{S}_t$ -*martingal*, ak

- i) je adaptovaný na  $\{\mathcal{S}_t\}$ ,
- ii)  $E(|X_t|) < \infty$  pre všetky  $t \in \Upsilon$ ,
- iii)  $E(X_t | \mathcal{S}_s) = X_s$  pre všetky  $s, t \in \Upsilon$  také, že  $s \leq t$ .

*Pozn.:* Zápis  $E(X_t|\mathcal{S}_s)$  v predchádzajúcej definícii znamená podmienenú strednú hodnotu náhodnej premennej  $X_t$  vzhľadom na  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{S}_s$ . Podrobnosti o podmienenej strednej hodnote sú uvedené napr. v monografii [64].

**Veta 1.2.** Nech  $\mathbb{B} = \{B_t, t \in \langle 0, \infty \rangle\}$  je Brownov pohyb a  $\mathcal{S}_s$  je  $\sigma$ -algebra generovaná trajektóriami Brownovho pohybu  $\mathbb{B}$  do času  $s$ , t. j.  $\mathcal{S}_s = \sigma(B_\tau, \tau < s)$ . Potom Brownov pohyb  $\mathbb{B}$  je  $\mathcal{S}_s$ -martingal.

*Dôkaz.* Pozri publikáciu [53], strany 73 a 82.

### 1.3.2 Itôov proces, Itôova lema

V tejto časti sme zadefinovali tzv. zovšeobecnený Wienerov proces, sformulovali sme Itôovu lemu a Itôovu izometriu. Definície a výsledky z tejto podkapitoly sme využívali predovšetkým pri skúmaní stochastických modelov úrokových mier.

Nech  $\mathbb{W} = \{W_t, t \in \langle 0, \infty \rangle\}$  je Wienerov proces na pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{S}, \text{Pr})$ . Uvažujme “maličkú” zmenu času  $dt$  a označme prírastky Wienerovho procesu za čas  $dt$  symbolom  $dW$ , teda  $dW_t = W_{t+dt} - W_t$ . Keďže Wienerov proces je špeciálnym prípadom Brownovho pohybu, tak podľa Definície 1.4 platí, že prírastky  $dW(t)$  sú navzájom nekorelované a platí

$$E(dW_t) = 0, \quad D(dW_t) = dt.$$

**Veta 1.3.** Nech platia predchádzajúce označenia. Potom náhodná premenná  $dW_t$  má normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a disperziou  $dt$ , teda môžeme písať  $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$ .

*Dôkaz.* Tvrdenie vety vyplýva priamo z bodu b) Vety 1.1.

Uvažujme teraz náhodný proces  $\mathbb{X} = \{X_t, t \in \langle 0, t_{max} \rangle\}$  a nasledovnú diferenciálnu rovnicu

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \tag{1.14}$$

kde  $\mu(t, x)$  a  $\sigma(t, x)$  sú deterministické funkcie.

Na rozdiel od klasických (deterministických) diferenciálnych rovníc obsahuje vyššie uvedená rovnica (1.14) aj náhodnú časť, ktorá je vyjadrená pomocou diferenciálu  $dW_t$ . Z Vety 1.1 však poznáme, že trajektórie Brownovho pohybu nie sú diferencovateľné v žiadnom bode. Napriek tomu sa dá definovať výraz  $dW_t$ , môžeme ho chápať ako

analógiu diferencie  $dW_t$ . Podrobný výklad o konštrukcii diferenciálu  $dW_t$  je uvedený napríklad v knihe [53].

**Definícia 1.8.** Náhodný proces  $\mathbb{X} = \{X_t, t \in \langle 0, t_{max} \rangle\}$  definovaný na  $(\Omega, \mathcal{S}, \text{Pr})$ , ktorý vyhovuje diferenciálnej rovnici (1.14), sa nazýva *Itôov proces* (alebo *zovšeobecnený Wienerov proces*). Funkcia  $\mu(t, x)$  sa nazýva *drift* Itôovho procesu, kým  $\sigma(t, x)$  je *volatilita* Itôovho procesu.

Stochastická diferenciálna rovnica (1.14) sa dá prepísať aj do integrálneho tvaru

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad 0 \leq t \leq t_{max}, \quad (1.15)$$

kde posledný výraz je tzv. *Itôov stochastický integrál*. Formula (1.15) sa obvykle v odbornej literatúre nazýva *Itôova stochastická diferenciálna rovnica*. Ďalšie detaily o Itôovom integrále resp. Itôovej stochastickej diferenciálnej rovnici sú uvedené v knihe [53] alebo v práci [58].

V nasledujúcej vete sú uvedené základné vlastnosti Itôovho integrálu.

**Veta 1.4.** Nech  $\mathbb{W} = \{W_t, t \in \langle 0, \infty \rangle\}$  je Wienerov proces. Potom platí

- i)  $\int_0^t dW_s = W_t - W_0 = W_t \quad \wedge \quad \int_0^t dW_s \sim \mathcal{N}(0, t),$
- ii) ak  $g \equiv c = \text{konšt.}$ , tak  $\int_0^t g(s)dW_s = cW_t \quad \wedge$   
 $\int_0^t g(s)dW_s \sim \mathcal{N}(0, c^2t),$
- iii) ak pre merateľnú funkciu  $g : (0, t) \rightarrow (-\infty, \infty)$  platí  $\int_0^t g^2(s)ds < \infty$ , tak existuje Itôov integrál  $\int_0^t g(s)dW_s$ , ktorý má normálne rozdelenie a platia vzťahy

$$\text{E} \left[ \int_0^t g(s)dW_s \right] = 0, \quad (1.16)$$

$$\text{E} \left[ \left( \int_0^t g(s)dW_s \right)^2 \right] = \int_0^t (g(s))^2 ds. \quad (1.17)$$

*Dôkaz.* Pozri [75] alebo [48].

*Pozn.:* Identita (1.17) sa nazýva *Itôova izometria*.

**Definícia 1.9.** Náhodný proces  $\mathbb{X} = \{X_t, t \in \langle 0, t_{max} \rangle\}$  definovaný na  $(\Omega, \mathcal{S}, \text{Pr})$ , ktorý vyhovuje lineárnej stochastickej diferenciálnej rovnici

$$X_t = X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t dW_s, \quad 0 \leq t \leq t_{max}, \quad \mu > 0, \quad \sigma > 0, \quad (1.18)$$

sa nazýva *Ornsteinov-Uhlenbeckov proces*.

*Pozn.:* Formula (1.18) sa dá prepísať aj do tvaru diferenciálnej rovnice

$$dX_t = \mu X_s dt + \sigma dW_t, \quad 0 \leq t \leq t_{max}. \quad (1.19)$$

## 1.4 Smery finančného modelovania

Ako sme už spomínali v predchádzajúcich úvahách, z rozsiahlej teórie finančného modelovania nás zaujímali hlavne modely úrokových mier a výnosov štandardných dlhopisov, ktoré by sa dali aplikovať na oceňovanie peňažných tokov a valuáciu poistných produktov v životnom poistení. Počas štúdií odbornej literatúry sme sa stretli s viacerými prístupmi modelovania úrokových mier a výnosových kriviek, ktoré sme zhrnuli (bez nároku na úplnosť) v nasledujúcich štyroch bodoch:

1. afinné a bezarbitrážne modely (*affine and no-arbitrage models*),
2. rovnovážne modely okamžitej úrokovej miery (*equilibrium models of instantaneous short rate*),
3. priame modely výnosových alebo forwardových kriviek (*yield curve models, forward curve models*),
4. diskrétné modely úrokových mier založené na modeloch časových radov.

*Pozn.:* Na tomto mieste by sme poznamenali, že afinné, bezarbitrážne a rovnovážne modely uvedené v 1. a 2. bode v odbornej literatúre sú značne prepojené a väčšinou sú založené na veľmi podobnej báze predpokladov.

### 1.4.1 Afinné modely

Afinné modely časovej štruktúry výnosov sú takými faktorovými modelmi, pri ktorých sa predpokladá, že funkcia výnosovej krivky je pre všetky maturity  $T$  a v každom čase  $t$  afinnou funkciou pozorovaných výnosov štandardných dlhopisov (podrobnejšie viď [29]). Tieto modely dôkladne skúmali napríklad autori Duffie a Kan v článku [29], či Dai a Singleton v publikácii [23].

### 1.4.2 Bezarbitrážne modely

Bezarbitrážne modely sú vo väčšine prípadov založené na princípe vylúčenia arbitráže pri stanovení cien a výnosov štandardných dlhopisov, prípadne iných podkladových aktív. V odbornej literatúre pri bezarbitrážnom modelovaní sa môžeme stretnúť s dvoma prístupmi:

1. klasickým Vašíčkovým prístupom z článku [80],
2. všeobecnejším martingalovým prístupom (viď napr. [6], [48], [68]), ktorý je založený na vhodnej voľbe *numéraire*, teda základného meradla (jednotky oceňovania).

Vašíčkova konštrukcia je založená na predpoklade, že trhovú cenu rizika (*market price of risk*) nezávisí od maturity štandardného dlhopisu. Práve v prípade Vašíčkovho bezarbitrážneho prístupu prichádza k už spomínanému výraznému prepojeniu medzi bezarbitrážnymi a rovnovážnymi modelmi, pretože v prípade tohto prístupu sa obvykle zavedie nejaký podkladový (rovnovážny) proces okamžitej úrokovej miery, od ktorého sa potom odvádzajú výnosové krivky alebo sa oceňujú štandardné dlhopisy a ich deriváty. Vašíčkov prístup má nasledovné technické predpoklady [80]:

- (i) okamžitá úroková miera sa riadi podľa spojitého markovovského procesu<sup>3</sup>, pričom sa najčastejšie používa model tvaru

$$dr_t = \mu(r, t)dt + \gamma(r, t)dW_t, \quad (1.20)$$

kde  $\mu(r, t)$  je funkcia driftu,  $\gamma^2(r, t)$  je funkcia variancie procesu  $\{r_t\}_{t=0}^{\infty}$  a  $W_t$  je Wienerov proces na  $(\Omega, \mathcal{S}, \Pr)$ ; Markovov predpoklad znamená, že hodnota a rozdelenie okamžitej úrokovej miery v ľubovoľnom intervale  $(s, t)$ ,  $s < t$  závisí len od začiatočnej hodnoty  $r_s$  (za predpokladu, že poznáme vývoj okamžitej úrokovej miery do času  $s$ );

- (ii) cena diskontného dlhopisu v čase  $s_1$  (označovali sme ju  $P(s_1, s_2)$ ) je určená výlučne len pomocou podkladového procesu  $\{r_u : s_1 \leq u \leq s_2\}$ ,<sup>4</sup>
- (iii) predpoklad efektívneho trhu (*efficient market assumption*), pri ktorom predpokladáme, že nie sú žiadne transakčné náklady na trhu, nie je informačná asymetria, všetci investori majú k dispozícii informácie súčasne a v rovnakej miere a investori sa správajú racionálne (podrobnejšie viď v [48], [80]).

V súvislosti s bodom (ii) by sme dodali, že ak chceme zdôrazniť, že cenu dlhopisu odvádzame od podkladového procesu okamžitej úrokovej miery, tak používame

<sup>3</sup>Markovovský proces so spojitým časom sa nazýva *difúzny proces (diffusion process)*.

<sup>4</sup>To znamená, že cena dlhopisu závisí len od vývoja podkladového procesu okamžitej úrokovej miery medzi časovými bodmi  $s_1$  a  $s_2$ , t. j. minulý vývoj okamžitej úrokovej miery nemá vplyv na cenu dlhopisu po čase  $s_1$ .

označenie  $P(s_1, s_2) = P(s_1, s_2, r_{s_1})$ . V praktických aplikáciách často položíme  $s_1 = t$ ,  $s_2 = T$ , potom hovoríme, že  $P(t, T)$ , je určená výlučne len pomocou podkladového procesu  $\{r_u : t \leq u \leq T\}$ , kde  $T$  je doba splatnosti dlhopisu.

Ďalším príkladom na bezarbitrážne modelovanie je jednofaktorový HJM rámec (*Heath-Jarrow-Morton framework*, [35]), v ktorom sa modeluje okamžitá forwardová úroková miera  $f(t, T)$  pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice prvého rádu typu

$$d_t f(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t, \quad (1.21)$$

kde  $t$  je “dnešný” časový bod,  $T$  je čas splatnosti štandardného dlhopisu,  $d_t(\cdot)$  označuje diferenciál podľa premennej  $t$ ,  $\alpha(t, T)$  a  $\sigma(t, T)$  sú  $\mathcal{S}_t^W$ -adaptované deterministické funkcie a  $W_t$  je Wienerov proces na  $(\Omega, \mathcal{S}, \Pr)$ .<sup>5</sup> Po vhodnej voľbe funkcií  $\alpha(t, T)$ ,  $\sigma(t, T)$  sa od forwardových mier  $f(t, T)$  dajú odvodiť výnosy do splatnosti  $R(t, T)$ , okamžité úrokové miery  $r_t$ , prípadne ceny štandardných dlhopisov  $P(t, T)$ . Kľúčovým bodom vylúčenia arbitráže pri nastavení HJM rámca je vhodná voľba funkcie driftu  $\alpha(t, T)$  v diferenciálnej rovnici (1.21) pre forwardovú mieru (detailné vysvetlenie sa dá nájsť napr. v knihe [48]). Zovšeobecnením jednofaktorového HJM rámca je viacfaktorový HJM rámec, v ktorom náhodnosť forwardovej miery  $f(t, T)$  je generovaná  $n$  nezávislými Wienerovými procesmi  $W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^n$ ,  $n \geq 2$  (viď [35], [48])

$$d_t f(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T)dW_t^i, \quad (1.22)$$

kde  $\alpha(t, T)$ ,  $\sigma_1(t, T)$ ,  $\dots$ ,  $\sigma_n(t, T)$  sú  $\mathcal{S}_t^W$ -adaptované deterministické funkcie. Poznamenáme, že podkladové HJM modely sa v odborných publikáciách používajú skôr na oceňovanie finančných derivátov (napr. opcií viazaných na štandardné dlhopisy) ako na modelovanie časových štruktúr štandardného dlhopisu.

Jednou z formulácií všeobecného HJM modelu je tzv. Ho&Lee model z práce [39], v ktorom sa priamo modeluje okamžitá úroková miera  $r_t$  a od nej sa odvádzajú časové štruktúry  $f(t, T)$  a  $R(t, T)$ . Všeobecný Ho&Lee model pri rizikovo-neutrálnej miere  $Q$  má tvar

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t, \quad (1.23)$$

---

<sup>5</sup>Zo vzťahu (1.21) môžeme posúdiť, že okamžitá forwardová úroková miera sa riadi podľa Itôovho procesu, ktorý sme uviedli v Defínícii 1.8.

kde  $\theta_t$  deterministická funkcia driftu a  $\sigma$  je konštantný parameter (podrobnejšie vid' v [48]). V praktických aplikáciách Ho&Lee model sa len zriedka používa na priame modelovanie okamžitej úrokovej miery, oveľa častejšie sa od nej odvádzajú ceny derivátov úrokovej miery (s využitím Blackovej-Scholesovej teórie oceňovania derivátov).

### 1.4.3 Rovnovážne modely

Ako sme už spomínali, rovnovážne modely okamžitej úrokovej miery sú úzko prepojené s bezarbitrážnymi modelmi, využívajú veľmi podobné základy a predpoklady. Pri rovnovážnych modeloch sa modeluje okamžitá úroková miera konvergujúca k danej dlhodobej hladine (*equilibrium level*) a od nej sa väčšinou odvodí časová štruktúra výnosov dlhopisov, časová štruktúra forwardových úrokových miery a samotné ceny bezkupónových dlhopisov s nominálnou hodnotou jednej peňažnej jednotky (teda štandardných dlhopisov). Spoločnou črtou rovnovážnych modelov je aj to, že okamžitá úroková miera sa obvykle definuje pomocou diferenciálnej rovnice.

Populárnymi modelmi okamžitej úrokovej miery sú napríklad Vašíčkov model (vid' [80]) a Coxov-Ingersollov-Rossov model (*CIR model*, [22]), s ktorými sme sa podrobnejšie zaoberali v druhej kapitole tejto práce. Ďalším známym modelom je takzvaný CKLS-rámec (*Chan-Károlyi-Longstaff-Sanders framework*, [18]), ktorý je zovšeobecnením dvoch predchádzajúcich modelov a tiež sme sa s ním zaoberali v rámci ďalšej kapitoly. Všetky tri uvedené modely boli tzv. jednofaktorovými modelmi, v ktorých sa predpokladá, že dlhodobá hladina okamžitej úrokovej miery je konštantná. Existujú však zovšeobecnenia týchto modelov, tzv. dvoj- a viacfaktorové modely<sup>6</sup>. Napríklad v článku [47] od autorov Longstaff a Schwartz je uvedený všeobecný dvojfaktorový rovnovážny model. Poznamenali by sme, že v rámci tejto práce sme sa podrobnejšie nezaoberali s dvoj- a viacfaktorovými modelmi okamžitej úrokovej miery. Ďalej by sme spomenuli publikácie [16] a [17] od Cairnsa, ktoré sa tiež zaoberajú s rovnovážnymi a bezarbitrážnymi modelmi a odvádzajú sa v nich časové štruktúry dlhopisov.

Aplikácia rovnovážnych modelov je rozšírená nielen v oblasti finančného modelovania a oceňovania derivátov, ale aj v obore poistnej matematiky. Napríklad v článku od Parkera (1995, [61]) okamžitá úroková miera sa modeluje pomocou diferenciálnej rovnice druhého rádu, kým v ďalšej publikácii [62] sa rieši valuácia poistných produk-

---

<sup>6</sup>V dvojfaktorových modeloch rovnovážna hladina úrokovej miery nie je konštantná, ale modeluje sa pomocou stochastického procesu, napríklad prostredníctvom Vašíčkovho alebo CIR modelu.



tov za predpokladu, že podkladová úroková miera sa riadi podľa rovnovážneho modelu (Orsteinovho-Uhlenbeckovho procesu). V článku od Stehlíka a kol. (2014, [71]) sa tiež používajú diferenciálne rovnice druhého rádu, a to hlavne na valuáciu dôchodkov pri rôznych úrokových a demografických modeloch. V ďalšej publikácii [46], od autorov Lin a Tan, sa tiež skúmajú anuity a ich oceňovanie za predpokladu, že podkladové úrokové miery, resp. ceny akcií sa riadia podľa daných stochastických diferenciálnych rovníc. Aplikáciu CIR modelu v oblasti životného poistenia nájdeme v článku [26] od autorov Deelstra a Delbaen, resp. v publikácii [25] od autorky Deelstra.

#### 1.4.4 Priame modely výnosových a forwardových kriviek

Priame modely výnosových a forwardových kriviek sa výrazne líšia od afinných, bezarbitrážnych a rovnovážnych modelov. Pri modeloch výnosových kriviek daná krivka sa modeluje vhodnou funkciou, pričom sa nevyklúčujú arbitrážne príležitosti medzi modelovanými výnosmi, čo môže byť nevýhodou. Hlavná výhoda priamych modelov spočíva v ich jednoduchosti a vysokej kvalite fitu reálnych výnosov. Do tejto triedy patrí napríklad Nelsonov-Siegelov model (viď [55]) a Svenssonov model (viď [72]), s ktorými sme sa podrobnejšie zaoberali v druhej kapitole práce. V publikácii od autorov Diebold a Li sa poukazuje na výhody aj obmedzenia Nelsonovho-Siegelovho modelu pri praktickom modelovaní forwardových kriviek. Osobitnú skupinu tvoria v tejto triede tie publikácie, v ktorých pri odhade výnosových kriviek sa využíva metodika analýzy hlavných komponentov (*principal component analysis, PCA*).

S posledným z uvedených smerov finančného modelovania, diskretnými modelmi úrokových mier, sme sa počas tvorby tejto práce podrobnejšie nezaoberali. Spomenieme len článok [27] od Dhaeneho, v ktorom stochastická intenzita úrokovania sa modeluje pomocou ARIMA-procesu (*autoregressive integrated moving average process*), a publikáciu [32] od Graya, kde na popisovanie správania sa okamžitej úrokovej miery sa používajú GARCH-modely (*generalized autoregressive heteroskedasticity models*). V príspevku [36] od Hestona a Nandiho sa tiež aplikujú GARCH-modely pre modelovanie volatility v kombinácii s dvojfaktorovým modelom pre podkladovú úrokovú mieru.

## 2. Modely úrokových mier a výnosových kriviek

Štúdium modelov úrokových mier a výnosových kriviek tvorilo dôležitú časť nášho výskumu, ktorú sme potom vo veľkej miere využili v praktickej časti práce. V tejto kapitole sme najprv prezentovali najznámejšie typy rovnovážnych modelov úrokových mier, potom sme sa detailne zaoberali Vašíčkovým a CIR modelom. Uviedli sme ich definíciu, vlastnosti, postupy odhadovania ich parametrov a metódy používané na posúdenie kvality odhadnutých modelov. V podkapitole 2.4 sme definovali dva známe modely výnosových kriviek (Nelsonov-Siegelov model a Svenssonov model), zhrnuli sme ich vlastnosti a špecifikovali sme prístupy kalibrácie ich neznámych parametrov.

### 2.1 Rovnovážne modely úrokových mier

Modely okamžitej úrokovej miery (*instantaneous short-rate models*) sa obvykle využívajú na modelovanie podkladovej okamžitej úrokovej miery a následné oceňovanie jeho derivátov, napríklad dlhopisov, opcií na dlhopisy, swapov, floorov a pod. V rámci tejto práce nás zaujímali predovšetkým ceny štandardných dlhopisov a časové štruktúry odvodené od short-rate modelov. **Rovnovážne modely** (*equilibrium models*) tvoria jednu špeciálnu triedu short-rate modelov a vo finančnej matematike majú veľmi bohatú teóriu a široké spektrum praktických aplikácií. My sme sa však do veľkej miery obmedzili len na jediný rámec (*framework*) v rámci rovnovážnych modelov okamžitej úrokovej miery, ktorý sme formulovali v nasledujúcej definícii.

**Definícia 2.1.** [18] Nech  $\{r_t, t \in \langle 0, t_{max} \rangle\}$  je stochastickým procesom okamžitej úrokovej miery so spojitým časom. Hovoríme, že  $r_t$  sa riadi podľa CKLS procesu (*CKLS rámca, Chan-Károlyi-Longstaff-Sanders framework*), ak spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dr_t = (b - a r_t) dt + \sigma r_t^\gamma dW_t, \quad (2.1)$$

kde  $W_t$  je Wienerov proces (štandardný Brownov pohyb),  $a$ ,  $b$  sú parametrami driftu CKLS procesu, koeficient  $\gamma$  špecifikuje závislosť smerodajnej odchýlky procesu od

aktuálnej úrovne okamžitej úrokovej miery (intenzity úrokovania), kým  $\sigma > 0$  je parameter volatility (smerodajnej odchýlky).

V niektorých odborných publikáciách sa používa iná parametrizácia stochastickej diferenciálne rovnice (2.1), a to v tvare

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma r_t^\gamma dW_t, \quad (2.2)$$

kde  $\theta$  je tzv. rovnovážna úroveň okamžitej úrokovej miery v dlhodobom časovom horizonte (*mean-reversion coefficient*) a  $\kappa$  vyjadruje rýchlosť konvergencie úrokovej miery k parametru  $\theta$ .

Štvorparametrový CKLS rámec (2.1) je veľmi všeobecný, v praxi sa obvykle používajú jeho jednoduchšie, špeciálne verzie. V nasledujúcej časti tohto odseku sú uvedené najznámejšie špeciálne verzie CKLS rámca (pre ďalšie podrobnosti viď napríklad [57], [64]).

- **Mertonov model (1973):**  $a = 0, \gamma = 0$ :

$$dr_t = bdt + \sigma dW_t,$$

- **Vašíčkov model (1977):**  $\gamma = 0$ :

$$dr_t = (b - a r_t) dt + \sigma dW_t \quad \Leftrightarrow \quad dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma dW_t,$$

- **Dothanov model (1978):**  $a = 0, b = 0, \gamma = 1$ , resp.  $\kappa = 0, \theta = 0, \gamma = 1$ :

$$dr_t = \sigma r_t dW_t,$$

- **Geometrický Brownov pohyb:**

$$a = -\alpha, b = 0, \gamma = 1, \text{ resp. } \kappa = -\alpha, \theta = 0, \gamma = 1:$$

$$dr_t = \alpha r_t dt + \sigma r_t dW_t,$$

- **Coxov-Ingersollov-Rossov model (1980):**

$$a = 0, b = 0, \gamma = 3/2, \text{ resp. } \kappa = 0, \theta = 0, \gamma = 3/2:$$

$$dr_t = \sigma r_t^{3/2} dW_t,$$

- **Brennanov-Schwarzov model** (1980):  $\gamma = 1$ :

$$dr_t = (b - a r_t) dt + \sigma r_t dW_t \Leftrightarrow dr_t = \kappa (\theta - r_t) dt + \sigma r_t dW_t,$$

- **Coxov-Ingersollov-Rossov model** (CIR-model, 1985):  $\gamma = 1/2$ :

$$dr_t = (b - a r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t \Leftrightarrow dr_t = \kappa (\theta - r_t) dt + \sqrt{r_t} dW_t,$$

- **Constant elasticity variance model** (CEV model):

$$a = -\alpha, b = 0, \text{ resp. } \kappa = -\alpha, b = 0:$$

$$dr_t = \alpha r_t dt + \sigma r_t^\gamma dW_t.$$

Poznamenáme, že CKLS rámec bol formulovaný v roku 1992 (viď Definíciu 2.1), teda až po publikovaní jeho špeciálnych verzií. Na CKLS model preto naozaj môžeme pozerat' ako na akýsi rámec, ktorý združuje Mertonov, Vašíčkov, CIR, Dothanov a ďalšie modely. Chceli by sme podotknúť aj to, že nie všetky špeciálne verzie CKLS rámca uvedené v predošlom zozname sú rovnovážnymi modelmi. Napríklad v prípade Mertonovho modelu okamžitá úroková miera má rastúci trend, kým pri Dothanovom a Coxovom-Ingersollovom-Rossovom modeli (z roku 1980)  $r_t$  v dlhom časovom horizonte konverguje k nule. Skutočnými rovnovážnymi modelmi s danou dlhodobou úrovnou (nazývame ich aj *mean-reversion procesmi*) sú napr. Vašíčkov model a za určitých podmienok aj Brennanov-Schwarzov model a CIR model (publikovaný roku 1985). V niektorých odborných publikáciách mean reversion procesy sa používajú na modelovanie a overenie konvergenzie trhových úrokových sadzieb. Napríklad v článku [34] autorky skúmajú konvergenciu slovenských a estónskych úrokových mier pred prijatím eura v danej krajine. Chceli by sme podotknúť, že v rámci tejto práce sme neskúmali ani neoverovali mean-reversion vlastnosť reálnych kalibračných úrokových sadzieb.<sup>1</sup> Vašíčkov, resp. CIR model sme použili len ako vhodné podkladové procesy, od ktorých sme odvodili ceny štandardných dlhopisov, resp. jeho časové štruktúry.

## 2.2 Vašíčkov model

Uvažujme Vašíčkov model, ktorý navrhol český ekonóm Oldřich Vašíček vo svojej publikácii [80] v roku 1977. Poznamenáme, že Vašíčkov článok sa primárne zaoberal

<sup>1</sup>Táto skutočnosť môže znamenať výskyt určitých nepresností a môže znižovať dôveryhodnosť niektorých výsledkov uvedených v piatej kapitole.

časovou štruktúrou výnosov a následným odvodením parciálnych diferenciálnych rovníc na oceňovanie derivátov úrokovej miery. Pre úplnosť teraz uvádzame presnú definíciu Vašíčkovho modelu.

**Definícia 2.2.** Nech  $r_t$  označuje okamžitú úrokovú mieru (intenzitu úrokovania) v čase  $t \in \langle 0, t_{max} \rangle$ . Hovoríme, že  $r_t$  splňa **Vašíčkov model**, ak vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dr_t = (b - a r_t) dt + \sigma dW_t, \quad (2.3)$$

kde  $W_t$  je Wienerov proces,  $a$ ,  $b$  a  $\sigma$  sú kladné reálne parametre modelu. V reparametrizovanom zápise Vašíčkov model má tvar

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma dW_t, \quad (2.4)$$

kde  $\kappa$ ,  $\theta$  a  $\sigma$  sú kladné reálne koeficienty.

*Pozn.:* V ďalšej časti tejto práce sme prevažne používali parametrizáciu danú vzťahom (2.4).

### 2.2.1 Vlastnosti Vašíčkovho modelu

Ako sme to už uviedli v podkapitole 2.1, Vašíčkov model je špeciálnym prípadom CKLS modelu, patrí k jeho najznámejším verziám. S Vašíčkovým modelom a jeho atribútmi sa zaoberali v uplynulých desaťročiach desiatky odborných publikácii, teraz uvedieme len tie najdôležitejšie vlastnosti tohto modelu. Formulovali sme ich do tvaru matematických tvrdení a uviedli sme k nim len veľmi stručnú verziu dôkazov, nakoľko hlavným cieľom tejto práce nebola detailná analýza modelov okamžitých úrokových mier a úplné dôkazy uvedených viet už boli publikované vo viacerých publikáciách.

**Veta 2.1.** Nech okamžitá úroková miera  $r_t$ ,  $t \in \langle 0, t_{max} \rangle$  sa riadi podľa Vašíčkovho modelu. Potom pre ľubovoľné časové body  $s, u \in \langle 0, t_{max} \rangle$  také, že  $s < u$ , platí

$$r_u = r_s e^{-\kappa(u-s)} + \theta (1 - e^{-\kappa(u-s)}) + \sigma \int_s^u e^{-\kappa(u-v)} dW_v. \quad (2.5)$$

*Dôkaz.* Ku vzťahu (2.5) je možné dopracovať integrovaním formuly (2.3), podrobnosti vid' v knihe [11].  $\square$

**Veta 2.2.** Nech okamžitá úroková miera  $r_t$ ,  $t \in \langle 0, t_{max} \rangle$  sa riadi podľa Vašíčkovho modelu a nech  $s < u$ , pričom  $s, u \in \langle 0, t_{max} \rangle$ . Označme symbolom  $\mathcal{S}_s$   $\sigma$ -algebru

generovanú vývojom okamžitej úrokovej miery do času  $s$ . Potom podmienené rozdelenie veličiny  $r_u$  vzhľadom na  $\mathcal{S}_s$  je normálne rozdelenie a platí

$$r_u \mid \mathcal{S}_s \sim \mathcal{N} \left( r_s e^{-\kappa(u-s)} + \theta (1 - e^{-\kappa(u-s)}); \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(u-s)}) \right). \quad (2.6)$$

*Dôkaz.* Parametre podmieneného rozdelenia sa dajú odvodiť z tvrdenia Vety 2.1, teda zo vzťahu (2.5), kým normalita veličiny  $r_u$  vyplýva z vlastností štandardného Brownovho pohybu, resp. Itôovho integrálu (viď Vetu 1.1 a Vetu 1.4). Pre ďalšie podrobnosti pozri napríklad pôvodný Vašíčkov článok [80].  $\square$

Vašíčkov model je známy už niekoľko desaťročí a v oblasti finančného modelovania úrokových mier patrí k najznámejším a najpoužívanejším modelom. Jeho najväčšia výhoda spočíva v pomerne jednoduchej definícii a ľahko interpretovateľnom tvare. Model  $dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$  už bol dôkladne preskúmaný, výsledky odvodené od Vašíčkovho short-rate procesu boli mnohokrát overené, čo tiež zvyšuje jeho hodnotu v oblasti finančnej matematiky. V niektorých odborných publikáciách sa uvádza, že najslabším článkom Vašíčkovho modelu je *predpoklad o normálnom rozdelení generátora náhodnosti* (jedná sa o normalite Wienerovho procesu), resp. *markovova vlastnosť procesu okamžitej úrokovej miery*. Obidva predpoklady značne zjednodušujú matematické odvodenia a vedú k sofistikovaným výsledkom. Na druhej strane sa však ukázalo, že predpoklad normality náhodných odchýlok pri vývoji okamžitých úrokových mier nie v každom prípade je realistický.

**Definícia 2.3.** Uvažujme časový rad okamžitých úrokových mier  $\mathbf{X} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  a (nenáhodnú) okamžitú úrokovú mieru  $r_0$  platnú v čase 0. Hovoríme, že časový rad  $\mathbf{X}$  je diskretnou verziou Vašíčkovho procesu (2.4), ak pre všetky  $t \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí

$$r_t = e^{-\kappa} r_{t-1} + \theta (1 - e^{-\kappa}) + \sigma \int_{t-1}^t e^{-\kappa(t-v)} dW_v. \quad (2.7)$$

**Veta 2.3.** Diskretnú verziu Vašíčkovho procesu definovanú v Definícii 2.3 je možné zapísať tvare

$$r_t = e^{-\kappa} r_{t-1} + \theta (1 - e^{-\kappa}) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (2.8)$$

kde  $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$  je postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených náhodných premenných a platí, že  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0; v_t^2)$ , kde  $v_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa})$  pre  $t = 1, 2, \dots, n$ .

*Dôkaz.* Nezávislosť a normalita náhodných premenných  $\varepsilon_t$  vyplýva z vlastností Itôovho

integrálu. Parametre normálneho rozdelenia (predovšetkým predpis funkcie variancie  $v_t^2$ ) je možné odvodiť zo vzťahu (2.6) uvedeného vo Vete 2.2.  $\square$

**Veta 2.4.** Logaritmus funkcie vierohodnosti časového radu okamžitých úrokových mier  $\mathbf{X} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ , ktoré sme definovali vzťahom (2.7), má tvar

$$\ln L^{VAS} \triangleq \ln L(\kappa, \theta, \sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left[ \ln v_t^2 + \left( \frac{\varepsilon_t}{v_t} \right)^2 \right], \quad (2.9)$$

kde  $v_t^2$  je definovaný vo Vete 2.3 a  $\varepsilon_t = r_t - e^{-\kappa} r_{t-1} - \theta(1 - e^{-\kappa})$  pre  $t = 1, 2, \dots, n$  (podľa vzťahu (2.8)).

*Dôkaz.* Vzťah (2.9) je všeobecne známym vyjadrením logaritmu funkcie vierohodnosti pre postupnosti normálne rozdelených náhodných premenných (pre detaily vid' napr. publikácie [30], [79]).  $\square$

Spomeňme si teraz na tri základné predpoklady z Vašíčkovho článku [80], ktoré sme už uviedli v prvej kapitole (vid' podkapitolu 1.4). Nech parameter  $\lambda(t, r_t) = \lambda$  špecifikuje trhovú cenu rizika (*market price of risk*) nezávislú od času  $t$  a aktuálnej úrovne okamžitej úrokovej miery  $r_t$ .<sup>2</sup>

**Veta 2.5.** Uvažujme štandardný dlhopis s maturitou v čase  $T$ . Za predpokladu, že okamžitá úroková miera sa riadi podľa Vašíčkovho procesu (2.4), hodnota štandardného dlhopisu v čase  $t$  sa dá vyjadriť v explicitnom tvare (vid' v článku [34])

$$P(\tau, r_t) \triangleq P_t(\tau, r_t) = \exp \left\{ \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} (R_\infty - r_t) - R_\infty\tau - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (1 - e^{-\kappa\tau})^2 \right\}, \quad (2.10)$$

kde  $\tau = T - t$  je doba do maturity,  $r_t$  je hladina okamžitej úrokovej miery v čase  $t$  a  $R_\infty = \frac{\kappa\theta - \lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$ .

*Dôkaz.* Predpokladajme vylúčenie arbitrážnych príležitostí a nech trhovú cenu rizika  $\lambda(t, r_t) = \lambda$  nezávisí od času  $t$  a aktuálnej úrovne okamžitej úrokovej miery  $r_t$ . Potom pomocou Itôovej lemy sa dá odvodiť diferenciálna rovnica

$$-\frac{\partial P(\tau, r_t)}{\partial \tau} + \left( \kappa(\theta - r_t) - \lambda\sigma \right) \frac{\partial P(\tau, r_t)}{\partial r_t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P(\tau, r_t)}{\partial r_t^2} - r_t P(\tau, r_t) = 0. \quad (2.11)$$

---

<sup>2</sup>Bez arbitrážnosti modelu vo Vašíčkovom článku [80] je založená na predpoklade, že trhovú cenu rizika  $\lambda(t, r_t)$  nezávisí od maturity štandardného dlhopisu  $T$ . Všimnime si, že v našom máme ešte jednoduchšiu podmienku, pretože trhovú cenu rizika je konštantná, a teda nezávisí ani od času  $t$ , ani od aktuálnej úrovne okamžitej úrokovej miery  $r_t$ .

Konečný tvar ceny štandardného dlhopisu (2.10) sa hľadá ako explicitné riešenie diferenciálnej rovnice (2.11). Pre ďalšie podrobnosti pozri napríklad originálnu Vašíčkovu publikáciu [80].  $\square$

*Pozn.:* V niektorých aplikáciach je výhodné, aby hodnotu štandardného dlhopisu sme vyjadrili v tvare  $P(\tau, r_t) = A(\tau) \exp\{-B(\tau)r_t\}$ , kde  $A(\tau)$  a  $B(\tau)$  sú deterministické funkcie premennej  $\tau$  a originálnych Vašíčkových parametrov  $\kappa$ ,  $\theta$  a  $\sigma$ . Definície pomocných funkcií  $A(\tau)$  a  $B(\tau)$  špeciálne pre Vašíčkov model okamžitej úrokovej miery sa dajú nájsť napríklad v práci [74]. Poznamenáme, že v podkapitole 2.2.2 tejto práce aj my sme využívali vyjadrenie hodnoty štandardného dlhopisu v tvare  $P(\tau, r_t) = A(\tau) \exp\{-B(\tau)r_t\}$ , ale pri inej parametrizácii modelu.

Podľa tvrdenia Vety 2.5 výnosovú krivku štandardných dlhopisov tiež môžeme vyjadriť (v prípade Vašíčkovho modelu) v explicitnom tvare

$$R(\tau, r_t) \triangleq R_t(\tau, r_t) = -\frac{1}{\tau} \left( \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} (R_\infty - r_t) - R_\infty\tau - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (1 - e^{-\kappa\tau})^2 \right), \quad (2.12)$$

kde  $\tau = T - t$  je opäť doba do maturity a  $R_\infty = \frac{\kappa\theta - \lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$ .

Uvažujme opäť základný Vašíčkov model pre okamžitú úrokovú mieru v parametrizácii danej vzťahom (2.4). V článku [34], resp. v knihe [43] odporúčajú autori zavedenie nových, pomocných parametrov

$$\alpha = \kappa\theta - \lambda\sigma, \quad \beta = -\kappa, \quad (2.13)$$

kde parametre  $\alpha$ ,  $\beta$  sa nazývajú *rizikovo neutrálné parametre*. Potom hodnota štandardného dlhopisu (za predpokladu, že okamžitá úroková miera sa riadi podľa podkladového Vašíčkovho procesu) sa dá vyjadriť pri parametroch  $\alpha$  a  $\sigma^2$  v tvare

$$P(\tau, r_t) = \exp \left\{ d_0(\tau, \beta)r_t + d_1(\tau, \beta)\alpha + d_2(\tau, \beta)\sigma^2 \right\}, \quad (2.14)$$

kde  $\tau = T - t$  je doba do maturity,  $r_t$  je hodnota okamžitej úrokovej miery v čase  $t$  a funkcie  $d_0(\tau, \beta)$ ,  $d_1(\tau, \beta)$ ,  $d_2(\tau, \beta)$  sú definované predpismi

$$\begin{aligned} d_0(\tau, \beta) &= \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta}, \\ d_1(\tau, \beta) &= \frac{1}{\beta} \left( \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right), \\ d_2(\tau, \beta) &= \frac{1}{2\beta^2} \left( \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta\tau})^2}{2\beta} \right). \end{aligned}$$



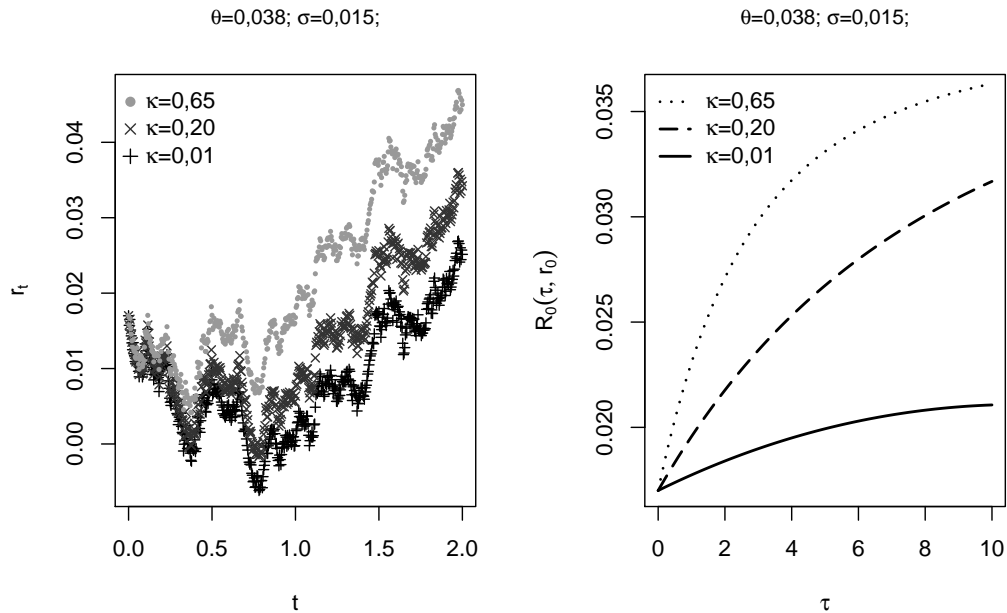
Po aplikovaní funkcie logaritmu na vzťah (2.14) dostaneme

$$\ln P(\tau, r_t) = d_0(\tau, \beta)r_t + d_1(\tau, \beta)\alpha + d_2(\tau, \beta)\sigma^2. \quad (2.15)$$

Potom pre výnos dlhopisu s časom do maturity  $\tau$  pri okamžitej úrokovej miere  $r_t$  platí

$$R(\tau, r_t) \triangleq R_t(\tau, r_t) = -\frac{1}{\tau} \left[ d_0(\tau, \beta)r_t + d_1(\tau, \beta)\alpha + d_2(\tau, \beta)\sigma^2 \right]. \quad (2.16)$$

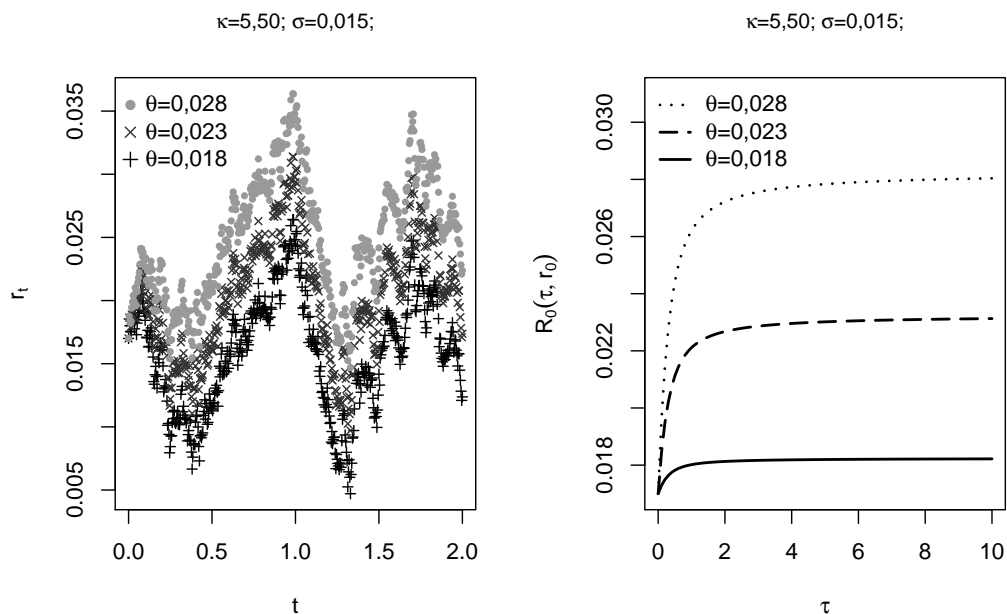
Na nasledujúcich grafoch sú prezentované rôzne simulované vývoje okamžitej úrokovej miery a tvary výnosových kriviek pri rôznych hodnotách parametrov Vašíčkovho modelu, jednotnej začiatkovej hodnote okamžitej úrokovej miery  $r_0 = 0,017$  p. a. a časovej jednotke 1 pracovný rok (252 dní).



Obr. 2: Simulované vývoje okamžitej úrokovej miery (vľavo) a tvar výnosových kriviek (vpravo) v prípade Vašíčkovho modelu pri rôznych hodnotách parametra  $\kappa$  (Zdroj: *vlastné spracovanie*)

Na Obr. 2 vidíme, že čím väčšia je hodnota parametra  $\kappa$ , tým rýchlejšie sa generované okamžité úrokové miery približujú k rovnovážnej úrovni  $\theta = 0,038$ . Na Obr. 3 môžeme spozorovať vplyv zmeny rovnovážneho koeficientu  $\theta$ , ktorá spôsobuje vertikálnu zmenu aj vo vývoji simulovaných úrokových mier, aj v prípade výnosových kriviek. Obr. 4 svedčí o tom, že čím väčší je koeficient smerodajnej odchýlky  $\sigma$ , tým väčšie výkyvy sa objavia vo vývoji generovaných okamžitých mier a tým sa vyššie aj

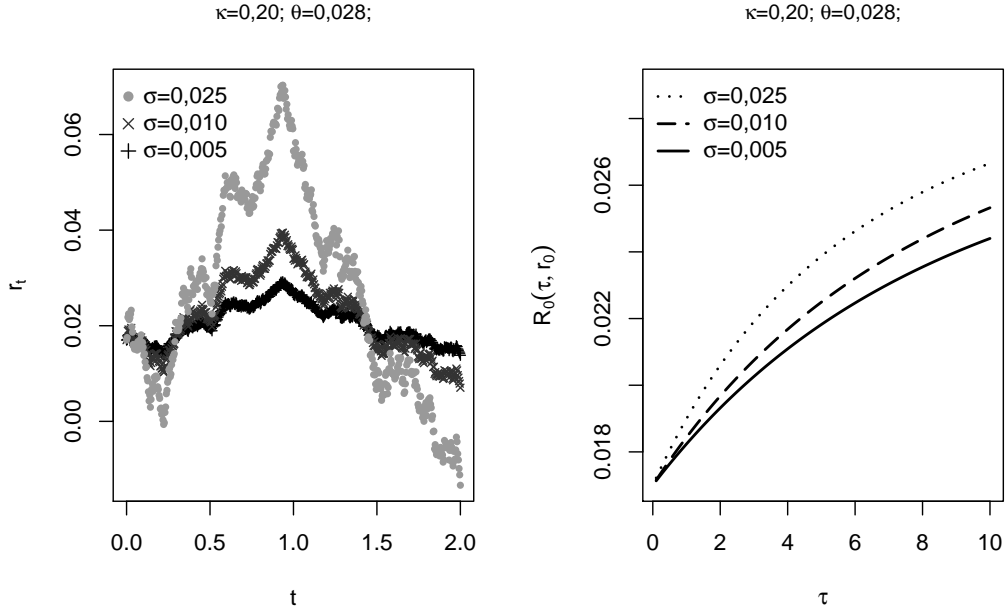
výnosy štandardných dlhopisov. Tiež si môžeme všimnúť, že všetky Vašíčkove výnosové krivky zobrazené na pravej strane Obr. 2, Obr. 3 a Obr. 4 majú rastúci tvar (na zobrazenom 10-ročnom intervale), čo vyšlo len zhodou okolností, pri daných kombináciách parametrov. Všeobecne platí, že Vašíčkove výnosové krivky môžu mať okrem rastúceho aj klesajúci a rastúco-klesajúci tvar (viď Obr. 5).



Obr. 3: Simulované vývoje okamžitej úrokovej miery (vľavo) a tvar výnosových kriviek (vpravo) v prípade Vašíčkovho modelu pri rôznych hodnotách parametra  $\theta$  (Zdroj: *vlastné spracovanie*)

### 2.2.2 Odhad parametrov Vašíčkovho modelu

V tejto časti sú prezentované dve metódy odhadu parametrov Vašíčkovho modelu. Prvý z nich bol publikovaný v článku [34] od trojice autoriek Halgašová, Stehlíková, Bučková, kým ten druhý v knihe [43] od Kwoka a tiež v práci [79] od Urbánovej Csajkovej. Pri prezentovaní metodík sme si zvolili voľnejšiu štruktúru a namiesto striktných konštrukcií typu *Definícia-Veta-Dôkaz* sme dali skôr záležať na lepšej interpretácii jednotlivých vzťahov a súvislostí. Kvôli ďalšiemu zjednodušeniu výkladu pri odhade neznámych parametrov Vašíčkovho modelu sme predpokladali, že (v okamihu odhadovania) sa nachádzame v začiatočnom časovom bode  $t = 0$ . Potom platí, že doba splatnosti štandardného dlhopisu  $T$  sa rovná času do maturity  $\tau$ , pretože  $\tau = T - t$ . Práve preto v tomto prípade sme si dovolili označiť symbolom  $\tau_j$  dobu splatnosti (matu-



Obr. 4: Simulované vývoje okamžitej úrokovej miery (vľavo) a tvar výnosových kriviek (vpravo) v prípade Vašíčkovho modelu pri rôznych hodnotách parametra  $\sigma$  (Zdroj: *vlastné spracovanie*)

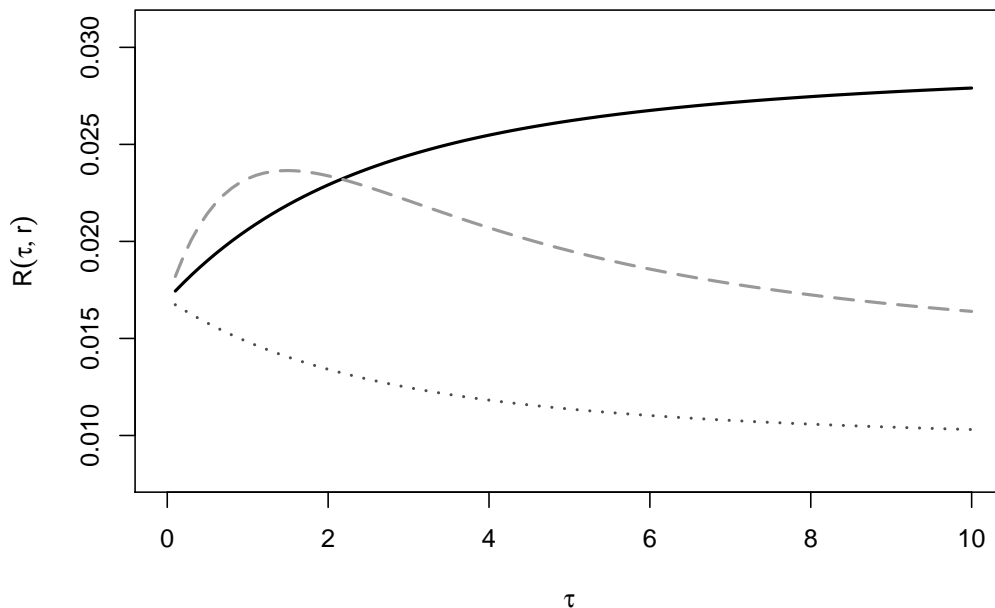
ritu)  $j$ -teho štandardného dlhopisu (vyjadrenú v daných časových jednotkách) namiesto pôvodného označenia  $T_j$ . Ďalej predpokladajme, že máme k dispozícii štandardné dlhopisy s maturitami  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$ . Ďalej označme  $R_{ij}$  ročný výnos štandardného dlhopisu s maturitou  $\tau_j$  pozorované v čase  $i = 1, 2, \dots, n$ . Potom  $\{R_{ij}; j = 1, 2, \dots, m\}$  reprezentuje historickú výnosovú krivku v čase  $i$ . Nech  $\{\bar{R}_{ij}; j = 1, 2, \dots, m\}$  je výnosová krivka v čase  $i = 1, 2, \dots, n$  skonštruovaná pomocou podkladového Vašíčkovho procesu. Uvažujme časový rad Vašíčkových okamžitých úrokových mier  $r_1, r_2, \dots, r_n$  a označme  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^\top$ . Podľa vzťahu (2.16) platí

$$R(\tau_j, r_i) \triangleq \bar{R}_{ij} = -\frac{1}{\tau_j} \left[ d_0(\tau_j, \beta)r_i + d_1(\tau_j, \beta)\alpha + d_2(\tau_j, \beta)\sigma^2 \right]. \quad (2.17)$$

Pri **prvej metóde** odhadu parametrov Vašíčkovho procesu prezentovanej v článku [34] hrá dôležitú úlohu nákladová funkcia  $F$ , ktorú definujeme pomocou váženej strednej kvadratickej chyby nasledujúcim predpisom

$$F \triangleq F(\alpha, \beta, \sigma^2, \mathbf{r}) = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n w_{ij} (R_{ij} - \bar{R}_{ij})^2, \quad (2.18)$$

kde  $w_{ij}$  je vhodne zvolená váha štandardného dlhopisu s maturitou  $\tau_j$  v prípade  $i$ -teho pozorovania. Po dosadení zo vzťahu (2.17) do definičnej rovnice (2.18) a ďalších



Obr. 5: Tri typy výnosových kriviek odvodených od Vašíčkovho modelu:  
rastúca, klesajúca a rastúco-klesajúca výnosová krivka

(Zdroj: vlastné spracovanie)

úpravách dostaneme

$$F = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} \left[ \tau_j R_{ij} + d_0(\tau_j, \beta) r_i + d_1(\tau_j, \beta) \alpha + d_2(\tau_j, \beta) \sigma^2 \right]^2. \quad (2.19)$$

Podľa postupu v článku [34] teraz uvažujme lineárnu sústavu  $(n+2)$  rovníc danú v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \sigma^2 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

pričom matice  $\mathbf{A} \triangleq \mathbf{A}_{2 \times 1}$ ,  $\mathbf{B} \triangleq \mathbf{B}_{2 \times n}$ ,  $\mathbf{C} \triangleq \mathbf{C}_{n \times 2}$ ,  $\mathbf{D} \triangleq \mathbf{D}_{n \times n}$  a vektory  $\mathbf{u} \triangleq \mathbf{u}_{2 \times 1}$ ,  $\mathbf{v} \triangleq \mathbf{v}_{n \times 1}$  sú definované v publikácii [34], a závisia len od neznámeho rizikovo neutrálneho parametra  $\beta$ , maturít  $\tau_j$ , váhových koeficientov  $w_{ij}$  a pozorovaných výnosov  $R_{ij}$  pre  $i = 1, 2, \dots, n$  a  $j = 1, 2, \dots, m$ , t. j. nezávisia od parametrov  $\alpha$ ,  $\sigma^2$  a  $\mathbf{r}$ . Po ďalších

úpravách vzťahu (2.20) dostaneme

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = \mathbf{u} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{v}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{D}^{-1} \left[ \mathbf{v} - \mathbf{C} \begin{pmatrix} \alpha \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \right]. \quad (2.22)$$

Pomocou vzťahov (2.21) a (2.22) pri danej hodnote parametra  $\beta$  postupne môžeme vypočítať odhady neznámych parametrov  $\alpha$  a  $\sigma^2$ , označme ich  $\hat{\alpha}_\beta$ , resp.  $\hat{\sigma}_\beta^2$  a vektor Vašíčkových okamžitých úrokových mier, ktorý označíme  $\hat{\mathbf{r}}_\beta$ . Vzniká otázka: ako zvoliť hodnotu rizikovo neutrálneho parametra  $\beta$ ? Jednou z odpovedí môže byť to, že za odhad koeficientu  $\beta$  zvolíme práve tú hodnotu, pri ktorej nákladová funkcia  $F$  nadobudne minimálnu hodnotu, teda

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^-} F(\hat{\alpha}_\beta, \beta, \hat{\sigma}_\beta^2, \hat{\mathbf{r}}_\beta) \\ \hat{\beta} &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^-} \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} \left[ \tau_j R_{ij} + d_0(\tau_j, \beta) (\hat{\mathbf{r}}_\beta)_i + d_1(\tau_j, \beta) \hat{\alpha}_\beta + d_2(\tau_j, \beta) \hat{\sigma}_\beta^2 \right]^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Potom môžeme označiť  $\hat{\alpha} \triangleq \hat{\alpha}_{\hat{\beta}}$ ,  $\hat{\sigma}^2 \triangleq \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2$ ,  $\hat{\mathbf{r}} \triangleq \hat{\mathbf{r}}_{\hat{\beta}}$ . Finálne parametre Vašíčkovho short-rate procesu dostaneme spätnou transformáciou

$$\hat{\kappa} = -\hat{\beta}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}, \quad \hat{\theta} = \frac{\hat{\alpha} + \lambda \hat{\sigma}}{\hat{\kappa}} \quad (2.24)$$

pri danej hodnote trhovej cene rizika  $\lambda$ .

Pri konštrukcii odhadnutej Vašíčkovej výnosovej krivky, označme ju symbolom  $\hat{R}(\tau, r_0)$ , sme používali vzťah (2.17), odhady rizikovo neutrálnych parametrov ( $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ) a odhad parametra smerodajnej odchýlky ( $\hat{\sigma}$ ), resp. odhad okamžitých úrokových mier ( $\hat{\mathbf{r}}$ ).

*Pozn.:* Spomínaný článok [34] od trojice autoriek Halgašová, Stehlíková, Bučková sa zaoberal jednak s odhadom parametrov Vašíčkovho modelu, ale aj použiteľnosťou trhových krátkodobých úrokových mier namiesto okamžitých mier. Autorky totiž okamžité úrokové miery (*short rates*) považovali za čisto teoretické a nepozorovateľné veličiny. V rámci publikácie overovali, či je možné použiť veľmi krátkodobú úrokovú mieru EONIA (*Euro OverNight Index Average*) ako “náhradu” za okamžité úrokové miery

a porovnávali sadzby EONIA s Vašíčkovými odhadmi okamžitých úrokových mier  $\hat{r}$ . V článku [34] bolo ukázané, že za určitých predpokladov je možné použiť trhové veľmi krátkodobé miery ako short rate, aj keď tento krok môže spôsobiť isté nepresnosti. V rámci našej práce sme sa riadili podľa tohto odporúčania a pri odhade parametrov Vašíčkovho modelu v praktickej časti používali práve sadzby EONIA.

Chceli by sme podotknúť, že kalibračná procedúra v prípade Vašíčkovho modelu je veľmi citlivá na dáta (na akosť dátového súboru). Keď súbor dátových bodov (matica hodnôt historických úrokových mier a výnosov) nespĺňa určité predpoklady, tak kalibračná procedúra môže zlyhať: postup založený na optimalizácii parametra  $\beta$  (minimalizácie účelovej funkcie  $F$ ) síce vyprodukuje nejaké odhady parametrov, no tie nemajú žiadnu finančnú interpretáciu, takže v tom prípade už nemôžeme hovoriť o Vašíčkom modeli pre okamžité úrokové miery (len o všeobecnom Ornsteinovom-Uhlenbeckovom procese).<sup>3</sup> Ako sme to už uviedli v podkapitole 2.2.1, Vašíčkova výnosová krivka môže mať tri rôzne tvary: rastúci, klesajúci a rastúco-klesajúci (vid' Obr. 5 v časti 2.2.1). Typickou príčinou zlyhania minimalizačnej procedúry je nerespektovanie obmedzenia na tri možné tvary Vašíčkovej výnosovej krivky v rámci dátového súboru historických výnosov. Vtedy hovoríme, že dané úrokové miery, resp. výnosy sa neriadia Vašíčkovým modelom.

Ako sme už uviedli na začiatku tejto časti, **druhý postup** pre odhad parametrov Vašíčkovho modelu bol publikovaný v knihe [43] a podrobnejšie skúmaný v práci [79]. V nasledujúcej časti práce sú uvedené podrobnosti spomínaného postupu. Nech teda platia všetky predchádzajúce označenia a predpoklady. Definujme nové pomocné premenné

$$\varphi = \exp(-\kappa), \quad \xi = \theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma\lambda}{\kappa}, \quad \rho = \frac{\sigma^2}{4\kappa}. \quad (2.25)$$

Pre úplnosť by sme dodali aj spätnú transformáciu, teda vyjadrenia pôvodných Vašíčkových short-rate parametrov pomocou nových premenných  $\varphi, \xi, \rho$

$$\kappa = -\ln \varphi, \quad \sigma = 2\sqrt{\rho\kappa}, \quad \theta = \xi + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} + \frac{\sigma\lambda}{\kappa}. \quad (2.26)$$

Hodnotu štandardného dlhopisu  $P(t, T) \triangleq P_t(\tau, r_t) \triangleq P(\tau, r_t)$  pre  $\tau = T - t$  je možné

---

<sup>3</sup>Ak pri riešení optimalizačnej úlohy (pri danom dátovom súbore) dostaneme napríklad zápornú hodnotu parametra  $\kappa$  alebo parametra  $\theta$ , tak hovoríme, že riešenie je neprípustné pre Vašíčkov model.

vyjadriť pri pomocnej parametrizácii v tvare

$$P(\tau, r_t) = \tilde{A}(\tau) \exp \left\{ -\tilde{B}(\tau)r_t \right\}, \quad \text{kde} \quad (2.27)$$

$$\tilde{B}(\tau) \triangleq \tilde{B}(\tau, \varphi) \triangleq \tilde{B}_{VAS} = -\frac{1 - \varphi^\tau}{\ln \varphi}, \quad (2.28)$$

$$\tilde{A}(\tau) \triangleq \tilde{A}(\tau, \varphi, \xi, \rho) \triangleq \tilde{A}_{VAS} = \exp \left\{ \xi \left( \tilde{B}(\tau) - \tau \right) - \rho \tilde{B}^2(\tau) \right\}, \quad (2.29)$$

kde  $(\varphi, \xi, \rho) \in \Omega = (0; 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Predpokladajme opäť, že sa nachádzame v čase  $t = 0$ , na trhu existujú štandardné dlhopisy s dobami do maturity  $\tau_j$  pre  $j = 1, 2, \dots, m$  a poznáme hodnotu trhovej okamžitej úrokovej miery v čase  $i = 1, 2, \dots, n$ , označme ju symbolom  $R_{i0}$ . Potom na základe rovnosti (2.27) a základného vzťahu medzi cenou a výnosom dlhopisu môžeme písať vzťahy

$$P(\tau_j, R_{i0}) = \tilde{A}(\tau_j) \exp \left\{ -\tilde{B}(\tau_j)R_{i0} \right\} \quad \wedge \quad P(t = 0, T = \tau_j) = \exp \left\{ -\bar{R}_{ij}\tau_j \right\}. \quad (2.30)$$

Z toho vyplýva

$$\bar{R}_{ij}\tau_j = \tilde{B}(\tau_j)R_{i0} - \ln \left( \tilde{A}(\tau_j) \right). \quad (2.31)$$

Definujme nákladový funkcionál  $U(\varphi, \xi, \rho)$  predpisom

$$U(\varphi, \xi, \rho) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_j^2 (R_{ij} - \bar{R}_{ij})^2, \quad (2.32)$$

kde  $R_{ij}$  je opäť trhovú výnos štandardného dlhopisu s maturitou  $\tau_j$  v čase  $i$  (v tejto chvíli považujeme  $R_{ij}$  za náhodnú premennú), kým  $\bar{R}_{ij}$  je výnos dlhopisu s maturitou  $\tau_j$  odvodený od podkladového Vašíčkovho procesu. Po dosadení vzťahu (2.31) do funkcionálu (2.32) a ďalších úpravách sa môžeme dopracovať k rovnosti

$$U(\varphi, \xi, \rho) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \tau_j R_{ij} - \tilde{B}(\tau_j)R_{i0} - \ln \left( \tilde{A}(\tau_j) \right) \right)^2. \quad (2.33)$$

V zmysle priemerných časových štruktúr štandardných dlhopisov a využitím známych vzťahov  $E[W^2] = E^2[W] + D(W)$ , resp.  $D(W+k) = D(W)$  pre ľubovoľné  $k \in \mathbb{R}$  dostaneme (pre podrobnosti vid' napr. prácu [79])

$$U(\varphi, \xi, \rho) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left[ \left( \tau_j E(R_j) - \tilde{B}(\tau_j)E(R_0) + \ln \tilde{A}(\tau_j) \right)^2 + D \left( \tau_j R_j - \tilde{B}(\tau_j)R_0 \right) \right], \quad (2.34)$$

kde  $E(R_j)$ , resp.  $D(R_j)$  pre  $j = 1, 2, \dots, m$  je stredná hodnota, resp. disperzia náhodného vektora  $(R_{1j}, R_{2j}, \dots, R_{nj})^\top$ , teda stredná hodnota, resp. disperzia výnosov štandardných dlhopisov s maturitou  $\tau_j$ . Analogicky,  $E(R_0)$ , resp.  $D(R_0)$  je stredná hodnota,

resp. disperzia náhodného vektora  $(R_{10}, R_{20}, \dots, R_{n0})^\top$ , teda stredná hodnota, resp. disperzia trhových okamžitých úrokových mier.

Autorka Urbánová Csajková v práci [79] prezentovala dvojfázovú kalibračnú metódu pre odhad neznámych parametrov Vašíčkovho modelu okamžitej úrokovej miery. V prvom kroku sa riešila všeobecná minimalizačná úloha

$$\min_{(\varphi, \xi, \rho) \in \Omega} U(\varphi, \xi, \rho), \quad (2.35)$$

kde  $\Omega = (0; 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Pri riešení minimalizačnej úlohy (2.35) sa vlastne hľadá takú trojicu  $(\varphi, \xi, \rho)$ , ktorá minimalizuje nákladový funkcionál  $U$ , teda pri ktorej reálne trhové výnosy  $R_{ij}$  sú “najbližšie” k odhadnutým Vašíčkovým výnosom  $\bar{R}_{ij}$ , pričom ich “vzdialenosť” meriame pomocou funkcionálu  $U$ . V diele [79] sa však ukázalo, že v prípade Vašíčkovho modelu pri danej hodnote  $\varphi$  odhady parametrov  $\rho$  a  $\xi$  je možné vypočítať zo sústavy rovníc

$$\check{\rho}_\varphi = \frac{\sum_{j=1}^m \left[ \tau_j \mathbf{E}(R_j) - \tilde{B}(\tau_j, \varphi) \mathbf{E}(R_0) + \check{\xi}_\varphi \left( \tilde{B}(\tau_j, \varphi) - \tau_j \right) \right] \left( \tilde{B}(\tau_j, \varphi) \right)^2}{\sum_{j=1}^m \left( \tilde{B}(\tau_j, \varphi) \right)^4}, \quad (2.36)$$

$$\check{\xi}_\varphi = - \frac{\sum_{j=1}^m \left[ \tau_j \mathbf{E}(R_j) - \tilde{B}(\tau_j, \varphi) \mathbf{E}(R_0) + \check{\rho}_\varphi \left( \tilde{B}(\tau_j, \varphi) \right)^2 \right] \left( \tilde{B}(\tau_j, \varphi) - \tau_j \right)}{\sum_{j=1}^m \left( \tilde{B}(\tau_j, \varphi) - \tau_j \right)^2}, \quad (2.37)$$

a tým pádom pôvodná minimalizačná úloha (2.35) pre trojrozmernú vektorovú premennú  $(\varphi, \xi, \rho)$  sa zredukuje na jednorozmernú optimalizáciu cez premennú  $\varphi \in (0; 1)$

$$\check{\varphi} = \arg \min_{\varphi \in (0; 1)} U(\varphi, \check{\xi}_\varphi, \check{\rho}_\varphi). \quad (2.38)$$

Označme  $\check{\xi} \triangleq \check{\xi}_{\check{\varphi}}$ , resp.  $\check{\rho} \triangleq \check{\rho}_{\check{\varphi}}$ . Po spätnej transformácii pomocnej trojice  $(\check{\varphi}, \check{\xi}, \check{\rho})$  podľa vzťahu (2.26) do pôvodných parametrov dostaneme

$$\check{\kappa} = -\ln \check{\varphi}, \quad \check{\sigma} = 2\sqrt{\check{\rho}\check{\kappa}}, \quad \check{\theta}_\lambda = \check{\xi} + \frac{\check{\sigma}^2}{2\check{\kappa}^2} + \frac{\check{\sigma}\lambda}{\check{\kappa}}, \quad (2.39)$$

pričom  $(\check{\kappa}, \check{\theta}_\lambda, \check{\sigma}, \lambda) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . Všimnime si, že odhady parametrov  $\kappa$  a  $\sigma$  sú už jednoznačne určené, no odhad parametra  $\theta$  stále závisí od hodnoty neznámeho



koeficientu trhového rizika  $\lambda$ . V druhej etape kalibračného postupu sa preto hľadá odhad neznámeho  $\lambda$ , a to riešením maximalizačnej úlohy

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}} \ln L(\check{\kappa}, \check{\theta}_\lambda, \check{\sigma}), \quad (2.40)$$

kde  $\check{\kappa}$ ,  $\check{\theta}_\lambda$ ,  $\check{\sigma}$  sú určené vzťahmi (2.39) a predpis logaritmu funkcie vierohodnosti  $\ln L$  je špecifikovaný vzťahom (2.9). Označme symbolom  $\check{\lambda}$  riešenie úlohy (2.40), ďalej označme  $\check{\theta} \triangleq \check{\theta}_{\check{\lambda}}$ . Potom našim finálnym odhadom parametrov podkladového Vašíčkovho procesu (2.4) okamžitých úrokových mier je trojica  $(\check{\kappa}, \check{\theta}, \check{\sigma})$  získaná vyššie uvedeným dvoj-etapovým *minmax optimalizačným postupom*, pri odhadnutej cene trhového rizika  $\check{\lambda}$ . Pomocou štvorice odhadnutých parametrov  $(\check{\kappa}, \check{\theta}, \check{\sigma}, \check{\lambda})$  a vzťahu (2.12) môžeme skonštruovať aj odhadnutú Vašíčkovu výnosovú krivku, označíme ju  $\check{R}(\tau, r_0)$ , kde  $r_0$  je začiatočná úroveň okamžitej úrokovej miery.<sup>4</sup>

### 2.2.3 Posúdenie kvality odhadnutého Vašíčkovho modelu

V praktických aplikáciách je dôležité, aby sme dokázali overiť presnosť odhadnutého Vašíčkovho modelu, práve preto prezentujeme niekoľko metód a ukazovateľov, pomocou ktorých môžeme určiť kvalitu nášho finálneho modelu. Prvotným testom kvality (pri oboch prezentovaných postupoch) môže byť napríklad **vizuálne posúdenie fitu** odhadnutej Vašíčkovej výnosovej krivky  $\hat{R}(\tau, r_0)$ , resp.  $\check{R}(\tau, r_0)$ ,  $\tau \in (0; t_{max})$  voči historickým výnosovým krivkám  $\{R_{ij}; j = 1, 2, \dots, m\}$  pre  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Okrem toho v prípade prvej metodiky založenej na odhade rizikovo neutrálnych parametrov  $\alpha, \beta$  môžeme použiť **test dobrej zhody** medzi historickými okamžitými úrokovými mierami  $R_{0i}$  a odhadnutými Vašíčkovými *short-rate*-mi  $\hat{\mathbf{r}}$ , pričom aj pri tomto porovnaní prichádza do úvahy grafické porovnanie spomínaných dvoch *short-rate* vektorov.

Na meranie kvality dvojetapového minmax odhadu  $(\check{\kappa}, \check{\theta}, \check{\sigma}, \check{\lambda})$  (pri druhej prezentovanej metóde) môžeme aplikovať ďalšie dve ukazovatele (podľa [76] a [79]): pomer vierohodností (*maximum likelihood ratio, MLR*) a nelineárny koeficient determinácie (*nonlinear  $R^2$  ratio*).

---

<sup>4</sup>Poznámame, že obidve metódy odhadovania parametrov Vašíčkovho modelu sme prezentovali pri zjednodušujúcom predpoklade, že daný postup vykonávame v čase  $t = 0$ . Prezentované postupy sa samozrejme dajú zovšeobecniť aj pre prípad všeobecného časového bodu  $t$  a konečnom dôsledku môžeme zostrojiť aj všeobecnú odhadnutú výnosovú krivku  $\check{R}_t(\tau, r_t)$  platnú v čase  $t$ .

Označme  $(\kappa^u, \theta^u, \sigma^u)$  trojicu, ktorá je riešením neviazanej maximalizačnej úlohy

$$(\kappa^u, \theta^u, \sigma^u) = \arg \max_{(\kappa, \theta, \sigma) \in \mathbb{R}_+^3} \ln L(\kappa, \theta, \sigma), \quad (2.41)$$

pričom logaritmus funkcie vierohodnosti Vašíčkovho modelu  $\ln L(\cdot, \cdot, \cdot)$  sme zaviedli vo Vete 2.4 (vzťah (2.9)).<sup>5</sup> **Pomer vierohodností** definujeme vzťahom

$$MLR = \frac{\ln L(\check{\kappa}, \check{\theta}, \check{\sigma})}{\ln L(\kappa^u, \theta^u, \sigma^u)}, \quad (2.42)$$

pričom je zrejmé, že  $MLR \leq 1$ . Ak hodnota indikátora  $MLR$  je blízko k hodnote 1, tak to znamená, že viazaná maximálna hodnota funkcie  $\ln L$  (čitateľ zlomku (2.42)) je blízko ku globálnej maximálnej hodnote tejto funkcie (menovateľ zlomku (2.42)). Inými slovami, keď hodnota  $MLR$  je “dostatočne blízko” k maximálnej hodnote 1, tak podkladový Vašíčkov model odhadnutý dvojfázovou minmax optimalizačnou metódou by mal byť použiteľný na odhad celej časovej štruktúry výnosov štandardných dlhopisov.

**Nelineárny koeficient determinácie  $R^2$**  je dôležitým indikátorom kvality nelineárnych regresných modelov. Definuje sa vzťahom

$$R^2 = 1 - \frac{U(\check{\varphi}, \check{\xi}, \check{\rho})}{U(1, 1, 1)}, \quad (2.43)$$

kde

$$U(1, 1, 1) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \tau_j^2 E[(R_j - R_0)^2],$$

pričom  $E[(R_j - R_0)^2]$  je druhý počiatočný moment náhodného vektora  $\{R_{ij} - R_{i0}; i = 1, 2, \dots, n\}$  a  $(\check{\varphi}, \check{\xi}, \check{\rho})$  je jediné globálne minimum nákladového funkcionálu  $U$ . Hodnota  $R^2$  blízka k jednej znamená, že  $U(\check{\varphi}, \check{\xi}, \check{\rho}) \ll U(1, 1, 1)$ , teda že hodnota nákladového funkcionálu v bode  $(\check{\varphi}, \check{\xi}, \check{\rho})$  je blízka k nule. Inými slovami, odhadnutá výnosová krivka odvodená od podkladového Vašíčkovho procesu dobre fituje reálne výnosy, teda dala by sa používať na modelovanie skutočných trhových výnosov (pre podrobnosti pozri článok [76] a prácu [79]).

#### 2.2.4 Zovšeobecnenia Vašíčkovho modelu

Klasický Vašíčkov model definovaný v Defínícii 2.2 má niekoľko zovšeobecnení. Jedným z nich je tzv. *zovšeobecnený dvojfaktorový Vašíčkov model* (*generalized Vaší-*

<sup>5</sup>Horný index  $u$  pri trojici  $(\kappa^u, \theta^u, \sigma^u)$  označuje to, že hodnota maxima je v tomto prípade neviazaná (*unrestricted*) vzhľadom na hodnotu štvrtého parametra  $\lambda$ .

ček *two-factor model*), ktorý sa môže definovať napr. predpisom

$$dr_t = \kappa (\theta_t - r_t) dt + \sigma dW_t^1 \quad \text{pre } t \in \langle 0; t_{max} \rangle, \quad (2.44)$$

$$d\theta_t = \mu (\vartheta - \theta_t) dt + \varsigma dW_t^2 \quad \text{pre } t \in \langle 0; t_{max} \rangle, \quad (2.45)$$

kde  $\kappa$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$ ,  $\vartheta$  a  $\varsigma$  sú kladné reálne parametre modelu a  $\{W_t^1\}$ ,  $\{W_t^2\}$  sú nezávislé Wienerove procesy definované na  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ . Zo vzťahu (2.44) vidíme, že v prípade zovšeobecneného dvojfaktorového Vašíčkovho modelu rovnovážna úroveň (*equilibrium level*) okamžitej úrokovej miery nie je deterministickým parametrom, ale riadi sa podľa stochastického procesu – jednofaktorového Vašíčkovho modelu (2.45). Najväčšia výhoda uvedeného dvojfaktorového Vašíčkovho modelu spočíva v jeho väčšej flexibilitate: dvojfaktorový model môže lepšie zachytiť zmenu tendencie v konvergencii okamžitej úrokovej miery ako jednofaktorový model. Nevýhodou je náročnejší odhad parametrov procesu (2.45), keďže rovnovážna úroveň je nepozorovateľnou veličinou.

Ďalším zovšeobecnením procesu (2.4) je tzv. *viacetapový Vašíčkov model* (*regime-switching Vašíček model*), ktorý sa obvykle definuje predpisom

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa_1 (\theta_1 - r_t) dt + \sigma_1 dW_t^1 && \text{pre } t \in \langle t_0; t_1 \rangle, \\ dr_t &= \kappa_2 (\theta_2 - r_t) dt + \sigma_2 dW_t^2 && \text{pre } t \in \langle t_1; t_2 \rangle, \\ \dots & \dots && \\ dr_t &= \kappa_n (\theta_n - r_t) dt + \sigma_n dW_t^n && \text{pre } t \in \langle t_{n-1}; t_n \rangle, \end{aligned} \quad (2.46)$$

kde  $n \geq 2$  je prirodzené číslo určujúce počet etáp,  $\kappa_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\sigma_i$  pre  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sú (nenáhodné) kladné reálne parametre modelu,  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  sú body časového delenia a  $\{W_t^1\}, \dots, \{W_t^n\}$  sú Wienerove procesy na  $(\Omega, \mathcal{S}, Pr)$ . Model (2.46) sa obvykle používa v tých prípadoch, keď chceme zachytiť správanie sa okamžitej úrokovej miery v dlhodobom časovom horizonte. Prvým krokom takého modelovania je identifikácia etáp<sup>6</sup>, potom v jednotlivých etapách prebehne odhad parametrov Vašíčkovho modelu (podľa postupov prezentovaných v podkapitole 2.2.2) a na záver sa zostroja časové štruktúry a výnosové krivky pre definované časové obdobia. Výhodou viacetapového

<sup>6</sup>Etapy sú vo väčšine prípadov určené prirodzene (napr. obdobie rastu, obdobie stagnácie, obdobie prepadu, a pod.), a to vývojom historických úrokových mier alebo prostredníctvom rôznych ekonomických ukazovateľov. Poznamenáme, že určovanie etáp nie je úplne objektívnou záležitosťou, nesie v sebe určitú mieru subjektivity (napr. pri výbere pomocného ekonomického ukazovateľa, podľa ktorého sa vytvoria jednotlivé etapy).

Vašíčkovho modelu je predovšetkým to, že presnejšie dokáže pokryť stredne dlhé a dlhé horizonty. Ako jeho nevýhodu môžeme uviesť nejednoznačnosť výberu odhadnutých procesov pri modelovaní budúcich úrokových mier a výnosových kriviek.

Posledným zovšeobecnením Vašíčkovho modelu, ktoré je prezentované v rámci tejto práce, je tzv. *negaussovský Vašíčkov model* (*non-gaussian Vašíček model*) definovaný diferenciálnou rovnicou

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma dZ_t \quad \text{pre } t \in \langle 0; t_{max} \rangle, \quad (2.47)$$

kde  $\{Z_t\}$  je ľubovoľný difúzny proces (okrem Brownovho pohybu). Všimnime si, že model (2.47) sa líši od Vašíčkovho modelu (2.4) len generátorom náhodnosti okamžitých úrokových mier. Je známe, že prírastky Wienerovho procesu (v originálnom Vašíčkovom modeli) majú gaussovské normálne rozdelenie. Zovšeobecnenie prichádza práve v tom, že prírastky procesu  $\{Z_t\}$  majú inú distribúciu, napr. rozdelenie s ťažšími chvostami ako normálne rozdelenie alebo nesymetrické rozdelenie. Výhoda negaussovských modelov spočíva v ich prispôsobivosti k danej situácii, výberom vhodného rozdelenia totiž môžeme dosiahnuť lepšiu kvalitu modelu ako pri klasickom prístupe. Nevýhodou však je, že teoretické výsledky pre negaussovské modeli okamžitej úrokovej miery sú málo známe a nemôžeme pre nich používať ani odhadovacie procedúry (prezentované v časti 2.2.2) založené na normálnom rozdelení Vašíčkovho modelu.

### 2.3 Coxov-Ingersollov-Rossov model

Ďalšou špeciálnou verziou CKLS procesu je Coxov-Ingersollov-Rossov model, ktorý bol publikovaný trojicou autorov v článku [22] v roku 1985. V rámci tejto podkapitoly sme zvolili podobnú formu výkladu ako v prípade podkapitoly 2.2 a často sme sa odvolávali na súvislosti, interpretácie a výsledky zo spomínanej predchádzajúcej podkapitoly.

**Definícia 2.4.** Nech  $r_t$  označuje okamžitú úrokovú mieru (intenzitu úrokovania) v čase  $t \in \langle 0, t_{max} \rangle$ . Hovoríme, že  $r_t$  spĺňa **Coxov-Ingersollov-Rossov model** (CIR model), ak vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dr_t = (b - a r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t, \quad (2.48)$$

kde  $W_t$  je Wienerov proces,  $a$ ,  $b$  a  $\sigma$  sú kladné reálne parametre modelu. V prípade inej,

tiež zaužívanej parametrizácii CIR modelu platí

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad (2.49)$$

kde  $\kappa$ ,  $\theta$  a  $\sigma$  sú kladné reálne parametre.

Z definície Coxov-Ingersollov-Rossov modelu a vzťahu (2.49) vidíme, že okamžitá úroková miera  $r_t$  konverguje v nekonečne dlhom časovom horizonte k parametru  $\theta$ , ktorú, podobne ako v prípade Vašíčkovho či všeobecného CKLS modelu, nazývame aj rovnovážnou úrovňou procesu (*equilibrium level*). Parameter  $\kappa$  opäť špecifikuje rýchlosť konvergenzie k rovnovážnej hladine, kým  $\sigma$  je parametrom smerodajnej odchýlky modelu. Všimnime si, že na volatilitu CIR procesu vplýva aj aktuálna hodnota okamžitej úrokovej miery. Z toho vyplýva, že pre hodnoty intenzity úrokovania blízke k nule volatilita CIR procesu bude malá, kým pre vyššie hodnoty miery  $r_t$  CIR proces generuje väčšie výkyvy. Navyše ak medzi trojicou parametrov  $\kappa, \theta, \sigma$  platí nerovnosť

$$2\kappa\theta > \sigma^2, \quad (2.50)$$

tak všetky okamžité úrokové miery  $r_t$ ,  $t \in \langle 0, t_{max} \rangle$  z CIR procesu (2.49) sú nezáporné (za predpokladu, že začiatočná hodnota procesu  $r_0$  je nezáporná). Práve v týchto, vyššie uvedených faktoch spočívajú hlavné rozdiely medzi Vašíčkovým a CIR modelom, pretože v prípade Vašíčkovho procesu volatilita okamžitej úrokovej miery je nezávislá od aktuálnej hodnoty  $r_t$  a Vašíčkove short rate-y môžu nadobúdať aj záporné hodnoty.

Uvažujme teraz štandardné dlhopisy s maturitami v čase  $T \in \langle 0, T_{max} \rangle$  a ich ceny  $P(t, T)$  platné v čase  $t$ . Nasledujúca veta vyslovuje tvrdenie o hodnote štandardného dlhopisu viazaného na okamžitú úrokovú mieru, ktorá sa riadi CIR procesom.

**Veta 2.6.** Nech platia všetky vyššie uvedené označenia. Ak predpokladáme, že podkladový proces okamžitej úrokovej miery  $\{r_t; t \in \langle 0, t_{max} \rangle\}$  sa riadi podľa CIR modelu, tak pre hodnotu štandardného dlhopisu v čase  $t$  platí

$$P(t, T) \triangleq P(\tau, r_t) \triangleq P_t(\tau, r_t, \kappa, \theta, \sigma, \lambda) = \dot{A}(\tau) \exp \left\{ -\dot{B}(\tau)r_t \right\}, \quad (2.51)$$

kde  $\tau = T - t \in \langle 0, T_{max} - t \rangle$  vyjadruje čas do maturity,  $r_t$  je hodnota CIR procesu okamžitej úrokovej miery v čase  $t$  a funkcie  $\dot{B}(\tau)$  a  $\dot{A}(\tau)$  sú definované nasledovne

[43], [76]:

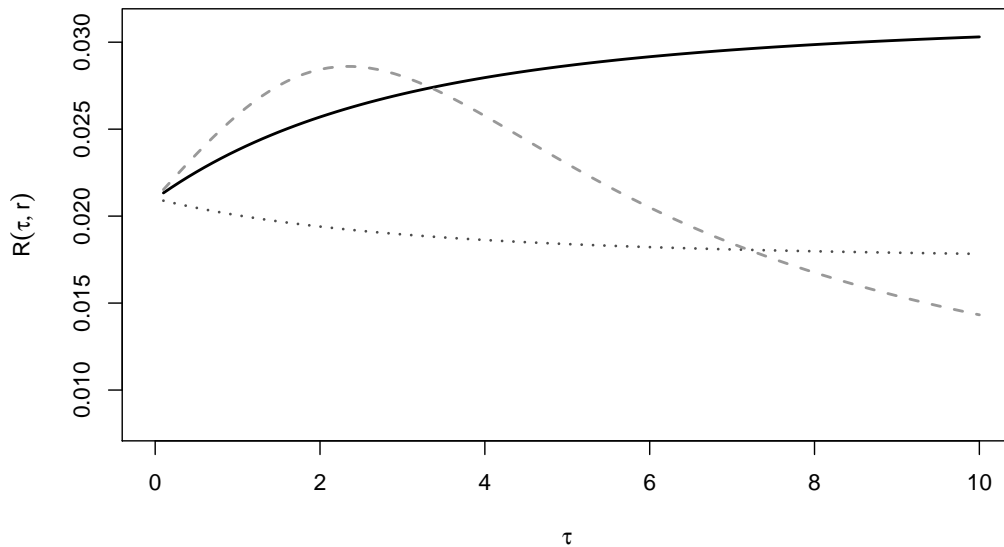
$$\dot{B}(\tau) \triangleq \dot{B}(\tau, \kappa, \sigma, \lambda) \triangleq \dot{B}_{CIR} = \frac{2(\exp(\eta\tau) - 1)}{(\kappa + \lambda + \eta)(\exp(\eta\tau) - 1) + 2\eta}, \quad (2.52)$$

$$\dot{A}(\tau) \triangleq \dot{A}(\tau, \kappa, \theta, \sigma, \lambda) \triangleq \dot{A}_{CIR} = \left( \frac{\eta \exp\left(\frac{(\kappa + \lambda + \eta)\tau}{2}\right)}{\exp(\eta\tau) - 1} \dot{B}(\tau) \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}, \quad (2.53)$$

kde  $\eta = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$  a parameter  $\lambda$  vyjadruje trhovú cenu rizika (*market price of risk*). Potom výnosová krivka v prípade CIR modelu má tvar

$$R(\tau, r_t) \triangleq R_t(\tau, r_t, \kappa, \theta, \sigma, \lambda) = \frac{\dot{B}(\tau)r_t - \ln \dot{A}(\tau)}{\tau}. \quad (2.54)$$

*Dôkaz.* Pozri [43], [76], [79].



Obr. 6: Tri typy výnosových kriviek odvodených od CIR modelu: rastúca, klesajúca a rastúco-klesajúca výnosová krivka

(Zdroj: *vlastné spracovanie*)

Autori v článkoch [63] a [76] poukázali na to, že koeficient trhovej ceny rizika  $\lambda$  sa vyskytuje vo funkciách  $\dot{A}(\tau)$  a  $\dot{B}(\tau)$  v každom prípade iba vo výraze  $\kappa + \lambda$ . Práve táto idea viedla k záveru, ako sa dá 4-parametrová funkcia (2.51) vyjadrujúca hodnotu

štandardných dlhopisov reparametrizovať pomocou trojice nových parametrov

$$\phi = \exp(-\eta), \quad \zeta = \frac{\kappa + \lambda + \eta}{2\eta}, \quad \varrho = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}, \quad (2.55)$$

kde  $\kappa$ ,  $\theta$  a  $\sigma$  sú pôvodné parametre podkladového CIR procesu (2.49),  $\lambda$  je trhov $\acute{a}$  cena rizika a pomocn $\acute{y}$  parameter  $\eta$  je definovaný vo Vete 2.6. Potom pre hodnotu štandardných dlhopisov platí

$$P(\tau, r_t) \triangleq P_t(\tau, T, r_t, \phi, \zeta, \varrho) = \tilde{A}(\tau) \exp \left\{ -\tilde{B}(\tau)r_t \right\}, \quad (2.56)$$

kde  $\tau = T - t \in \langle 0; T \rangle$ ,  $r_0$  je začiatočná hodnota okamžitej úrokovej miery a funkcie  $\tilde{A}(\tau)$  a  $\tilde{B}(\tau)$  sú definované nasledovne [43], [76]:

$$\tilde{B}(\tau) \triangleq \tilde{B}(\tau, \phi, \zeta) \triangleq \tilde{B}_{CIR} = -\frac{1}{\ln \phi} \frac{1 - \phi^\tau}{\zeta(1 - \phi^\tau) + \phi^\tau}, \quad (2.57)$$

$$\tilde{A}(\tau) \triangleq \tilde{A}(\tau, \phi, \zeta, \varrho) \triangleq \tilde{A}_{CIR} = \left( \frac{\phi^{(1-\zeta)\tau}}{\zeta(1 - \phi^\tau) + \phi^\tau} \right)^\varrho, \quad (2.58)$$

kde  $\phi \in (0; 1)$ ,  $\zeta \in (0; 1)$  a  $\varrho \in \mathbb{R}$ . Potom pre výnosovú krivku štandardných dlhopisov odvodených od podkladového CIR procesu (2.49) platí

$$R(\tau, r_t) \triangleq R_t(\tau, r_t, \phi, \zeta, \varrho) = \frac{\tilde{B}(\tau)r_t - \ln \tilde{A}(\tau)}{\tau}. \quad (2.59)$$

Pre úplnosť uvádzame aj spätnú transformáciu parametrov, t. j. vyjadrenie pôvodných parametrov CIR modelu pomocou pomocných parametrov  $\phi$ ,  $\zeta$  a  $\varrho$  v tvare

$$\eta = -\ln \phi, \quad \kappa = \eta(2\zeta - 1) - \lambda, \quad \sigma = \eta\sqrt{2\zeta(1 - \zeta)}, \quad \theta = \frac{\varrho\sigma^2}{2\kappa}. \quad (2.60)$$

### 2.3.1 Odhad parametrov CIR modelu

Metodika odhadu neznámych parametrov CIR modelu, ktorá je prezentovaná v tejto časti, je veľmi podobnou metódou, ako druhý postup odhadovania parametrov Vašíčkovho modelu prezentovaný v podkapitole 2.2.2.<sup>7</sup> Pre jednoduchosť opäť predpokladajme, že pri odhadovaní sa nachádzame v čase  $t = 0$  a máme k dispozícii štandardné dlhopisy s maturitami  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$ . Definujme nákladový funkcionál  $Z(\phi, \zeta, \varrho)$  predpisom

$$Z(\phi, \zeta, \varrho) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_j^2 \left( R_{ij} - \tilde{R}_{ij} \right)^2, \quad (2.61)$$

<sup>7</sup>Počas vypracovania teoretických základov metódy odhadu neznámych parametrov CIR modelu sme sa spoliehali na práce [76], [79].

kde  $\{R_{ij}; j = 1, 2, \dots, m\}$  opäť reprezentuje historickú výnosovú krivku v čase  $i = 1, \dots, n$  a  $\{\ddot{R}_{ij}; j = 1, 2, \dots, m\}$  je výnosová krivka v čase  $i = 1, 2, \dots, n$  skonštruovaná pomocou podkladového CIR procesu pri pomocných parametroch  $\phi, \zeta, \varrho$  a platí  $\ddot{R}_{ij} \triangleq R_i(\tau_j, r_i, \phi, \zeta, \varrho)$ . Potom pre hodnotu štandardného dlhopisu platia vzťahy

$$P(\tau_j, R_{i0}) = \ddot{A}(\tau_j) \exp \left\{ \ddot{B}(\tau_j) R_{i0} \right\} \quad \wedge \quad P(t = 0, T = \tau_j) = \exp \left\{ -\ddot{R}_{ij} \tau_j \right\}, \quad (2.62)$$

pre maturity  $\tau_j; j = 1, 2, \dots, m$ , kde  $R_{i0}$  je hodnota trhovej okamžitej úrokovej miery v čase  $i = 1, 2, \dots, n$ . Platí teda

$$\ddot{R}_{ij} \tau_j = \ddot{B}(\tau_j) R_{i0} - \ln \left( \ddot{A}(\tau_j) \right).$$

Po dosadení tohto vzťahu do funkcionálu (2.61), v zmysle priemerných časových štruktúr štandardných dlhopisov (pozri úvahu v podkapitole 2.2.2 pod vzťahom (2.33)) dostaneme

$$Z(\phi, \zeta, \varrho) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left[ \left( \tau_j E(R_j) - \ddot{B}(\tau_j) E(R_0) + \ln \ddot{A}(\tau_j) \right)^2 + D \left( \tau_j R_j - \ddot{B}(\tau_j) R_0 \right) \right], \quad (2.63)$$

kde  $E(R_j)$ , resp.  $D(R_j)$  pre  $j = 1, 2, \dots, m$  je stredná hodnota, resp. disperzia náhodného vektora  $(R_{1j}, R_{2j}, \dots, R_{nj})$  a  $E(R_0)$ , resp.  $D(R_0)$  pre  $j = 1, 2, \dots, m$  je stredná hodnota, resp. disperzia náhodného vektora  $(R_{10}, R_{20}, \dots, R_{n0})^\top$ .

Podobne ako v prípade druhého prístupu odhadu parametrov Vašíčkovho modelu, aj teraz sme zvolili dvojfázovú odhadovaciu metódu pre odhad neznámych parametrov CIR modelu, ktorú publikovali autori Ševčovič a Urbánová Csajková v článku [76]. V prvom kroku dvojetapového postupu sa rieši minimalizačná úloha

$$Z \left( \hat{\phi}, \hat{\zeta}, \hat{\varrho} \right) = \min_{(\phi, \zeta, \varrho) \in \Omega} Z(\phi, \zeta, \varrho), \quad (2.64)$$

kde  $\Omega = (0; 1) \times (0; 1) \times \mathbb{R}$ . V úlohe (2.64) vlastne hľadáme takú trojicu  $(\hat{\phi}, \hat{\zeta}, \hat{\varrho})$ , ktorá minimalizuje nákladový funkcionál  $Z$ , teda pri ktorej reálne trhové výnosy  $R_{ij}$  sú “najbližšie” k modelovaným CIR-výnosom  $\ddot{R}_{ij}$ , pričom ich “vzdialenosť” meriame pomocou funkcionálu  $Z$ . Po spätnej transformácii pomocnej trojice  $(\hat{\phi}, \hat{\zeta}, \hat{\varrho})$  podľa vzťahu (2.60) do pôvodných parametrov dostaneme

$$\hat{\kappa}_\lambda = -\ln \hat{\phi} \times (2\hat{\zeta} - 1) - \lambda, \quad \hat{\sigma}_\lambda = -\ln \hat{\phi} \times \sqrt{2\hat{\zeta}(1 - \hat{\zeta})}, \quad \hat{\theta}_\lambda = \frac{\hat{\varrho} \hat{\sigma}_\lambda^2}{2\hat{\kappa}_\lambda}, \quad (2.65)$$

pričom  $(\hat{\kappa}_\lambda, \hat{\phi}_\lambda, \hat{\sigma}_\lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \times \hat{\Lambda}$ , kde  $\hat{\Lambda} = \left( -\infty, -\ln \hat{\phi} \times (2\hat{\zeta} - 1) \right)$ .

Nasledujúca veta je analógiou Vety 2.3 a Vety 2.4 uvedenej v časti 2.2.1.



**Veta 2.7.** Uvažujme diskretizovanú verziu CIR procesu (2.49) v tvare (vid' [8], [76])

$$\Delta r_t = r_t - r_{t-1} = (\theta - r_{t-1})(1 - e^{-\kappa}) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (2.66)$$

kde  $r_0$  je okamžitá úroková miera platná v čase 0,  $\varepsilon_t$  je normálne rozdelená náhodná premenná s nulovou strednou hodnotou a disperziou  $\sigma^2 r_{t-1}$ . Potom logaritmus funkcie vierohodnosti časového radu  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  odvodenej od procesu (2.49) má tvar

$$\ln L^{CIR} \triangleq \ln L(\kappa, \theta, \sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left[ \ln v_t^2 + \left( \frac{\varepsilon_t}{v_t} \right)^2 \right], \quad (2.67)$$

kde  $v_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa}) r_{t-1}$  a  $\varepsilon_t = r_t - e^{-\kappa} r_{t-1} - \theta (1 - e^{-\kappa})$  pre  $t = 1, 2, \dots, n$  (podľa vzťahu (2.66)).

*Dôkaz.* Pozri [79].

Logaritmus funkcie vierohodnosti CIR modelu uvedený vo Vete 2.7 využívame v druhej etape kalibračného postupu. Rovnako, ako pri Vašíčkovom modeli, aj v tomto prípade sa hľadá koeficient trhovej ceny rizika  $\lambda$ , a to riešením maximalizačnej úlohy

$$\max_{\lambda \in \hat{\Lambda}} \ln L(\hat{\kappa}_\lambda, \hat{\theta}_\lambda, \hat{\sigma}_\lambda), \quad (2.68)$$

kde  $\hat{\kappa}_\lambda$ ,  $\hat{\theta}_\lambda$ ,  $\hat{\sigma}_\lambda$  sú definované vzťahmi (2.65) a  $\hat{\Lambda} = (-\infty, -\ln \hat{\phi} \times (2\hat{\zeta} - 1))$ , kde  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\zeta}$  sú riešením minimalizačnej úlohy (2.64). Označme symbolom  $\tilde{\lambda}$  riešenie úlohy (2.68), ďalej nech  $\tilde{\kappa} \triangleq \hat{\kappa}_{\tilde{\lambda}}$ ,  $\tilde{\theta} \triangleq \hat{\theta}_{\tilde{\lambda}}$ ,  $\tilde{\sigma} \triangleq \hat{\sigma}_{\tilde{\lambda}}$ . Potom našim finálnym odhadom parametrov podkladového CIR procesu (2.49) je štvorica  $(\tilde{\kappa}, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}, \tilde{\lambda})$  definovaná vzťahmi

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \arg \max_{\lambda \in \hat{\Lambda}} \ln L(\hat{\kappa}_\lambda, \hat{\theta}_\lambda, \hat{\sigma}_\lambda), \\ \tilde{\kappa} &= -\ln \hat{\phi} \times (2\hat{\zeta} - 1) - \tilde{\lambda}, \quad \tilde{\sigma} = -\ln \hat{\phi} \times \sqrt{2\hat{\zeta}(1 - \hat{\zeta})}, \quad \tilde{\theta} = \frac{\hat{\theta} \tilde{\sigma}^2}{2\tilde{\kappa}} \end{aligned} \quad (2.69)$$

a získaná prezentovaným dvoj etapovým minmax optimalizačným postupom. Na záver podľa (2.54) môžeme zostrojiť odhadnutú CIR výnosovú krivku pri začiatkovej okamžitej miere  $r_0$ , označíme ju  $\tilde{R}(\tau, r_0)$  a nech platí

$$\tilde{R}(\tau, r_0) \triangleq R(\tau, r_0, \tilde{\kappa}, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}) = \frac{\dot{B}(\tau)r_0 - \ln \dot{A}(\tau)}{\tau}, \quad (2.70)$$

kde funkcie  $\dot{A}(\tau)$ , resp.  $\dot{B}(\tau)$  sú definované vzťahmi (2.53), resp. (2.52) a ich hodnoty počítame pri parametroch  $\tilde{\kappa}, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}$ .

### 2.3.2 Posúdenie kvality odhadnutého CIR modelu

Pri určení kvality a miery použiteľnosti odhadnutého CIR procesu s parametrami  $\tilde{\kappa}, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}$  (resp. pomocnými parametrami  $\hat{\phi}, \hat{\zeta}, \hat{\varrho}$ ) sme používali rovnaké ukazovatele ako v prípade Vašíčkovho modelu (viď podkapitolu 2.2.3), t. j. pomer vierohodností (*maximum likelihood ratio*,  $MLR$ ) a nelineárny koeficient determinácie (*nonlinear  $R^2$  ratio*). Označme teraz  $(\kappa^n, \theta^n, \sigma^n)$  trojicu, ktorá je riešením neviazanej maximalizačnej úlohy

$$(\kappa^n, \theta^n, \sigma^n) = \arg \max_{(\kappa, \theta, \sigma) \in \mathbb{R}_+^3} \ln L(\kappa, \theta, \sigma), \quad (2.71)$$

kde predpis logaritmu funkcie vierohodnosti je uvedený vo vzťahu (2.67). **Pomer vierohodností** potom definujeme vzťahom

$$MLR = \frac{\ln L(\tilde{\kappa}, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma})}{\ln L(\kappa^n, \theta^n, \sigma^n)}. \quad (2.72)$$

Podobne ako v prípade posúdenia kvality odhadnutého Vašíčkovho modelu, aj teraz môžeme vyhlásiť, že ak hodnota indikátora  $MLR$  je blízko k hodnote 1, t. j. viazaná maximálna hodnota  $\ln L(\tilde{\kappa}, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma})$  je blízko ku globálnej maximálnej hodnote  $\ln L(\kappa^n, \theta^n, \sigma^n)$ , tak podkladový CIR model odhadnutý dvojfázovou minmax optimalizačnou metódou (podľa článku [76]) by mal byť použiteľný na odhad celej časovej štruktúry výnosov štandardných dlhopisov.

**Nelineárny koeficient determinácie  $R^2$**  definujeme teraz vzťahom

$$R^2 = 1 - \frac{Z(\hat{\phi}, \hat{\zeta}, \hat{\varrho})}{Z(1, 1, 1)}, \quad (2.73)$$

kde

$$Z(1, 1, 1) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \tau_j^2 \mathbb{E} [(R_j - R_0)^2],$$

kde  $Z$  je nákladový funkcionál definovaný rovnicou (2.63),  $\mathbb{E} [(R_j - R_0)^2]$  je druhým počiatočným momentom pomocného náhodného vektora  $\{R_{ij} - R_{i0}; i = 1, 2, \dots, n\}$  a  $(\hat{\phi}, \hat{\zeta}, \hat{\varrho})$  je jediné globálne minimum nákladového funkcionálu  $Z$  definované vzťahom (2.64). Hodnota  $R^2$  blízka k jednej znamená, že  $Z(\hat{\phi}, \hat{\zeta}, \hat{\varrho}) \ll Z(1, 1, 1)$ , teda že hodnota nákladového funkcionálu v bode  $(\hat{\phi}, \hat{\zeta}, \hat{\varrho})$  je blízka k nule. V tom prípade odhadnutá výnosová krivka odvodená od podkladového CIR procesu dobre fituje reálne výnosy, teda by sa dala používať na modelovanie skutočných trhových výnosov (podrobnejšie viď v článku [76]).

Na záver tejto podkapitoly by sme ešte v krátkosti uviedli niekoľko možných zovšeobecnení CIR modelu. Keďže CIR model sa líši od Vašíčkovho modelu len vo funkcii volatility, tak všetky zovšeobecnenia Vašíčkovho modelu uvedené v časti 2.2.4 môžeme naformulovať aj pre CIR. Analógiou modelu (2.44), (2.45) je zovšeobecný dvojfaktorový CIR model (viď [25], [26]), ďalej môžeme definovať aj viacetapový CIR model, kým obdobou procesu (2.47) môže byť negaussovský CIR model.

## 2.4 Modely výnosových a forwardových kriviek

Ako sme už uviedli v prvej kapitole práce, priame modely výnosových a forwardových kriviek sa podstatne líšia od bezarbitrážnych a rovnovážnych modelov. Ich najväčšia výhoda spočíva v pomerne jednoduchých definíciách, v ktorých sa predpokladá, že výnosové a forwardové krivky sa dajú popísať pomocou nejakej kombinácie exponenciálnych (prípadne aj iných) funkcií. Nevýhodou priamych modelov je to, že nevyučujú arbitrážne príležitosti, no aj napriek tomu sa v praxi často používajú, pretože vo veľkej väčšine prípadov dávajú spoľahlivé výsledky.

Pri nižšie uvedených definíciách sme využívali vzťahy a označenia zavedené v podkapitole 1.2. Nech  $T \in (0; T_{max})$  je doba splatnosti (maturita) a  $\tau = T - t$  je čas do maturity štandardného dlhopisu v čase  $t$ . Ďalej nech  $\{f_t(u) : u \in \langle 0; T_{max} \rangle\}$  označuje okamžitú forwardovú krivku a  $\{R_t(u) : u \in \langle 0; T_{max} \rangle\}$  výnosovú krivku. Okamžitú úrokovú mieru v čase  $t$  opäť označíme symbolom  $r_t$ , pričom platí  $r_t = R_t(0) = f_t(0)$ .

V našich praktických aplikáciách, najmä pri kalibrácii parametrov výnosových kriviek a odhade neznámych výnosov, sme využívali štatistický softvér  $\mathcal{R}$  a jeho špeciálny balík `YieldCurve` (viď [20], [33]). Práve preto pri definíciách sme používali tie tvary parametrizácií kriviek, ktoré sú implementované v spomínanom balíku.

### 2.4.1 Nelsonov-Siegelov model forwardovej a výnosovej krivky

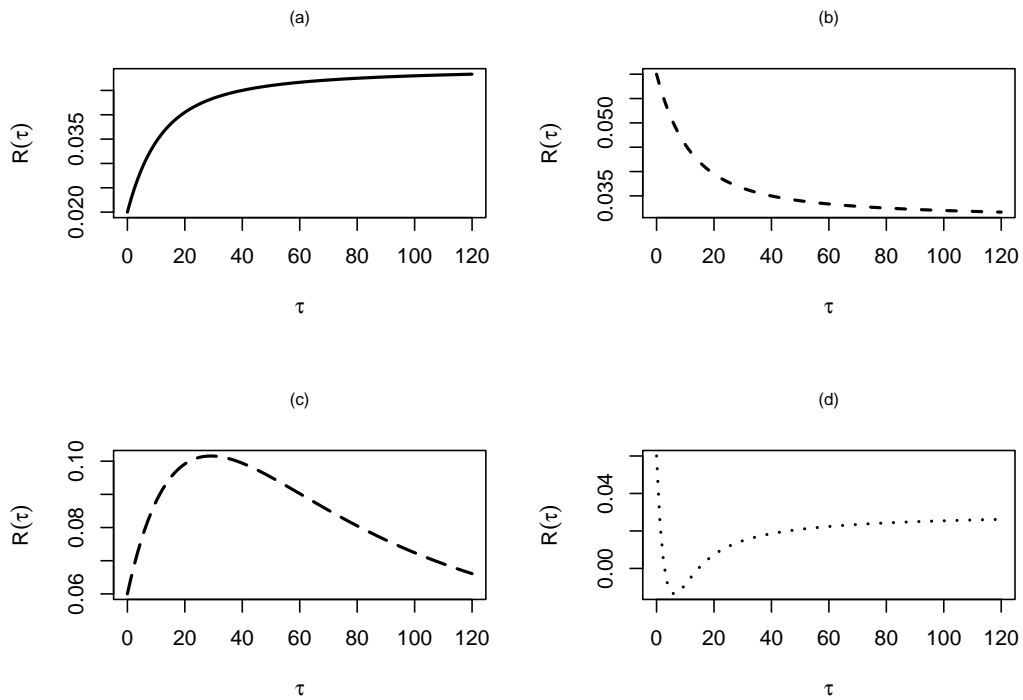
**Definícia 2.5.** [28], [55] Nech  $\beta_{0t}, \beta_{1t}, \beta_{2t}, \lambda_t$  sú reálne parametre pre  $t \in \langle 0; t_{max} \rangle$ . **Nelsonova-Siegelova okamžitá forwardová krivka** v čase  $t$  sa definuje predpisom

$$f_t(\tau) = \beta_{0t} + \beta_{1t} \exp(-\lambda_t \tau) + \beta_{2t} \lambda_t \exp(-\lambda_t \tau), \quad \tau \in \langle 0; T_{max} \rangle, \quad (2.74)$$

pričom **Nelsonova-Siegelova výnosová krivka** (používame aj skrátené pomenovanie *NS-krivka*) má tvar

$$R_t(\tau) = \beta_{0t} + \beta_{1t} \frac{1 - \exp(-\lambda_t \tau)}{\lambda_t \tau} + \beta_{2t} \left( \frac{1 - \exp(-\lambda_t \tau)}{\lambda_t \tau} - \exp(-\lambda_t \tau) \right), \quad (2.75)$$

pre  $\tau \in (0; T_{max})$ , pričom  $R_t(0) = f_t(0) = r_t = \beta_{0t} + \beta_{1t}$ .



Obr. 7: Možné tvary Nelsonovej-Siegelovej výnosovej krivky: (a) rastúci, (b) klesajúci, (c) rastúco-klesajúci, (d) klesajúco-rastúci

(Zdroj: vlastné spracovanie)

Na základe definičných vzťahov (2.74) a (2.75) môžeme posúdiť, že parameter  $\lambda_t$  určuje rýchlosť poklesu exponenciálnych funkcií (pri malých hodnotách  $\lambda_t$  je pokles pomalý, kým veľké hodnoty parametra zaručujú rýchly pokles exponenciálnych členov rovnice). Podľa článku [28] na parametre  $\beta_{0t}, \beta_{1t}, \beta_{2t}$  sa môžeme pozeráť ako na dynamické latentné faktory. Uvažujme teraz vzťah (2.75) pre výnosovú krivku v nejakom zafixovanom čase  $t$ . Faktor  $\beta_{0t}$  môžeme interpretovať ako výnos štandardného dlhopisu s “veľmi dlhou dobou splatnosti”, pretože pre  $\tau \rightarrow \infty$  faktorové náklady pri ďalších dvoch parametroch  $\beta_{1t}$  a  $\beta_{2t}$  klesajú do nuly a platí  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_t(\tau) = \beta_{1t}$ . Koeficient pri  $\beta_{1t}$  pre rastúce  $\tau$  klesá od začiatkovej hladiny 1 pomerne rýchlo k nule, kým faktorové náklady na  $\beta_{2t}$  pre  $\tau = 0$  sú nulové, potom (pre rastúce  $\tau$ ) po rastúcej fáze tiež klesajú k nule. Parameter  $\beta_{1t}$  teda môžeme interpretovať ako krátkodobý faktor a  $\beta_{2t}$  ako strednodobý latentný koeficient (ďalšie podrobnosti sa dajú nájsť v článku [28]).

### 2.4.2 Svenssonov model forwardovej a výnosovej krivky

**Definícia 2.6.** [72] Nech  $\alpha_{0t}, \alpha_{1t}, \alpha_{2t}, \alpha_{3t}, \lambda_{1t}, \lambda_{2t}$  sú reálne parametre pre  $t \in \langle 0; t_{max} \rangle$ .

**Svenssonova okamžitá forwardová krivka** v čase  $t$  sa definuje predpisom

$$f_t(\tau) = \alpha_{0t} + \alpha_{1t} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1t}}\right) + \alpha_{2t} \frac{\tau}{\lambda_{1t}} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1t}}\right) + \alpha_{3t} \frac{\tau}{\lambda_{2t}} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2t}}\right), \quad (2.76)$$

kým **Svenssonova výnosová krivka** (používame aj skrátene pomenovanie *SV-krivka*) má tvar

$$R_t(\tau) = \alpha_{0t} + \alpha_{1t} \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1t}}\right)}{\frac{\tau}{\lambda_{1t}}} + \alpha_{2t} \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1t}}\right)}{\frac{\tau}{\lambda_{1t}}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1t}}\right) \right] + \alpha_{3t} \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2t}}\right)}{\frac{\tau}{\lambda_{2t}}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2t}}\right) \right], \quad \tau \in (0; T_{max}), \quad (2.77)$$

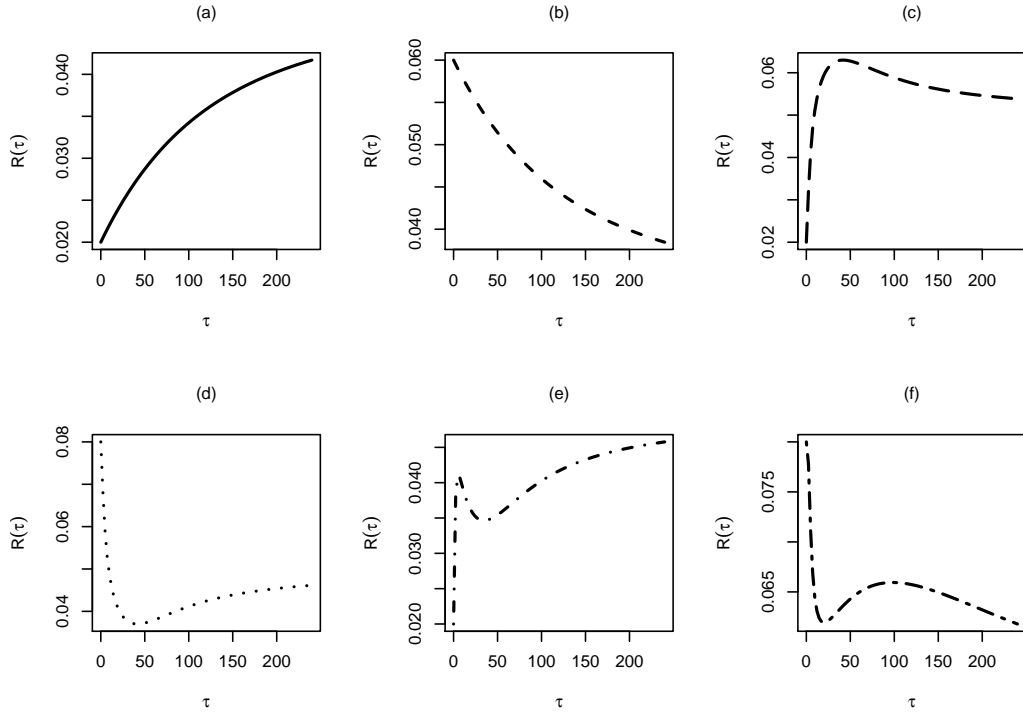
pričom pre  $\tau = 0$  sa dá dodefinovať  $R_t(0) = f_t(0) = r_t = \alpha_{0t} + \alpha_{1t}$ .

Z predpisu forwardovej krivky (2.76), resp. výnosovej krivky (2.77) je zrejmé, že Svenssonov model je rozšírením Nelsonovho-Siegelovho modelu, vznikol pridaním parametra  $\lambda_{2t}$  a ďalšie latentného faktora  $\alpha_{3t}$ . Posledný člen vo vzťahoch (2.76), resp. (2.77) môže zabezpečiť väčšiu presnosť pri fitovaní krátko- alebo strednodobých výnosov. Tiež si môžeme všimnúť, že v prípade Svenssonovej krivky na popísanie rýchlosti konverencie k faktoru dlhých maturít sa používa dvojica parametrov v tvare  $\frac{1}{\lambda_{1t}}$ , resp.  $\frac{1}{\lambda_{2t}}$ , kým pri NS-krivke jediný koeficient v tvare  $\lambda$ . Táto odlišnosť (recipročný vzťah) v parametrizácii dvoch výnosových kriviek vznikol len z toho dôvodu, že sme uvažovali tie tvary kriviek, ktoré sa používajú v balíku *YieldCurve* štatistického softvéru  $\mathcal{R}$  (viď [20], [33]).

### 2.4.3 Odhad parametrov výnosových kriviek a určenie kvality fitu

V praktických aplikáciách je dôležité, aby sme boli schopní odhadnúť neznáme parametre Nelsonovho-Siegelovho modelu na základe pozorovaných údajov (napríklad výnosov štandardných dlhopisov v danom časovom bode). Výslednú NS-krivku potom môžeme používať na interpoláciu alebo extrapoláciu neznámych výnosov.

Predpokladajme, že máme k dispozícii štandardné dlhopisy s maturitami  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$  a historické výnosové krivky  $\{R_{tj}; j = 1, 2, \dots, m\}$  pre časové body



Obr. 8: Možné tvary Svenssonovej výnosovej krivky: (a) rastúci, (b) klesajúci, (c) rastúco-klesajúci, (d) klesajúco-rastúci, (e) rastúco-klesajúco-rastúci, (f) klesajúco-rastúco-klesajúci

(Zdroj: vlastné spracovanie)

$t = 1, \dots, n$ . Pri odhade parametra  $\lambda_t$  a kalibrácii latentných premenných  $\beta_{0t}, \beta_{1t}, \beta_{2t}$  pre nejaký pevne určený časový bod  $t \in \{1, 2, \dots, n\}$  sme využívali programové kódy implementované v balíku `YieldCurve` štatistického softvéru  $\mathcal{R}$  (viď [20], [33]). Postup je založený na nelineárnej metóde najmenších štvorcov, pričom na NS-krivku danú vzťahom (2.75) sa pozerá ako na nelineárny regresný model s neznámym vektorovým parametrom  $\theta_t = (\lambda_t, \beta_{0t}, \beta_{1t}, \beta_{2t})^\top$  a pozorovaniami  $R_t(\tau_j) \triangleq R_{tj}$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$  v bodoch  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$  (ďalšie podrobnosti sú uvedené napr. v článku [28]).

Analogicky ako v prípade Nelsonovho-Siegelovho modelu, aj pri odhade parametrov SV-krivky sme sa spoliehali na štatistický softvér  $\mathcal{R}$ . Výnosovú krivku (2.77) v pevne zvolenom čase  $t$  sme interpretovali ako nelineárny regresný model s neznámym vektorovým parametrom  $\phi_t = (\lambda_{1t}, \lambda_{2t}, \alpha_{0t}, \alpha_{1t}, \alpha_{2t}, \alpha_{3t})^\top$  a odhad neznámeho parametra sme hľadali pomocou nelineárnej metódy najmenších štvorcov.<sup>8</sup>

<sup>8</sup>Správnosť výsledkov získaných z automaticky implementovaných funkcií `Nelson.Siegel()`, resp. `Svensson()` z balíka `YieldCurve` sme overili naprogramovaním vlastnej NS-krivky, resp. SV-krivky

Po vykonaní týchto postupov a získaní odhadov  $\hat{\theta}_t = (\hat{\lambda}_t, \hat{\beta}_{0t}, \hat{\beta}_{1t}, \hat{\beta}_{2t})^\top$  pre Nelsonov-Siegelov model, resp.  $\tilde{\phi}_t = (\tilde{\lambda}_{1t}, \tilde{\lambda}_{2t}, \tilde{\alpha}_{0t}, \tilde{\alpha}_{1t}, \tilde{\alpha}_{2t}, \tilde{\alpha}_{3t})^\top$  pre Svenssonov model, podľa (2.75), resp. (2.77) môžeme skonštruovať odhadnutú NS-krivku  $\hat{R}_t(\tau)$ , resp. odhadnutú SV-krivku  $\tilde{R}_t(\tau)$ .

Podobne ako pri Vašíčkovom alebo CIR modeli, aj teraz sme chceli určiť presnosť a kvalitu odhadnutých výnosových kriviek. Prvotnou skúškou adekvátnosti nakalibrovanej NS-krivky, resp. SV-krivky môže byť vizuálny test, teda zobrazenie trhových výnosov (dátových bodov použitých pri odhadovaní parametrov) a odhadnutej krivky. Ako ďalší prirodzený indikátor kvality modelu uvádzame Pearsonov  $\chi^2$ -test dobrej zhody medzi pozorovanými trhovými výnosmi a odhadnutými výnosmi (počítanými pomocou odhadnutých kriviek  $\hat{R}_t(\tau)$ , resp.  $\tilde{R}_t(\tau)$  v maturitách  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ ) vo zvolenom časovom bode  $t$ . Testovacia štatistika má tvar

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(R_{tj} - \hat{R}_t(\tau_j))^2}{\hat{R}_t(\tau_j)}, \quad \text{resp} \quad \chi^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(R_{tj} - \tilde{R}_t(\tau_j))^2}{\tilde{R}_t(\tau_j)}. \quad (2.78)$$

Pri teste dobrej zhody testujeme platnosť nulovej hypotézy, že výnosy štandardných dlhopisov sa riadia podľa Nelsonovho-Siegelovho, resp. Svenssonovho modelu. Nulovú hypotézu zamietame na hladine významnosti  $\alpha$ , ak hodnota testovacej štatistiky  $\chi^2$  je väčšia ako kritická hodnota  $\chi^2$ -rozdelenia, t. j.

$$\chi^2 > q_{\chi^2}(1 - \alpha, \text{df} = m - 1), \quad (2.79)$$

kde  $q_{\chi^2}$  je kvantilová funkcia  $\chi^2$ -rozdelenia a  $\text{df} = m - 1$  je počet stupňov voľnosti. Potom p-hodnota testu sa počíta zo vzťahu  $p = 1 - F_{\chi^2}(\chi^2, \text{df} = m - 1)$ , kde  $F_{\chi^2}$  je distribučná funkcia  $\chi^2$ -rozdelenia.

Ďalšími ukazovateľmi presnosti odhadnutých kriviek (v pevne zvolenom čase  $t$ ) sú **koeficient determinácie** ( $R^2$ ) a **upravený koeficient determinácie** ( $R_{adj}^2$ ). Pre

---

a využitím funkcie `nls()`, ktorá slúži na odhad parametrov nelineárneho modelu pomocou metódy najmenších štvorcov. Naše vlastné výsledky sa zhodovali s automatickými odhadmi parametrov Nelsonovej-Siegelovej, resp. Svenssonovej výnosovej krivky.

Nelsonov-Siegelov model, resp. Svenssonov model sa definujú vzťahmi

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{j=1}^m (R_{tj} - \hat{R}_t(\tau_j))^2}{\sum_{j=1}^m (R_{tj} - \bar{R}_t)^2}, \quad R_{adj}^2 = 1 - \frac{m-1}{m-k} \frac{\sum_{j=1}^m (R_{tj} - \hat{R}_t(\tau_j))^2}{\sum_{j=1}^m (R_{tj} - \bar{R}_t)^2},$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{j=1}^m (R_{tj} - \tilde{R}_t(\tau_j))^2}{\sum_{j=1}^m (R_{tj} - \bar{R}_t)^2}, \quad R_{adj}^2 = 1 - \frac{m-1}{m-k} \frac{\sum_{j=1}^m (R_{tj} - \tilde{R}_t(\tau_j))^2}{\sum_{j=1}^m (R_{tj} - \bar{R}_t)^2},$$

kde  $\bar{R}_t$  je aritmetický priemer výnosov pozorovaných v čase  $t$ , kým  $k$  špecifikuje počet odhadnutých parametrov ( $k = 4$  v prípade NS-modelu a  $k = 6$  pre SV-krivku).<sup>9</sup> Keď hodnota ukazovateľov  $R^2$ , resp.  $R_{adj}^2$  je blízka k jednej, tak to znamená, že odhadnutá výnosová krivka by mohla byť použiteľná na fitovanie reálnych trhových výnosov štandardných dlhopisov.

#### 2.4.4 Dynamika výnosových kriviek

Pri modelovaní budúcich výnosových kriviek všeobecne odporúčaným postupom je, aby na základe odhadnutých historických výnosových kriviek sme pochytili zmeny kriviek v čase a následne pomocou odhadnutej dynamiky výnosové krivky projektovali do budúcnosti. Autori v článku [28] spravili dôkladnú analýzu možností predikcie budúcich výnosových kriviek. Porovnali 10 rôznych predikčných prístupov a ich presnosť. Tieto prístupy boli väčšinou založené buď na regresii, alebo na autoregresnom prístupe. V publikácii [28] sa ukázalo<sup>10</sup>, že už v prípade trojročného predikčného horizontu všetky typy predpovedí strácajú svoju presnosť, pretože predlžovaním budúceho časového horizontu sa zväčšujú predikčné chyby, narastá šírka predikčných intervalov a dôveryhodnosť predpovedí klesá k nule. Ako sme už spomínali v Úvode tejto práce, v rámci našich analýz uvedených v piatej kapitole sme potrebovali modelovať až 40-ročné budúce obdobie, takže zaužívané predikčné postupy sme nemohli používať. Spoliehať sme sa mohli jedine na rozumne nastavené scenáre vývoja budúcich výnosových kriviek (ďalšie podrobnosti sú uvedené v 5. kapitole).

<sup>9</sup>Upravený koeficient determinácie  $R_{adj}^2$  môžeme aplikovať iba v tom prípade, keď počet pozorovaní je väčší ako počet odhadnutých parametrov, teda keď  $m > k$ .

<sup>10</sup>Autori Diebold a Li pri porovnávaní jednotlivých prístupov a overení presnosti predpovedí používali dáta z minulosti, pričom na prvom časovom úseku odhadli parametre a dynamiku výnosových kriviek, a následne na ďalšom časovom období porovnali predikcie s historickými výnosmi z toho druhého obdobia.



### 3. Životné poistenie

Životné poistenie hrá dôležitú rolu v každom vyspelom spoločenstve, pretože preberá určité druhy rizík od niektorých členov spoločenstva (od poistencov). Môžeme vyhlásiť, že životné poisťovne sú vlastne “súborom” aktív a pasív. Medzi aktíva poisťovne patrí poistné, ktoré zaplatia poistenci a ktoré poisťovňa následne investuje ďalej do rôznych typov aktív (napr. do dlhopisov, akcií, záložných listov, a pod.). Pasíva životnej poisťovne sú (z technického hľadiska) jej záväzky voči svojim poistencom vyplývajúce z povinnosti poisťovne poskytnúť poistné plnenie v prípade, že nastane poistná udalosť. Jednou z hlavných úloh aktuárskej matematiky je vyvíjanie vhodných modelov, ktoré sa dajú použiť pri vytváraní poistných produktov, pri ich analýze a pri ohodnocovaní a riadení rizík, ktoré súvisia s nimi.

Cieľom životných poisťovní (ako obchodných spoločností) je dosiahnuť zisk a pri daných trhových, spoločenských a legislatívnych podmienkach maximalizovať jeho hodnotu, aby splnili požiadavky svojich investorov (majiteľov, akcionárov). Z technického hľadiska ich najdôležitejšou úlohou je asi to, aby správne a čo najprecíznejšie ocenili súčasnú hodnotu svojich budúcich príjmov a záväzkov. V rámci tejto odbornej práce sme sa zaoberali predovšetkým so skúmaním takých modelov, ktoré sa používajú na odhad súčasnej hodnoty peňažných tokov spojených s poistnými produktami pri rôznych trhových, investičných a demografických predpokladoch. Motiváciu do praktickej časti práce nám dávalo vyplácanie dôchodkov z úspor v druhom dôchodkovom pilieri, ktoré budú vykonávať práve životné poisťovne. Práve preto sme považovali za dôležité, aby sme aspoň na základnej úrovni vysvetlili mechanizmus životného poistenia.

#### 3.1 Právna úprava životného poistenia na Slovensku

Na území Slovenskej republiky v súčasnosti podniká viac ako 30 poisťovacích spoločností, z nich približne 20 pôsobí na trhu životného poistenia, pričom dohľad nad poistným trhom a poisťovníctvom vykonáva Národná banka Slovenska (NBS). Najdôležitejším právnym predpisom v tejto oblasti je Zákon o poisťovníctve [84], ktorý

upravuje vzťahy súvisiace so vznikom, riadením a vykonávaním činnosti poisťovní a podrobnosti o výkone dohľadu nad poisťovníctvom.<sup>1</sup> Okrem toho určuje pravidlá tvorby technických rezerv, zásady ich výpočtu, spôsob umiestnenia prostriedkov technických rezerv, metódy určenia miery solventnosti a mnohé ďalšie pravidlá. Ďalším súvisiacim predpisom je Zákon č. 747/2004 Z. z. o dohľade nad finančným trhom [82], ktorý vymedzuje právomoci Národnej banky Slovenska pri vykonávaní dohľadu nad poisťovníctvom. Do oblasti poisťovníctva čiastočne zasahuje napríklad aj Zákon č. 40/1964 Z. z. (Občiansky zákonník), či Zákon č. 513/1991 Z. z. (Obchodný zákonník). V neposlednom rade by sme spomenuli aj aktuálne znenie Zákona č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení [85], pretože dôchodky z druhého piliera vyplácajú na Slovensku životné poisťovne, teda aj tento zákon na nich sčasti vplýva.

*Pozn.:* Činnosť životných poisťovní regulujú nielen zákony, ale aj opatrenia a vyhlášky, ktoré vydáva NBS, respektíve Ministerstvo financií Slovenskej republiky (podrobnejšie viď [92]).

### **3.1.1 Investičná politika životných poisťovní**

Životné poisťovne majú špeciálne postavenie na trhu, pretože ich úlohou je nielen preberanie rizík od poisťencov, ale aj investovanie a akumulácia inkasovaného poistného, a preto je investičná politika poisťovní veľmi dôležitou súčasťou ich celkovej firemnej stratégie. Limity a spôsob umiestnenia prostriedkov technických rezerv určuje Zákon č. 39/2015 o poisťovníctve [84] a Opatrenie NBS č. 7/2008. Životné poisťovne investujú prostriedky technických rezerv obvykle do nasledujúcich typov aktív:

- a) štátne dlhopisy,
- b) dlhopisy vydané bankami,
- c) pokladničné poukážky,
- d) akcie,
- e) podielové listy podielových fondov,
- f) hypotekárne záložné listy,
- g) vkladové listy,

---

<sup>1</sup>Predošlý zákon o poisťovníctve má číslo č. 8/2008 Z. z., kým nové znenie zákona je vedené v Zbierke zákonov pod číslom č. 39/2015.

- h) nehnuteľnosti,
- i) iné cenné papiere,
- j) alebo prostriedky technických môžu poisťovne vložiť aj na termínované účty v bankách.

Ďalšie podrobnosti (napr. maximálne percentuálne časti prostriedkov technických rezerv, ktoré sa môžu investovať do jednotlivých druhov aktív) sú uvedené v spomínanom zákone o poisťovníctve [84] a opatrení Národnej banky Slovenska. V rámci tejto záverečnej práce sme predpokladali, že naša modelová životná poisťovňa investuje do jediného typu trhových aktív, do štátnych dlhopisov a spomínané zákonné limity pri investovaní prostriedkov technických rezerv sme nebrali do úvahy.

Pri investičnom rozhodovaní stojí poisťovňa pred otázkou: uprednostniť aktíva s nízkym, ale istým výnosom alebo rizikovejšie investície s vyššou výnosnosťou? Počas celého procesu musí dbať aj na ďalšie okolnosti, napr. na likviditu investičných aktív, požadovanú mieru solventnosti a iné dôležité faktory. Pre životné poisťovne je dôležité, aby dokázali efektívne pokryť svoje záväzky vyplývajúce z poisťných zmlúv. Pri analýze efektívneho pomeru investičných aktív a záväzkov poisťovne sa používa niekoľko postupov, jednou z nich je tzv. *metóda spárovania aktív a pasív*, ktorá je definovaná vo štvrtnej kapitole tejto práce.

### 3.2 Klasická teória životného poistenia

Korene poisťnej matematiky, teda aj aktuárskeho vedeckého odboru, siahajú až do 17. storočia, presnejšie do roku 1693, kedy významný anglický astronóm, matematik a fyzik Sir Edmund Halley publikoval historicky prvé tabuľky života. Halley používal pri zostrojení úmrtnostných tabuliek deterministickú metódu, využíval záznamy o novorodencoch a počte zomretých na území Anglického kráľovstva. Až neskôr sa zaviedol tzv. stochastický prístup, v rámci ktorého sa životy ľudí obvykle modelovali prostredníctvom teoretických rozdelení pravdepodobnosti. V poslednom storočí prešla aktuárska matematika niekoľkými zmenami, používané metódy sa postupne upravovali a vylepšovali. Medzi základné diela známe na Slovensku patrí kniha [31] od Gerbera a monografia [64] od Potockého. Obe publikácie obsahujú prehľadné zhrnutie aktuárskej teórie, modelov a symbolov používaných v poisťnej matematike životného poistenia.

### 3.2.1 Základy klasickej teórie životného poistenia

V základnej teórii poistnej matematiky rozoznávame dve metodológie: deterministický prístup a stochastický prístup. **Deterministický model životného poistenia** je založený na tzv. *princípe fiktívneho súboru*, ktorý má nasledujúce bázické predpoklady:

- predpokladá sa existencia uzavretej populácie, ktorá má na začiatku  $\ell_0$  členov,
- vstup do populácie nie je umožnený, výstup z nej je možný len z dôvodu úmrtia člena populácie,
- všetci členovia sa narodili na začiatku roka,
- maximálny vek osôb vo fiktívnom súbore sa označuje symbolom  $\omega$ ,
- každá poistná zmluva sa uzatvorí na začiatku roka,
- životy príslušníkov fiktívneho súboru sú nezávislé,
- úmrtnosť sa riadi podľa pevne daných úmrtnostných tabuliek.

V klasickej teórii poistnej matematiky  $x$  obvykle značí vek osoby, pričom  $x \in \{0, 1, 2, \dots, \omega\}$ . V deterministickom modeli životného poistenia symbolom  $\ell_x$  sa označuje počet žijúcich členov populácie vo veku  $x$  rokov,  $d_x$  je počet tých osôb, ktoré zomreli vo veku  $x$  rokov (dožili sa teda veku  $x$  rokov, ale zomreli ešte pred vekom  $(x + 1)$  rokov),  $p_x$  je pravdepodobnosť toho, že osoba vo veku  $x$  prežije nasledujúci rok, kým  $q_x = 1 - p_x$  vyjadruje pravdepodobnosť tej udalosti, že  $x$ -ročná osoba zomrie v priebehu najbližšieho roka. Všeobecnejšie,  ${}_k p_x$  označuje pravdepodobnosť, že osoba vo veku  $x$  rokov prežije najbližších  $k$  rokov. Nazývame ho faktorom prežitia  $k$  rokov a platí

$${}_k p_x = p_x p_{x+1} \cdots p_{x+k-1} = \prod_{h=0}^{k-1} p_{x+h}, \quad k = 1, 2, \dots, \omega - x,$$

pričom platí  ${}_{\omega-x} p_x = 0$ . Analogicky,  ${}_k q_x = 1 - {}_k p_x$  je pravdepodobnosť tej udalosti, že osoba vo veku  $x$  zomrie niekedy v období najbližších  $k$  rokov. Platí

$${}_k q_x = {}_0 p_x q_x + {}_1 p_x q_{x+1} + \cdots + {}_{k-1} p_x q_{x+k-1} = \sum_{h=0}^{k-1} {}_h p_x q_{x+h}, \quad k = 1, 2, \dots, \omega - x,$$

kde  ${}_0 p_x \equiv 1$  a  ${}_1 p_x \triangleq p_x$ . Ďalším pojmom je tzv. odložená pravdepodobnosť úmrtia, ozn.:  ${}_k|q_x$ , ktorá vyjadruje pravdepodobnosť toho, že osoba, ktorá má v súčasnosti

$x$  rokov, zomrie presne vo veku  $(x + k)$  rokov. Definujeme ju vzťahom

$${}_k|q_x = {}_k p_x q_{x+k}, \quad k = 1, 2, \dots, \omega - x.$$

Ďalšie podrobnosti o princípe fiktívneho súboru a označeniach používaných v deterministickom modeli sú uvedené napr. v monografii [64].

Na rozdiel od deterministického prístupu, **stochastický model životného poistenia** počíta s náhodnou *budúcou dĺžkou života*  $x$ -ročnej osoby, ktorá sa označuje symbolom  $T_x$  a definuje sa na  $(\Omega, \mathcal{S}, \Pr)$ . Strednú hodnotu spojitej náhodnej premennej  $T_x$  nazývame *strednou budúcou dĺžkou života*  $x$ -ročnej osoby, označujeme ju symbolom  $\dot{e}_x$  a definujeme vzťahom

$$\dot{e}_x \triangleq E(T_x) = \int_0^{\omega-x} t f_x(t) dt,$$

kde  $f_x(\cdot)$  je funkcia hustoty náhodnej premennej  $T_x$ . Diskrétnou analógiou budúcej dĺžky života  $T_x$  je tzv. *skrátaná budúca dĺžka života* jedinca vo veku  $x$  rokov, ktorú označujeme  $K_x$  a definujeme vzťahom  $K_x = \lfloor T_x \rfloor$ . Pre jej rozdelenie platí

$$\begin{aligned} \Pr(K_x = k) &= \Pr(k \leq T_x < k + 1) = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x = \\ &= {}_k p_x (1 - p_{x+k}) = {}_k p_x q_{x+k}, \quad k = 0, 1, \dots, \omega - x. \end{aligned}$$

*Strednú skrátenu budúcu dĺžku života* osoby vo veku  $x$  rokov označujeme symbolom  $e_x$  a platí pre ňu

$$\begin{aligned} e_x \triangleq E(K_x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \Pr(K_x = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \Pr(K_x = j) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(T_x \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x. \end{aligned}$$

**Veta 3.1.** Nech platia predchádzajúce označenia. Ak úmrtia sú rozložené rovnomerne v každom jednoročnom intervale  $\langle x, x + 1 \rangle$ , tak medzi strednou budúcou dĺžkou života a strednou skrátanou budúcou dĺžkou života osoby vo veku  $x$  rokov platí vzťah

$$\dot{e}_x = e_x + \frac{1}{2}, \quad E(T_x) = E(K_x) + \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \{0, 1, 2, \dots, \omega\}.$$

*Dôkaz.* Z predpokladu o rovnomernom rozložení úmrtí v rámci jednoročných intervalov vyplýva, že priemerná osoba v poslednom roku svojho života prežije presne prvú polovicu roka (a neprežije druhú polovicu roka). Formálne teda platí

$$E(K_x) = E(\lfloor T_x \rfloor) = E(T_x) - \frac{1}{2}.$$

Pre podrobnejší dôkaz pozri [31].  $\square$

*Pozn.:* Keďže predpoklad o rovnomernom rozložení úmrtí v rámci všetkých jedno-ročných intervalov  $\langle x, x + 1 \rangle$  je len ťažko overiteľný, obvykle sa používa približná formulácia tvrdenia Vety 3.1 v tvare

$$\overset{\circ}{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2}, \quad E(T_x) \approx E(K_x) + \frac{1}{2}. \quad (3.1)$$

Ďalším “základným kameňom” klasického modelu životného poistenia je tzv. **princíp ekvivalencie**, ktorý spočíva v tom, že sa predpokladá rovnosť súčasnej hodnoty príjmov a výdavkov poisťovne. V praxi to znamená, že v čase podpisu poistnej zmluvy diskontovaná hodnota budúcich záväzkov poisťovne vyplývajúcich z poistenia sa rovná diskontovanej hodnote budúceho inkasovaného poistného. Vzťah medzi diskontovanou hodnotou záväzkov a diskontovanou hodnotou inkasovaného poistného nazývame *rovnica ekvivalencie*. Táto rovnica slúži predovšetkým na výpočet poistného a kalibráciu poistných produktov, pričom sa využíva aj pri deterministickom, aj pri stochastickom prístupe. Pod **netto-princípom** klasickej teórie životného poistenia rozumieme súbor predpokladov založených na princípe ekvivalencie, pri ktorých životná poisťovňa neuvažuje žiadne dodatočné náklady a výdavky spojené s daným poistným produktom. Pri netto-princípe teda platí, že súčasná netto-hodnota záväzkov vyplývajúcich z poistnej zmluvy sa rovná súčasnej netto-hodnote príjmov inkasovaných od poistenej osoby. Na rozdiel od netto-princípu pri **brutto-princípe** klasickej teórie životného poistenia životná poisťovňa už môže brať do úvahy náklady a výdavky spojené so spustením poistného produktu, inkasovaním poistného, vyplácaním poistných plnení, ako aj bežné správne náklady spojené s daným poistným produktom.

### 3.2.2 Klasické poistné produkty v prípade netto-princípu

Základnou úlohou životného poistenia je poistenie života jednej osoby alebo viacerých osôb, investovanie inkasovaného poistného v mene poistených a poskytovanie kompenzácie (vyplácanie dohodnutého poistného plnenia) v prípade, že nastane poistná udalosť. Poistnou udalosťou môže byť napríklad úmrtie poistenca alebo prípad, že sa poistená osoba dožije určitého veku, ktorý je určený v poistnej zmluve. Klasické produkty životného poistenia podľa ich podstaty a funkcie členíme do štyroch základných skupín: (1) poistenia na dožitie, (2) poistenia pre prípad úmrtia, (3) zmiešané poistenia, (4) dôchodky. Ich spoločnou črtou je, že výška dávky, ktorá sa vypláca v prípade

výskytu poistnej udalosti, sa rovná jednej peňažnej jednotke (p. j.), preto sa nazývajú aj *bázickými poistnými produktami*. Definície klasických poistných produktov sa opierajú o deterministický, resp. stochastický model životného poistenia, princíp ekvivalencie a základy zloženého úrokovania (uvedené v časti 1.1). V nižšie uvedených definíciách sme uvažovali jednoročnú časovú jednotku, platnosť netto-princípu a nech  $i$  označuje ročnú efektívnu technickú úrokovú mieru,  $v = (1 + i)^{-1}$  je ročný diskontný faktor,  $x$  je vek poistenej osoby (v čase podpisu poistnej zmluvy) a nech  $n \in \{1, 2, \dots, \omega - x\}$  je dĺžka poistnej doby.

**Definícia 3.1.** Pri *poistení pre prípad prežitia*  $n$ -ročnej poistnej doby poisťovňa vyplátí 1 p. j. na konci  $n$ -tého roka, ak poistená osoba je nažive. Jeho súčasná hodnota sa označuje symbolom  $A_{x:\overline{n}|}^1$  a definuje sa vzťahom

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = v^n {}_n p_x. \quad (3.2)$$

**Definícia 3.2.** V prípade *dočasného poistenia pre prípad úmrtia* poisťovňa vyplátí 1 p. j. na konci toho roka (v rámci  $n$ -ročnej poistnej doby), v ktorom nastalo úmrtie poistenej osoby. Súčasnú hodnotu dočasného poistenia pre prípad úmrtia označujeme symbolom  $A_{x:\overline{n}|}^1$  a definujeme vzťahom

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{h=0}^{n-1} v^{h+1} {}_h p_x q_{x+h}. \quad (3.3)$$

Súčasnú hodnotu *doživotného poistenia* značíme symbolom  $A_x$  a definujeme vzťahom

$$A_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} v^{h+1} {}_h p_x q_{x+h}. \quad (3.4)$$

**Definícia 3.3.** *Zmiešané poistenie* je spojením poistení pre prípad úmrtia a prežitia. Jeho hodnotu v čase podpisu poistnej zmluvy označujeme symbolom  $A_{x:\overline{n}|}$  a definujeme rovnicou

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{h=0}^{n-1} v^{h+1} {}_h p_x q_{x+h} + v^n {}_n p_x. \quad (3.5)$$

**Definícia 3.4.** *Dočasný predlehotný dôchodok* poskytuje postupnosť platieb vo výške 1 p. j. na začiatku rokov v rámci  $n$ -ročnej poistnej doby, kým poistená osoba je nažive. Jeho hodnotu v čase podpisu poistnej zmluvy označujeme symbolom  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$  a definujeme vzťahom

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{h=0}^{n-1} v^h {}_h p_x. \quad (3.6)$$

Doživotný predlehotný dôchodok poskytuje postupnosť platieb vo výške 1 p. j. na začiatku rokov až do smrti poistenej osoby, pričom jeho súčasnú hodnotu značíme symbolom  $\ddot{a}_x$  a definujeme vzťahom

$$\ddot{a}_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} v^h {}_h p_x. \quad (3.7)$$

**Veta 3.2.** Nech  $d = i/(1+i)$  označuje ročnú efektívnu diskontnú mieru. Potom medzi súčasnou hodnotou zmiešaného poistenia a súčasnou hodnotou dočasného predlehotného dôchodku platí vzťah

$$A_{x:\overline{n}|} = 1 - d \ddot{a}_{x:\overline{n}|}. \quad (3.8)$$

Analogicky, medzi súčasnou hodnotou doživotného poistenia a súčasnou hodnotou doživotného predlehotného dôchodku platí vzťah

$$A_x = 1 - d \ddot{a}_x. \quad (3.9)$$

*Dôkaz.* Dôkaz sa dá nájsť v knihe [31].  $\square$

**Veta 3.3.** Označme symbolmi  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$ , resp.  $\ddot{a}_x^{(m)}$  súčasnú hodnotu takého dočasného, resp. doživotného predlehotného dôchodku, ktorý vypláca sumu  $1/m$  p. j. pravidelne, na začiatku každej  $m$ -tiny roka, kým poistená osoba je nažive. Potom približne platí

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m} (1 - A_{x:\overline{n}|}), \quad (3.10)$$

resp.

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}. \quad (3.11)$$

*Dôkaz.* Vid' zdroj [64]. Podobný dôkaz sa nachádza aj pri Vete 3.5, vid' na ďalších stranách tejto dizertačnej práce.  $\square$

**Definícia 3.5.** Dočasný polehotný dôchodok poskytuje postupnosť platieb vo výške 1 p. j. na konci rokov v rámci  $n$ -ročnej poistnej doby, kým poistená osoba je nažive. Jeho hodnotu v čase podpisu poistnej zmluvy označujeme symbolom  $a_{x:\overline{n}|}$  a definujeme vzťahom

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{h=1}^n v^h {}_h p_x. \quad (3.12)$$



Doživotný polehotný dôchodok poskytuje postupnosť platieb vo výške 1 p. j. na konci rokov až do smrti poistenej osoby, pričom jeho súčasnú hodnotu značíme symbolom  $a_x$  a definujeme vzťahom

$$a_x = \sum_{h=1}^{\omega-x} v^h {}_h p_x. \quad (3.13)$$

*Pozn.:* Všetky vyššie uvedené definície súčasných hodnôt poistných produktov môžeme interpretovať ako výšku bázičného jednorazového netto-poistného (čistú bázičnú cenu poistenia), ktorú by poistená osoba zaplatila pri podpise poistného kontraktu.

**Veta 3.4.** Medzi súčasnou hodnotou doživotného predlehotného dôchodku a súčasnou hodnotou doživotného predlehotného dôchodku platí vzťah

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x. \quad (3.14)$$

*Dôkaz.* Počítajme z definície pre súčasnú hodnotu doživotného predlehotného dôchodku

$$\ddot{a}_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} v^h {}_h p_x = v^0 {}_0 p_x + \sum_{h=1}^{\omega-x} v^h {}_h p_x.$$

Využitím vzťahov  $v^0 = 1$  a  ${}_0 p_x = 1$  dostaneme

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{h=1}^{\omega-x} v^h {}_h p_x = 1 + a_x. \quad \square$$

**Veta 3.5.** Označme symbolmi  $a_{x:\overline{n}|}^{(m)}$ , resp.  $a_x^{(m)}$  súčasnú hodnotu takého dočasného, resp. doživotného polehotného dôchodku, ktorý vypláca sumu  $1/m$  p. j. pravidelne, na konci každej  $m$ -tiny roka, kým poistená osoba je nažive. Potom približne platí

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m+1}{2m} (1 - A_{x:\overline{n}|}), \quad (3.15)$$

resp.

$$a_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m}, \quad (3.16)$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}. \quad (3.17)$$

*Dôkaz.* Podľa rovnice ekvivalencie v čase podpisu poistnej zmluvy pre súčasnú hodnotu dočasného polehotného dôchodku vyplácaného  $m$ -krát ročne platí

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \sum_{h=0}^{n-1} v^{h+t/m} {}_h p_{x+t/m}.$$

Technickým problémom je, že hodnoty  ${}_h p_{x+t/m}$  obvykle poznáme len v celočíselných vekoch, t. j. máme k dispozícii len  ${}_0 p_x, {}_1 p_x, {}_2 p_x, \dots, {}_n p_x$ . Definujme pomocnú funkciu  $\phi(x, h, t) = v^{h+t/m} {}_h p_{x+t/m}$ . Potom môžeme písať

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \sum_{h=0}^{n-1} \phi(x, h, t).$$

V ďalšom kroku nelineárnu funkciu  $\phi(x, h, t)$  premennej  $t$  aproximujeme lineárnou funkciou. Nech teda platí

$$\phi(x, h, t) \approx \phi(x, h, 0) - \frac{t}{m} \left( \phi(x, h, 0) - \phi(x, h, m) \right) \quad \text{pre } t \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Potom približne platí

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{n}|}^{(m)} &\approx \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \sum_{h=0}^{n-1} \left[ \phi(x, h, 0) - \frac{t}{m} \left( \phi(x, h, 0) - \phi(x, h+1, 0) \right) \right] \\ a_{x:\overline{n}|}^{(m)} &\approx \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \sum_{h=0}^{n-1} \left[ v^h {}_h p_x - \frac{t}{m} \left( v^h {}_h p_x - v^{h+1} {}_{h+1} p_x \right) \right] \\ a_{x:\overline{n}|}^{(m)} &\approx \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \left[ \sum_{h=0}^{n-1} v^h {}_h p_x - \frac{t}{m} \sum_{h=0}^{n-1} \left( v^h {}_h p_x - v^{h+1} {}_{h+1} p_x \right) \right]. \end{aligned}$$

Využitím definície pre súčasnú hodnotu dočasného predlehotného dôchodku, resp. pre súčasnú hodnotu poistenia na dožitie a použitím faktu  $v^0 {}_0 p_x = 1$  dostaneme

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{n}|}^{(m)} &\approx \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \left[ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{t}{m} (1 - A_{x:\overline{n}|}^1) \right] = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{m} \times \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m t (1 - A_{x:\overline{n}|}^1) \\ a_{x:\overline{n}|}^{(m)} &\approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{m^2} \frac{m(m+1)}{2} (1 - A_{x:\overline{n}|}^1) \\ a_{x:\overline{n}|}^{(m)} &\approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m+1}{2m} (1 - A_{x:\overline{n}|}^1). \end{aligned}$$

Tým sme ukázali platnosť aproximácie (3.15). Ďalší vzťah (3.16) uvedený vo Vete 3.5 je priamym dôsledkom približnej rovnice (3.15), stačí formálne položiť  $n = \omega - x$  a využiť vzťahy  ${}_{\omega-x} p_x = 0$ , resp.  $A_{x:\overline{\omega-x}|}^1 = 0$ . Potom dostaneme

$$a_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m} (1 - A_{x:\overline{\omega-x}|}^1) = \ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m} (1 - 0) = \ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m}.$$

Použitím práve dokázaného vzťahu (3.16) a vzťahu (3.14) z Vety 3.4 medzi doživotným predlehotným a doživotným polehotným dôchodkom  $\ddot{a}_x = 1 + a_x$  dostaneme posledný vzťah (3.17), ktorý sme chceli dokázať

$$a_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m} = 1 + a_x - \frac{m+1}{2m} = a_x + \frac{m-1}{2m}. \quad \square$$

*Pozn.:* Pri aproximačných formulách (3.15), (3.16) a (3.17) sme dostali jednoduché kompaktné vzorce pre súčasnú hodnotu polehotného dôchodku vyplácaného  $m$ -krát ročne. Spomínané približné vzorce sú založené na lineárnej aproximácii nelineárnej funkcie  $\phi(x, k, t)$ , pričom tento krok generuje určité nepresnosti. Problém spočíva v tom, že obvykle nemáme k dispozícii údaje o pravdepodobnosti prežitia  $m$ -tín roka, tie musíme nejakým spôsobom odhadovať. Zvolili sme postup z knihy [64], ktorý je založený na spomínanej lineárnej interpolácii diskontovaných pravdepodobností prežitia  $\phi(x, k, t) = v^{k+t/12} {}_k p_{x+t/12}$  v jednoročných úsekoch vzhľadom na premennú  $t$ . V rámci tejto práce sme neskúmali presnosť tejto aproximácie.

### 3.2.3 Určenie výšky poistného v prípade brutto-princípu

Ako sme už uviedli v úvodnej časti tejto podkapitoly, pri brutto-princípe klasickej teórie životného poistenia poisťovňa môže brať do úvahy náklady spojené s uzavretím, správou a vedením poistného kontraktu. Podľa monografie [64] náklady delíme na

- *začiatkové jednorazové náklady*, ozn.  $\alpha$ , ktoré sú spojené spravidla s uzavretím poistnej zmluvy, zahŕňajú, napr. odmeny pre agenta alebo maklérsku spoločnosť, náklady na reklamu, a pod., pričom obvykle sa vyjadrujú v percentách z dávky (poistnej sumy),
- *správne náklady*, ozn.  $\beta$ , bežné (opakujúce sa) náklady spojené napr. s administratívou, náklady na nájomné, náklady spojené s vyplácaním poistných plnení a dávok, a pod., pričom sa vyjadrujú v percentách z dávky (poistnej sumy),
- *inkasné náklady*, ozn.  $\gamma$ , bežné (opakujúce sa) náklady spojené s inkasovaním poistného, pričom sa vyjadrujú ako percentá z brutto-poistného.

V nasledujúcej Defínícii 3.6 je prezentovaná všeobecná formula na výpočet výšky brutto-poistného za predpokladu, že poznáme výšku základného netto-poistného pri danom poistnom produkte.

**Definícia 3.6.** Nech  $JNP$  je výšku základného jednorazového netto-poistného pri danom poistnom produkte, pri ktorom poistné plnenia (dávky) sa vyplácajú polehotne. Výšku základného brutto-poistného definujeme vzťahom

$$BP = \frac{1}{1 - \gamma} \left[ JNP + \alpha + \beta a_{x:\overline{n}} \right], \quad (3.18)$$

kde  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  sú koeficienty nákladov a  $n \in \{1, 2, \dots, \omega - x\}$  je dĺžka poistnej doby.

### 3.3 Modelové dôchodky z úspor v starobnom dôchodkovom sporení

Ako sme už spomínali, jednou z hlavných motivácií nášho výskumu bolo modelovať a analyzovať vyplácanie dôchodkov zo starobného dôchodkového sporenia na Slovensku. Potrebovali sme preto odvodiť výpočtové formuly, pomocou ktorých sme potom mohli počítať výšky mesačne polehotne vyplácaných dávok (viď piatu kapitolu tejto záverečnej práce). Pri odvodení formúl sme využívali klasický netto- a brutto-princíp ekvivalencie, predpoklady deterministického a stochastického modelu životného poistenia uvedené v podkapitole 3.2 a niektoré právne špecifiká zo zákona [85] týkajúce sa vyplácania dôchodkov z úspor v starobnom dôchodkovom sporení.

#### 3.3.1 Prípád mesačne vyplácaného doživotného starobného dôchodku bez zvyšovania dôchodku

Uvažujme *mesačne vyplácaný doživotný starobný dôchodok bez zvyšovania dôchodku a bez pozostalostných dôchodkov* (podľa bodu a) 1. odseku 1 §46 zákona [85]) pre sporiteľa vo veku  $x$  rokov. Označme finálnu výšku úspor v starobnom dôchodkovom sporení symbolom  $P$  (táto suma slúži ako jednorazové brutto-poistné pri kúpe doživotného dôchodku). Nech  $i$  označuje ročnú technickú úrokovú mieru,  $v = (1 + i)^{-1}$  je ročný diskontný faktor,  $m = 12$  je počet výplat v jednom roku (keďže sa zaoberáme s mesačne vyplácaným dôchodkom) a nech maximálna doba vyplácania je  $n = \omega - x$  rokov. Nech  $S^{(12)}$  označuje ročnú výšku dávky vyplácanej mesačne a nech  $S_m = S^{(12)}/12$  je výška mesačnej dávky. Berme do úvahy aj odsek 1 §41 zákona [85], podľa ktorého starobný dôchodok, predčasný starobný dôchodok a pozostalostný dôchodok sa vypláca mesačne pozadu (t. j. polehotne). Uvažujme aj odsek 2 §32 zákona [85] o vrátení časti poistného, ak dôchodca zomrie pred vyplatením prvých 84 mesačných dávok. Podľa spomínaného paragrafu pozostalí dostanú sumu zodpovedajúcu rozdielu sumy určenej na výplatu týchto 84 mesačných súm doživotného dôchodku a súčtu vyplatených mesačných súm doživotného dôchodku. Predpokladáme, že poistná suma sa vyplatí okamžite po smrti dôchodcu.

Označme symbolom  $\bar{D}_j$  pre  $j = 1, 2, \dots, 7$  dávku, ktorú dostanú pozostalí v  $j$ -tom roku, ak dôchodca zomrie niekedy v  $j$ -tom roku (za predpokladu, že zomrie v prvých 7 rokoch vyplácania dôchodku). Ďalej označme symbolom  $D_j$  pre  $j = 0, 1, \dots, 7$  nevy-

platenú časť tej sumy v čase  $j$ , ktorá sa vyčlenila na vyplatenie prvých 84 mesačných dávok. Pri výpočte hodnôt  $D_0, D_1, \dots, D_6$  sme aplikovali aproximačnú formulu (3.15) pre prípad  $m = 12$  v tvare

$$a_{x:\overline{n}|}^{(12)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{13}{24} \left(1 - A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{12}}\right).$$

Položme

$$\begin{aligned} D_0 &= \text{suma, ktorá sa vyčlenila na vyplatenie prvých 84 dávok,} \\ D_0 &= S^{(12)} a_{x:\overline{7}|}^{(12)} \approx S^{(12)} \left[ \ddot{a}_{x:\overline{7}|} - \frac{13}{24} \left(1 - A_{x:\overline{7}|}^{\frac{1}{12}}\right) \right], \\ D_1 &= S^{(12)} a_{x+1:\overline{7-1}|}^{(12)} = S^{(12)} a_{x+1:\overline{6}|}^{(12)} \approx S^{(12)} \left[ \ddot{a}_{x+1:\overline{6}|} - \frac{13}{24} \left(1 - A_{x+1:\overline{6}|}^{\frac{1}{12}}\right) \right], \\ D_2 &= S^{(12)} a_{x+2:\overline{7-2}|}^{(12)} = S^{(12)} a_{x+2:\overline{5}|}^{(12)} \approx S^{(12)} \left[ \ddot{a}_{x+2:\overline{5}|} - \frac{13}{24} \left(1 - A_{x+2:\overline{5}|}^{\frac{1}{12}}\right) \right], \\ &\dots \dots, \\ D_6 &= S^{(12)} a_{x+6:\overline{7-6}|}^{(12)} = S^{(12)} a_{x+6:\overline{1}|}^{(12)} \approx S^{(12)} \left[ \ddot{a}_{x+6:\overline{1}|} - \frac{13}{24} \left(1 - A_{x+6:\overline{1}|}^{\frac{1}{12}}\right) \right], \\ D_7 &= 0. \end{aligned}$$

*Pozn.:* Veličiny  $D_0, D_1, \dots, D_7$  sme počítali ako prospektívne rezervy 7-ročného predlehotočného mesačne vyplácaného dôchodku (vid' [64]).

*Pozn.:* Keby dôchodca zomrel tesne pred niektorým výročím uzatvorenia poistenia (v rámci prvých siedmych rokov vyplácania dôchodku), tak pozostalí by dostali presne sumy  $D_0, D_1, \dots, D_7$  v danom výročí poistenia.

Predpokladajme, že priemerný dôchodca zomrie v strede roka, takže dávku  $\bar{D}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 7$  dostanú pozostalí tiež v strede  $j$ -teho roka. Za aproximáciu dávky  $\bar{D}_j$  zoberme aritmetický priemer dávok  $D_{j-1}$  a  $D_j$ , teda nech platí

$$\begin{aligned} \bar{D}_1 &\approx \frac{D_0 + D_1}{2}, & \bar{D}_2 &\approx \frac{D_1 + D_2}{2}, & \bar{D}_3 &\approx \frac{D_2 + D_3}{2}, & \bar{D}_4 &\approx \frac{D_3 + D_4}{2}, \\ \bar{D}_5 &\approx \frac{D_4 + D_5}{2}, & \bar{D}_6 &\approx \frac{D_5 + D_6}{2}, & \bar{D}_7 &\approx \frac{D_6 + D_7}{2}. \end{aligned}$$

Po dosadení namiesto  $D_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, 7$  dostaneme vzťahy typu

$$\begin{aligned}\bar{D}_j &\approx \frac{1}{2}S^{(12)} \left( \ddot{a}_{x+j-1:\overline{7-(j-1)|}} - \frac{13}{24} \left( 1 - A_{x+j-1:\overline{7-(j-1)|}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \ddot{a}_{x+j:\overline{7-j|}} - \frac{13}{24} \left( 1 - A_{x+j:\overline{7-j|}} \right) \right) \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots, 6, \quad (3.19) \\ \bar{D}_7 &\approx \frac{S^{(12)}}{2} \left[ \ddot{a}_{x+6:\overline{1|}} - \frac{13}{24} \left( 1 - A_{x+6:\overline{1|}} \right) \right] = \frac{S^{(12)}}{2} \left[ 1 - \frac{13}{24} \left( 1 - A_{x+6:\overline{1|}} \right) \right] = \\ &= \frac{S^{(12)}}{2} \left[ \frac{11}{24} + \frac{13}{24} A_{x+6:\overline{1|}} \right].\end{aligned}$$

Pozeraťme sa teraz na podmienku vrátenia časti poisťného ako na samostatný poisťný produkt, t. j. ako na dočasné poistenie pre prípad úmrtia na dobu 7 rokov s klesajúcou výškou dávky. Súčasnú hodnotu tohto produktu môžeme počítať z rovnice ekvivalencie

$$\begin{aligned}(MA)_{x:\overline{7}|}^1 &= \bar{D}_1 {}_0p_x q_x (1+i)^{-0,5} + \bar{D}_2 {}_1p_x q_{x+1} (1+i)^{-1,5} + \dots + \\ &\quad + \bar{D}_7 {}_6p_x q_{x+6} (1+i)^{-6,5}. \\ (MA)_{x:\overline{7}|}^1 &= \sum_{j=1}^7 \bar{D}_j {}_{j-1}p_x q_{x+j-1} (1+i)^{-(j-0,5)}.\end{aligned}$$

Po dosadení namiesto  $\bar{D}_j$  zo vzťahu (3.19) dostaneme

$$\begin{aligned}(MA)_{x:\overline{7}|}^1 &\approx \frac{S^{(12)}}{2} \sum_{j=1}^6 \left[ \ddot{a}_{x+j-1:\overline{7-(j-1)|}} - \frac{13}{24} \left( 1 - A_{x+j-1:\overline{7-(j-1)|}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \ddot{a}_{x+j:\overline{7-j|}} - \frac{13}{24} \left( 1 - A_{x+j:\overline{7-j|}} \right) \right] {}_{j-1}p_x q_{x+j-1} (1+i)^{-(j-0,5)} + \\ &\quad + \frac{S^{(12)}}{2} \left[ \frac{11}{24} + \frac{13}{24} A_{x+6:\overline{1|}} \right] {}_6p_x q_{x+6} (1+i)^{-6,5}.\end{aligned} \quad (3.20)$$

Zaveďme pomocné označenie

$$\begin{aligned}M &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \left[ \ddot{a}_{x+j-1:\overline{7-(j-1)|}} - \frac{13}{24} \left( 1 - A_{x+j-1:\overline{7-(j-1)|}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \ddot{a}_{x+j:\overline{7-j|}} - \frac{13}{24} \left( 1 - A_{x+j:\overline{7-j|}} \right) \right] {}_{j-1}p_x q_{x+j-1} (1+i)^{-(j-0,5)} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \frac{11}{24} + \frac{13}{24} A_{x+6:\overline{1|}} \right] {}_6p_x q_{x+6} (1+i)^{-6,5}.\end{aligned} \quad (3.21)$$

Potom po dosadení (3.21) do vzťahu (3.20) dostaneme

$$(MA)_{x:\overline{7}|}^1 \approx S^{(12)} \times M. \quad (3.22)$$

Pri našich modelových výpočtoch sme brali do úvahy aj náklady životnej poisťovne spojené s vyplácaním doživotného dôchodku. Definujme preto nasledujúce koeficientu brutto-princípu:

- začiatkové náklady v prvom roku  $\alpha$  (počítanú z mesačných dávok v prvom roku vyplácania dôchodku),
- náklady pri vyplácaní dôchodku  $\beta$  (počítanú z každej mesačnej dávky),
- inkasné náklady  $\gamma$  (počítanú z prevedených úspor z druhého piliera),
- maržu pri predčasnom vyplatení časti poistnej sumy  $\varepsilon$  (počítanú z sumy poistného plnenia, aplikovanú v tom prípade, keď dôchodca zomrie v prvých siedmich rokoch vyplácania dôchodku).<sup>2</sup>

Rovnica ekvivalencie pre uvažovaný mesačne vyplácaný doživotný starobný dôchodok bez zvyšovania dôchodku a bez pozostalostných dôchodkov pre sporeteľa vo veku  $x$  rokov a možnosťou vrátenia časti poistného v prípade úmrtia poistenca v prvých siedmich rokoch poistenia má tvar

$$P = \frac{1}{1 - \gamma} \left[ S^{(12)} a_x^{(12)} + \alpha S^{(12)} + \beta S^{(12)} a_x^{(12)} + (1 - \varepsilon)(MA)_{x:\overline{7}}^1 \right],$$

pričom sme vychádzali zo vzťahu (3.18) uvedeného v Defínícii 3.6 a predpokladali sme, že v prípade úmrtia poistenca v prvých siedmich rokoch pozostalí dostanú len  $100 \times (1 - \varepsilon)$  percentnú časť vypočítanej výšky poistného plnenia. Po dosadení zo vzťahov (3.16) a (3.22) dostaneme

$$P \approx \frac{1}{1 - \gamma} \left[ S^{(12)} (1 + \beta) \left( \ddot{a}_x - \frac{13}{24} \right) + \alpha S^{(12)} + (1 - \varepsilon) S^{(12)} M \right].$$

Po vyjadrení neznámej dôchodkovej dávky a použitím vzťahu  $S_m = S^{(12)}/12$ , pre mesačnú dôchodkovú dávku dostaneme

$$S_m \approx \frac{1}{12} \times \frac{(1 - \gamma)P}{(1 + \beta) \left( \ddot{a}_x - \frac{13}{24} \right) + \alpha + (1 - \varepsilon)M}, \quad (3.23)$$

kde premenná  $M$  je definovaná vzťahom (3.21).

*Pozn.:* Pri odvodení formuly (3.23) sme používali dve rôzne typy aproximácií. Pri aproximácii súčasnej hodnoty mesačne vyplácaného polehotného doživotného dôchodku

<sup>2</sup>Ďalšie podrobnosti sú uvedené v podkapitole 5.4.

sme využili úvahu z Vety 3.5, kým pri odhadnutí výšky poistného plnenia v prípade úmrtia dôchodcu v prvých siedmich rokoch vyplácania dôchodku sme predpokladali, že priemerný dôchodca zomrie v polovici roka. V rámci tejto práce sme neskúmali presnosť týchto aproximácií, spoliehali sme sa pri nich len na odporúčané postupy z knihy [64].

### 3.3.2 Prípád mesačne vyplácaného doživotného starobného dôchodku so zvyšovaním dôchodku

Uvažujme teraz *mesačne vyplácaný doživotný starobný dôchodok so zvyšovaním dôchodku a bez pozostalostných dôchodkov* (podľa bodu a) 2. odseku 1 §46 zákona [85]). Nech platia všetky ďalšie predpoklady a označenie používané v časti 3.3.1. Nech  $S^{(12)}$  označuje základnú ročnú výšku dávky vyplácanej mesačne v prvom roku a nech  $S_m = S^{(12)}/12$  je mesačná výška dávky v prvom roku vyplácania dôchodku. Predpokladajme, že v ďalších rokoch sa ročná dávka zvyšuje konštantným koeficientom  $g > 0$ , vždy vo výročí vzniku povinnosti poistiteľa plniť svoje záväzky vyplývajúce zo zmluvy o poistení dôchodku (podľa §42 zákona [85]). Potom ročné výšky dávok vyplácaných mesačne v jednotlivých rokoch sú postupne  $S^{(12)}$ ,  $S^{(12)}(1+g)$ ,  $S^{(12)}(1+g)^2$ ,  $S^{(12)}(1+g)^3, \dots$  Po analogickom odvodení, aké sme prezentovali v časti 3.3.1, pre mesačnú výšku dávky vyplácanú v prvom roku sme dostali

$$S_m \approx \frac{P(1-\gamma)}{12} \left[ (1+\beta) \sum_{k=0}^{\omega-x} (1+g)^k \left( \frac{11}{24} A_{x:\overline{k}|} + \frac{13}{24} A_{x:\overline{k+1}|} \right) + \alpha + (1-\varepsilon)G \right]^{-1}, \quad (3.24)$$

kde

$$\begin{aligned} G = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \left( \sum_{k=0}^{6-(j-1)} (1+g)^{k+j-1} \left( \frac{11}{24} A_{x+j-1:\overline{k}|} + \frac{13}{24} A_{x+j-1:\overline{k+1}|} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{6-j} (1+g)^{k+j} \left( \frac{11}{24} A_{x+j:\overline{k}|} + \frac{13}{24} A_{x+j:\overline{k+1}|} \right) \right) {}_{j-1}p_x q_{x+j-1} (1+i)^{-(j-0,5)} + \\ & + \frac{1}{2} (1+g)^6 \left( \frac{11}{24} + \frac{13}{24} A_{x+6:\overline{1}|} \right) {}_6p_x q_{x+6} (1+i)^{-6,5}. \end{aligned}$$

*Pozn.:* Podrobné odvodenie formuly (3.24), ako aj jeho zovšeobecnenie pre prípad, keď tempo rastu ročných dávok  $g$  nie je konštantné, sme uviedli v Prílohe A.

*Pozn.:* V rámci praktickej časti tejto práce sme neuvažovali dôchodky so zvyšovaním dávky, pre tento prípad sme nevykonali žiadne modelové výpočty.



## 4. Metóda spárovania aktív a pasív a modely penzijných schém

V predchádzajúcich kapitolách sme postupne uviedli základy finančnej matematiky, princípy finančného modelovania a klasickú teóriu životného poistenia. V rámci tejto kapitoly sme sa posunuli ďalej a vytvorili sme akúsi nadstavbovú časť založenú na predchádzajúcich teoretických kapitolách. V prvom rade sme sa zaoberali s tzv. *metódou spárovania aktív a pasív životnej poisťovne*, ktorá bola dôležitým aparátom nášho výskumu. Pomocou tejto metódy sme odhadovali zisk našej modelovej životnej poisťovne, a zároveň táto metóda slúžila aj ako jednoduchá investičná stratégia, na základe ktorej poisťovňa môže rozložiť inkasované poistné (resp. prostriedky technických rezerv). Keďže praktickú časť nášho výskumu sme zamerali na analýzu vyplácania dôchodkov z druhého piliera slovenského dôchodkového systému, považovali sme za dôležité, aby sme v patričnej miere spomenuli aj niektoré známe modely penzijných schém.

V podkapitole 4.1 sme definovali základné pojmy a špecifické označenia metódy spárovania aktív a pasív, pričom osobitne sme sa zaoberali s jej statickou, resp. dynamickou verziou. V ďalšej časti tejto podkapitoly sme uviedli metódy odhadu akumulovanej hodnoty poistenia pri investičnej schéme založenej na metóde spárovania aktív a pasív. Na riešenie úlohy metódy spárovania sme navrhli numerický prístup optimalizácie pomocnej účelovej funkcie. Podkapitolu 4.3 sme venovali niektorým známym penzijným schémam publikovaným v domácej i zahraničnej literatúre. Zhrnuli sme podobnosti a odlišnosti týchto schém s našimi modelmi a porovnali sme náš prístup a výsledky s výstupmi niektorých odborných štúdií, ktoré sa zaoberali s vyplácaním dôchodkov zo súkromných penzijných plánov.

### 4.1 Metóda spárovania aktív a pasív

Solventnosť životnej poisťovne je veľmi dôležitým faktorom pri konštrukcii jej investičnej politiky, pretože poisťovňa musí nepretržite udržiavať požadovanú mieru

solventnosti. Metóda spárovania aktív a pasív je postupom, ktorý v určitom zmysle prispieva k znižovaniu pravdepodobnosti insolventnosti poisťovne. V tomto kontexte sú aktíva poisťovne napr. dlhopisy, akcie, termínované vklady a pod., teda prostriedky, do ktorých poisťovňa investuje inkasované poistné v mene poistených. Pasíva poisťovne v tomto prípade znamenajú jej záväzky voči poistencom vyplývajúce z poistných kontraktov. Princíp spárovania aktív a pasív spočíva v tom, že poisťovňa ku každému záväzku (poistnému plneniu) pripojí vhodné aktívum s rovnakou (budúcou) hodnotou a totožným termínom splatnosti. Táto metóda sa dá použiť predovšetkým pri produktoch s garantovaným poistným plnením (garantovanou poistnou sumou alebo dôchodkovou dávkou) a pevným termínom (pevnými termínmi) výplaty poistného plnenia. V ďalšej časti tejto podkapitoly sú uvedené základné definície a označenia používané pri spomínanej metóde. Kvôli jednoduchšiemu výkladu sme zvolili časovú jednotku *1 kalendárny rok* a všetky definície pojmov sme uviedli pri tejto časovej jednotke. Celú metódu by sme mohli definovať aj pri ľubovoľnej inej časovej jednotke, napr. polročnej, štvrtročnej alebo mesačnej.

#### 4.1.1 Základy metódy spárovania aktív a pasív

Uvažujme modelovú životnú poisťovňu, ktorá ponúka osobám vo veku  $x$  rokov odložený poistný produkt na dobu  $n$  rokov s  $l$ -ročnou dobou odkladu. Pre jednoduchosť predpokladajme, že poisťovňa ocení svoj poistný produkt na základe netto-princípu a využitím modelu fiktívneho súboru (poisťovňa pracuje na báze očakávaného poistného a očakávaných poistných plnení). Nech poistné  $P$  sa platí raz ročne, bežne predlehotne v prvých  $m$  rokoch (ak poistená osoba je nažive). Poistné plnenie v prípade úmrtia vo výške  $S$  sa vypláca na konci toho roka, v ktorom nastala smrť poistenca, kým dávky pri prežití tiež vo výške  $S$  sa môžu vyplácať aj na začiatku, aj na konci rokov v rámci poistnej doby. Označme symbolom  $\Upsilon$  najneskorší možný čas ukončenia poistného kontraktu. Pri odloženom predlehotnom dôchodku  $\Upsilon = l + n - 1$ , kým v prípade odloženého polehotného dôchodku a ostatných typoch poistenia platí, že  $\Upsilon = l + n$ . Predpokladajme, že poisťovňa investuje inkasované prostriedky do jediného bezrizikového aktíva – štandardného bezkupónového dlhopisu, pričom na trhu existuje plná škála štandardných dlhopisov s 1-ročnou, 2-ročnou, ...,  $\Upsilon$ -ročnou dobou splatnosti.

**Definícia 4.1.** Nech platia vyššie uvedené označenia a predpoklady. Nech  ${}_t r_k$  označuje

ročný spojitý výnos štandardného dlhopisu s maturitou  $k$  rokov platný v čase  $t$ , pričom  $t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\}$  a  $k \in \{1, \dots, \Upsilon - t\}$ . Maticu investičných výnosov označujeme symbolom  $\mathcal{J}$  a definujeme ako

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} {}_0r_1 & {}_0r_2 & \dots & {}_0r_{\Upsilon-1} & {}_0r_{\Upsilon} \\ {}_1r_1 & {}_1r_2 & \dots & {}_1r_{\Upsilon-1} & 0 \\ {}_2r_1 & {}_2r_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {}_{\Upsilon-1}r_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prvky  ${}_0r_1, {}_0r_2, \dots, {}_0r_{\Upsilon}$  matice  $\mathcal{J}$  sú nenáhodné veličiny, kým ostatné prvky považujeme (v čase podpisu poisťnej zmluvy) za náhodné premenné.

Realizáciu matice investičných výnosov označujeme symbolom  $\tilde{\mathcal{J}}$  a používame pre ňu zápis

$$\tilde{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} {}_0\tilde{r}_1 & {}_0\tilde{r}_2 & \dots & {}_0\tilde{r}_{\Upsilon-1} & {}_0\tilde{r}_{\Upsilon} \\ {}_1\tilde{r}_1 & {}_1\tilde{r}_2 & \dots & {}_1\tilde{r}_{\Upsilon-1} & 0 \\ {}_2\tilde{r}_1 & {}_2\tilde{r}_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {}_{\Upsilon-1}\tilde{r}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde  ${}_t\tilde{r}_k$  je realizácia ročného výnosu  $k$ -ročného štandardného dlhopisu v čase  $t$  (nenáhodná veličina),  $t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\}$ ,  $k \in \{1, \dots, \Upsilon - t\}$ .

*Pozn.:* Realizácie výnosov  ${}_t\tilde{r}_k$  môžeme získať napr. pomocou odhadnutej výnosovej krivky  $\tilde{R}(\cdot)$  Vašíčkovho modelu, CIR modelu, NS modelu a pod., teda v tom prípade môžeme písať  ${}_t\tilde{r}_k = \tilde{R}_t(k)$ ,  $t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\}$ ,  $k \in \{1, \dots, \Upsilon - t\}$ .

**Definícia 4.2.** Nech platia vyššie uvedené označenia a predpoklady. Maticu výnosov faktorov označujeme symbolom  $\mathcal{I}$  a v prípade spojitý typu úročenia definujeme ako

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} \exp\{{}_0r_1\} & \exp\{2{}_0r_2\} & \dots & \exp\{(\Upsilon-1){}_0r_{\Upsilon-1}\} & \exp\{\Upsilon{}_0r_{\Upsilon}\} \\ \exp\{1r_1\} & \exp\{2{}_1r_2\} & \dots & \exp\{(\Upsilon-1){}_1r_{\Upsilon-1}\} & 0 \\ \exp\{2r_1\} & \exp\{2{}_2r_2\} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \exp\{{}_{\Upsilon-1}r_1\} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Realizáciu matice investičných výnosov označujeme symbolom  $\tilde{\mathcal{I}}$  a používame pre ňu zápis

$$\tilde{\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} \exp\{0\tilde{r}_1\} & \exp\{2_0\tilde{r}_2\} & \dots & \exp\{(\Upsilon-1)_0\tilde{r}_{\Upsilon-1}\} & \exp\{\Upsilon_0\tilde{r}_\Upsilon\} \\ \exp\{1\tilde{r}_1\} & \exp\{2_1\tilde{r}_2\} & \dots & \exp\{(\Upsilon-1)_1\tilde{r}_{\Upsilon-1}\} & 0 \\ \exp\{2\tilde{r}_1\} & \exp\{2_2\tilde{r}_2\} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \exp\{\Upsilon-1\tilde{r}_1\} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resp. skrátenejší zápis

$$\tilde{\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{I}}_{11} & \tilde{\mathcal{I}}_{12} & \dots & \tilde{\mathcal{I}}_{1,\Upsilon-1} & \tilde{\mathcal{I}}_{1,\Upsilon} \\ \tilde{\mathcal{I}}_{21} & \tilde{\mathcal{I}}_{22} & \dots & \tilde{\mathcal{I}}_{2,\Upsilon-1} & 0 \\ \tilde{\mathcal{I}}_{31} & \tilde{\mathcal{I}}_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathcal{I}}_{\Upsilon,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Definícia 4.3.** Nech platia všetky vyššie uvedené označenia a predpoklady. Označme symbolom  ${}_t c_k$ ,  $t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon-1\}$ ,  $k \in \{1, \dots, \Upsilon-t\}$  relatívnu časť poisťného alebo čistého príjmu z investície, ktorú poisťovňa investuje v čase  $t$  do dlhopisov s dobou splatnosti  $k$  rokov. Premenné  ${}_t c_k$  nazývame *investičnými koeficientami* a môžeme ich zapísať aj v maticovom tvare

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} {}_0 c_1 & {}_0 c_2 & \dots & {}_0 c_{\Upsilon-1} & {}_0 c_\Upsilon \\ {}_1 c_1 & {}_1 c_2 & \dots & {}_1 c_{\Upsilon-1} & 0 \\ {}_2 c_1 & {}_2 c_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {}_{\Upsilon-1} c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

pričom platí  $\sum_{k=1}^{\Upsilon-t} {}_t c_k = 1$ ;  $\forall t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon-2\}$ ;  ${}_t c_k \in \langle 0; 1 \rangle$ ;  $\forall t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon-2\}$ ;  $\forall k \in \{1, 2, \dots, \Upsilon-t\}$  a  ${}_{\Upsilon-1} c_1 = 1$ . Maticu  $\mathcal{C}$  nazývame *investičnou maticou*.

Ďalej, definujme pomocné vektorové premenné  $\mathbf{c}_t$  obsahujúce pôvodné (skalárne) in-

vestičné koeficienty  ${}_h c_{t-h}$  pre  $h = 0, 1, 2, \dots, t-1$  a pre  $t = 1, 2, \dots, \Upsilon$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= \text{prázdny vektor,} \\ \mathbf{c}_1 &= ({}_0 c_1)^\top, \\ \mathbf{c}_2 &= ({}_0 c_2, {}_1 c_1)^\top, \\ \mathbf{c}_3 &= ({}_0 c_3, {}_1 c_2, {}_2 c_1)^\top, \\ &\dots \\ \mathbf{c}_{\Upsilon-1} &= ({}_0 c_{\Upsilon-1}, {}_1 c_{\Upsilon-2}, \dots, {}_{\Upsilon-2} c_1)^\top, \\ \mathbf{c}_\Upsilon &= ({}_0 c_\Upsilon, {}_1 c_{\Upsilon-1}, \dots, {}_{\Upsilon-1} c_1)^\top. \end{aligned}$$

Vo vyššie uvedených definíciách sme postupne definovali maticu výnosov, maticu úrokových faktorov a investičné koeficienty. Ďalej, nech  $\mathbf{p}^P$  označuje vektor pravdepodobností aplikovaný pri modelovaní platenia poisťného a nech  $\mathbf{CF}^P$  je vektor peňažných tokov (*cash-flow vector*) pre platenie poisťného. Analogicky, nech  $\mathbf{p}^S$  je vektor pravdepodobností pre vyplácanie poisťných plnení a dávok a  $\mathbf{CF}^S$  je vektor peňažných tokov pre vyplácanie plnení a dávok. Konkrétne využitie uvedenej štvorice vektorov sme ilustrovali prostredníctvom nasledujúcich príkladov.

**Príklad 4.1.** Uvažujme odložený predlehotný dôchodok s bežne plateným poisťným s parametrami  $m, l, n, P, S$ . Potom vektory  $\mathbf{p}^P, \mathbf{CF}^P, \mathbf{p}^S, \mathbf{CF}^S$  môžeme definovať v tvare

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^P &= (\underbrace{{}_0 p_x, {}_1 p_x, \dots, {}_{m-1} p_x}_m, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n+l-m+1})^\top, \\ \mathbf{CF}^P &= (\underbrace{P, P, \dots, P}_m, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n+l-m+1})^\top, \\ \mathbf{p}^S &= (\underbrace{0, \dots, 0}_l, \underbrace{{}_l p_x, {}_{l+1} p_x, \dots, {}_{n-1} p_x}_n, 0)^\top, \\ \mathbf{CF}^S &= (\underbrace{0, \dots, 0}_l, \underbrace{S, S, \dots, S}_n, 0)^\top, \end{aligned}$$

kde  ${}_h p_x$  sú faktory prežitia pre  $x$ -ročnú osobu.

**Príklad 4.2.** Uvažujme odložené zmiešané poistenie s bežne plateným poisťným s pa-

parametrami  $m, l, n, P, S$ . Potom vektory  $\mathbf{p}^P, \mathbf{CF}^P, \mathbf{p}^S, \mathbf{CF}^S$  môžeme písať v tvare

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^P &= (\underbrace{{}_0p_x, {}_1p_x, \dots, {}_{m-1}p_x}_m, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n+l-m+1})^\top, \\ \mathbf{CF}^P &= (\underbrace{P, P, \dots, P}_m, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n+l-m+1})^\top, \\ \mathbf{p}^S &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{l+1}, \underbrace{{}_lq_x, {}_{l+1}q_x, \dots, {}_{l+n-2}q_x, {}_{l+n-1}p_x}_n)^\top, \\ \mathbf{CF}^S &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{l+1}, \underbrace{S, S, \dots, S}_n)^\top,\end{aligned}$$

kde  ${}_h p_x$  sú faktory prežitia a  ${}_h q_x$  sú odložené pravdepodobnosti úmrtia pre  $x$ -ročnú osobu (definície týchto pojmov sú uvedené v tretej kapitole tejto práce).

**Definícia 4.4.** Nech platia všetky doteraz zavedené označenia. Nech  $AV_0(\mathbf{c}_0) \triangleq AV_0 = p_1^P \times CF_1^P - p_1^S \times CF_1^S$ . **Akumulovanú hodnotu poistenia** (*accumulated value, AV*) v  $t$ -tom roku poistnej doby pre  $t \in \{1, 2, \dots, \Upsilon\}$  pri realizácii matice výnosových faktorov  $\tilde{\mathcal{I}}$  definujeme pomocou rekurentnej formuly

$$\begin{aligned}AV_t(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_t) &= p_{t+1}^P \times CF_{t+1}^P - p_{t+1}^S \times CF_{t+1}^S + \\ &+ \sum_{h=0}^{t-1} AV_h(\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_h) \times {}_h c_{t-h} \times \tilde{\mathcal{I}}_{h+1, t-h},\end{aligned}\quad (4.1)$$

kde  $p_{t+1}^P, p_{t+1}^S, CF_{t+1}^P$  resp.  $CF_{t+1}^S$  sú prvky (zložky) príslušných vektorov  $\mathbf{p}^P, \mathbf{p}^S, \mathbf{CF}^P$ , resp.  $\mathbf{CF}^S$ . V niektorých prípadoch sa používa skrátenejší zápis vyššie uvedenej definičnej rovnice (4.1) v tvare

$$AV_t = p_{t+1}^P \times CF_{t+1}^P - p_{t+1}^S \times CF_{t+1}^S + \sum_{h=0}^{t-1} AV_h \times {}_h c_{t-h} \times \tilde{\mathcal{I}}_{h+1, t-h}\quad (4.2)$$

pre  $t \in \{1, 2, \dots, \Upsilon\}$ .

*Pozn.:* Všetky vyššie uvedené pojmy sme definovali pre netto-princíp, teda pre ten prípad, keď sme neuvažovali náklady poisťovne. Celú teóriu by sme mohli skonštruovať aj pre brutto-princíp, napr. miernou modifikáciou vektorov  $\mathbf{CF}^P, \mathbf{CF}^S$ , alebo zavedením nových cash-flow vektorov na modelovanie nákladov poisťovne.

*Pozn.:* Metódu spárovania aktív a pasív životnej poisťovne sme definovali len pre jednoduchý prípad, keď sme uvažovali len jediný typ investičných aktív (bezrizikový

štandardný dlhopis). Zovšeobecnením metódy by mohol byť model s  $G$  typom investičných aktív (napr. 1 = bežné účty, 2 = termínované vklady, 3 = štátne dlhopisy, 4 = firemné dlhopisy, 5 = akcie, ...,  $G$  = finančné deriváty) a naša modelová životná poisťovňa v každom čase  $t$  by mohla investovať do týchto  $G$  typov aktív, ktoré majú dobu splatnosti (dobu viazanosti)  $k = 1, 2, \dots, \Upsilon - t$  a rôzne výnosy  ${}_t r_k^g$ . Potom by sme mohli uvažovať matice výnosov  $\mathcal{J}^{(1)}, \dots, \mathcal{J}^{(G)}$ , matice výnosových faktorov  $\mathcal{I}^{(1)}, \dots, \mathcal{I}^{(G)}$  a investičné matice  $\mathcal{C}^{(1)}, \dots, \mathcal{C}^{(G)}$  s prvkami  ${}_t c_k^g$ .

*Pozn.:* Chceli by sme zdôrazniť, že metóda spárovania aktív a pasív neuvažuje mieru rizikovosti jednotlivých aktív. Keby sme chceli brať do úvahy aj tento efekt, tak by sme potrebovali vykonať ďalšie modifikácie metódy, prípadne použiť iný model z teórie správy aktív a pasív (*asset-liability management, ALM*).

*Pozn.:* V praktickej, piatej kapitole našej práce, v ktorej sme modelovali vyplácanie dôchodkov z úspor v druhom dôchodkovom pilieri, sme používali vyššie definovanú, jednoduchú verziu metódy spárovania aktív a pasív s jediným typom investičných aktív (so štátnymi/vládnyimi štandardnými dlhopismi). Mali sme nato dva hlavné dôvody:

- 1) nemali sme k dispozícii dostatočne kvalitné historické údaje, pomocou ktorých by sme boli schopní nastaviť aplikovateľné modely pre budúce výnosy jednotlivých typov aktív,
- 2) v našich analýzach sme skúmali až 40-ročný budúci časový horizont, ktorý je veľmi dlhým obdobím nato, aby sme dokázali pre ňu spraviť relevantné prognózy; to ani nebolo našim cieľom, my sme chceli skôr poukázať na možné negatívne výkyvy a vplyv rizikových faktorov, ktoré sa môžu prejaviť pri vyplácaní dôchodkov z druhého piliera (práve preto sme vytvorili vlastné modelové scenáre); v konečnom dôsledku sme to posúdili tak, že k dosiahnutiu našich cieľov by mohol stačiť aj model s jedným bezrizikovým investičným aktívom.

**Definícia 4.5.** *Statickou metódou spárovania aktív a pasív* rozumieme takú verziu metódy spárovania, pri ktorej poisťovňa celé čisté poistné rozloží v čase podpisu poistnej zmluvy (t. j. v čase 0) tak, že do 1-ročných, 2-ročných, ...,  $(\Upsilon - 1)$ -ročných štandardných dlhopisov investuje presne toľko prostriedkov technických rezerv, aká je výška očakávaného poistného plnenia alebo očakávanej dávky v čase maturity daného dlhopisu.

Statickú metódu je možné používať len v tom prípade, keď poisťné sa platí jednorazovo, v čase podpisu poisťnej zmluvy a poisťovňa všetky investičné rozhodnutia spraví v čase 0. Výhodou tejto metódy je, že modelová životná poisťovňa vo svojich výpočtoch môže používať výnosy  ${}_0\tilde{r}_1, {}_0\tilde{r}_2, \dots, {}_0\tilde{r}_{\Upsilon-1}$  známe v čase podpisu poisťnej zmluvy. V časti 4.1.2 sme uviedli Vetu 4.1, ktorá vyslovuje tvrdenie o tom, ako by sme mohli zvoliť jednoduchú investičnú stratégiu, ktorá za určitých predpokladov by bola optimálnou pre statickú verziu metódy spárovania aktív a pasív.

**Definícia 4.6.** *Dynamickou metódou spárovania aktív a pasív* rozumieme takú verziu metódy spárovania, pri ktorej spárovanie aktív a pasív je možné vykonať vo všetkých časových bodoch  $t = 0, 1, \dots, \Upsilon - 1$ .

Dynamická metóda spárovania aktív a pasív definovaná v Definícii 4.6 teda dovoľuje životnej poisťovni, aby spravila investičné rozhodnutia v každom časovom bode (pri danom delení časových bodov, v našom prípade v každom roku), teda poisťovňa v jednotlivých časoch môže investovať inkasované poisťné (v prvých  $m$  rokoch poistenia) alebo reinvestovať čiastočné zisky z prebytkov predchádzajúcich investícií (počas celej doby poistenia). Táto metóda je používateľná aj v tom prípade, keď na (modelovom) trhu cenných papierov neexistuje plná škála štandardných dlhopisov s dobou splatnosti  $1, 2, \dots, \Upsilon$  rokov a k dispozícii sú len niektoré dlhopisy s maturitami  $T_1, T_2, \dots, T_f$  rokov, kde  $1 \leq f < \Upsilon$ .<sup>1</sup>

#### 4.1.2 Úloha metódy spárovania aktív a pasív a jej riešenie

Ako sme už spomínali v úvode tejto kapitoly (a aj v tretej kapitole), jedným z hlavných cieľov životných poisťovní je dosiahnuť zisk a maximalizovať jeho hodnotu. Úloha metódy spárovania aktív a pasív je úzko prepojená s touto ideou, jej matematickú formuláciu sme uviedli v nasledujúcej definícii.

**Definícia 4.7.** Nech platia všetky označenia a predpoklady zavedené v tejto kapitole. *Úlohou metódy spárovania aktív a pasív* je maximalizovať akumulovanú hodnotu poistenia na konci poisťnej doby, teda môžeme písať

$$\max_{\substack{t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\} \\ k \in \{1, 2, \dots, \Upsilon - t\}}} AV_{\Upsilon}^{tCk} \quad (4.3)$$

<sup>1</sup>Práve takýto prípad sme používali v podkapitole 5.6 pri stresových testoch vývoja výnosov založených na dynamickej metóde spárovania aktív a pasív.



pri podmienkach

$$AV_t \geq 0, \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\}, \quad (4.4)$$

$$\sum_{h=1}^{\Upsilon-t} {}_t c_h = 1, \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\}, \quad (4.5)$$

$${}_t c_k \in \langle 0; 1 \rangle, \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, \Upsilon - t\}, \quad {}_{\Upsilon-1} c_1 = 1. \quad (4.6)$$

Podmienku (4.4) pracovne nazývame *pravidlom solventnosti* poisťovne, pretože hovorí o tom, že poisťovňa v každom čase  $t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\}$  musí dodržiavať zásadu solventnosti (v tom našom prípade akumulovaná hodnota poistenia nemôže klesnúť do záporných čísel). Pravidlo solventnosti by sme mohli zovšeobecniť, keby namiesto dolnej hranice 0 sme uvažovali pevne stanovenú dolnú hranicu  $b \geq 0$ , pod ktorú by akumulovaná hodnota poistenia nemohla klesnúť v žiadnom čase. Nasledujúca veta špecifikuje jednoduchú investičnú stratégiu, ktorá je za určitých predpokladov optimálnou pre statickú metódu spárovania aktív a pasív.

**Veta 4.1.** Predpokladajme, že platia predchádzajúce predpoklady a označenia. Nech realizácie ročných výnosov platných v čase nula tvoria rastúcu postupnosť, t. j. nech platí  ${}_0 \tilde{r}_1 < {}_0 \tilde{r}_2 < \dots < {}_0 \tilde{r}_{\Upsilon-1}$ . Pre investičné koeficienty  ${}_0 c_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, \Upsilon$  nech platia vzťahy

$${}_0 c_k = \frac{p_{k+1}^S \times CF_{k+1}^S}{(p_1^P \times CF_1^P - p_1^S \times CF_1^S) \tilde{\mathcal{I}}_{1,k}}, \quad k = 1, 2, \dots, \Upsilon - 1, \quad (4.7)$$

$${}_0 c_{\Upsilon} = 1 - \sum_{k=1}^{\Upsilon-1} {}_0 c_k. \quad (4.8)$$

Ak  ${}_0 c_{\Upsilon} \geq 0$ , potom prezentovaná investičná stratégia (4.7) založená na statickej metóde spárovania aktív a pasív rešpektuje pravidlo solventnosti pre každé  $t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\}$  a zároveň maximalizuje akumulovanú hodnotu poistenia v čase  $\Upsilon$ .

*Dôkaz.* Z predpokladu o rastúcom usporiadaní realizácií ročných výnosov  ${}_0 \tilde{r}_1 < {}_0 \tilde{r}_2 < \dots < {}_0 \tilde{r}_{\Upsilon-1}$  vyplýva, že aj prvky realizácie investičnej matice  $\tilde{\mathcal{I}}$  tvoria rastúcu postupnosť vzhľadom na maturitu  $k$ , t. j. platí  $\tilde{\mathcal{I}}_{1,1} < \tilde{\mathcal{I}}_{1,2} < \dots < \tilde{\mathcal{I}}_{1,\Upsilon}$ . To znamená, že pre poisťovňu je najvýhodnejšie investovať do  $\Upsilon$ -ročných dlhopisov, pretože tie prinášajú najvyšší výnos. Z definície stratégie (vzťahy (4.7), (4.8)) je zrejmé, že  $AV_t = 0$  pre  $t = l+1, l+2, \dots, \Upsilon - 1$ , pretože poisťovňa presne vyrovná očakávané záväzky v časoch

$t = l + 1, l + 2, \dots, \Upsilon - 1$  a zvyšok investuje do najvýhodnejších,  $\Upsilon$ -ročných dlhopisov. Ak  ${}_0c_\Upsilon \geq 0$ , potom to ešte neznamená, že poisťovňa skončí v zisku (v čase  $\Upsilon$ ), pretože musí ešte vyrovnať posledný očakávaný záväzok. Ak po vyplatení posledného očakávaného plnenia či očakávanej dávky poisťovňa eviduje kladný zostatok, tak ten je jej čistým ziskom (platným v čase  $\Upsilon$ ) a aj maximálnou akumulovanou hodnotou poistenia pri rešpektovaní pravidiel solventnosti.  $\square$

Vráťme sa teraz k pôvodnej maximalizačnej úlohe (4.3). Dosadením definičnej rovnice  $AV_t$  do maximalizačnej úlohy (4.3) dostaneme

$$\max_{\substack{t c_k \\ t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\} \\ k \in \{1, 2, \dots, \Upsilon - t\}}} \left\{ p_{\Upsilon+1}^P \times CF_{\Upsilon+1}^P - p_{\Upsilon+1}^S \times CF_{\Upsilon+1}^S + \sum_{h=0}^{\Upsilon-1} AV_h \times {}_h c_{t-h} \times \tilde{I}_{h+1, t-h} \right\} \quad (4.9)$$

pri podmienkach

$$p_{t+1}^P \times CF_{t+1}^P - p_{t+1}^S \times CF_{t+1}^S + \sum_{h=0}^{t-1} AV_h \times {}_h c_{t-h} \times \tilde{I}_{h+1, t-h} \geq 0,$$

$$\forall t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\}, \quad (4.10)$$

$$\sum_{h=1}^{\Upsilon-t} {}_t c_h = 1, \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\}, \quad (4.11)$$

$${}_t c_k \in \langle 0; 1 \rangle, \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, \Upsilon - t\}, \quad {}_{\Upsilon-1} c_1 = 1. \quad (4.12)$$

*Pozn.:* Zápis maximalizačnej úlohy v podobe vzťahu (4.9) s hraničnými podmienkami (4.10), (4.11), (4.12) nie je úplným zápisom. Chceli by sme zdôrazniť, že akumulovaná hodnota  $AV_t$  závisí od vektorových parametrov  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_t$ , ktoré obsahujú hľadané investičné koeficienty  ${}_t c_k$ .

Hľadanie optimálnych investičných koeficientov  ${}_t c_k$  je vysokodimenzionálnym optimalizačným problémom, ktorý (okrem niekoľkých triviálnych prípadov) nie je možné riešiť analytickým spôsobom. Práve preto sme hľadali vhodnú numerickú metódu, pomocou ktorej by sme boli schopní vyriešiť maximalizačnú úlohu (4.9) s hraničnými podmienkami (4.10), (4.11), (4.12). Po vyskúšaní viacerých postupov sme nakoniec zvolili *penalizačnú metódu* publikovanú v knihe [13] založenú na optimalizácii pomocnej účelovej funkcie.

**Definícia 4.8.** Nech platia všetky predchádzajúce predpoklady a označenia. Definujme

penalizačnú funkciu  $Z_\nu$  predpisom

$$Z_\nu \triangleq Z(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_t, \dots, \mathbf{c}_{\Upsilon-1}, \nu) = \nu \sum_{t=0}^{\Upsilon-1} \left[ \min \{AV_t(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_t), 0\} \right]^2, \quad (4.13)$$

kde parameter  $\nu > 0$  špecifikuje veľkosť penalty. Ďalej, definujeme účelovú funkciu  $F_\nu$  vzťahom

$$\begin{aligned} F_\nu &\triangleq F(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_\Upsilon, \nu) = AV_\Upsilon(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_\Upsilon) - Z(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{\Upsilon-1}, \nu) = \\ &= p_{\Upsilon+1}^P \times CF_{\Upsilon+1}^P - p_{\Upsilon+1}^S \times CF_{\Upsilon+1}^S + \sum_{h=0}^{\Upsilon-1} AV_h(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_h) \times {}_h c_{t-h} \times \tilde{\mathcal{I}}_{h+1, t-h} - \\ &- \nu \sum_{t=0}^{\Upsilon-1} \left[ \min \{AV_t(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_t), 0\} \right]^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Skrátený zápis účelovej funkcie  $F_\nu$  má tvar

$$\begin{aligned} F_\nu &= p_{\Upsilon+1}^P \times CF_{\Upsilon+1}^P - p_{\Upsilon+1}^S \times CF_{\Upsilon+1}^S + \sum_{h=0}^{\Upsilon-1} AV_h \times {}_h c_{t-h} \times \tilde{\mathcal{I}}_{h+1, t-h} - \\ &- \nu \sum_{t=0}^{\Upsilon-1} \left[ \min \{AV_t, 0\} \right]^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Naším cieľom bolo, aby sme pôvodnú maximalizačnú úlohu (4.9) previedli do numericky riešiteľnej podoby. Sformulovali sme preto nasledujúcu úlohu

$$\begin{aligned} &\max_{\substack{{}_t c_k \in \langle 0; 1 \rangle \\ t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\} \\ k \in \{1, 2, \dots, \Upsilon - t\} \\ \sum_{h=1}^{\Upsilon-t} {}_t c_h = 1}} F(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_\Upsilon, \nu). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Hľadanie riešenia novej úlohy (4.16) prebiehalo iteračne, v našom prípade v prostredí štatistického softvéru  $\mathcal{R}$ . Aplikovali sme nasledujúci algoritmus odporúčaný v publikácii [13]:

1. zvolili sme rozumné štartovacie rozloženie investičných koeficientov  ${}_t c_k^0 \in \langle 0; 1 \rangle$ ,  $t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, \Upsilon - t\}$ , ktoré pre všetky  $t$  rešpektovalo podmienku  $\sum_{h=1}^{\Upsilon-t} {}_t c_h = 1$  a zvolili sme vhodnú hodnotu parametra  $\nu$ ; <sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Vhodnú úroveň parametra  $\nu$  sme hľadali skúšaním viacerých hodnôt.

2. pomocou funkcie `optim()` (pozri [94]) sme maximalizovali účelovú funkciu  $F_\nu$  a vyhľadali sme optimálnu stratégiu  ${}_t c_k^1 \in \langle 0; 1 \rangle$ ,  $t \in \{0, 1, \dots, \Upsilon - 1\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, \Upsilon - t\}$ ;
3. investičnú stratégiu  ${}_t c_k^1$  sme použili ako novú vstupnú hodnotu maximalizačnej procedúry a opakovali sme body 2. a 3., až do splnenia pravidla zastavenia.

Keďže sme používali numerický iteračný algoritmus, dosiahnuté výsledky boli do určitej miery nepresné. Najväčším problémom bolo mierne porušovanie pravidiel solventnosti (4.10) a tento nedostatok sa nám nepodarilo úplne odstrániť. Táto skutočnosť nám však dávala motiváciu k voľbe pravidla zastavenia iteračného algoritmu, ktorú sme formálne navrhli nasledovne: keď hodnota maxima pri  $N$ -tej iterácii je “blízko” k hodnote maxima pri  $(N - 1)$ -vej iterácii, a zároveň maximálne porušenie pravidiel solventnosti (v absolútnej hodnote) nepresahuje danú hodnotu  $B$ , tak algoritmus sa zastaví.<sup>3</sup> Druhou, jednoduchšou alternatívou voľby pravidla zastavenia iterácii bolo ponechanie preddefinovaných odchýlok a tolerancií nastavených vo funkcii `optim()`.

*Pozn.:* Praktickú aplikáciu uvedenej optimalizačnej úlohy založenej na penalizačnej metóde sme uviedli v podkapitole 5.6 pri stresových scenároch vývoja úrokových mier pri vyplácaní dôchodkov z druhého piliera.

## 4.2 Modely penzijných schém

Teória penzijných schém je bohatou autonómnou oblasťou aplikovanej matematiky, ktorá využíva a spája poznatky z teórie finančnej a poistnej matematiky, teórie manažmentu aktív a pasív, teórie portfólia, teórie stochastických proces a z mnohých ďalších okruhov. S modelmi penzijných schém sa zaoberajú tisícky odborných publikácií, napr. knihy, vysokoškolské učebnice, odborné články a štúdie a pod. V rámci nášho výskumného procesu sme sa zaoberali len maličkým fragmentom týchto publikácií, a to len s tými, ktoré boli najbližšie k našej oblasti výskumu. Poznámeneali by sme, že prehľad tých odborných článok a štúdií, ktoré sa zaoberajú špeciálne so slovenským penzijným systémom, sme uviedli v piatej kapitole tejto práce.

Prvou publikáciou, s ktorou sme sa detailne zaoberali, bol článok [5] od trojice autorov Battocchio, Menoncin a Scaillet. Tí vo svojej štúdií skúmali akumuláciu aj

---

<sup>3</sup>Vzdialenosť optimálnych hodnôt dosiahnutých pri jednotlivých iteráciách je možné merať napríklad pomocou danej absolútnej alebo relatívnej odchýlky.

dekumulačnú fázu penzijných plánov a tvrdili, že tieto dve fázy by sa mali modelovať spolu, ako jeden celok. Predpokladali existenciu bezarbitrážneho trhu s  $n$  rizikovými a jedným bezrizikovým aktívom (s deterministickým výnosom), pričom na modelovanie cien podkladových rizikových aktív používali štandardné Itôove procesy (tzv. Mertonov model). Uvažovali sporiteľa vo veku  $y$  rokov (so stochastickou budúcou dĺžkou života  $T_y$ ), ktorý v čase 0 vstúpi do príspevkovo definovaného penzijného plánu (*defined-contribution pension plan, DC scheme*) a prispieva tam konštantnou mierou  $u(t) \equiv u$  (*contribution rate*). Sporiteľ na konci akumuláčnej fázy, v pevne určenom čase  $\Psi$ , odíde do dôchodku, pričom dôchodkové dávky potom dostáva pri konštantnej miere  $v(t) \equiv v$  (*pension rate*). Podľa autorov článku [5] sporiteľ v akumuláčnej, resp. dekumulačnej fáze by mal zvoliť úplne iné investičné stratégie. Na začiatku prvej etapy si sporiteľ môže zvoliť aj rizikovejšiu investičnú stratégiu, no postupom času, ako sa blíži ku koncu akumuláčnej fázy, pomer rizikových aktív v jeho portfóliu by mal postupne klesať v prospech bezrizikového aktíva. V dekumulačnej fáze by mal zvoliť presne opačnú stratégiu a ako sa kráti jeho očakávaná budúca dĺžka života, tým viac by mal investovať do rizikových aktív. Battocchio a kol. “spravodlivosť” pomeru príspevkov a dávok merali pomocou tzv. *podmienky prípustnosti*, ktoré je uvedená v nasledujúcej definícii.

**Definícia 4.9.** [5] Nech platia predchádzajúce označenia a nech  $r$  je ročný spojitý výnos bezrizikového aktíva. Hovoríme, že miera príspevkov  $u$  a miera dôchodkových dávok  $v$  spĺňajú **podmienku prípustnosti** (*feasibility condition*), ak platí vzťah

$$\frac{u}{v} = \frac{1 - \mathbb{E} [e^{-rT_x}]}{1 - \mathbb{E} [e^{-rT_x} I_{T_y < \Psi}] - e^{-r\Psi} \Pr(T_y \geq \Psi)} - 1 \quad \text{pre } u, v > 0, \quad (4.17)$$

kde  $I_A$  je indikátorová funkcia udalosti  $A$ .

Podmienku prípustnosti špecifikovanú v Definícii 4.9 je možné prepísať aj do iného, praktickejšieho tvaru, ktorý sme uviedli v nasledujúcej vete.

**Veta 4.2.** Nech platia predpoklady z Definície 4.9. Potom dvojica  $(u, v)$  spĺňa **pod-**

**mienku prípustnosti** (*feasibility condition*), ak platí vzťah

$$\frac{u}{v} = \frac{\int_0^{\infty} t-t_0 p_y e^{-rt} dt}{\int_{\Psi}^{\infty} t-t_0 p_y e^{-rt} dt}, \quad (4.18)$$

$$\frac{u}{v} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} t p_y e^{-rt}}{\sum_{t=\Psi}^{\infty} t p_y e^{-rt}}. \quad (4.19)$$

*Dôkaz.* Podrobné odvodenie formuly (4.18) sa dá nájsť v [64]. Vzťah (4.19) platí v prípade klasického diskrétného netto-princípu životného poistenia, je špeciálnou diskrétou verziou formuly (4.18).  $\square$

*Pozn.:* Vzťahy (4.17), (4.18), (4.19) platia v prípade netto-princípu, pričom ich zovšeobecnenie pre prípad brutto-princípu by nebolo náročnou úlohou.

Podmienka prípustnosti publikovaná v článku [5] sa dá aplikovať predovšetkým v tých situáciách, keď penzijný systém tvorí jeden celok a jeho dve fázy (akumulačná a dekulmulačná fáza) nie sú oddelené. Keby súkromná zložka slovenského dôchodkového systému (starobné dôchodkové sporenie) spĺňalo toto kritérium (napr. v takom prípade, keby doživotné dôchodky z úspor v druhom pilieri vyplácali dôchodkové správčovské spoločnosti), tak zovšeobecnená podmienka prípustnosti by sa dala používať ako alternatívna metóda na určenie “spravodlivej” výšky dôchodkových dávok (prostredníctvom odhadu penzijnej miery  $v$ ). Keďže ale slovenské starobné dôchodkové sporenie a vyplácanie dôchodkov z úspor v starobnom sporení sú nastavené inak (nesplňajú tento predpoklad), naše výsledky (publikované v podkapitole 5.4 tejto práce) by sa nedali relevantne porovnať s výsledkami založenými na modeli od autorov Battocchio, Menoncin a Scaillet. Práve preto sme sa rozhodli, že v rámci tejto práce nebudeme odhadovať výšku penzijnej miery, resp. ročnej dôchodkovej dávky prostredníctvom podmienky prípustnosti.

V originálnom článku [5] autori venovali osobitnú pozornosť efektu úmrtnosti účastníka v penzijnej schéme so spojenou akumulacnou a dekulmulačnou fázou. Je zrejmé, že správca penzijného plánu čelí v týchto dvoch fázach diametrálne odlišným rizikám. V prvej etape naňho môže vplývať riziko skorého úmrtia sporiteľa, kým v tej druhej fáze správca by mal počítať s možným neskorým úmrtím (t. j. dlhovekosťou)

účastníka. Výskumníci v článku [5] používali demografický model založený na predpoklade, že budúca dĺžka života sporiteľa sa riadi Weibulloým rozdelením. Za tohto predpokladu potom odvodili podmienku prípustnosti a skúmali, ako sa mení pomer  $u/v$  pri rôznych nastaveniach penzijnej schémy. Hlavnou úlohou spomínanej publikácie však bolo riešenie určitej optimalizačnej úlohy – maximalizácia celkovej výšky úspor sporiteľa v penzijnom fonde. Autori článku zvolili úžitkovú funkciu založenú na konštantnej relatívnej averzii voči riziku (*constant relative risk aversion preferences*, CRRA) a hľadali optimálne zloženie investičného portfólia. Dospeli k záveru, že optimálne rozloženie investícií do rôznych aktív závisí od aktuálnej úrovne celkových úspor v penzijnom fonde, a tiež od dĺžky doby odchodu do dôchodku  $\Psi$ .

Ďalšia odborná publikácia [71] od Stehlíka a kol. v určitom zmysle nadväzovala na článok [5] spomínaný vyššie. V práci [71] sa tiež používala podmienka prípustnosti, ale budúca dĺžka života sporiteľa sa modelovala gama rozdelením, zovšeobecneným gama rozdelením, Gompertzovým-Makehamovým rozdelením, resp. logistickým modelom. Autori odvodili podmienku prípustnosti v tých prípadoch, keď sa  $T_y$  sa správa podľa uvedených rozdelení. Pomer  $u/v$  vyčíslili pri rôznych kombináciách parametrov jednotlivých modelov a rôznych hodnotách výnosu bezrizikového aktíva, resp. dynamického procesu úrokových mier. Na záver spravili ilustračnú štúdiu na pomery slovenského dôchodkového systému, avšak ich prístup sa líšil toho nášho, ktorú sme aplikovali v piatej kapitole tejto práce. Stehlík a kol. v článku [71] totiž nebrali do úvahy viacero technických špecifik vyplácania dôchodkov z druhého piliera (napr. marže životnej poisťovne pri vyplácaní dávok alebo podmienku vrátenia časti poisťného v prípade úmrtia dôchodcu v prvých siedmych rokoch vyplácania dôchodku), a preto ich výsledky sme nemohli adekvátne porovnať s tými našimi.

Odborníci Josa-Fombellida a Rincón-Zapatero vo svojom článku [41] skúmali dávkovo definované penzijné schémy, pričom osobitnú pozornosť venovali tzv. riziku voľby miery príspevkov (*contribution rate risk*) a riziku insolventnosti (*solvency risk*). Ich model bol založený na možnosti investovania do  $n$  rizikových aktív a jedného bezrizikového aktíva, pričom výnosy aktív aj v tomto prípade modelovali Mertonovým prístupom. Autori vo svojej publikácii ukázali, že za určitých predpokladov existuje explicitné riešenie pre optimálnu investičnú stratégiu správcu fondu, ktorá minimalizuje riziko voľby miery príspevkov a riziko insolventnosti. Podotkli by sme, že na

rozdiel od nášho výskumu, Josa-Fombellida a Rincón-Zapatero skúmali akumuláciu fázu penzijných systémov a nevenovali pozornosť špecifikám vyplácania dávok z úspor v dôchodkovom systéme.

Ďalšou zo základných publikácií v oblasti výskumu penzijných schém je článok [15] od Cairnsa, ktorá sa zaoberá výlučne len s akumuláciou fázu príspevkovo definovaných penzijných schém. Autor uviedol stochastický model so spjitým časom, pomocou ktorej popisoval dynamiku penzijného fondu. Porovnával účinnosť rôznych investičných stratégií, napr. statickej stratégie s viacerými ohraničeniami alebo tzv. CPPI prístup (*continuous proportion portfolio insurance*, CPPI), pričom používal rôzne typy účelových a stratových funkcií. Cairns dospel k záveru, že úloha hľadania optimálneho riadenia penzijných fondov silne závisí na voľbe účelovej, resp. stratovej funkcie a od rôznych ohraničení (napr. legislatívnych obmedzení).

Rád by sme spomenuli aj ďalšie výskumné štúdie venované penzijným schémam, ktoré publikovali odborníci Blake, Cairns a Dowd z Veľkej Británie. Jedná sa o dva články s názvom *Pensionmetrics 1*, resp. *Pensionmetrics 2*. V prvom článku [10] autori venovali pozornosť akumulácii fáze príspevkovo definovaného penzijného plánu, pričom odhadovali čistú sumu v riziku (*Value-at-Risk*, VaR) pri rôznych kombináciách modelov výnosov trhových aktív a investičných stratégií. Z nášho hľadiska oveľa zaujímavejší bol ten druhý z uvedených článkov [10], v ktorom Blake, Cairns a Dowd sa zaoberali dekuláciou fázu príspevkovo definovaných schém a možnosťami anuitizácie v čase odchodu do dôchodku. Podľa autorov doživotné anuity sú prevádzané viacerými typmi rizík aj na strane sporiteľa (budúceho dôchodcu), aj na strane životnej poisťovne. Napríklad sporiteľ nesie riziko plynúce z nízkych úrokových mier a trhových výnosov v čase jeho odchodu do dôchodku (životná poisťovňa mu môže ponúknuť dôchodok s nízkou dôchodkovou dávkou), alebo aj inflačné riziko (v prípade, že si kúpil dôchodok bez valorizácie dávok). Na druhej strane, životná poisťovňa môže čeliť rôznym trhovým rizikám (napr. pádu úrokových mier a trhových výnosov, riziku z nepriaznivého re-investovania peňažných tokov), a aj demografickým rizikám (napr. riziku dlhovekosti dôchodcov). Výška anuitných dávok (v čase kúpy anuity) obvykle závisí od nasledujúcich faktorov [10]:

- výšky úspor (úrovne dôchodkového fondu v čase kúpy anuity),
- výnosov dlhodobých dlhopisov,



- typu annuity (napr. dôchodok bez valorizácie/s valorizáciou, bez garancie/s garanciou v prípade skorého úmrtia dôchodcu, a pod.),
- veku sporiteľa,
- nákladov, výdavkov a ziskovej marže životnej poisťovne,
- pohlavia sporiteľa\*,
- zdravotného stavu sporiteľa\*.

Poznamenali by sme, že na základe nariadenia Európskej únie životné poisťovne pri výpočte dávok už nemôžu brať do úvahy posledné dva faktory uvedené v predchádzajúcom zozname.

Autori článku [10] podotkli, že klasické annuity by poskytovali dôchodcom pomerne nízke dôchodkové príjmy, a to hlavne kvôli nízkym výnosom bezpečných dlhodobých dlhopisov. Práve preto začali hľadať iné riešenia a nové typy finančných nástrojov, ktoré by prinášali budúcim dôchodcom dôstojnejšie príjmy. Navrhovali investície napojené na portfólio s kombinovanou bázou dlhopisov a akcií, ktoré by s vysokou pravdepodobnosťou prinášali vyššie výnosy ako čisto dlhopisové portfólio, avšak takéto kombinované portfólio by bolo zároveň aj volatilnejšie a viac rizikovejšie. Blake, Cairns a Dowd uvádzali dôkladnú analýzu a porovnanie troch rôznych programov vyplácania dôchodkov (*distribution programmes*) v dekulmačnej fáze penzijného sporenia [10]:

- PLA (*purchased life annuity*) – dôchodok zakúpený v dôchodkovom veku 65 rokov (podľa podmienok vo Veľkej Británii), bez možnosti dedenia (tento plán slúžil ako základ porovnania s ostatnými modelmi),
- ELA (*equity-linked annuity*) kombinovaný s odloženým doživotným dôchodkom – sporiteľ vo veku 65 rokov si kúpi dôchodok viazaný na trhové aktíva (akcie a dlhopisy) s 10-ročnou garanciou nezáporného výnosu a možnosťou dedenia; ďalej si kúpi aj klasickú doživotnú annuitu s 10-ročným odkladom (ktorá mu prinesie príjem až po veku 75 rokov),
- ELID (*equity-linked income-drawdown*) kombinovaný s odloženým doživotným dôchodkom – podobný model ako ELA, ale bez možnosti dedenia v prípade úmrtia dôchodcu pred vekom 75 rokov.

Keby sme chceli porovnať prístup prezentovaný v práci [10] s našimi modelmi, tak by sme našli niekoľko podobností aj odlišností. Naš model vyplácania dôchodkov

z úspor v druhom dôchodkovom pilieri na Slovensku sa asi najviac podobá na PLA (namiesto veku 65 rokov však uvažujeme vek 62 rokov), pričom v našom modeli sme počítali aj s možnosťou dedenia (vrátením časti poistného) v prípade úmrtia dôchodcu v prvých siedmych rokoch vyplácania dôchodku. Aj pri porovnaní s modelom ELA by sme našli podobnosť, napríklad v investíciách do trhových aktív, avšak pri našich trhových modeloch výpočtu dôchodkovej dávky sme uvažovali len jedinú, bezrizikové aktívum (štandardný dlhopis) a počítali sme len s jedinou anuitiou kúpenou hneď v čase odchodu do dôchodku (pre ďalšie podrobnosti pozri piatu kapitolu tejto práce).

Odborníci v spomínanej publikácii [10] poukázali nato, že účinnosť (optimálnosť) programov vyplácania dôchodkov silno závisí od rizikových preferencií sporiteľa. Ďalej zistili, že efekt voľby suboptimálneho programu pre daného sporiteľa je menej významný ako vplyv nevhodnej štruktúry aktív v portfóliu (predovšetkým rizikových aktív). Okrem spomínaných skutočností autori ukázali aj to, že povinná anuitizácia v danom veku môže byť nákladná predovšetkým pre sporiteľov s vysokým rizikovým apetítom, pričom sporitelia s vysokou averziou voči riziku môžu byť imúnny voči povinnej anuitizácii.

Milevsky vo svojom článku [54] sa venoval otázke anuitizácie úspor akumulovaných v penzijnom fonde. Porovnával a skúmal nasledujúce možnosti:

- (a) okamžitú anuitizáciu v čase odchodu do dôchodku (nákup doživotného poistného dôchodku),
- (b) investíciu celého množstva úspor do rôznych aktív a následný postupný výber výnosov,
- (c) odloženú kúpu anuity podľa preferencií sporiteľa a situácii na finančných trhoch.

Milevsky poukázal na výhody a nevýhody variantov (a), resp. (b), pričom tú tretiu možnosť (c) prezentoval ako kombináciu tých prvých dvoch obsahujúcu ich prednosti. Pre sporiteľov odchádzajúcich do dôchodku navrhoval, aby presne dovtedy odkladali nákup doživotnej anuity, kým výnosmi svojich trhových investícií dokážu prekonať mieru návratnosti doživotného dôchodku. Sformuloval optimalizačnú úlohu

$$\max_{C_t, \alpha_t, a_t} \mathbb{E} \left[ \int_0^{T_x} e^{-\rho t} U(C_t) dt + e^{-\gamma T_x} B(V_{T_x}) \right], \quad (4.20)$$

kde  $U(\cdot)$  je úžitková funkcia spotreby,  $C_t$  je miera spotreby v čase  $t$ ,  $\rho$  je diskontná sadzba pre spotrebu,  $B(\cdot)$  je úžitková funkcia z dedenia,  $V_t$  je úroveň obchodovateľných

zdrojov v čase  $t$ ,  $\gamma$  je diskontná sadzba v pre prostriedkov dedenia,  $T_x$  je stochastická budúca dĺžka života osoby vo veku  $x$  rokov,  $a_t$  hodnota doživotnej anuity a  $\alpha_t$  je investičný (alokačný) vektor v čase  $t$ . Riešenie tejto úlohy hľadal na dvoch rôznych úrovniach. Najprv používal deterministický model s nenáhodnými trhovými výnosmi a pevnými úmrtnostnými tabuľkami odvodenými od Gompertzovho-Makehamovho modelu. Potom tento spôsob zovšeobecnil pre prípad stochastických trhových výnosov (ceny aktív modeloval pomocou Itôovho procesu, kým vnútornú mieru návratnosti dôchodkov popisoval prostredníctvom CIR procesu) a náhodných mier úmrtnosti. Autor vo svojich simulačných štúdiách odhadoval pravdepodobnosť toho, že pri daných nastaveniach modelu a investičného portfólia odloženie kúpy dôchodku bude úspešne, t. j. prinesie dôchodcovi vyššie príjmy (vyšší úžitok). V závere práce [54] autor skonštatoval, že na základe simulačných štúdií 85 až 90%-ná je šanca, že odklad dôchodku by bol pre 65-ročného sporiteľa výhodný a kombinovaná stratégia (c) by mu priniesla vyššie výnosy do veku 80 rokov, v porovnaní s vnútornou mierou návratnosti okamžitých doživotných dôchodkov. Aj napriek tomu, že Milevsky svoju štúdiu spravil pre kanadskú populáciu, jeho výsledky a závery by mohli byť použiteľné aj pre slovenské podmienky a mohli by nám poskytnúť motiváciu do ďalšieho výskumu. Poznamenali by sme, že v rámci našej práce sme uvažovali len prípad okamžitých doživotných dôchodkov (viď piatu kapitolu práce) a s kombinovanými stratégiami sme sa nezaoberali.<sup>4</sup>

V poslednej publikácii, ktorú by sme spomenuli v tejto časti, odborníci Aro a Penanen skúmali tzv. záväzkovo-riadené investície (*liability-driven investments*, LDI) a ich využitie pri takých poistných produktoch, kde sa môže prejaviť efekt dlhovekosti. Nejde teda o štúdiu zaoberajúcu sa s penzijnými schémami, ale o metódu, ktorá by mohla byť použiteľná modelovanie dekomulačnej fázy slovenského dôchodkového sporenia. Kvôli podobnostiam s našim výskumom sme sa rozhodli, že spomenieme túto prácu [3], v ktorom autori sformulovali úlohu správy aktív a pasív (*asset-liability*

---

<sup>4</sup>Súčasný znenie zákona o starobnom dôchodkovom sporení [85] síce ponúka možnosť tzv. programového výberu, ale táto opcia sa týka len minority slovenských sporiteľov. Potom existuje aj možnosť odloženia kúpy dôchodku, keď sporiteľ nechá svoje úspory naďalej v dôchodkovej správcovskej spoločnosti a prípadné ďalšie ročné výnosy sa mu vyplatia na konci jednotlivých rokov (a výška jeho nasporenej sumy zostane nezmenená).

management, ALM) v tvare

$$\begin{aligned} & \min_{h \in \mathcal{N}} \rho(h_{T,j}) & (4.21) \\ \text{pri podmienkach} & \sum_{j \in J} h_{0,j} \leq w_0, \\ & \sum_{j \in J} h_{t,j} \leq \sum_{j \in J} R_{t,j} h_{t-1,j} - b_t, \quad \text{pre } t = 1, \dots, T, \\ & h_t \in D_t, \quad \text{pre } t = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

kde  $\rho(\cdot)$  je daná riziková miera,  $w_0$  je výška začiatočného kapitálu,  $b_t$  veľkosť záväzku poisťovne platná v čase  $t$ ,  $J$  je množina aktív obchodovateľných v časoch  $t = 1, \dots, T$ ,  $R_{t,j}$  je výnos  $j$ -teho aktíva v časovom intervale  $\langle t-1; t \rangle$  a  $h_{t,j}$  špecifikuje množstvo prostriedkov technických rezerv investovaných v časovom intervale  $\langle t; t+1 \rangle$ . Autori predpokladali, že záväzky  $\{b_t\}_{t=0}^T$  a výnosy  $\{R_{t,j}\}_{t=0}^T$  sú stochastické procesy na pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{S}, \text{Pr})$  s filtráciou  $\{\mathcal{S}_t\}_{t=1}^T$  na  $\mathcal{S}$ . Množina  $\mathcal{N}$  je množinou  $\{\mathcal{S}_t\}_{t=1}^T$ -adaptovaných investičných rozložení  $\{h_t\}_{t=0}^T$  a množina  $D_t$  sa môže meniť náhodne, avšak musí byť známa v čase  $t$ .

Všimnime si, že úloha (4.21) s danými hraničnými podmienkami je do istej miery podobná tej našej optimalizačnej úlohe založenej na metóde spárovania aktív a pasív životnej poisťovne (viď v časti 4.1.2). Hlavným rozdielom je ten, že v (4.21) sa minimalizuje miera rizika v konečnom čase  $T$ , kým v našej úlohe sa maximalizuje akumulovaná hodnota zisku v maximálnom čase vyplácania dôchodku. Ďalšiu odlišnosť nájdeme v investičných parametroch  $\{h_t\}$ , resp.  $\{{}_t c_k\}$ , pretože koeficienty  $h_t$  sú vyjadrené v absolútnych hodnotách, kým  ${}_t c_k$  sme uvažovali relatívne. Autori Aro a Pennanen numericky porovnávali účinnosť viacerých investičných stratégií (podrobnejšie viď článok [3]) a zistili, že záväzkovo-riadená investičná stratégia výrazne prekonala ostatné, klasické prístupy (napr. *continuous proportion portfolio insurance* (CPPI), *target date fund* (TDF) alebo *fixed proportions* (FP)). Podľa nich záväzkovo-riadená investičná stratégia je jednou z možností, ako sa môžu poisťovatelia brániť voči riziku dlhovekosti vhodným naplánovaním a rozložením svojich investícií.

## 5. Modelovanie vyplácania dôchodkov z druhého dôchodkového piliera na Slovensku

Dôchodková reforma na Slovensku, ktorá bola spustená začiatkom roka 2005, priniesla so sebou niekoľko výrazných zmien. Z pôvodného jednopilierového režimu sa prešlo na dvojpilierový systém s jedným priebežným štátnym pilierom (prvý pilier) a jedným fondovaným súkromným pilierom (druhý pilier).<sup>1</sup> Podľa pôvodného znenia Zákona Národnej rady Slovenskej republiky č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení do druhého piliera mohli vstupovať len tí sporenia, u ktorých predpokladaná doba sporenia bola minimálne 10 rokov. Prvé dôchodky z druhého piliera sa preto začali vyplácať na začiatku roka 2015 a aj táto skutočnosť nám dávala motiváciu, aby sme v rámci tejto práce modelovali vyplácanie doživotných dôchodkov zo starobného dôchodkového sporenia.

Druhým pilierom slovenského dôchodkového systému sa zaoberalo viacero odborných publikácií, vo väčšine z nich sa však skúmala len akumulčná fáza systému. Napríklad autori Kilianová a kol. v článku [42] skúmali dynamický model sporenia v druhom pilieri na Slovensku, pomocou ktorého riešili prepínanie medzi rôznymi investičnými fondami pri vybraných mierach rizika. Príspevok bol publikovaný v roku 2006, zhruba jeden a pol roka po spustení dôchodkovej reformy. Autori v ňom brali do úvahy aj legislatívne obmedzenia (pri pôvodných nastaveniach druhého piliera) a v rámci teoretických a simulačných štúdií porovnávali stratégie sporenia s rôznymi úrovňami averzie voči riziku. Dospeli k záveru, že individuálny rizikový apetít sporenia do výraznej miery ovplyvňuje ich stratégiu a výšku ich úspor v druhom pilieri.

Práca [51] od Melicherčíka a Ševčoviča riešila otázku optimálnej alokácie príspevkov medzi dlhopisovým a akciovými fondom v prípevkovo definovanej penzijnej schéme. Autori v stochastickom dynamickom modeli uvažovali aj vplyv durácie, výšky odvodov a úrovne podkladovej úrokovej miery na výšku akumulovanej hodnoty investícií.

---

<sup>1</sup>Na Slovensku existuje aj tretí, doplnkový pilier. Na rozdiel do druhého piliera ale vstup do tretieho piliera je dobrovoľný.

Vytvorený model bol testovaný pre reálne údaje a podmienky slovenského starobného dôchodkového sporenia. Poznamenali by sme, že v rámci spomínanej publikácie sa neriešila dekomulačná fáza penzijného systému na Slovensku (t. j. vyplácanie dávok z úspor v druhom pilieri).

V článku [65] Potocký a kol. prezentovali mierne odlišný prístup a skúmali, aké celkové dôchodkové nároky budú mať budúci dôchodcovia voči slovenskému penzijnému systému. Pri hľadaní odpovede na túto otázku používali kolektívny model rizika a testovali niekoľko extrémnych scenárov založených na rozdeleniach s ťažkými chvostami. Aplikovali rôzne investičné schémy pre akumuláciu fázu dôchodkového sporenia, potom mesačnú výšku dôchodkov počítali pomocou známej rovnice ekvivalencie pri troch rôznych demografických modeloch a pre rôzne príjmové skupiny. Autori ukázali, že stabilitu dôchodkového systému vo výraznej miere ovplyvňujú osobné preferencie a rozhodnutia budúcich dôchodcov ohľadom prispievania do štátneho, resp. súkromného piliera.

Ako sme už spomínali v časti 4.3, Stehlík a kol. v publikácii [71] skúmali možnosti použitia zovšeobecnených dynamických modelov úrokových mier v akumulácii fáze dôchodkového sporenia. Na modelovanie stochasticky sa meniacich úrokových mier používali diferenciálne rovnice druhého rádu (zovšeobecnenie pôvodného Parkerovho modelu z článku [61]). Na meranie adekvátnosti dôchodkov používali podmienku prípustnosti (*feasibility condition*), ktorá je vlastne podmienkou pre pomer tempa rastu v procese príspevkov a tempa rastu v procese dávok. Úmrtnosť modelovali prostredníctvom viacerých rozdelení pre budúcu dĺžku života, napr. zovšeobeným gama rozdelením a Gompertzovým-Makehamovým modelom. Autori na záver uviedli aj praktické použitie prezentovaných modelov pre slovenský dôchodkový systém. Na rozdiel od nášho výskumu však používali klasický prístup modelovania príspevkovo definovaných penzijných schém.

Článok [50] od nášho kolektívu (Melicherčík, Szűcs, Vilček) sa zaoberal jednak sporivou fázou slovenskej súkromnej penzijnej schémy, ale aj výplatnou fázou druhého piliera. V publikácii sme uviedli dynamický model pre optimálne investičné rozhodnutia sporeteľa, pričom ceny akcií sme modelovali pomocou geometrického Brownovho pohybu a úrokové miery prostredníctvom CIR modelu. Hľadali sme predovšetkým optimálny podiel investícií v akciovom, resp. dlhopisovom investičnom fonde a prezen-

tovali sme aj analýzu citlivosti a stresové testovanie. Akumulovanú hodnotu investícií sme merali v ročných platoch a na záver sme previedli celkovú nasporenú sumu na mesačne vyplácanú doživotnú anuitu. V porovnaní s touto záverečnou prácou môžeme skonštatovať, že v článku [50] sme neuvažovali ani zákonné špecifiká vzťahujúce na dôchodky z druhého piliera, ani možnú dlhovekosť budúcich dôchodcov.

V neposlednom rade by sme spomenuli aj ďalší náš príspevok [49], v ktorom sme analyzovali vplyv rizikových faktorov na zisk životnej poisťovne pri doživotných dôchodkoch vyplácaných z úspor v druhom dôchodkovom pilieri. Dôraz sme kládli predovšetkým na testovanie ziskovosti doživotných anuit pri kolísavých úrokových výnosoch a dlhovekosti dôchodcov, pričom sme používali statickú verziu metódy spárovania aktív a pasív životnej poisťovne. Podotkli by sme, že štúdia prezentovaná v článku [49] je úzko prepojená s výskumom tejto záverečnej práce.

Téma dôchodkov z druhého piliera dostala nový impulz začiatkom roka 2015, po spustení vyplácania prvých anuit zo starobného dôchodkového sporenia. Odborníci sa zaoberali predovšetkým s rentabilitou úspor v starobnom sporení, porovnaním výhodnosti štátneho a súkromného piliera, či adekvátnosťou prvých dôchodkových dávok ponúkaných životnými poisťovňami. Práve na túto poslednú líniu sme sa snažili naväzovať a v tejto kapitole sme prezentovali podrobnosti postupov používaných pri modelovaní vyplácania doživotných dôchodkov z druhého dôchodkového piliera. Všetky naše analýzy sme spravili z uhla pohľadu modelovej životnej poisťovne, ktorá bude vyplácať starobné dôchodky z úspor v druhom pilier.

V pokračovaní tejto kapitoly sú uvedené modelové predpoklady a zákonné predpisy vzťahujúce sa na vyplácanie doživotných dôchodkov. V časti 5.2 sú špecifikované nastavenia demografických modelov, ktoré sme využívali v našich výpočtoch. V ďalšej časti sú uvedené odhadnuté modely úrokových mier a výnosov dlhopisov, v poradí Vašíčkov model, CIR modely, Nelsonove-Siegelove výnosové krivky, Svenssonove výnosové krivky. V podkapitole 5.4 sa nachádzajú výsledky našich výpočtov – mesačné výšky dôchodkových dávok pri rôznych kombináciách úrokových a demografických modelov. Závery našich stresových testov sú uvedené v časti 5.5, resp. 5.6.

## 5.1 Vyplácanie dôchodkov z úspor v druhom dôchodkovom pilieri

Zo zákona o starobnom dôchodkovom sporení [85] je známe, že dôchodky z úspor v druhom pilieri budú vyplácať také životné alebo univerzálne poisťovne, ktoré o túto možnosť oficiálne požiadali a od Národnej banky Slovenska dostali licenciu na vykonávanie tejto činnosti. Sporitelia po splnení určitých kritérií môžu požiadať o rôzne formy vyrovnania, napríklad o formu doživotného starobného dôchodku [85]:

- bez zvyšovania dôchodku a bez pozostalostných dôchodkov,
- so zvyšovaním dôchodku a bez pozostalostných dôchodkov,
- bez zvyšovania dôchodku a s pozostalostnými dôchodkami s obdobím výplaty jeden rok,
- bez zvyšovania dôchodku a s pozostalostnými dôchodkami s obdobím výplaty dva roky,
- so zvyšovaním dôchodku a s pozostalostnými dôchodkami s obdobím výplaty jeden rok,
- so zvyšovaním dôchodku a s pozostalostnými dôchodkami s obdobím výplaty dva roky.

Ponuku zo strany poisťovní na vyplácanie doživotného dôchodku dostane sporiteľ (dôchodca) cez tzv. *centrálny elektronický ponukový systém* (CEPS), ktorý spravuje Sociálna poisťovňa. Sporiteľ si z ponúk viacerých poisťovní môže vybrať tú, ktorá je preňho najvýhodnejšia.

V rámci tejto práce sme zaoberali predovšetkým s **okamžitým doživotným polehotným mesačne vyplácaným starobným dôchodkom bez zvyšovania dôchodku a bez pozostalostných dôchodkov**, v našom prípade pre 62-ročnú osobu, pri ktorom poistné sa platí jednorazovo, pri podpise poistnej zmluvy. V tomto prípade jednorazové poistné sa vlastne rovná peniazom nasporeným na osobnom dôchodkovom účte v dôchodkovej správcovskej spoločnosti (teda v druhom dôchodkovom pilieri). Brali sme do úvahy aj ten prípad, keby dôchodca zomrel v prvých siedmych rokoch sporenia. Podľa odseku 2 §32 zákona o starobnom dôchodkovom sporení platí, že ak poberateľ doživotného dôchodku zomrel skôr, ako mu bolo vyplatených 84 mesačných



súm doživotného dôchodku, tak nevyplatená časť prvých 84 dávok sa vyplatí pozostálym v jednej sume, po úmrtí poberateľa doživotného dôchodku.

*Pozn.:* Možnosť programového výberu a predčasne vyplácané starobné dôchodky sme neskúmali v rámci nášho výskumu.

*Pozn.:* V našich výpočtoch sme sa nezaoberali s dôchodkami vyplácanými z prvého (štátneho) piliera. Z toho vyplýva, že sme neriešili komplexnú otázku o zabezpečení dôchodcov počas doby ich dôchodku.

*Pozn.:* Okrem ďalších iných záležitostí, ani možnosť odstúpenia poisteného (podľa odseku 10 §46f zákona [85]), ani vyplácanie podielu poisteného na prebytku z výnosov z umiestnenia prostriedkov technických rezerv (podľa §42a zákona [85]) sme nebrali do úvahy v našich výpočtoch. Na margo vyplácania prebytku z investovania by sme poznamenali, že poisťovňa pri výpočte mesačnej výšky dôchodkovej dávky môže používať aj nulovú predpokladanú mieru zhodnotenia investícií, t. j. technickú úrokovú mieru rovnú nule. Poberateľa dôchodku (pred podhodnotenými dôchodkovými dávkami) v tomto prípade chráni práve spomínaný §42a zákona [85], pretože prebytok z výnosov z umiestnenia prostriedkov technických rezerv, ktorý vznikne v danom roku vyšším zhodnotením prostriedkov, ako sa pôvodne predpokladalo pri výpočte mesačnej dôchodkovej dávky, sa rozdelí medzi poistených a poisťiteľa. Podľa zákona [85] poistencom musí byť vyplatených minimálne 90% z prebytku z výnosov, a to v nasledujúcom roku buď vyplatením jednorazovej sumy alebo zvýšením mesačnej sumy vyplácaného dôchodku.

## 5.2 Demografické modely

Jednou z kľúčových úloh počas analýzy vyplácania dôchodkov bolo zostavenie vhodných demografických modelov zameraných na prežívanie poistencov – dôchodcov z druhého piliera. Ako sme už spomínali v úvode tejto kapitoly, osobitnú pozornosť sme venovali modelovaniu dlhovekosti dôchodcov. Je známe, že stredná budúca dĺžka života slovenskej populácie rastie. Spôsobuje to neustále sa zvyšujúci životný štandard obyvateľstva, postupné skvalitňovanie zdravotnej starostlivosti, pokrok v medicíne a niekoľko ďalších faktorov. V rámci tejto podkapitoly sú prezentované podrobnosti postupov využívaných pri kalibrácii demografických modelov. Ako prvá je uvedená tzv. metóda posunutých pravdepodobností, potom je prezentovaný Leecho-Carterov model.

### 5.2.1 Metóda posunutých pravdepodobností

Prvotným postupom, ktorý sme používali na modelovanie dlhovekosti, bola metóda posunutých pravdepodobností úmrtia publikovaná autormi Pastor a Raučinová v článku [60]. Pri tomto postupe sa predpokladá, že pravdepodobnosti úmrtia do jedného roka sa znížia v každom veku rovnakým koeficientom  $u_x \equiv u \in (0; 1)$ ,  $\forall x \in \{0, 1, \dots, \omega\}$ . Označme symbolmi  $q_0, q_1, \dots, q_\omega$  pôvodné pravdepodobnosti úmrtia do jedného roka a nech  $q'_0, q'_1, \dots, q'_\omega$  sú posunuté pravdepodobnosti úmrtia. Analogicky, nech  $p_0, p_1, \dots, p_\omega$  sú základné pravdepodobnosti prežitia jedného roka a  $p'_0, p'_1, \dots, p'_\omega$  posunuté jednorročné pravdepodobnosti prežitia. Potom môžeme písať

$$q'_x = (1 - u)q_x, \quad (5.1)$$

$$p'_x = 1 - q'_x = 1 - (1 - u)q_x = 1 - (1 - u)(1 - p_x) = p_x + u(1 - p_x). \quad (5.2)$$

Pri odhade pravdepodobností úmrtia v modeli dlhovekosti je dôležité, aby sme správne nastavili parameter posunu  $u \in (0; 1)$ . Existuje viacero možností, ako odhadnúť tento koeficient. V tejto časti sme prezentovali jednu z nich, ktorá je založená na strednej budúcej dĺžke života (novonarodenej osoby)  $\hat{e}_0 \triangleq E(T_0)$ , resp. na strednej skrátenej budúcej dĺžke života (novonarodenej osoby)  $e_0 \triangleq E(K_0)$  (ďalšie podrobnosti o stredných dĺžkach života sú uvedené v podkapitole 3.2 tejto práce). Podľa spoločných úmrtnostných tabuliek Štatistického úradu Slovenskej republiky za rok 2013 (*ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)*, [95]) stredná budúca dĺžka života novonarodenej osoby bola v roku 2013  $\hat{e}_0(2013) = 76,37$  roka, teda  $e_0(2013) \approx 76,37 - 0,5 = 75,87$  roka. Podľa *stredného variantu* prognózy Inštitútu informatiky a štatistiky (Infostat, [90]) stredná budúca dĺžka novonarodenej ženy v roku 2050 bude 84,01 roka, kým stredná budúca dĺžka novonarodeného muža bude v roku 2050 približne 77,13 roka. Ako odhad strednej budúcej dĺžky života osoby v roku 2050, bez špecifikácie pohlavia, by sme mohli zobrať aritmetický priemer vyššie uvedených hodnôt, teda nech

$$\hat{e}_0(2050) = \frac{84,01 + 77,13}{2} \text{ roka} = 80,57 \text{ roka.}$$

Potom pre odhad strednej skrátenej budúcej dĺžky novonarodenej osoby v roku 2050 (podľa stredného variantu prognózy Infostatu) približne platí

$$e_0(2050) \approx (80,57 - 0,5) \text{ roka} = 80,07 \text{ roka.}$$

Hodnotu neznámeho parametra  $u$  sme nastavili tak, aby sme dostali práve také posunuté pravdepodobnosti úmrtia  $q'_x$ , pravdepodobnosti prežitia  $p'_x$ , resp. faktory prežitia

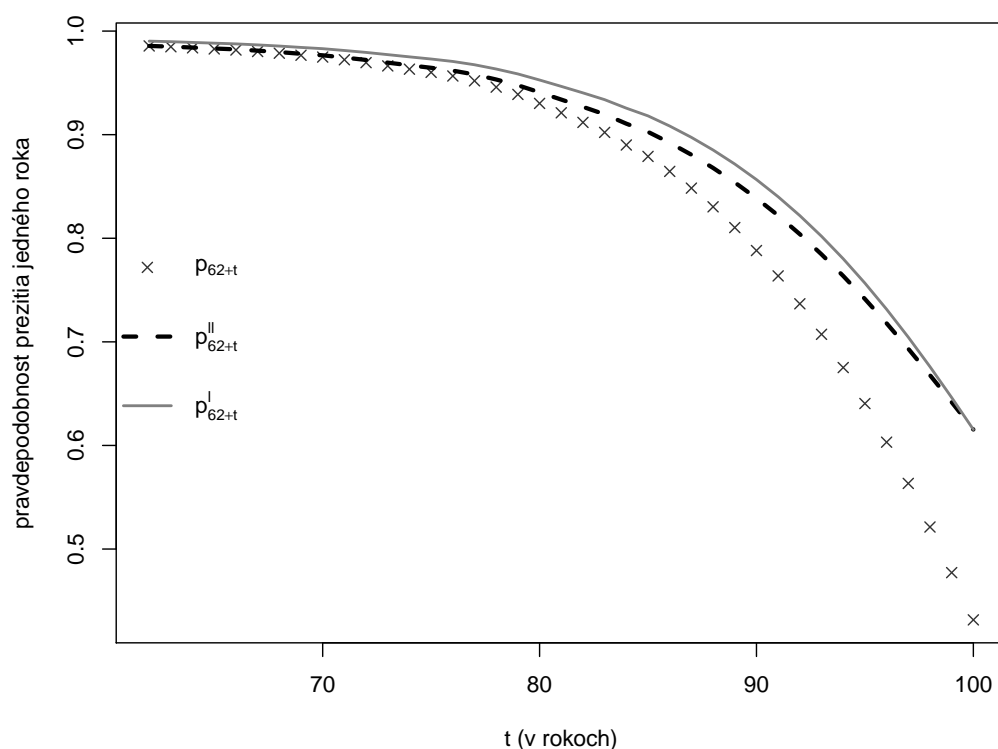
${}_k p'_x$ , pri ktorých platí, že  $e'_0 = e_0(2050) \approx 80,07$  roka. Pri pôvodných pravdepodobnostiach prežitia  $q_x$ ,  $x \in \{0, 1, \dots, 100\}$  z *ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)* sme dostali odhad koeficientu  $\hat{u} \doteq 0,32328$  (pri strednom variante modelu dlhovekosti). V konečnom dôsledku podľa vzťahu (5.1) sme teda získali súbor posunutých pravdepodobností  $q'_x$ ,  $x \in \{0, 1, \dots, 100\}$ , ktoré môžeme nazvať aj *šokovými pravdepodobnosťami úmrtia*, pretože vznikli z originálnych pravdepodobností jednorazovým šokom (posunutím smerom nadol). Pomocou vzťahu  $p'_x = 1 - q'_x$  sme dostali aj tzv. *šokové pravdepodobnosti prežitia* pre  $x \in \{0, 1, \dots, 100\}$ . Keďže v našom výskume sme modelovali vyplácanie dôchodkov z druhého piliera pre osoby vo veku  $x = 62$ , tak z vektoru šokových pravdepodobností prežitia sme používali len hodnoty  $p'_{62}, p'_{63}, \dots, p'_{100}$ .

Používanie šokových pravdepodobností prežitia pri modelovaní dlhovekosti v životnom poistení má svoje výhody a opodstatnenie, avšak oveľa realistickejšie je predpokladať **postupný prechod** od súčasných pravdepodobností prežitia  $p_{62}, \dots, p_{100}$  (z *ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)*) k budúcim pravdepodobnostiam  $p'_{62}, \dots, p'_{100}$  (platným až v roku 2050). Pri našich výpočtoch sme si zvolili jednoduchý prechod definovaný vzťahom

$$p''_{62+t} = p_{62+t} + \frac{t}{38} (p'_{62+t} - p_{62+t}), \quad t = 0, 1, \dots, 38. \quad (5.3)$$

Takýmto spôsobom sme získali tzv. *prechodné pravdepodobnosti prežitia*  $p''_{62}, p''_{63}, \dots, p''_{100}$ , ktoré sme ďalej využívali pri výpočtoch dávok vyplácaných z úspor v druhom pilieri. Poznamenali by sme, že podobný postup sme používali aj v článku [49]. Na nasledujúcom Obr. 9. sme graficky znázornili prechod od súčasných k šokovým pravdepodobnostiam prežitia.

*Pozn.:* Predpoklad, že ročné pravdepodobnosti úmrtia globálne, v každom veku sa znížia rovnakou (konštantnou) mierou  $u$ , je umelý a mierne nerealistický. Napriek tomu je použiteľný ako akýsi úvodný, jednoduchý model dlhovekosti. Presvedčili sme sa o tom pomocou viacerých dvojíc historických úmrtnostných tabuliek. Zobrali sme napríklad úmrtnostné tabuľky Českého statistického úradu pre rok 1972 pre mužov (*ÚT ČSÚ 1972 muži*, [86]) a slovenské ÚT ŠÚSR pre rok 2012 pre mužov (*ÚT ŠÚSR 2012 muži*, [95]). Podotkli by sme, že slovenské úmrtnostné tabuľky sú dostupné v elektronickej forme len od roku 1996, práve preto sme použili ÚT ČSÚ a predpokladali sme, že medzi českou a slovenskou populáciou nie sú až také výrazné demografické rozdiely. Stredná budúca dĺžka novonarodeného muža v roku 1972 bola 66,92 roka, kým o 40



Obr. 9: Pravdepodobnosti prežitia v roku 2013 ( $p_{62+t}$ ), šokové pravdepodobnosti prežitia ( $p'_{62+t}$ ) a prechodné pravdepodobnosti prežitia ( $p''_{62+t}$ ) (Zdroj: [95], *vlastné spracovanie*)

rokov neskôr bol tento údaj 72,47 roka. Pomocou vyššie uvedenej metódy posunutých pravdepodobností úmrtia sme odhadli koeficient posunu medzi *ÚT ČSÚ 1972 muži* a *ÚT ŠÚSR 2012 muži* ( $\tilde{u} \doteq 0,3407$ ), zostrojili sme posunuté (projektované) pravdepodobnosti úmrtia a porovnali sme ich so skutočnými pravdepodobnosťami úmrtia v roku 2012. Najlepšiu zhodu sme dosiahli vo vekovom intervale od 62 do 85 rokov, kde boli relatívne rozdiely medzi skutočnými a projektovanými pravdepodobnosťami len niekoľko percentné. Tento postup sme zopakovali pre viaceré dvojice úmrtnostných tabuliek a vždy sme dospeli zhruba k rovnakému výsledku. Táto skutočnosť by teda mala byť empirickým “dôkazom” praktickej použiteľnosti metódy posunutých pravdepodobností.

*Pozn.:* Prezentovaná metóda posunutých pravdepodobností je totožná s odporúčanou metodikou Európskeho orgánu pre poisťovníctvo a dôchodkové poistenie zamestnancov (*European Insurance and Occupational Pensions Authority, EIOPA*) pre stresové

testy dlhovekosti poistených osôb v životnom poistení. V stresových scenároch organizácie EIOPA sa obvykle používa koeficient zníženia ročných mier úmrtnosti 10%, resp. 18% s okamžitou platnosťou, teda takzvaný jednorazový šok poklesu pravdepodobností úmrtia (pre ďalšie podrobnosti pozri [87]).

Na predchádzajúcich stranách sme prezentovali metodiku vytvorenia modelu dlhovekosti podľa stredného variantu prognózy Infostatu a zostrojili sme dva modely: jednu so šokovými pravdepodobnosťami  $p'_x$  a druhú s prechodnými pravdepodobnosťami  $p''_x$ . Rovnaký postup sme aplikovali aj pre *nízky*, *veľmi nízky*, resp. *vysoký* a *veľmi vysoký variant* prognózy Infostatu pre budúcu dĺžku novonarodenej osoby v roku 2050 a takto sme vytvorili ďalších  $4 \times 2$  scenárov dlhovekosti<sup>2</sup>. Podrobnosti o všetkých piatich modeloch dlhovekosti, ktoré sme získali pomocou metódy posunutých pravdepodobností, sme uviedli v nasledujúcej Tab. 1.

Tabuľka 1: Odhady koeficientov posunu a stredné budúce dĺžky života novonarodenej a 62-ročnej osoby (uvedené v rokoch) pri rôznych scenároch dlhovekosti (OŠ znamená okamžitý šok v pravdepodobnostiach úmrtia, PP označuje postupný prechod medzi súčasnými a posunutými pravdepodobnosťami úmrtia)

	modely dlhovekosti (podľa variantov Infostatu)									
	veľmi nízky		nízky		stredný		vysoký		veľmi vysoký	
$\hat{u}$	0,17172		0,24741		0,32328		0,42122		0,51039	
$\hat{e}_0(2050)$	78,42		79,45		80,57		82,20		83,91	
$\hat{e}_{62}$	OŠ	PP	OŠ	PP	OŠ	PP	OŠ	PP	OŠ	PP
	20,39	19,43	21,15	19,69	22,00	19,97	23,26	20,36	24,60	20,77

(Zdroj: [90], *vlastné spracovanie*)

### 5.2.2 Leeho-Carterov model

Jedným najznámejším dynamickým modelom úmrtnostných kriviek je tzv. Leeho-Carterov model (*Lee-Carter model*, LC model) publikovaný v roku 1992 v článku [45]. Autori ho pôvodne navrhli pre populáciu v Spojených štátoch amerických (USA), pričom motiváciu im dával predovšetkým trend predlžovania očakávanej dĺžky života

<sup>2</sup>Pri každom zo štyroch modelov sme skonštruovali šokové pravdepodobnosti (okamžitý šok) a prechodné pravdepodobnosti (postupný prechod).

(novonarodenej osoby), ktorá vzrástla medzi rokmi 1900 a 1988 v USA zo 47 na 75 rokov.<sup>3</sup> Demografov Lee-a a Cartera zaujímala hlavne odpoveď na otázku: ako sa budú ďalej vyvíjať miery úmrtnosti a očakávaná dĺžka života v najbližších desaťročiach? V rámci nášho výskumu aj my sme sa čiastočne zaoberali s riešením tejto otázky, a práve preto sme sa rozhodli aplikovať Leeho-Carterov model, ktorý sa definuje vzťahom

$$m_{x,t} = \exp \{a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}\}, \quad x \in \mathcal{X}, t \in \mathcal{T}, \quad (5.4)$$

kde  $m_{x,t}$  je centrálna miera úmrtnosti osoby vo veku  $x$  v roku  $t$ ,  $a_x$  a  $b_x$  sú vekovo špecifické parametre modelu (nezávislé od času),  $k_t$  je časovo premenný dynamický faktor a  $\varepsilon_{x,t}$  náhodný šum s nulovou strednou hodnotou a disperziou  $\sigma^2$  pre  $x \in \mathcal{X}$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , kde  $\mathcal{X}$ , resp.  $\mathcal{T}$  sú dané množiny vekov, resp. časov (rokov). V niektorých prípadoch sa používa iný tvar LC modelu

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}, \quad x \in \mathcal{X}, t \in \mathcal{T}. \quad (5.5)$$

Autori Lee a Carter v článku [45] uviedli, že model (5.5) nie je možné fitovať obyčajnou metódou najmenších štvorcov, pretože na pravej strane rovnice (5.5) sa nachádzajú žiadne regresori, len parametre (ktoré by sme chceli odhadnúť) a neznámy dynamický faktor  $k_t$ . V prvom kroku preto navrhujú aplikovať metódu singulárneho rozkladu (*singular value decomposition*, SVD) na maticu logaritmickej centrálnej mier úmrtnosti  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}_{x,t} = \ln(m_{x,t})$  a pomocou priemerných log-centrálnej mier úmrtnosti odhadnúť parametre  $a_x$  a  $b_x$  pre  $x \in \mathcal{X}$ , aj časové koeficienty  $k_t$ ,  $t \in \mathcal{T}$ . V druhom kroku sa potom môžu vylepšiť odhady faktorov  $k_t$ , napríklad vhodnou iteračnou metódou zameranou na minimalizáciu chýb medzi pozorovanými a modelovanými hodnotami z prvého kroku odhadovacej metódy. Ďalšie technické detaily metodiky a podrobná diskusia o presnosti týchto odhadov v rôznych vekových skupinách sú uvedené v publikácii [45].

Pri kalibrácii nášho LC modelu zameraného na slovenskú populáciu vo vekovej skupine 62 až 100 rokov sme využívali programový balík `demography` [38] v štatistickom softvéri  $\mathcal{R}$  [67]. V prvej fáze kalibrácie sme potrebovali vytvoriť vhodnú databázu

---

<sup>3</sup>Leeho-Carterov model sa stal veľmi populárnym v uplynulých dvoch desaťročiach, výskumníci ho používali v stovkách vedeckých publikácií. Okrem iného bol aplikovaný pre francúzske, japonské, argentínske alebo austrálske obyvateľstvo a v každom prípade sa potvrdilo jeho primeranosť a použiteľnosť pre danú populáciu.

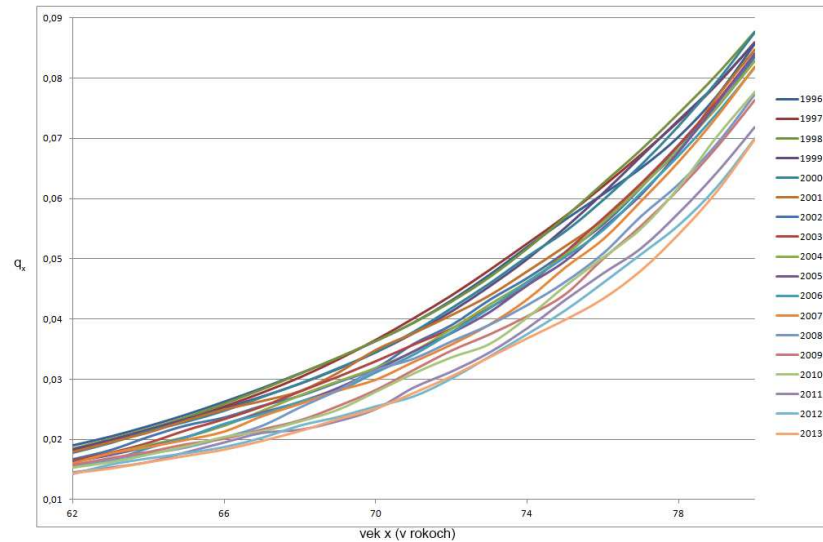
historických úmrtnostných tabuliek. Ako sme to už spomínal v podkapitole 5.2.1, úmrtnostné tabuľky Štatistického úradu Slovenskej republiky (ŠÚSR) pre Slovensko sú dostupné v elektronickej podobe len od roku 1996 (viď [95]), pričom medzi rokmi 1996 až 2002 sa zverejňovali tabuľky len pre mužskú, resp. ženskú populáciu selektívne. Takzvané spoločné úmrtnostné tabuľky (tabuľky bez špecifikácie pohlavia) boli prvýkrát publikované v roku 2003 a odvtedy sa vydávajú každoročne. Keďže počas celého nášho výskumu sme pracovali so spoločnými pravdepodobnosťami úmrtia a prežitia platnými pre celé slovenské obyvateľstvo, potrebovali sme vytvoriť spoločné tabuľky aj pre roky 1996 až 2002.<sup>4</sup> Spoločnú pravdepodobnosť úmrtia do jedného roka  $q_x$  pre osobu vo veku  $x$  rokov v každom prípade (pre každý rok) sme odhadli pomocou váženého priemeru pravdepodobnosti úmrtia pre mužov a pravdepodobnosti úmrtia pre ženy, pričom za váhy sme zvolili relatívne počty žijúcich mužov, resp. žien vo veku  $x$  rokov v danom roku. Môžeme teda písať

$$q_x = \frac{Z_x^M}{Z_x^M + Z_x^Z} \times q_x^M + \frac{Z_x^Z}{Z_x^M + Z_x^Z} \times q_x^Z \quad \text{pre } x = 62, 63, \dots, 100,$$

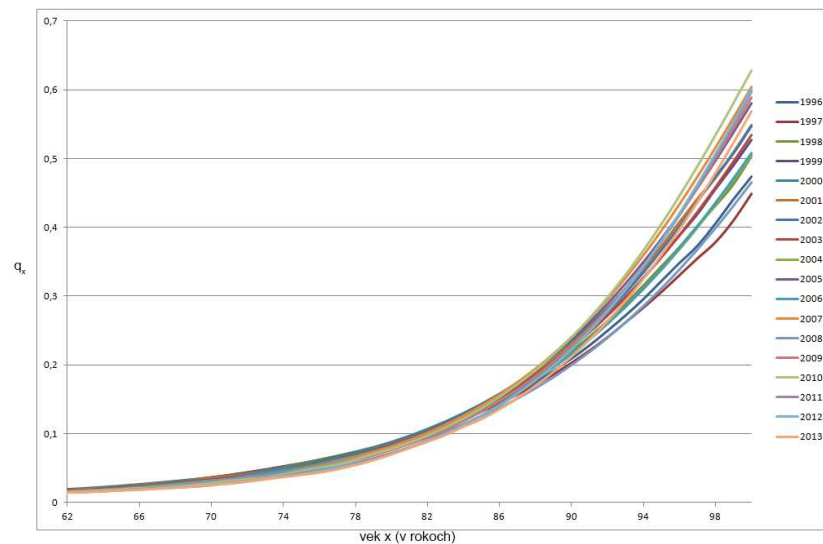
kde  $Z_x^M$ , resp.  $Z_x^Z$  je počet žijúcich mužov, resp. počet žijúcich žien vo veku  $x$  rokov a  $q_x^M$ , resp.  $q_x^Z$  je ročná pravdepodobnosť úmrtia  $x$ -ročného muža, resp. ročná pravdepodobnosť úmrtia  $x$ -ročnej ženy. Tento spôsob sme osobitne zopakovali pre každé ÚT od 1996 do 2002. Na Obr. 10, resp. Obr. 11 sme znázornili vývoj úmrtnostných kriviek (ročných pravdepodobností úmrtia bez špecifikácie pohlavia) medzi rokmi 1996 a 2013 pre dve vekové skupiny. Na Obr. 10 vidíme postupné znižovanie pravdepodobností úmrtia medzi rokmi 1996 a 2013 skoro v každom veku  $x \in \langle 62; 80 \rangle$ , úmrtnostné krivky sa posúvajú smerom dole približne rovnomerným tempom (“rovnobežne”). Približne vo veku 86 rokov sa však historické úmrtnostné krivky pretnú (viď Obr. 11) a napríklad v rokoch 2010-2013 sú pravdepodobnosti úmrtia pre  $x > 90$  výrazne vyššie ako napr. v rokoch 1996-1999, takže v celej, nami skúmanej vekovej skupine (62 až 100 rokov) historické úmrtnostné krivky neklesajú “rovnobežne”.

V ďalšom kroku prípravy databázy úmrtnostných tabuliek ročné pravdepodobnosti úmrtia sme konvertovali na ročné centrálné miery úmrtia, keďže LC model (5.4)

<sup>4</sup>Pri kalibrácii LC-modelu pre slovenské obyvateľstvo sme chceli mať k dispozícii čo najbohatšiu databázu historických úmrtnostných tabuliek, a preto sme sa neuspokojili s jedenástimi spoločnými ÚT ŠÚSR vydanými pre roky 2003 až 2013.



Obr. 10: Vývoj ročných spoločných pravdepodobností úmrtia na Slovensku medzi rokmi 1996 a 2013 vo vekovej skupine 62 až 80 rokov  
(Zdroj: [95], *vlastné spracovanie*)



Obr. 11: Vývoj ročných spoločných pravdepodobností úmrtia na Slovensku medzi rokmi 1996 a 2013 vo vekovej skupine 62 až 100 rokov  
(Zdroj: [95], *vlastné spracovanie*)

je definovaný práve pre centrálné miery  $m_x$ . Pri konverzii sme používali približný vzťah

$$m_x \approx \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2}q_x} \quad \text{pre } x = 62, 63, \dots, 100,$$



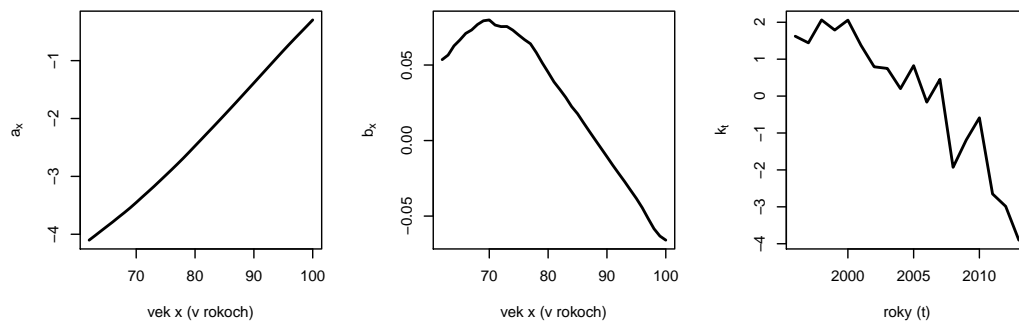
ktorý platí za predpokladu rovnomerného rozloženia úmrtí v intervaloch  $\langle x, x + 1 \rangle$ ,  $\forall x \in \{62, 63, \dots, 99\}$ . Pri úplnej notácii by sme mohli písať

$$m_{x,t} \approx \frac{q_{x,t}}{1 - \frac{1}{2}q_{x,t}}, \quad x \in \mathcal{X}, \quad t \in \mathcal{T},$$

kde  $\mathcal{X} = \{62, 63, \dots, 100\}$  a  $\mathcal{T} = \{1996, 1997, \dots, 2013\}$ .

V poslednej etape vytvárania našej databázy sme uložili údaje o počtoch žijúcich vo vekoch 62 až 100 rokov. V prípade ÚT ŠÚSR 1996 až 2002 sme sčítali počty žijúcich mužov a žien v danom veku ( $Z_x^M + Z_x^Z$ ), kým pri ÚT ŠÚSR 2003 až 2013 sme použili oficiálne publikované údaje o počte žijúcich zo spoločných tabuliek.

Podľa odporúčaných postupov balíka `demography` sme v prostredí softvéru  $\mathcal{R}$  vytvorili objekt typu `demogdata`, ktorý obsahoval údaje o centrálnych mierach úmrtnia a počtoch žijúcich vo vekoch 62 až 100 rokov na Slovensku medzi rokmi 1996 a 2013. Následne sme pomocou príkazu `lca` odhadli parametre Leecho-Carterovho modelu, t. j. parametre vekového profilu  $a_x$ , parametre interakcií medzi vekovými skupinami a časovými zmenami  $b_x$  a faktory časovej dynamiky  $k_t$ . Samotné číselné hodnoty odhadov parametrov sme uviedli v Prílohe B a znázornili sme ich aj na Obr. 12.



Obr. 12: Odhady parametrov Leecho-Carterovho modelu pre slovenskú populáciu (pre dáta z rokov 1996-2013 a pre vekové rozpätie 62-100 rokov)

(Zdroj: vlastné spracovanie)

Po úspešnom odhadnutí parametrov LC modelu sme vytvorili modelovú prognózu budúceho vývoja úmrtnosti na Slovensku v rokoch 2014 až 2055. Opäť sme sa spoliehali na balík `demography` a využívali sme jeho špeciálnu funkciu `forecast`, ktorá na základe odhadnutého LC modelu dokázal predpovedať budúce logaritmicke centrálné

miery úmrtia v danom vekovom rozpätí (v našom prípade 62 až 100 rokov) a vytvoril k nim aj predikčný interval spoľahlivosti (s nami zvolenou presnosťou 90%). Celá metodika predikcie bola založená na autoregresnom integrovanom modeli kľzavých priemerov (*autoregressive integrated moving average*, ARIMA) pre dynamické faktory  $k_t$  (pre ďalšie podrobnosti pozri publikáciu [45]). Funkcia `forecast` okrem log-centrálnych mier úmrtia predpovedal aj stredné budúce dĺžky života osoby vo veku 62 rokov v rokoch 2014 až 2055 (viď Tab. 2). Pre ilustráciu by sme dodali, že stredná budúca dĺžka

Tabuľka 2: Predikcie strednej budúcej dĺžky života osoby vo veku 62 rokov pre roky 2014-2055 (uvedené v rokoch)

rok	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
$\hat{e}_{62}$	19,05	19,17	19,29	19,41	19,53	19,65	19,76	19,88	19,99	20,11	20,22
rok	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032	2033	2034	2035
$\hat{e}_{62}$	20,33	20,44	20,54	20,65	20,76	20,86	20,96	21,06	21,16	21,26	21,36
rok	2036	2037	2038	2039	2040	2041	2042	2043	2044	2045	2046
$\hat{e}_{62}$	21,45	21,55	21,64	21,73	21,83	21,92	22,00	22,09	22,18	22,26	22,35
rok	2047	2048	2049	2050	2051	2052	2053	2054	2055		
$\hat{e}_{62}$	22,43	22,51	22,59	22,67	22,75	22,82	22,90	22,97	23,05		

(Zdroj: vlastné spracovanie)

života 62-ročnej osoby bola v rokoch 2011, 2012, 2013 postupne 18,63, 18,73, resp. 18,92 roka (podľa zdroja [95]). V Tab. 2 vidíme pokračovanie v rastúcom trende očakávanej budúcej dĺžky života (podľa predpovedí nášho nakalibrovaného LC modelu). Grafické znázornenie historických stredných budúcich dĺžok života 62-ročnej osoby v rokoch 1996 až 2013 a Leeho-Carterových predikcií stredných budúcich dĺžok života na roky 2014 až 2055 je uvedené v Prílohe B na Obr. 17.

Ako sme už spomínali, pomocou funkcie `forecast` sme predikovali budúce log-centrálne miery úmrtia  $m_{62}$ ,  $m_{63}$ ,  $\dots$ ,  $m_{100}$  pre roky 2014, 2015,  $\dots$ , 2055, ktoré sme následne previedli na centrálne miery úmrtia  $m_x$ , a potom sme ich konvertovali pomocou spätného približného vzťahu  $q_x \approx \frac{m_x}{1+0,5m_x}$  na ročné pravdepodobnosti úmrtia  $q_{62}$ ,  $q_{63}$ ,  $\dots$ ,  $q_{100}$  (pre každý rok 2014 až 2055 zvlášť). Analogicky sme postupovali aj v prípade dolnej, resp. hornej hranice 90%-ného predikčného intervalu spoľahlivosti

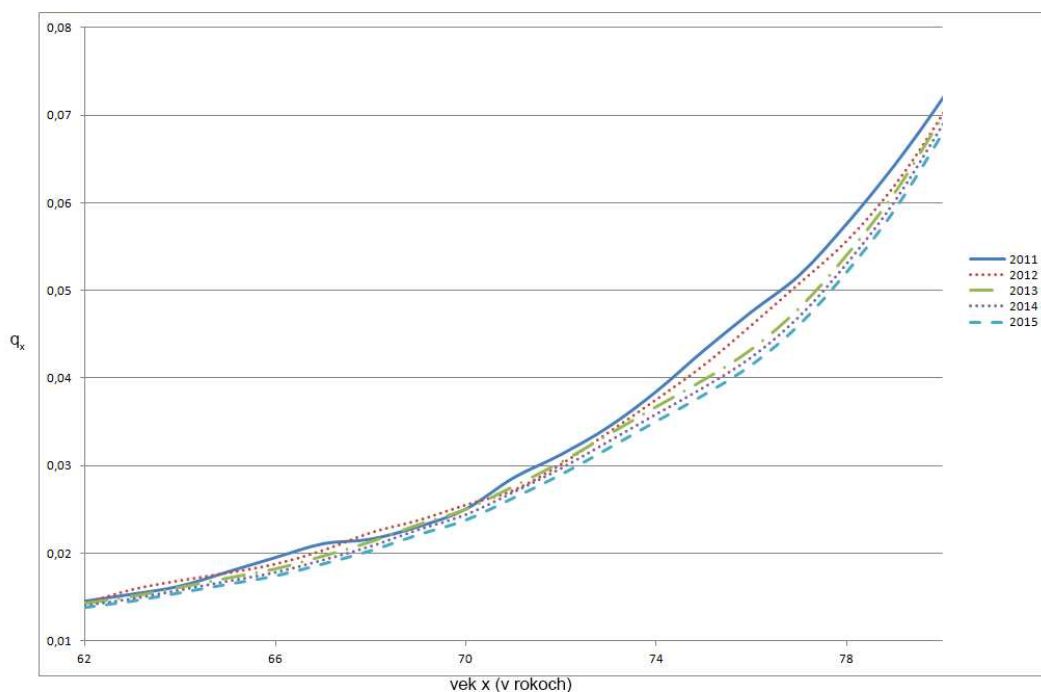
pre predikované log-centrálne miery. Získali sme tak tri matice, každú s dimenziami  $39 \times 42$ , obsahujúce ročné pravdepodobnosti úmrtia, resp. k nim patriace hodnoty dolných, resp. horných hraníc intervalov spoľahlivosti.

*Pozn.:* Na Obr. 18, Obr. 19, Obr. 20, Obr. 21 v Prílohe B sme znázornili dynamiku budúcich predpovedaných úmrtnostných kriviek. Pri Leecho-Carterových predikciách sa prejavil podobný efekt, ako v prípade historických úmrtnostných kriviek z ÚT ŠÚSR 1996-2013, pretože krivky sa prekrížovali okolo veku  $x = 86$  (pozri aj Obr. 11). To však nemôžeme považovať za nedostatok nakalibrovaného LC modelu, pretože ten takýmto spôsobom “zachytil” dynamiku historických kriviek a preniesol ju aj do svojich predikcií. V predpovediach LC modelu si môžeme všimnúť stále pravdepodobnejšie prežívanie vo vekoch 62 až 80 rokov (vid’ Obr. 18 a Obr. 20 v Prílohe B) a následné vyššie pravdepodobnosti úmrtia vo vekoch 90 až 100 rokov (vid’ Obr. 19 a Obr. 21 v Prílohe B). Na vysoké predpovedané hodnoty pravdepodobností úmrtia nad vekom 90 rokov vplýva aj horné ohraničenie modelu hraničným vekom  $x_{max} = 100$  rokov. Pri našom LC modeli sme totiž neposúvali hornú vekovú hranicu úmrtnostných tabuliek (nepredlžovali sme maximálny možný vek dožitia) a nakalibrovaný model to kompenzoval práve vysokými pravdepodobnosťami úmrtia vo vekoch 90 až 100 rokov. Hlavným dôvodom zafixovania maximálneho veku v ÚT bolo stanovenie predpokladu, ktorý sme používali pri výpočtoch mesačných dôchodkových dávok z druhého piliera, kde sme všetky naše výpočty ohranili maximálnym vekom dôchodcov  $x_{max} = 100$  rokov (vid’ podkapitolu 5.4).

Osobitné postavenie sme dali Leecho-Carterovým predikciám pre rok 2015, keďže v našich výpočtoch sme chceli modelovať vyplácanie doživotných dôchodkov z úspor v druhom dôchodkovom pilieri so začiatkom v roku 2015.<sup>5</sup> Základnú výšku dôchodkovej dávky sme počítali aj pomocou Leecho-Carterových pravdepodobností  $\hat{q}_{62}(2015)$ ,  $\hat{q}_{63}(2015)$ ,  $\dots$ ,  $\hat{q}_{100}(2015)$  (vid’ podkapitolu 5.4). O vhodnosti a použiteľnosti týchto pravdepodobností svedčí aj Obr. 13, resp. Obr. 22 uvedený v Prílohe B, na ktorých sme zobrazili vývoj historických úmrtnostných kriviek z rokov 2011, 2012, 2013 a Leecho-Carterových predpovedaných úmrtnostných kriviek pre roky 2014 a 2015.

---

<sup>5</sup>Oficiálne úmrtnostné tabuľky Štatistického úradu Slovenskej republiky pre rok 2015 budú publikované až v roku 2016, a práve preto sme potrebovali v čase písania tejto práce predikovať pravdepodobnosti úmrtia v roku 2015.



Obr. 13: Porovnanie historických úmrtnostných kriviek z rokov 2011, 2012, 2013 a Leecho-Carterových predikovaných úmrtnostných kriviek pre roky 2014, 2015 pre vekové rozpätie 62-80 rokov (*Zdroj: vlastné spracovanie*)

Na Obr. 23 uvedenom v Prílohe B sme prezentovali Leecho-Carterovu predpovedanú úmrtnostnú krivku platnú pre rok 2015 spoločne s hranicami 90%-ného intervalu spoľahlivosti. Keďže táto úmrtnostná krivka je len druhou v poradí v súbore predpovedaných kriviek, k nemu patriaci 90%-ný predikčný interval je pomerne úzky. Aj tento fakt svedčí o tom, že použitie širšej bázy historických ÚT (ÚT ŠÚSR 1996-2013) má dobrý vplyv na presnosť predikovanej úmrtnostnej krivky pre rok 2015 a môžeme ju použiť s veľkou istotou.<sup>6</sup> V rámci našich ďalších výpočtov uvedených v podkapitolách 5.4 až 5.6 sme pre Leecho-Carterov model pre rok 2015 s dolnou, resp. hornou hranicou 90%-ného predikčného intervalu spoľahlivosti používali skratky *LCA2015*, *LCA2015 DH*, resp. *LCA2015 HH*. Pre úplnosť by sme dodali, že podľa prognózy modelu *LCA2015* stredná budúca dĺžka života 62-ročnej osoby v roku 2015 bude 19,17 roka s 90%-ným intervalom spoľahlivosti  $\langle 18,25; 20,03 \rangle$  roka<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>Samotné odhady Leecho-Carterových pravdepodobností  $\hat{q}_{62}(2015)$ ,  $\hat{q}_{63}(2015)$ ,  $\dots$ ,  $\hat{q}_{100}(2015)$ , ako aj hranice 90%-ného intervalu spoľahlivosti sú tiež uvedené v Prílohe B.

<sup>7</sup>Uvedenú dolnú, resp. hornú hranicu intervalu spoľahlivosti strednej budúcej dĺžky života sme počítali pomocou dolnej, resp. hornej hranice predikčného intervalu pre ročné pravdepodobnosti úmrtia (pozri Prílohu B).

Na záver tejto podkapitoly by sme prezentovali postup používaný pri vytvorení **Leeho-Carterovho modelu dlhovekosti**. Ako sme už spomínali, jednou z hlavných motivácií nášho výskumu bolo modelovanie vyplácania doživotných dôchodkov z druhého piliera pri ohľade na možnú dlhovekosť dôchodcov. Pomocou vyššie uvedeného LC modelu sme získali predikcie budúcich úmrtnostných kriviek (vektorov pravdepodobností úmrtia) pre roky 2014 až 2055 (pozri Prílohu B, Obr. 18 a Obr. 19). Idea nášho modelu dlhovekosti bola tá, že ako dôchodca postupne starne, tak jeho úmrtnosť sa má riadiť vždy podľa aktuálnych úmrtnostných tabuliek. V prípade LC modelu dlhovekosti sme teda používali predikcie ročných pravdepodobností úmrtia  $\hat{q}_{62}(2015)$ ,  $\hat{q}_{63}(2016)$ ,  $\hat{q}_{64}(2017)$ ,  $\dots$ ,  $\hat{q}_{100}(2055)$ . Na Obr. 24 v Prílohe B sme znázornili Leeho-Carterovu úmrtnostnú krivku dlhovekosti a hranice 90%-ného intervalu spoľahlivosti pre predikovanú krivku dlhovekosti.<sup>8</sup> LC model dlhovekosti sme používali na dvojaké účely: jednak na výpočet spravodlivej dôchodkovej dávky za predpokladu, že sa berie do úvahy aj možná dlhovekosť dôchodcov, a tiež na stresové testovanie výšky dávok počítaných pri štandardných pravdepodobnostiach úmrtia (bez uvažovania dlhovekosti). V našich ďalších výpočtoch sme pre Leeho-Carterov model dlhovekosti s dolnou, resp. hornou hranicou 90%-ného predikčného intervalu spoľahlivosti používali skratky *LCA DL*, *LCA DL DH*, resp. *LCA DL HH*. Pre úplnosť by sme uviedli, že podľa prognóz modelu *LCA DL* stredná budúca dĺžka života 62-ročnej osoby bude 20,29 roka s 90%-ným intervalom spoľahlivosti  $\langle 17,64; 22,64 \rangle$  roka<sup>9</sup>. Všimnime si, že uvedený interval je pomerne široký, čo je spôsobené veľkou dĺžkou predikčnej doby (vyše 40 rokov). Prejavenie takého efektu bolo prirodzené, pretože celý postup bol založený na ARIMA modeli a jeho predikčných intervaloch. Z hľadiska životných poisťovní, ktoré by vyplácali doživotné dôchodky pre 62-ročných sporiteľov, môžeme považovať hranice intervalu  $\langle 17,64; 22,64 \rangle$  napr. za veľmi optimistický, resp. veľmi pesimistický scenár dlhovekosti (ďalšie podrobnosti sú uvedené v podkapitolách 5.4 a 5.5).

---

<sup>8</sup>Odhady Leeho-Carterových pravdepodobností  $\hat{q}_{62}(2015)$ ,  $\hat{q}_{63}(2016)$ ,  $\dots$ ,  $\hat{q}_{100}(2055)$ , ako aj hranice 90%-ného predikčného intervalu spoľahlivosti pre LC model dlhovekosti sú uvedené v Prílohe B.

<sup>9</sup>Dolnú, resp. hornú hranicu intervalu spoľahlivosti pre strednú budúcu dĺžku života 62-ročnej osoby sme opäť počítali prostredníctvom dolnej, resp. hornej hranice predikčného intervalu pre ročné pravdepodobnosti úmrtia pri modeli *LCA DL* (pozri Prílohu B).

## 5.3 Odhadnuté modely úrokových mier a výnosových kriviek

Ďalšími dôležitými prvkami našich analýz boli starostlivo odhadnuté modely úrokových mier, výnosov štandardných dlhopisov a výnosových kriviek. Pri nastavení jednotlivých modelov a odhade výnosových kriviek sme sa spoliehali na postupy zadefinované v druhej kapitole tejto práce. Odhadnuté výnosové krivky mali dva účely použitia: jednak slúžili na tzv. trhovú výpočet výšky mesačnej dôchodkovej dávky vyplácanej z druhého piliera (pozri podkapitolu 5.4), a tiež na stresové testovanie doživotných dôchodkov s dávkami počítanými pri rôznych technických úrokových mierach (viď podkapitolu 5.5 a 5.6).

### 5.3.1 Dátové súbory

Na začiatku nášho výskumného procesu sme si stanovili cieľ, aby všetky odhadnuté modely (či už demografické alebo úrokové), ako aj samotné výpočty čo naj dôveryhodnejšie a najpresnejšie reflektovali reálnu situáciu na Slovensku. Práve preto sme si zvolili také podkladové dáta úrokových mier a výnosov dlhopisov, ktoré sú typické pre slovenský trh. Ako okamžitú úrokovú mieru sme používali krátkodobú mieru EONIA (*Euro OverNight Index Average*, [88]), pričom sme mali k dispozícii denné historické dáta zo štvorročného obdobia 03.01.2011-31.12.2014. Ďalej sme využívali ročné úrokové miery EURIBOR (*Euro Interbank Offered Rate*, [88]) s jedno- až dvanásťmesačnou splatnosťou, pričom denné dáta sme čerpali z rovnakého štvorročného obdobia ako v prípade EONIA.<sup>10</sup> Okrem spomínaných úrokových mier sme používali aj údaje z Národnej banky Slovenska (NBS) o výnosoch slovenských vládnych dlhopisov (VSVD, [91]) s 5-, resp. 10-ročnou dobou splatnosti z obdobia od januára 2011 do decembra 2014. Poznámene by sme, že tieto dáta boli publikované raz za mesiac a aby sme ich mohli použiť spolu s dennými údajmi EURIBOR, upravili sme ich na dennú frekvenciu (pre každý pracovný deň v danom mesiaci sme použili ten istý výnos, ktorý platil v aktuálnom mesiaci).<sup>11</sup> Pôvodné ročné efektívne úrokové miery EURIBOR a ročné efektívne výnosy sme konvertovali na ročné intenzity úrokovania (na ročné spojitě

---

<sup>10</sup>Od roku 2009 oficiálnou menou v Slovenskej republike je euro (EUR) a je známe aj to, že slovenské životné poisťovne podstatnú časť prostriedkov technických rezerv investujú v štátoch eurozóny. Z toho dôvodu sme považovali za rozumné zvoliť práve miery EONIA a EURIBOR ako podkladové úrokové miery našich modelov.

<sup>11</sup>Prezentovaný postup vytvorenia denných dát VSVD z mesačných mohol viesť k malým nepresnostiam pri odhadnutí parametrov modelov úrokových mier.

úrokové miery) a v ďalšom výklade pod pojмами *úrokové miery*, resp. *výnosy dlhopisov* sme rozumeli práve tieto konvertované, spojité úrokové miery, resp. výnosy. Vývoj historických úrokových mier a výnosov dlhopisov medzi rokmi 2011 a 2014 sme prezentovali na Obr. 25, Obr. 26 a Obr. 27 v Prílohe C. Poznamenáme, že úrokové

Tabuľka 3: Prehľad o súboroch historických úrokových mier a výnosov dlhopisov

	<i>názov súboru</i>	<i>frekvencia dát</i>	<i>časový interval</i>	<i>zdroj</i>
EONIA	EONIA	denná	03.01.2011-31.12.2014	EMMI [88]
EURIBOR	EURIBOR 1M EURIBOR 2M EURIBOR 3M EURIBOR 6M EURIBOR 9M EURIBOR 12M	denná	02.01.2011-31.12.2014	EMMI [88]
VSVD	VSVD 5Y VSVD 10Y	mesačná	jan. 2011 - dec. 2014	NBS [91]

(Zdroj: *vlastné spracovanie*)

miery EURIBOR 1M až 12M v skutočnosti nie sú viazané na žiadne dlhopisy. Napriek tomu my sme ich používali na odhad časovej štruktúry výnosov štandardných dlhopisov. Túto skutočnosť by sme mohli považovať za ďalší technický predpoklad našich modelov.

### 5.3.2 Odhadnutý Vašíčkov model

Na základe dátových súborov (resp. ich určitých úsekov) sme odhadli parametre podkladového Vašíčkovho procesu (2.4), ktorý sme definovali v druhej kapitole tejto práce. Pri odhade neznámych parametrov sme aplikovali druhý z prezentovaných postupov (pozri podkapitolu 2.2.2), teda metodiku publikovanú v práci [79].<sup>12</sup> Ďalšie detaily použitých dátových súborov sú uvedené v Tab. 4. V prvom kroku odporúčaného postupu sme počítali odhady pomocných parametrov  $\varphi$ ,  $\xi$ ,  $\rho$ , potom sme ich transformovali

<sup>12</sup>Neznáme parametre Vašíčkovho modelu sme skúsili odhadnúť aj pomocou prvého prezentovaného prístupu, teda metódou prevzatou z článku [34]. Táto metodika však dávala neprípustné parametre Vašíčkovho procesu (tento problém sme spomenuli aj v podkapitole 2.2.2).

Tabuľka 4: Dáta použité pri odhade parametrov Vašíčkovho modelu

<i>označenie modelu</i>	<i>použité dátové súbory</i>	<i>časové obdobie</i>
<i>VAS1</i>	EURIBOR 1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 12M VSVD 10Y	01.09.2014-31.12.2014

(Zdroj: vlastné spracovanie)

do sveta pôvodných parametrov  $\kappa$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$ . Na záver sme určili kvalitu odhadnutého modelu, a to pomocou pomeru vierohodností  $MLR$  a nelineárneho koeficientu determinácie  $R^2$  (pre ďalšie detaily pozri podkapitolu 2.2.3). Odhady parametrov a hodnoty ukazovateľov kvality odhadnutého Vašíčkovho modelu (ozn.: *VAS1*) sú uvedené v Tab. 5. Na tomto mieste by sme poznamenali, že celý postup odhadnutia parametrov sme vykonali v štatistickom softvéri  $\mathcal{R}$  [67] pomocou nami implementovaných funkcií a algoritmov (ukážka programového kódu pre odhad parametrov Vašíčkovho modelu je uvedená v Prílohe D). Z Tab. 5. vidíme, že hodnoty oboch indikátorov kvality sú veľmi

Tabuľka 5: Odhady parametrov modelu *VAS1* a indikátory kvality modelu: pomer vierohodností  $MLR$  a nelineárny koeficient determinácie  $R^2$

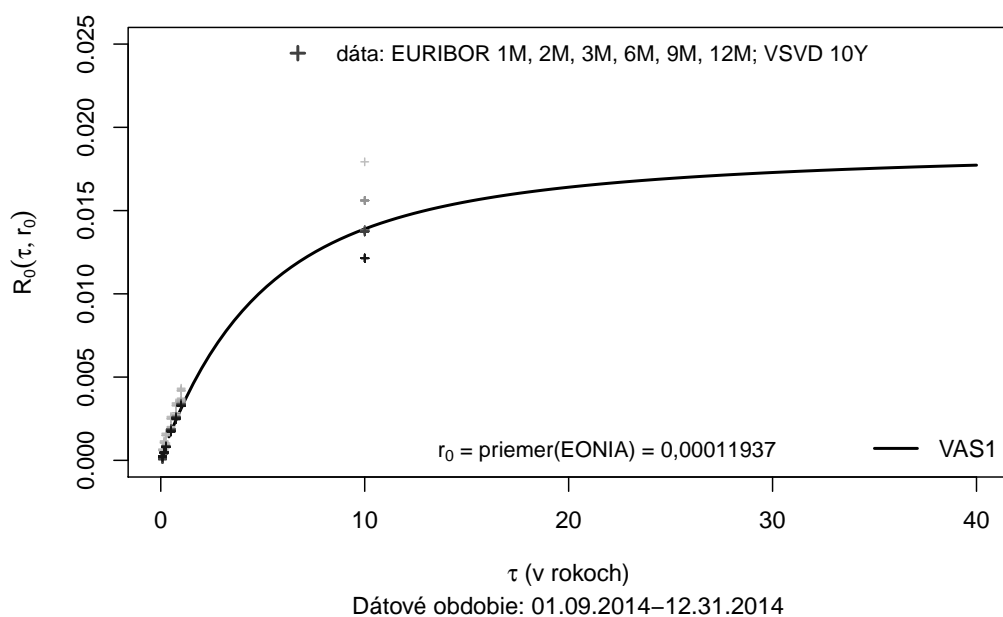
<i>ozn. modelu</i>	<i>odhady parametrov</i>	<i>MLR</i>	<i>R<sup>2</sup></i>
<i>VAS1</i>	$\tilde{\kappa} = 0,3566745801$ ; $\tilde{\theta} = 0,0001206708$ ; $\tilde{\sigma} = 0,0016420135$ ; $\tilde{\lambda} = -4,1153421901$ ;	0,9462670696	0,9911619293

(Zdroj: vlastné spracovanie)

blízko k jednej, čo znamená, že odhadnutý model *VAS1* dobre fituje reálne úrokové miery a výnosy, a teda mal by byť použiteľný na odhad celej časovej štruktúry výnosov štandardných dlhopisov.

Pomocou odhadnutých parametrov modelu *VAS1* (uvedených v Tab. 5) a vzťahu (2.12) sme zostrojili odhadnutú Vašíčkovu výnosovú krivku  $\tilde{R}(\tau, r_0)$ , pričom za začiatočnú okamžitú úrokovú mieru  $r_0$  sme zvolili hodnotu 0,00011937 p. a. Vizuálny fit (kvalitu) odhadnutej Vašíčkovej výnosovej krivky môžeme posúdiť aj pomocou Obr. 14, na ktorom sme zobrazili odhadnutú výnosovú krivku a hodnoty úrokových mier EURIBOR 1M až 12M a výnosov dlhopisov VSVD 10Y v období od 01.09.2014 do 31.12.2014.





Obr. 14: Odhadnutá výnosová krivka modelu *VAS1* a hodnoty úrokových mier EURIBOR 1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 12M a výnosov dlhopisov VSVD 10Y v období od 01.09.2014 do 31.12.2014 (*Zdroj: [88], [91], vlastné spracovanie*)

Odhadnutú krivku modelu *VAS1* sme ďalej využívali v rámci našich výpočtov uvedených v podkapitolách 5.4 a 5.5.

### 5.3.3 Odhadnuté CIR modely

Pri nastavení podkladových Coxových-Ingersollových-Rossových modelov (CIR modelov) sme postupovali podobne, ako v prípade odhadu Vašíčkovho modelu. Pomocou nami implementovaných programov v softvéri  $\mathcal{R}$  sme odhadli trojicu pomocných parametrov  $\phi$ ,  $\zeta$ ,  $\varrho$ , ktoré sme transformovali na pôvodné parametre  $\kappa$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$ , potom sme overili kvalitu odhadnutých CIR modelov a na záver sme zostrojili CIR výnosové krivky  $\tilde{R}(\tau, r_0)$ . Ďalšie podrobnosti sú uvedené v Tab. 6 a Tab. 7. Z posledných dvoch stĺpcov Tab. 7 vidíme, že všetky štyri odhadnuté CIR modely by mali byť dostatočne presné a použiteľné na odhad celej časovej štruktúry ročných výnosov štandardných dlhopisov. Na Obr. 28 a Obr. 29, ktoré sú uvedené v Prílohe C, sme znázornili fit odhadnutých výnosových kriviek CIR modelov voči historickým dátam úrokových mier a výnosov dlhopisov. Na Obr. 15 sme zobrazili všetky štyri odhadnuté výnosové krivky

Tabuľka 6: Dáta použité pri odhade parametrov CIR modelov

<i>označenie modelu</i>	<i>použité dátové súbory</i>	<i>časové obdobie</i>
<i>CIR1</i>	EURIBOR 1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 12M	03.01.2011-31.12.2014
<i>CIR2</i>	EURIBOR 1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 12M VSVD 5Y, 10Y	03.01.2011-31.12.2014
<i>CIR3</i>	EURIBOR 1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 12M	02.01.2014-31.12.2014
<i>CIR4</i>	EURIBOR 1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 12M VSVD 5Y, 10Y	02.01.2014-31.12.2014

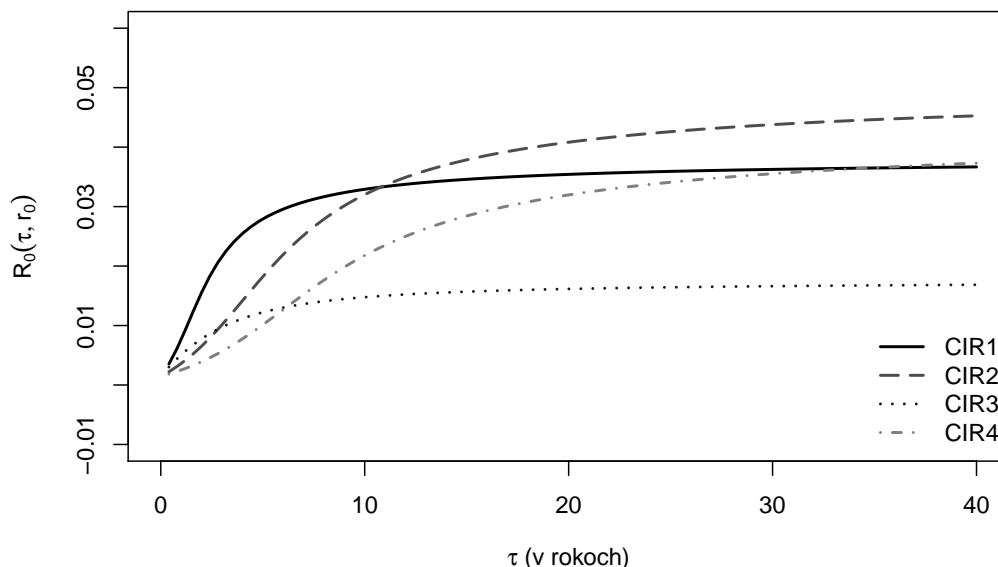
(Zdroj: vlastné spracovanie)

Tabuľka 7: Odhady parametrov modelov *CIR1*, *CIR2*, *CIR3*, *CIR4* a indikátory kvality modelov: pomer vierohodností *MLR* a nelineárny koeficient determinácie  $R^2$

<i>ozn. modelu</i>	<i>odhady parametrov</i>	<i>MLR</i>	$R^2$
<i>CIR1</i>	$\tilde{\kappa} = 72,16178848; \tilde{\theta} = 0,0001020851;$ $\tilde{\sigma} = 0,7317726665; \tilde{\lambda} = -73,34601118;$	0,9951716988	0,7993741820
<i>CIR2</i>	$\tilde{\kappa} = 10,17456052; \tilde{\theta} = 0,0002870042;$ $\tilde{\sigma} = 0,2633996146; \tilde{\lambda} = -10,70631829;$	0,9999056199	0,9084259715
<i>CIR3</i>	$\tilde{\kappa} = 36,20538781; \tilde{\theta} = 0,0002442299;$ $\tilde{\sigma} = 0,3742869009; \tilde{\lambda} = -35,84052154;$	0,9916688734	0,9526628565
<i>CIR4</i>	$\tilde{\kappa} = 6,167353185; \tilde{\theta} = 0,0002078876;$ $\tilde{\sigma} = 0,1648599964; \tilde{\lambda} = -6,589439288;$	0,9975804686	0,9587247731

(Zdroj: vlastné spracovanie)

$\tilde{R}(\tau, r_0)$  pri počiatočnej hodnote okamžitej úrokovej miery  $r_0 = 0,001439$  p. a., čo bola hodnota miery EONIA dňa 31.12.2014.



Obr. 15: Porovnanie priebehu odhadnutých výnosových kriviek modelov *CIR1*, *CIR2*, *CIR3* a *CIR4* (Zdroj: vlastné spracovanie)

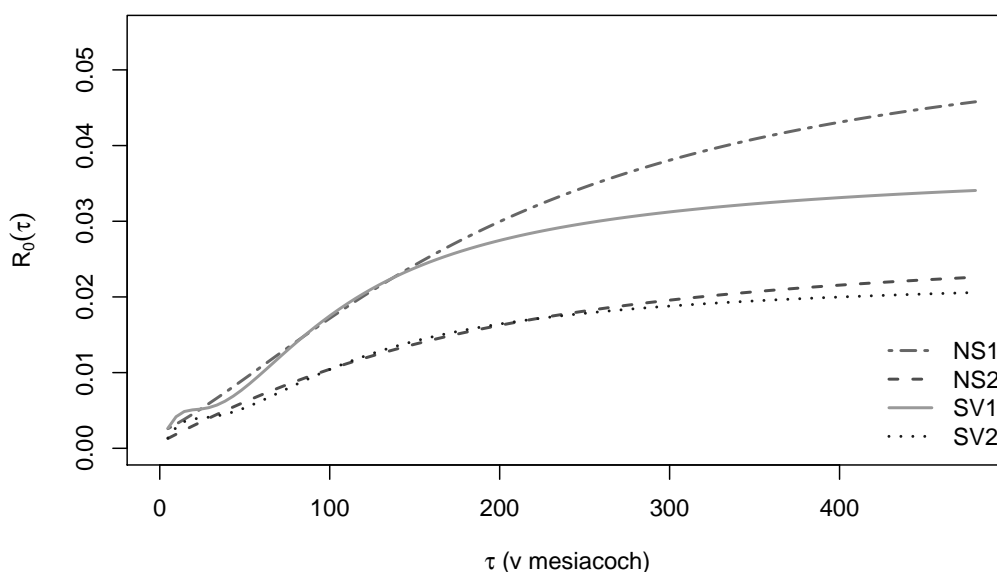
### 5.3.4 Odhadnuté NS a SV modely

V rámci tejto časti sú prezentované podrobnosti o kalibrácii nami používaných Nelsonových-Siegelových, resp. Svenssonových modelov výnosových kriviek. V prípade modelov *NS1*, *SV1* a *SV2* sme nastavili tzv. priemernú výnosovú krivku tak, že sme v každom časovom bode osobitne odhadli parametre kriviek a na záver sme počítali priemerné parametre  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\beta}_0$ ,  $\hat{\beta}_1$ ,  $\hat{\beta}_2$ , resp.  $\tilde{\lambda}_1$ ,  $\tilde{\lambda}_2$ ,  $\tilde{\alpha}_0$ ,  $\tilde{\alpha}_1$ ,  $\tilde{\alpha}_2$ ,  $\tilde{\alpha}_3$  (pre ďalšie podrobnosti pozri článok [28]). Pri odhade parametrov modelu *NS2* sme používali jediný časový bod (dáta z posledného dňa roku 2014) s 8-zložkovým vektorom pozorovaní úrokových mier a výnosov dlhopisov. Vizuálny fit odhadnutých výnosových kriviek voči historickým dátam sme znázornili v Prílohe C na Obr. 30, Obr. 31, Obr. 32, Obr. 33, Obr. 34, resp. Obr. 35. Porovnanie všetkých štyroch výnosových kriviek *NS1*, *NS1*, *SV1* a *SV2* sa nachádza na Obr. 16. Z Obr. 16 je zrejmé, že najoptimistickejšiu výnosovú krivku nám ponúka model *NS1*, v ktorom výnosy štandardných dlhopisov so 40-ročnou splatnosťou presiahnu 4%-nú hranicu. Naopak, najpesimistickejšími modelmi sú *NS2* a *SV2*, pri

Tabuľka 8: Dáta použité pri odhade parametrov NS a SV modelov

<i>označenie modelu</i>	<i>použité dátové súbory</i>	<i>časové obdobie</i>
<i>NS1</i>	EURIBOR 1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 12M VSVD 5Y, 10Y	02.01.2014-31.12.2014
<i>NS2</i>	EURIBOR 1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 12M VSVD 5Y, 10Y	31.12.2014
<i>SV1</i>	EURIBOR 1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 12M VSVD 5Y, 10Y	02.01.2014-31.12.2014
<i>SV2</i>	EURIBOR 1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 12M VSVD 5Y, 10Y	01.12.2014-31.12.2014

(Zdroj: vlastné spracovanie)



Obr. 16: Porovnanie priebehu odhadnutých výnosových kriviek modelov *NS1*, *NS2*, *SV1* a *SV2* (Zdroj: vlastné spracovanie)

ktorých ročné výnosy 40-ročných dlhopisov dosiahnu len hodnotu zhruba 2%. V Tab. 9 sú uvedené odhady parametrov a ukazovatele kvality jednotlivých modelov. Podľa koeficientu determinácie a upraveného koeficientu determinácie môžeme posúdiť, že modely *NS2* a *SV2* s vysokou pravdepodobnosťou by mali byť použiteľné ako odhad výnosov

štandardných dlhopisov. Nie náhodou práve tieto dva modely dostali najlepšie hodnotenie kvality. Modely *NS2* a *SV2* boli totiž kalibrované na najkratšom časovom úseku, a preto dosiahli najlepší fit voči historickým dátam. Trochu horšie dopadli výnosové krivky *NS1* a *SV1*, ktoré boli odhadnuté na základe dát z celého roku 2014. Napriek nižším hodnotám koeficientov determinácie sme ich aplikovali v ďalších výpočtoch, no pri stanovení záverov založených na modeloch *NS1*, resp. *SV1* sme boli opatrnejší.

Tabuľka 9: Odhady parametrov modelov *NS1*, *NS2*, *SV1*, *SV2* a indikátory kvality odhadnutých výnosových kriviek: koeficient determinácie  $R^2$  a upravený koeficient determinácie  $R_{adj}^2$

<i>ozn. modelu</i>	<i>odhady parametrov</i>	$R^2$	$R_{adj}^2$
<i>NS1</i>	$\hat{\lambda} = 0,01493534186$ ; $\hat{\beta}_0 = 0,0597758414$ ; $\hat{\beta}_1 = -0,0577325591$ ; $\hat{\beta}_2 = -0,0428869967$ ;	0,7931510922	0,6380144114
<i>NS2</i>	$\hat{\lambda} = 0,0149353419$ ; $\hat{\beta}_0 = 0,0280151458$ ; $\hat{\beta}_1 = -0,0272740141$ ; $\hat{\beta}_2 = -0,0115803661$ ;	0,9711263891	0,9494711811
<i>SV1</i>	$\tilde{\lambda}_1 = 3,903448871$ ; $\tilde{\lambda}_2 = 22,90247036$ ; $\tilde{\alpha}_0 = 0,0387882496$ ; $\tilde{\alpha}_1 = -0,0374516950$ ; $\tilde{\alpha}_2 = -0,0228972760$ ; $\tilde{\alpha}_3 = -0,0887208802$ ;	0,8082258830	0,3287905905
<i>SV2</i>	$\tilde{\lambda}_1 = 3,903448871$ ; $\tilde{\lambda}_2 = 25,09365953$ ; $\tilde{\alpha}_0 = 0,0235740747$ ; $\tilde{\alpha}_1 = -0,0233678509$ ; $\tilde{\alpha}_2 = -0,0157794476$ ; $\tilde{\alpha}_3 = -0,0510926552$ ;	0,9998187156	0,9993655046

(Zdroj: vlastné spracovanie)

## 5.4 Modelové výpočty dôchodkových dávok

V tejto podkapitole je prezentovaná časť hlavných výsledkov nášho výskumu, a to výpočet výšky dávky pri doživotnom mesačne vyplácanom polehutom dôchodku pri rôznych demografických predpokladoch a modeloch úrokových mier, ktoré boli definované v podkapitolách 5.2, resp. 5.3.

### 5.4.1 Technické predpoklady

V rámci našich výpočtov sme predpokladali, že osoba (sporiteľ v druhom pilieri) vo veku  $x = 62$  rokov, ktorá nasporila v starobnom dôchodkom sporení sumu  $P =$

10000 EUR, požiada našu modelovú životnú poisťovňu o okamžitý mesačne vyplácaný doživotný dôchodok bez valorizácie a bez pozostalostných dôchodkov. Ako sme už spomínali v podkapitole 5.1, pri modelových kalkuláciách výšky dôchodkovej dávky sme brali do úvahy aj podmienku o tom, keď dôchodca zomrie v prvých siedmych rokoch sporenia, tak nevyplatená časť prvých 84 dávok sa vyplatí pozostalým v jednej sume, hneď po úmrtí poberateľa dôchodku (pozri zákon [85], odsek 2 §32).

Pri výpočte mesačnej dávky sme nastavili nasledovné modelové koeficienty bruttoprincípu životného poistenia: začiatočné náklady  $\alpha = 5\%$  počítané zo sumy určenej na vyplácanie dávok v prvom roku vyplácania dôchodku, bežné náklady spojené predovšetkým s vyplácaním dôchodkových dávok vo výške  $\beta = 4\%$  počítanej z každej dávky (počas celej doby poistenia), inkasné náklady  $\gamma = 1\%$  z prevedených úspor zo starobného dôchodkového sporenia, maržu poisťovne  $\varepsilon = 5\%$ , ktorú poisťovňa aplikuje pri vyplácaní časti poistného v prípade úmrtia poberateľa dôchodku v prvých siedmych rokoch poistenia.<sup>13</sup>

V tretej kapitole tejto práce sme odvodili formulu (3.23), ktorú sme používali na výpočet mesačnej dôchodkovej dávky pri technických úrokových mierach vo výške 0% p. a., 0,5% p. a., 1,2% p. a., 1,9% p. a. (v súlade s opatrením Národnej banky Slovenska [59] o maximálnej výške technickej úrokovej miery). Ďalej sme využívali aj naše odhadnuté modely výnosových kriviek  $VAS1$ ,  $CIR1$ ,  $CIR2$ ,  $CIR3$ ,  $CIR4$ ,  $NS1$ ,  $NS2$ ,  $SV1$ ,  $SV2$  uvedené v podkapitole 5.3. Kalkuláciu dôchodkovej dávky založenú na diskontovaní peňažných tokov výnosmi získanými z výnosovej krivky sme pracovne pomenovali *trhový výpočet dôchodkovej dávky*. V tomto prípade bolo potrebné vzorec (3.23) modifikovať pre prípad premenlivej úrokovej miery do nasledujúceho tvaru

$$\tilde{S}_m \approx \frac{1}{12} \times \frac{(1 - \gamma)P}{(1 + \beta) \left( \tilde{a}_x - \frac{13}{24} \right) + \alpha + (1 - \varepsilon)\tilde{M}}, \quad (5.6)$$

<sup>13</sup>Podľa odseku 2 §32 zákona č. 43/2004 poisťiteľ môže znížiť výšku vyplácanej sumy o sumu oprávnenne vynaložených nákladov na jej výplatu v hotovosti. Parameter  $\varepsilon$  vyjadruje práve túto percentuálnu maržu, o ktorú poisťovňa zníži vyplácanú sumu v prípade úmrtia poistenca v prvých siedmych rokoch poistenia.

kde

$$\begin{aligned}
\widetilde{M} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \left[ \widetilde{a}_{x+j-1:\overline{7-(j-1)}} - \frac{13}{24} \left( 1 - \widetilde{A}_{x+j-1:\overline{7-(j-1)}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \widetilde{a}_{x+j:\overline{7-j}} - \frac{13}{24} \left( 1 - \widetilde{A}_{x+j:\overline{7-j}} \right) \right] {}_{j-1}p_x {}_q_{x+j-1} e^{-(j-0,5)\widetilde{R}(j-0,5)} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \frac{11}{24} + \frac{13}{24} \widetilde{A}_{x+6:\overline{1}} \right] {}_6p_x {}_q_{x+6} e^{-6,5\widetilde{R}(6,5)}, \\
\widetilde{a}_{x:\overline{u}} &= \sum_{k=0}^{u-1} e^{-k\widetilde{R}(k)} {}_k p_x, \quad \widetilde{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\widetilde{R}(k)} {}_k p_x, \\
\widetilde{A}_{x:\overline{n}} &= e^{-n\widetilde{R}(n)} {}_n p_x,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

a  $\widetilde{R}(j)$  je hodnota výnosu v čase  $j$  daná odhadnutou výnosovou krivkou  $\widetilde{R}(\cdot)$ .

V kombinácii s vyššie spomínanými modelmi úrokových mier sme aplikovali rôzne demografické predpoklady systémom “každý s každým” a dostali sme celú maticu výsledkov (mesačných dôchodkových dávok). Použili sme statické úmrtnostné tabuľky *ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)* a Leeho-Carterove predpovede pre rok 2015 (s dolnou a hornou hranicou predikčného intervalu), resp. modely dlhovekosti získané metódou posunutých pravdepodobností (okamžitý šok, postupný prechod) a Leeho-Carterov model dlhovekosti (s dolnou a hornou hranicou intervalu spoľahlivosti pre LC model dlhovekosti).

Do našich analýz okrem spomínaného úrokového rizika a rizika dlhovekosti sme ďalšie riziká nezahrnuli.<sup>14</sup> Skutočné životné poisťovne pri vyplácaní doživotných dôchodkov z druhého piliera by skoro určite uvažovali aj

- investičné riziko, prípadne iné trhové riziká,
- poisťno-technické riziko (*underwriting risk*),
- legislatívne riziko, politické riziko,
- reputačné riziko,
- riziko plynúce zo špecifického zloženia skupiny sporiteľov (dôchodcov),
- úmrtnostné riziko,
- riziko vypovedania poisťných zmlúv,
- a ďalšie rizikové faktory.

<sup>14</sup>Zahrnutie ďalších rizikových faktorov presahovalo možnosti tejto záverečnej práce, a to kvôli dvom dôvodom: nedostupnosť/neexistencia historických údajov o danom faktore (napr. o riziku vypovedania poisťnej zmluvy) alebo náročná kvantifikácia rizika (napr. politického alebo legislatívneho rizika).

#### 5.4.2 Výsledky výpočtov – mesačné výšky dôchodkových dávok

Výsledky našich modelových výpočtov sú uvedené v Tab. 10, Tab. 11, Tab. 12, resp. Tab. 13 na nasledujúcich stranách. Tab. 10 obsahuje výsledky výpočtov pri ročných technických úrokových mierach 0%, 0,5%, 1,2%, 1,9% v kombinácii s demografickými modelmi založenými na prognózach Infostatu a metóde posunutých pravdepodobností. Pokračovaním je Tab. 11, v ktorom sú prezentované výšky ročných dôchodkových dávok pri rovnakých demografických predpokladoch ako v Tab. 10, ale už pri trhových modeloch výnosových kriviek. Na ďalších stranách sú uvedené Tab. 12 a Tab. 13, v rámci ktorých sme používali Leeho-Carterove predpovede pre rok 2015 a Leeho-Carterov model dlhovekosti v kombinácii s konštantnými technickými úrokovými mierami, resp. trhovými modelmi výnosových kriviek.<sup>15</sup>

Považujeme za dôležité, aby sme poznamenali, že modelové dôchodkové dávky uvedené v tejto časti nie sú finálnymi výsledkami, ktoré by poisťovne mali vyplácať svojim klientom ako “spravodlivý dôchodok”. Tie naše výsledky považujeme len za starostlivo nastavené prvotné odhady dávky, ktoré už zohľadňujú vplyv dvoch rizikových faktorov a ktoré by mohli vstúpiť do ďalších etáp stanovenia výslednej dôchodkovej dávky. V tých ďalších krokoch by sa mohlo uvažovať pôsobenie ďalších rizík, mohlo by prebehnúť stresové testovanie a analýza ziskovosti poistného produktu a pod. Pri väčšine rizikových faktorov spomenutých na konci podkapitoly 5.4.1 platí, že ich započítanie by v konečnom dôsledku spôsobilo zníženie mesačnej dôchodkovej dávky.

---

<sup>15</sup>Všetky výpočty sme vykonali v štatistickom softvéri  $\mathcal{R}$  pomocou nami implementovaných algoritmov. Ukážky programových kódov na výpočet mesačnej dávky (pre konkrétny prípad *ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)* v kombinácii s technickou úrokovou mierou 1,9%, resp. s modelom *VAS1*) sme uviedli v Prílohe E.



Tabuľka 10: Mesačná výška dôchodkovej dávky pri výške úspor 10000 EUR, rôznych hodnotách technickej úrokovej miery a rôznych modeloch dlhovekosti podľa prognóz Infostatu a metódy posunutých pravdepodobností

	historické úmrtnostné tabuľky ŠÚSR	modely dlhovekosti podľa prognóz Infostatu a metódy posunutých pravdepodobností									
	ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)	veľmi nízky variant		nízky variant		stredný variant		vysoký variant		veľmi vysoký variant	
stredná budúca dĺžka života 62-ročnej osoby (uvedená v rokoch)	18,92 rokov	okamžitý šok 20,39 rokov	postupný pr. 19,43 rokov	okamžitý šok 21,15 rokov	postupný pr. 19,69 rokov	okamžitý šok 22 rokov	postupný pr. 19,97 rokov	okamžitý šok 23,26 rokov	postupný pr. 20,36 rokov	okamžitý šok 24,60 rokov	postupný pr. 20,77 rokov
mesačná výška dávky $S_m$ pri technickej miere $i = 0,000$ p. a. (uvedená v eurách)	41,18 €	okamžitý šok 38,36 €	postupný pr. 40,12 €	okamžitý šok 37,04 €	postupný pr. 39,61 €	okamžitý šok 35,67 €	postupný pr. 39,07 €	okamžitý šok 33,81 €	postupný pr. 38,33 €	okamžitý šok 32,02 €	postupný pr. 37,59 €
mesačná výška dávky $S_m$ pri technickej miere $i = 0,005$ p. a. (uvedená v eurách)	43,54 €	okamžitý šok 40,70 €	postupný pr. 42,49 €	okamžitý šok 39,38 €	postupný pr. 41,99 €	okamžitý šok 37,99 €	postupný pr. 41,45 €	okamžitý šok 36,12 €	postupný pr. 40,72 €	okamžitý šok 34,31 €	postupný pr. 39,99 €
mesačná výška dávky $S_m$ pri technickej miere $i = 0,012$ p. a. (uvedená v eurách)	46,94 €	okamžitý šok 44,08 €	postupný pr. 45,90 €	okamžitý šok 42,75 €	postupný pr. 45,41 €	okamžitý šok 41,36 €	postupný pr. 44,89 €	okamžitý šok 39,47 €	postupný pr. 44,17 €	okamžitý šok 37,64 €	postupný pr. 43,46 €
mesačná výška dávky $S_m$ pri technickej miere $i = 0,019$ p. a. (uvedená v eurách)	50,43 €	okamžitý šok 47,57 €	postupný pr. 49,42 €	okamžitý šok 46,24 €	postupný pr. 48,94 €	okamžitý šok 44,84 €	postupný pr. 48,43 €	okamžitý šok 42,94 €	postupný pr. 47,73 €	okamžitý šok 41,11 €	postupný pr. 47,04 €

(Zdroj: [90], [95], vlastné spracovanie)

Tabuľka 11: Mesačná výška dôchodkovej dávky pri výške úspor 10000 EUR, rôznych modeloch výnosových kriviek a rôznych modeloch dlhovekosti podľa prognóz Infostatu a metódy posunutých pravdepodobností

	historické úmrtnostné tabuľky ŠÚSR	modely dlhovekosti podľa prognóz Infostatu a metódy posunutých pravdepodobností									
	ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)	veľmi nízky variant		nízky variant		stredný variant		vysoký variant		veľmi vysoký variant	
stredná budúca dĺžka života 62-ročnej osoby (uvedená v rokoch)	18,92 rokov	okamžitý šok 20,39 rokov	postupný pr. 19,43 rokov	okamžitý šok 21,15 rokov	postupný pr. 19,69 rokov	okamžitý šok 22 rokov	postupný pr. 19,97 rokov	okamžitý šok 23,26 rokov	postupný pr. 20,36 rokov	okamžitý šok 24,60 rokov	postupný pr. 20,77 rokov
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli VAS1	48,36 €	okamžitý šok 45,60 €	postupný pr. 47,38 €	okamžitý šok 44,31 €	postupný pr. 46,92 €	okamžitý šok 42,97 €	postupný pr. 46,42 €	okamžitý šok 41,14 €	postupný pr. 45,75 €	okamžitý šok 39,38 €	postupný pr. 45,08 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli CIR1	57,95 €	okamžitý šok 55,23 €	postupný pr. 57,04 €	okamžitý šok 53,97 €	postupný pr. 56,62 €	okamžitý šok 52,65 €	postupný pr. 56,17 €	okamžitý šok 50,85 €	postupný pr. 55,55 €	okamžitý šok 49,12 €	postupný pr. 54,95 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli CIR2	58,37 €	okamžitý šok 55,88 €	postupný pr. 57,57 €	okamžitý šok 54,72 €	postupný pr. 57,20 €	okamžitý šok 53,52 €	postupný pr. 56,80 €	okamžitý šok 51,88 €	postupný pr. 56,26 €	okamžitý šok 50,30 €	postupný pr. 55,74 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli CIR3	48,54 €	okamžitý šok 45,74 €	postupný pr. 47,54 €	okamžitý šok 44,44 €	postupný pr. 47,07 €	okamžitý šok 43,07 €	postupný pr. 46,57 €	okamžitý šok 41,22 €	postupný pr. 45,88 €	okamžitý šok 39,43 €	postupný pr. 45,20 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli CIR4	53,80 €	okamžitý šok 51,30 €	postupný pr. 52,98 €	okamžitý šok 50,13 €	postupný pr. 52,59 €	okamžitý šok 48,92 €	postupný pr. 52,19 €	okamžitý šok 47,28 €	postupný pr. 51,63 €	okamžitý šok 45,69 €	postupný pr. 51,09 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli NS1	54,06 €	okamžitý šok 51,66 €	postupný pr. 53,30 €	okamžitý šok 50,54 €	postupný pr. 52,94 €	okamžitý šok 49,39 €	postupný pr. 52,56 €	okamžitý šok 47,83 €	postupný pr. 52,05 €	okamžitý šok 46,34 €	postupný pr. 51,56 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli NS2	48,31 €	okamžitý šok 45,66 €	postupný pr. 47,39 €	okamžitý šok 44,43 €	postupný pr. 46,96 €	okamžitý šok 43,15 €	postupný pr. 46,50 €	okamžitý šok 41,40 €	postupný pr. 45,87 €	okamžitý šok 39,73 €	postupný pr. 45,25 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli SV1	52,92 €	okamžitý šok 50,37 €	postupný pr. 52,07 €	okamžitý šok 49,18 €	postupný pr. 51,67 €	okamžitý šok 47,95 €	postupný pr. 51,25 €	okamžitý šok 46,27 €	postupný pr. 50,67 €	okamžitý šok 44,66 €	postupný pr. 50,11 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli SV2	48,24 €	okamžitý šok 45,57 €	postupný pr. 47,30 €	okamžitý šok 44,32 €	postupný pr. 46,86 €	okamžitý šok 43,02 €	postupný pr. 46,39 €	okamžitý šok 41,26 €	postupný pr. 45,75 €	okamžitý šok 39,56 €	postupný pr. 45,12 €

Tabuľka 12: Mesačná výška dôchodkovej dávky pri výške úspor 10000 EUR, rôznych hodnotách technickej úrokovej miery a rôznych modeloch dlhovekosti podľa Leeho-Carterovho modelu

	historické úmrtnostné tabuľky ŠÚSR	Leeho-Carterove predpovede pre rok 2015 (bez dlhovekosti)			Leeho-Carterov model dlhovekosti		
	<i>ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)</i>	<i>LCA2015 DH</i>	<i>LCA2015</i>	<i>LCA2015 HH</i>	<i>LCA DL DH</i>	<i>LCA DL</i>	<i>LCA DL HH</i>
stredná budúca dĺžka života 62-ročnej osoby (uvedená v rokoch)	18,92 rokov	18,25 rokov	19,17 rokov	20,03 rokov	postupný prechod 17,64 rokov	postupný prechod 20,29 rokov	postupný prechod 22,64 rokov
mesačná výška dávky $S_m$ pri technickej miere $i = 0,000$ p. a. (uvedená v eurách)	41,18 €	42,59 €	40,68 €	39,03 €	postupný prechod 44,01 €	postupný prechod 38,49 €	postupný prechod 34,63 €
mesačná výška dávky $S_m$ pri technickej miere $i = 0,005$ p. a. (uvedená v eurách)	43,54 €	44,97 €	43,03 €	41,35 €	postupný prechod 46,39 €	postupný prechod 40,80 €	postupný prechod 36,89 €
mesačná výška dávky $S_m$ pri technickej miere $i = 0,012$ p. a. (uvedená v eurách)	46,94 €	48,39 €	46,42 €	44,70 €	postupný prechod 49,80 €	postupný prechod 44,15 €	postupný prechod 40,17 €
mesačná výška dávky $S_m$ pri technickej miere $i = 0,019$ p. a. (uvedená v eurách)	50,43 €	51,91 €	49,90 €	48,16 €	postupný prechod 53,31 €	postupný prechod 47,60 €	postupný prechod 43,58 €

(Zdroj: [95], vlastné spracovanie)

Tabuľka 13: Mesačná výška dôchodkovej dávky pri výške úspor 10000 EUR, rôznych modeloch výnosových kriviek a rôznych modeloch dlhovekosti podľa Leeho-Carterovho modelu

	historické úmrtnostné tabuľky ŠÚSR	Leeho-Carterove predpovede pre rok 2015 (bez dlhovekosti)			Leeho-Carterov model dlhovekosti		
	ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)	LCA2015 DH	LCA2015	LCA2015 HH	LCA DL DH	LCA DL	LCA DL HH
očakávaná budúca dĺžka života 62-ročnej osoby (uvedená v rokoch)	18,92 rokov	18,25 rokov	19,17 rokov	20,03 rokov	postupný prechod 17,64 rokov	postupný prechod 20,29 rokov	postupný prechod 22,64 rokov
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli VAS1	48,36 €	49,78 €	47,85 €	46,17 €	postupný prechod 51,13 €	postupný prechod 45,63 €	postupný prechod 41,75 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli CIR1	57,95 €	59,39 €	57,42 €	55,70 €	postupný prechod 60,68 €	postupný prechod 55,19 €	postupný prechod 51,28 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli CIR2	58,37 €	59,71 €	57,87 €	56,26 €	postupný prechod 60,89 €	postupný prechod 55,80 €	postupný prechod 52,18 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli CIR3	48,54 €	49,97 €	48,02 €	46,32 €	postupný prechod 51,35 €	postupný prechod 45,78 €	postupný prechod 41,86 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli CIR4	53,80 €	55,15 €	53,31 €	51,71 €	postupný prechod 56,35 €	postupný prechod 51,24 €	postupný prechod 47,63 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli NS1	54,06 €	55,38 €	53,58 €	52,01 €	postupný prechod 56,53 €	postupný prechod 51,55 €	postupný prechod 48,06 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli NS2	48,31 €	46,17 €	47,81 €	49,69 €	postupný prechod 50,99 €	postupný prechod 45,66 €	postupný prechod 41,91 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli SV1	52,92 €	54,28 €	52,42 €	50,81 €	postupný prechod 55,50 €	postupný prechod 50,32 €	postupný prechod 46,66 €
mesačná výška dávky $S_m$ počítaná pri modeli SV2	48,24 €	49,62 €	47,74 €	46,09 €	postupný prechod 50,93 €	postupný prechod 45,57 €	postupný prechod 41,80 €

(Zdroj: [95], vlastné spracovanie)

Z Tab. 10 a Tab. 11 môžeme vidieť, že najvyššiu dôchodkovú dávku pri každom modeli úrokových mier sme dostali pri originálnych pravdepodobnostiach úmrtia z *ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)*, teda keď sme neuvažovali možnú dlhovekosť poistencov. Výšky dávok klesajú v každom riadku v smere zľava doprava, teda čím vyšší variant dlhovekosti berieme do úvahy, tým nižšiu dávku dostaneme. Za realistickejšie považujeme modely dlhovekosti s postupným prechodom, pri ktorých starnutím dôchodcov sa postupne menia aj ročné pravdepodobnosti úmrtia v danom, stále vyššom veku. Na druhej strane aj modely s okamžitým šokom môžu mať svoje opodstatnenie, napríklad keby sa objavil spôsob liečby rakoviny, ten by mohol predĺžiť život dôchodcov o niekoľko rokov “s okamžitou platnosťou”. Chceli by sme zdôrazniť, že všetky naše modely sme vytvorili univerzálne, pre celé slovenské obyvateľstvo a nebrali sme do úvahy špecifické zloženie skupiny poistencov – sporiteľov v druhom pilieri. V skutočnosti populácia sporiteľov zúčastnených v starobnom dôchodkovom sporení nie je reprezentatívnou vzorkou celej slovenskej populácie. V druhom pilieri totiž sporia prevažne ľudia s vyššími príjmami, ktorým sa odporúčalo, aby vstúpili, resp. zostali v druhom pilieri. S vyššími príjmami je obvykle spojená aj vyššia životná úroveň sporiteľov, čo môže pozitívne vplyvať na ich budúcu dĺžku života. Z hľadiska životnej poisťovne to môže predstavovať zvýšenie miery rizika dlhovekosti a motiváciu k tomu, aby používala *vysoký* alebo *veľmi vysoký variant* modelu dlhovekosti.

Keď sa pozrieme do Tab. 12 a Tab. 13, tak môžeme spozorovať, že výšky dávok pri modeli *LCA2015* sú mierne nižšie ako v prípade *ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)*, medzi spomínanými hodnotami však nie sú výrazné rozdiely. Oveľa zaujímavejšie sú výsledky uvedené v stĺpci *LCA DL* v Tab. 12 a Tab. 13, tie obsahujú výšky dávok pri Leeho-Carterovom modeli dlhovekosti. Tieto výsledky sú zhruba na tej úrovni, akú sme dostali pri *vysokom variante* s postupným prechodom pravdepodobností (pozri Tab. 10 a Tab. 11).<sup>16</sup> Všimnime si, že interval spoľahlivosti pre výšku mesačnej dávky je veľmi široký. Plynie to zo skutočnosti, že 90%-ný interval spoľahlivosti pre pravdepodobnosti úmrtia pri modeli *LCA DL* je príliš široký (viď Obr. 24 v Prílohe B), pretože pri vytvorení modelu vývoj úmrtia sme predpovedali pre dobu vyše 40-tich rokov. Výsledky zo stĺpcov *LCA DL DH* resp. *LCA DL HH* z hľadiska modelovej životnej poisťovne

---

<sup>16</sup>Aj na tomto mieste by sme poznamenali, že *LCA DL* model sme nakalibrovali pre celú slovenskú populáciu, pričom skupina sporiteľov v druhom pilieri z hľadiska demografie sa môže líšiť od celej populácie.

by sme mohli použiť jedine na modelovanie extrémne priaznivého, resp. extrémne nepriaznivého vývoja úmrtnosti.

Na základe Tab. 10 a Tab. 12 môžeme porovnať, ako vplývajú rôzne úrovne konštantnej technickej úrokovej miery na mesačnú výšku dôchodkovej dávky. Prirodzene platí: čím vyššia je predpokladaná miera zhodnotenia prostriedkov technických rezerv, tým vyššia bude dôchodková dávka. Na rozdiel od klasického výpočtu založenej na konštantnej technickej úrokovej miere, pri trhových modeloch úrokovej miery (výnosy štandardných dlhopisov) sa menia časom do splatnosti. Napr. model *VAS1* môžeme považovať za pesimistický, pretože ani výnosy dlhopisov s najdlhšou, 40-ročnou splatnosťou nedosiahnu úroveň 1,9% p. a. Podobne pesimistické predpovede výnosov nám dali aj modely *CIR3*, *NS2* a *SV2* (pozri Obr. 15 a Obr. 16). Spoločnou črtou všetkých deviatich modelov je čisto rastúci trend ročných výnosov v závislosti od maturity. Za optimistické môžeme pokladať modely *CIR2* a *NS1* (viď Obr. 15 a Obr. 16), pretože práve tieto modely predpovedali najvyššie výnosy a tento fakt sa odzrkadlil aj na výške mesačných dôchodkových dávok.

## 5.5 Stresové testy doživotných dôchodkov pomocou statickej metódy spárovania aktív a pasív

Pre životné poisťovne je veľmi dôležité, aby správne odhadli a kvantifikovali riziká spojené s ich produktami. Súčasťou tohto procesu je aj tzv. stresové testovanie poisťných produktov, počas ktorých poisťovňa skúša, ako zareaguje profitabilita testovaného poistenia na zmenu jedného alebo viacerých parametrov. Do našich prvotných výpočtov, ktoré sme prezentovali v podkapitole 5.4, sme zahrnuli len dva typy rizík: demografické riziko (dlhovekosť) a úrokové riziko (nepriaznivý vývoj úrokových mier). Modelové stresové testy sme tiež vykonali len pre tieto dva faktory. Chceli sme pomocou nich poukázať na možné výkyvy spojené s vyplácaním doživotných dôchodkov z druhého piliera. V reálnom svete by poisťovne vykonali aj ďalšie stresové testy, napríklad voči tým rizikám, ktoré sme uviedli v časti 5.4.1.

Pri stresových testoch sa dajú aplikovať rôzne pomocné postupy, my sme v tomto prípade používali aparát *statickej metódy spárovania aktív a pasív životnej poisťovne* (viď podkapitolu 4.1). Pri tejto metóde platí, že poisťovňa celé čisté poistné rozloží v čase podpisu poistnej zmluvy tak, že do ročných, 2-ročných, 3-ročných, ..., 40-

ročných štandardných dlhopisov investuje presne toľko peňazí, koľko bude potrebovať v čase maturity daného dlhopisu na vyplatenie očakávanej dôchodkovej dávky. Okrem toho sme predpokladali, že poisťovňa v čase 0 investuje aj do polročných, 1,5-ročných, . . . , 6,5-ročných dlhopisov presne toľko prostriedkov, koľko bude potrebovať v danom čase na vyplatenie očakávaného poistného plnenia v prípade úmrtia dôchodcu v prvých siedmich rokoch poistenia.<sup>17</sup> Poznamenáme, že sme predpokladali, že dávka pri úmrtí sa priemere vyplatí v polovici roka, keďže priemerný dôchodca zomrie v strede roka (pre ďalšie podrobnosti pozri tretiu kapitolu). Za predpokladu, že výnosy dlhopisov tvoria rastúcu postupnosť (výnosová krivka platná v čase 0 je rastúcou krivkou), tak prezentované rozloženie prostriedkov je optimálne v tom zmysle, že **maximalizuje akumulovanú hodnotu zisku poisťovne**. Táto investičná stratégia rešpektuje zároveň aj pravidlo solventnosti poisťovne, pretože očakávaná strata poisťovne bude v každom čase vyplácania očakávanej dávky alebo očakávaného poistného plnenia presne nulová (okrem posledného časového bodu, v ktorom poisťovňa spraví konečné zúčtovanie; pre ďalšie podrobnosti pozri podkapitolu 4.1).

Z vyššie uvedených dôvodov (o frekvencii vyplácania poistných plnení a dôchodkových dávok) statickú metódu spárovania aktív a pasív sme aplikovali **na polročnej báze**. Uvedomovali sme si, že vyplácanie dôchodkov z druhého piliera by mala prebiehať na mesačnej báze, ale nemali sme k dispozícii pravdepodobnosti úmrtia s mesačnou frekvenciou. Práve preto sme sa rozhodli, že výšky mesačne vyplácaných dávok (z podkapitoly 5.4, uvedených v Tab. 10, Tab. 11, Tab. 12, Tab. 13) formálne prepočítame pre prípad ročne predlehotne vyplácanej dávky. Na tento účel sme vytvorili analógiu formuly (3.23), resp. formuly (5.6)

$$S_r \approx \frac{(1 - \gamma)P}{(1 + \beta)\ddot{a}_x + \alpha + (1 - \varepsilon)M_r}, \quad (5.8)$$

$$M_r = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \left[ \ddot{a}_{x+j-1:\overline{7-(j-1)}} + \ddot{a}_{x+j:\overline{7-j}} \right] {}_{j-1}p_x q_{x+j-1} (1 + i)^{-(j-0,5)} +$$

$$+ \frac{1}{2} {}_6p_x q_{x+6} (1 + i)^{-6,5},$$

---

<sup>17</sup>K uvedenému kroku sme potrebovali dodať ďalší modelový predpoklad, že na trhu existujú dlhopisy s polročnou, 1,5-ročnou, . . . , 6,5-ročnou dobou splatnosti.

resp.

$$\begin{aligned}\tilde{S}_r &\approx \frac{(1-\gamma)P}{(1+\beta)\tilde{a}_x + \alpha + (1-\varepsilon)\tilde{M}_r}, \\ \tilde{M}_r &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \left[ \tilde{a}_{x+j-1:\overline{7-(j-1)}} - \tilde{a}_{x+j:\overline{7-j}} \right] {}_{j-1}p_x q_{x+j-1} e^{-(j-0,5)\tilde{R}(j-0,5)} + \\ &\quad + \frac{1}{2} {}_6p_x q_{x+6} e^{-6,5\tilde{R}(6,5)},\end{aligned}\tag{5.9}$$

kde  $\tilde{a}_x$  a  $\tilde{a}_{x:\overline{n}}$  sú definované vzťahom (5.7) a  $\tilde{R}(j)$  je hodnota výnosu v čase  $j$  daná odhadnutou výnosovou krivkou  $\tilde{R}(\cdot)$ .<sup>18</sup>

V aplikácii metódy spárovania aktív a pasív sa vyskytli dva typy výplát: v polrokoch prebiehali výplaty dávok pri úmrtí poistenca (len v prvých siedmych rokoch vyplácania dôchodku) a v celých rokoch sa formálne vyplácali ročné predlehotné dôchodkové dávky (s ohraničením 40 rokov, maximálnej doby vyplácania dávok). Z konštrukcie nášho modelového príkladu a z vlastností statickej metódy spárovania aktív a pasív vyplýva, že poisťovňa mala príjmy len v čase 0 vo výške  $P = 10000$  EUR, pretože všetky investičné príjmy v časoch 1, 2, 3, ..., 79 (uvedených v polrokoch) sa okamžite spotrebovali na vyplatenie očakávaného vyrovnanie, resp. očakávanej dôchodkovej dávky. Keby sme chceli túto investičnú stratégiu preložiť do reči statickej metódy spárovania aktív a pasív, tak by sme povedali, že sa vlastne hľadali investičné koeficienty  ${}_0c_1, {}_0c_2, \dots, {}_0c_{79}$ , ktoré sú pri daných výnosoch deterministicky určené, a výška posledného investičného koeficientu  ${}_0c_{80}$  rozhodla o výške akumulovanej hodnoty zisku poisťovne. Keďže formálnu ročnú predlehotnú dávku  $S_r$  sme počítali brutto-princípom, preto aj do metódy spárovania sme zahrnuli náklady poisťovne. Aplikovali sme rovnaké koeficienty, ako v podkapitole 5.4, teda začiatkové náklady  $\alpha = 5\%$  počítané z dôchodkovej dávky v prvom roku, bežné náklady  $\beta = 4\%$  počítané z každej dávky (počas celej doby poistenia), inkasné náklady  $\gamma = 1\%$  z prevedených úspor  $P = 10000$  EUR a maržu  $\varepsilon = 5\%$ , ktorú naša modelová životná poisťovňa aplikuje pri vyplácaní čiastky v prípade úmrtia poistenca v prvých siedmych rokoch poistenia.

<sup>18</sup>Ak platia vzťahy (3.23), (5.8), tak vtedy hovoríme, že dvanásťnásobok mesačnej dávky  $S_m$  je ekvivalentná s ročnou dávkou  $S_r$ . Pre našu modelovú poisťovňu to znamená rovnaké záväzky, keď mesačne polehotne má vyplácať dávku vo výške  $S_m$  alebo keď ročne predlehotne vypláca dávku  $S_r$ . Práve preto nazývame tieto dávky ekvivalentnými.



### 5.5.1 Stresové testy pre úrokové miery

Naše testy pre úrokové miery sme vykonali pri predpoklade, že ročná výška dávky sa počítala pri maximálnej technickej úrokovej miere  $i = 1,9\%$  p. a. (v súlade s opatrením [59]), výške úspor  $P = 10000$  EUR a koeficientoch brutto-princípu  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  z úvodu tejto podkapitoly. Ďalej sme využívali nasledujúcich 6 modelov úmrtnosti: základné pravdepodobnosti z *ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)*, model *LCA2015* a modely dlhovekosti *stredný variant, vysoký variant, veľmi vysoký variant* a model *LCA DL*. Formálne ročné výšky ročných dôchodkových dávok pri spomínaných demografických modeloch sú uvedené v hornej časti Tab. 14. Pri našich stresových testoch sme modelovali, aký vplyv majú premenlivé výnosy dlhopisov na zisk životnej poisťovne v prípade doživotného dôchodku s dávkou počítanou pri konštantnej technickej úrokovej miere  $i = 1,9\%$  p. a. Výsledky testov sú uvedené v Tab. 14. Súčasnú a akumulovanú hodnotu zisku našej modelovej poisťovne sme odhadovali pomocou spomínanej statickej metódy spárovania aktív a pasív pri odhadnutých trhových modeloch prezentovaných v podkapitole 5.3, pričom sme postupovali nasledovne:

- (a) keď prostriedky postačili na vyrovnanie očakávaných záväzkov v každom časovom bode  $0, 1, 2, \dots, 80$ , tak poisťovňa do polročných, 1-ročných, 1,5-ročných, 2-ročných, ... dlhopisov investovala presne toľko prostriedkov, ktoré aj s úrokmi presne vyrovnali očakávaný záväzok v danom časovom bode a **zvyšok sa uložilo do 40-ročných dlhopisov** (pretože tie majú najvyšší výnos pri každom modeli a cieľom poisťovne je maximalizácia akumulovanej hodnoty svojho zisku); odhad súčasnej hodnoty zisku sa potom počítala diskontovaním peňažných tokov pri trhových výnosoch daného modelu,
- (b) keď prostriedky nepostačili na vyrovnanie všetkých očakávaných záväzkov, tak poisťovňa investovala prostriedky do polročných, 1-ročných, 1,5-ročných, 2-ročných, ...,  $k$ -ročných dlhopisov, aby vyrovnala svoje očakávané záväzky voči dôchodcovi v časoch  $0, 1, 2, \dots, 2k$ ; na zvyšné očakávané záväzky splatné v časoch  $2k + 1, 2k + 2, \dots, 80$  si poisťovňa požičala pri rovnakých trhových úrokových mierach, pri ktorých by ona dokázala investovať; odhad súčasnej hodnoty straty poisťovne (zisk so záporným znamienkom je vlastne stratou) sa počítala diskontovaním peňažných tokov (požičaných prostriedkov) pri trhových výnosoch daného modelu.

Odhad akumulovanej hodnoty zisku (straty) poisťovne sme počítali v čase konečného zúčtovania, teda po skončení maximálnej doby vyplácania dôchodku (40 rokov po uzavretí zmluvy o vyplácaní doživotného dôchodku), pričom pri akumulácii sme opäť používali trhové výnosy z daného modelu. Ako sme už uviedli, investičná stratégia prezentovaná v bode (a) je optimálna v tom zmysle, že maximalizuje akumulovanú hodnotu zisku poisťovne (a zároveň dodržiava aj pravidlo solventnosti).

*Pozn.:* Uvedomovali sme si, že investičná stratégia prezentovaná v prípade (b), teda keď poisťovní nestacia inkasované prostriedky na vykrytie všetkých očakávaných dávok, nie je optimálna. Oveľa lepšie by bolo, keby naša modelová poisťovňa až v tom časovom bode si začala požičiavať, v ktorom práve vyčerpala prostriedky určené na vyrovnanie záväzkov pri doživotnom dôchodku. Namiesto toho poisťovňa si už rovno v čase 0 požičala prostriedky na vyrovnanie tých očakávaných záväzkov, ktoré predpokladane by nedokázala pokryť z inkasovaného poistného. V tomto prípade ju totiž zväzovali predpoklady statickej metódy spárovania aktív a pasív, podľa ktorých poisťovňa môže robiť investičné rozhodnutia len v čase podpisu poistnej zmluvy. Finálne zúčtovanie v prípade (b) sa spraví až v čase 40, tak isto, ako v bode (a). Ide o ďalší modelový predpoklad, aby prípady (a) a (b) boli medzi sebou porovnateľné. Aj kvôli uvedeným modelovým predpokladom sme používali pomenovanie **odhad súčasnej hodnoty zisku (straty) poisťovne**, resp. **odhad akumulovanej hodnoty zisku (straty) poisťovne** (viď Tab. 14).

Z Tab. 14 môžeme vidieť, že pri pesimistických modeloch vývoja trhových výnosov *VAS1*, *CIR3*, *NS2* a *SV2* by naša modelová poisťovňa utrpela stratu, a to bez ohľadu na to, ktorý demografický model aplikuje. Napríklad posledný výsledok v riadku *VAS1* by znamenal, že ak by poisťovňa počítala výšku dávky pri technickej miere 1,9% p. a. a pri Leeho-Carterovom modeli dlhovekosti, pričom skutočné trhové výnosy by sa riadili modelom *VAS1*, tak poisťovňa by utrpela stratu 314,16 EUR v súčasnej hodnote a stratu 638,47 EUR v akumulovanej hodnote (v čase konečného zúčtovania, po skončení doby vyplácania dôchodku).

Pri ostatných stresových modeloch výnosov by poisťovňa dosiahla zisk. Najlepšie pre ňu by bolo, keby trhové výnosy sa riadili podľa modelu *CIR2*. Všimnime si, že v tých riadkoch Tab. 14, v ktorých by poisťovňa dosiahla zisk, najvyššia súčasná hodnota zisku vystupuje vždy pri najpesimistickejšom demografickom modeli dlhovekosti

Tabuľka 14: Odhad súčasnej hodnoty zisku poisťovne a odhad akumulovanej hodnoty zisku poisťovne (uvedený v zátvorke) pri technickej úrokovej miere 1,9% p. a. a rôznych stresových modeloch úrokových mier a výnosových kriviek

	modely úmrtnosti					
	ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)	LCA2015	stredný variant postupný pr. (Infostat)	vysoký variant postupný pr. (Infostat)	veľmi vysoký var. postupný pr. (Infostat)	LCA DL postupný pr.
ročná výška dávky $S_t$ pri $i = 0,019$ p. a. a pri danom modeli úmrtnosti	584,84 €	578,91 €	562,31 €	554,42 €	546,64 €	553,09 €
odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri stresovom modeli VAS1	-371,55 € (-755,09 €)	-379,48 € (-771,22 €)	-340,02 € (-691,01 €)	-397,35 € (-807,52 €)	-368,90 € (-749,70 €)	-314,16 € (-638,47 €)
odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri stresovom modeli CIR1	1 238,85 € (5 371,46 €)	1 251,42 € (5 425,98 €)	1 319,04 € (5 719,16 €)	1 349,25 € (5 850,13 €)	1 380,10 € (5 983,89 €)	1 315,71 € (5 704,73 €)
odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri stresovom modeli CIR2	1 302,76 € (7 964,97 €)	1 319,96 € (8 070,12 €)	1 415,09 € (8 651,72 €)	1 457,31 € (8 909,88 €)	1 500,39 € (9 173,23 €)	1 410,14 € (8 621,45 €)
odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri stresovom modeli CIR3	-286,69 € (-562,53 €)	-292,33 € (-573,60 €)	-346,85 € (-680,58 €)	-319,78 € (-627,47 €)	-377,09 € (-739,92 €)	-319,51 € (-626,93 €)
odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri stresovom modeli CIR4	604,11 € (2 686,84 €)	616,57 € (2 742,26 €)	695,07 € (3 091,38 €)	729,68 € (3 245,31 €)	765,20 € (3 403,28 €)	684,58 € (3 044,73 €)
odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri stresovom modeli NS1	646,64 € (4 036,60 €)	660,57 € (4 123,59 €)	758,29 € (4 733,58 €)	801,20 € (5 001,44 €)	845,44 € (5 277,60 €)	738,40 € (4 609,39 €)
odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri stresovom modeli NS2	-338,52 € (-836,24 €)	-345,80 € (-854,24 €)	-389,17 € (-961,37 €)	-354,33 € (-875,31 €)	-326,05 € (-805,43 €)	-388,03 € (-958,54 €)
odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri stresovom modeli SV1	453,90 € (1 773,04 €)	464,41 € (1 814,10 €)	532,51 € (2 080,11 €)	562,53 € (2 197,36 €)	593,38 € (2 317,88 €)	522,12 € (2 039,54 €)
odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri stresovom modeli SV2	-349,74 € (-796,79 €)	-357,24 € (-813,86 €)	-404,35 € (-921,19 €)	-369,69 € (-842,22 €)	-341,59 € (-778,22 €)	-400,38 € (-912,16 €)

(Zdroj: vlastné spracovanie)

(veľmi vysoký variant). Tento efekt je spôsobený tým, že pri veľmi vysokom variante dlhovekosti pravdepodobnosti úmrtia v prvých siedmych rokoch sú najnižšie (v porovnaní s ostatnými demografickými modelmi), teda pri tomto modeli by sa vyplatili najnižšie očakávané vyrovnania v prípade úmrtia poistenca v prvých siedmych rokoch vyplácania dôchodku. Kvôli týmto nízkym očakávaným výdavkom by viac prostriedkov zostalo na vyplácanie dôchodkových dávok, a tým aj viac prostriedkov by sa mohlo investovať do dlhopisov s dlhými dobami splatnosti (pri každom našom odhadnutom

modeli výnosov dlhopisov platí zásada: čím dlhšia maturita, tým vyšší ročný výnos). Poznamenáme, že v rámci našich výpočtov sme zanedbali §42a zákona [85] o rozdelení prebytku z výnosov medzi poistenými (prebytky by sa mali rozdeľovať kolektívne a poistení by mali dostať najmenej 90% z prebytku z výnosov). Súčasnú hodnotu zisku sme totiž v našom modelovom príklade počítali inou metodikou, akú predpisuje zákon [85] pri určovaní prebytku z výnosov z investovania. Aj kvôli tomu modelové výsledky našich stresových testov považujeme len za ilustratívne.

*Pozn.:* Odhady súčasnej hodnoty zisku (straty) sme vyčíslili v absolútnych hodnotách (v eurách), no tie by sa ľahko dali previesť aj na relatívne zisky (straty) počítané na jednotku inkasovaného poistného (keďže poistné sa rovná presne 10000 EUR).<sup>19</sup>

### 5.5.2 Stresové testy pre vývoj úmrtnosti

Stresové testovanie nášho modelového poistného produktu – doživotného dôchodku vyplácaného z úspor v druhom pilieri – sme pokračovali analýzou vplyvu modelov úmrtnosti na odhad súčasnej a akumulovanej hodnoty zisku poisťovne, pričom sme využívali predpoklady a postupy z úvodu tejto podkapitoly, resp. z časti 5.5.1. Na úvod stresového testovania úmrtnosti sme predpokladali, že naša modelová životná poisťovňa nastavila výšku dôchodkovej dávky pri nasledujúcich modeloch:

- {1} základných *ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)*,
- {2} *strednom variante dlhovekosti* (s postupným prechodom pravdepodobností) podľa prognóz Infostatu,
- {3} Leeho-Carterovom modeli pre rok 2015 (*LCA2015*),
- {4} Leeho-Carterovom modeli dlhovekosti (*LCA DL*),

a pri rôznych hodnotách ročnej technickej úrokovej miery vo výške 0%, 0,5%, 1,2%, 1,9%. Následne sme testovali, akú hodnotu by nadobudla súčasná hodnota, resp. akumulovaná hodnota zisku poisťovne pri rôznych stresových scenároch vývoja úmrtnosti. Pri {1} sme používali tri najpesimistickejšie varianty dlhovekosti podľa prognóz Infostatu (viď podkapitolu 5.2.1) a stresové testy odporúčané organizáciou EIOPA [87] s 10, resp. 18-percentným okamžitým poklesom ročných pravdepodobností úmrtia (ozn. *EIOPA10*, resp. *EIOPA18*). V prípade {2} sme aplikovali *veľmi vysoký variant* dlhovekosti a stresové testy *EIOPA10*, *EIOPA18*. V bode {3} model *LCA2015* sme zaťažili

<sup>19</sup>Keďže poistné sa platilo jednorazovo, súčasná hodnota zisku na jednotku poistného by sa mohla interpretovať ako zisková marža poistného produktu.

modelmi *LCA DL*, *LCA DL DH* a testami *EIOPA10* a *EIOPA18*. Pri poslednom modeli {4} sme používali stresové scenáre *LCA DL DH*, *EIOPA10* a *EIOPA18*. V každom prípade, keď sme aplikovali stresové testy *EIOPA10* a *EIOPA18*, nové, znížené ročné pravdepodobnosti úmrtia sme počítali vždy z tých pravdepodobností úmrtia, ktoré sa používali na výpočet dôchodkovej dávky v danom prípade {1}, {2}, {3}, {4}. Výsledky výpočtov – odhady súčasnej, resp. akumulovanej hodnoty zisku poisťovne – sme zhrnuli v Tab. 15. Odhady sme aj v tomto prípade kalkulovali pomocou statickej metódy spárovania aktív a pasív pri polročnej časovej jednotke.

Z Tab. 15 vidíme, že poisťovňa by v každom prípade utrpela stratu. Táto skutočnosť vyplýva z konštrukcie našich stresových modelov, pretože každý z nich obsahuje pesimistickejšie pravdepodobnosti úmrtia ako originálny model, pri ktorom sa počítala formálna ročná dôchodková dávka.<sup>20</sup> Pri stresových modeloch by poisťovňa síce ušetrila na platbách v prípade úmrtia poistenca v prvých siedmych rokoch, no dôchodkové dávky by musela vyplácať v dlhšej očakávanej dobe, a ten druhý efekt sa prejavil ako silnejší pri každom stresovom teste (stredné dĺžky života 62-ročného dôchodcu, teda aj očakávané doby vyplácania dôchodkov v prípade jednotlivých demografických modelov sú uvedené v Tab. 10, resp. Tab. 12).

Číselné hodnoty uvedené v Tab. 15 majú opäť len ilustračný charakter, slúžia predovšetkým na porozumenie súvislostí a porovnávanie demografických modelov medzi sebou. Môžeme si napríklad všimnúť, že čím vyššia technická úroková miera sa používa, tým vyššia je akumulovaná hodnota straty. Pre úplnosť by sme dodali, že pri počítaní odhadu súčasnej, resp. akumulovanej hodnoty zisku poisťovne sme peňažné toky diskontovali, resp. akumulovali pri danej technickej úrokovej miery (pri ktorej sa kalkulovala dôchodková dávka). Ďalej môžeme spozorovať aj to, že najmenej prísny stresovým scenárom je *EIOPA10*, kým model *LCA DL DH* (dolná hranica predikovaných pravdepodobností pri Leeho-Carterovom modeli dlhovekosti) je extrémne pesimistický. V neposlednom rade by sme uviedli, že keby poisťovňa pri výpočte dôchodkovej dávky aplikovala Leeho-Carterov model dlhovekosti (bod {3}), tak tento model by bol najodolnejší voči stresovým testom organizácie EIOPA.

---

<sup>20</sup>To, že pravdepodobnosti sú pesimistickejšie, opäť berieme z hľadiska modelovej životnej poisťovne a v tom zmysle, že pri stresových modeloch poistenci by sa dožili vyššieho očakávaného veku ako pri základných modeloch.

Tabuľka 15: Odhad súčasnej hodnoty zisku poisťovne a odhad akumulovanej hodnoty zisku poisťovne (uvedený v zátvorke) pri rôznych stresových modeloch úmrtnosti a rôznych hodnotách technickej úrokovej miery

základný demografický model používaný pri výpočte dôchodkovej dávky	stresový model dlhovekosti	odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri danom stresovom modeli dlhovekosti a pri danej ročnej výške technickej úrokovej miere			
		0,0%	0,5%	1,2%	1,9%
{1} <i>ÚT SÚSR 2013 (spolu)</i>	stredný variant s postupným prechodom (Infostat)	-493,98 € (-493,98 €)	-447,46 € (-546,25 €)	-389,02 € (-626,89 €)	-337,67 € (-716,91 €)
	vysoký variant s postupným prechodom (Infostat)	-590,62 € (-590,62 €)	-659,53 € (-805,15 €)	-575,55 € (-927,48 €)	-501,50 € (-1 064,72 €)
	veľmi vysoký variant s postupným prechodom (Infostat)	-844,40 € (-844,40 €)	-765,87 € (-934,97 €)	-667,13 € (-1 075,05 €)	-580,26 € (-1 231,93 €)
	EIOPA 10% (okamžitý šok na pr. z ÚT SÚSR 2013 (spolu))	-375,87 € (-375,87 €)	-341,25 € (-416,60 €)	-297,61 € (-479,58 €)	-259,10 € (-550,10 €)
	EIOPA 18% (okamžitý šok na pr. z ÚT SÚSR 2013 (spolu))	-602,58 € (-602,58 €)	-687,79 € (-839,65 €)	-605,64 € (-975,97 €)	-532,41 € (-1 130,36 €)
{2} <i>stredný variant s postupným prechodom pravdepodobností (Infostat)</i>	veľmi vysoký variant s postupným prechodom (Infostat)	-337,47 € (-337,47 €)	-302,54 € (-369,34 €)	-259,16 € (-417,63 €)	-221,57 € (-470,42 €)
	EIOPA 10% (okamžitý šok na pr. zo stredného variantu)	-368,05 € (-368,05 €)	-331,70 € (-404,93 €)	-286,22 € (-461,24 €)	-319,44 € (-678,21 €)
	EIOPA 18% (okamžitý šok na pr. zo stredného variantu)	-714,22 € (-714,22 €)	-648,02 € (-791,21 €)	-564,69 € (-909,97 €)	-604,75 € (-1 283,94 €)
{3} <i>LCA2015</i>	LCA DL	-443,68 € (-443,68 €)	-405,87 € (-495,48 €)	-480,80 € (-774,78 €)	-425,18 € (-902,70 €)
	LCA DL DH	-1 422,95 € (-1 422,95 €)	-1 577,76 € (-1 926,12 €)	-1 414,90 € (-2 280,06 €)	-1 266,66 € (-2 689,24 €)
	EIOPA 10% (okamžitý šok na pravdepod. z LCA2015)	-379,86 € (-379,86 €)	-345,09 € (-421,28 €)	-301,21 € (-485,39 €)	-262,45 € (-557,21 €)
	EIOPA 18% (okamžitý šok na pravdepod. z LCA2015)	-608,36 € (-608,36 €)	-554,28 € (-676,66 €)	-613,29 € (-988,29 €)	-539,57 € (-1 145,55 €)
{4} <i>LCA DL</i>	LCA DL DH	-870,94 € (-870,94 €)	-1 003,71 € (-1 225,33 €)	-893,58 € (-1 439,97 €)	-794,05 € (-1 685,83 €)
	EIOPA 10% (okamžitý šok na pravdepod. z LCA DL)	-272,32 € (-272,32 €)	-247,55 € (-302,20 €)	-216,22 € (-348,43 €)	-268,98 € (-571,06 €)
	EIOPA 18% (okamžitý šok na pravdepod. z LCA DL)	-620,08 € (-620,08 €)	-567,60 € (-692,93 €)	-500,62 € (-806,73 €)	-440,68 € (-935,61 €)

(Zdroj: vlastné spracovanie)

V ďalšej fáze stresového testovania demografických predpokladov sme zvolili trochu iný postup. Predpokladali sme, že poisťovňa pri výpočte dôchodkovej dávky používala *stredný variant* dlhovekosti (s postupným prechodom pravdepodobností), no stresové pravdepodobnosti pri *EIOPA10*, resp. *EIOPA18* počítala z originálnych pravdepodobností z *ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)*. Týmto sme chceli zistiť odolnosť nášho modelu dlhovekosti voči odporúčaným stresovým scenárom organizácie EIOPA. Analogický postup sme zopakovali aj pre dvojicu *LCA DL–LCA2015* a výsledky sme prezentovali v Tab. 16.

Tabuľka 16: Odhad súčasnej hodnoty zisku poisťovne a odhad akumulovanej hodnoty zisku poisťovne (uvedený v zátvorke) pri rôznych stresových modeloch úmrtnosti a rôznych hodnotách technickej úrokovej miery

základný demografický model používaný pri výpočte dôchodkovej dávky	stresový model dlhovekosti	odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri danom stresovom modeli dlhovekosti a pri danej ročnej výške technickej úrokovej miere			
		0,0%	0,5%	1,2%	1,9%
{1} <i>stredný variant</i> <i>s postupným prechodom pravdepodobností (Infostat)</i>	EIOPA 10% (okamžitý šok na pr. z ÚT ŠÚSR 2013 (spolu))	120,70 € (120,70 €)	106,50 € (130,01 €)	88,60 € (142,77 €)	72,84 € (154,64 €)
	EIOPA 18% (okamžitý šok na pr. z ÚT ŠÚSR 2013 (spolu))	-183,75 € (-183,75 €)	-165,32 € (-201,82 €)	-198,04 € (-319,13 €)	-171,08 € (-363,22 €)
{2} <i>LCA DL</i>	EIOPA 10% (okamžitý šok na pravdepod. z LCA2015)	155,24 € (155,24 €)	152,10 € (185,68 €)	147,06 € (236,99 €)	141,45 € (300,31 €)
	EIOPA 18% (okamžitý šok na pravdepod. z LCA2015)	-127,16 € (-127,16 €)	-113,81 € (-138,93 €)	-97,29 € (-156,77 €)	-120,85 € (-256,56 €)

(Zdroj: vlastné spracovanie)

Môžeme skonštatovať, že aj *stredný variant* dlhovekosti, aj Leeho-Carterov model dlhovekosti by úspešne prešli cez stresový test organizácie EIOPA s 10%-ným poklesom pravdepodobností (pričom šokové pravdepodobnosti sa počítali z *ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)*, resp. z *LCA2015*). To znamená, že keby poisťovňa pri počítaní dôchodkovej dávky brala do úvahy aj možnú dlhovekosť dôchodcov, aj napriek okamžitým 10%-ným poklesom pravdepodobností úmrtia by skončila v zisku. Ďalej si môžeme všimnúť, že pri prísnejšom stresovom scenári *EIOPA18* by už poisťovňa utrpela stratu. Týmto sme chceli ilustrovať, do akej miery môžu chrániť poisťovňu starostlivo nastavené modely dlhovekosti.

### 5.5.3 Kombinované stresové testy

V rámci našich ďalších analýz sme spojili vyššie prezentované stresové testy pre vývoj trhových úrokových mier a úmrtnosti poistencov a skúmali sme, aký spoločný efekt majú na zisk modelovej životnej poisťovne. Aplikovali sme pritom podobné predpoklady, aké sme používali aj v predchádzajúcich častiach a statickú metódu spárovania aktív a pasív (s polročnou časovou jednotkou). Formálnu ročnú predlehotnú dávku

Tabuľka 17: Odhad súčasnej hodnoty zisku poisťovne a odhad akumulovanej hodnoty zisku poisťovne (uvedený v zátvorke) pri rôznych stresových modeloch úmrtnosti a rôznych trhových modeloch úrokových mier

	základné modely úmrtnosti používané pri výpočte ročnej dávky $S_r$ (ročná dávka sa počítala pri technickej úrokovej miere $i = 0,019$ p. a.)					
	ÚT ŠÚSR 2013 (spolu)			LCA2015		
stresové modely úmrtnosti	vysoký variant postupný pr. (Infostat)	EIOPA 10% (okamžitý šok na pr. z ÚT ŠÚSR 2013 (spolu))	EIOPA 18% (okamžitý šok na pr. z ÚT ŠÚSR 2013 (spolu))	LCA DL	EIOPA 10% (okamžitý šok na pr. z LCA2015)	EIOPA 18% (okamžitý šok na pr. z LCA2015)
odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri stresovom modeli VAS1	-946,08 € (-1 922,70 €)	-733,30 € (-1 490,26 €)	-1 034,04 € (-2 101,44 €)	-749,76 € (-1 523,72 €)	-601,55 € (-1 222,52 €)	-870,63 € (-1 769,35 €)
odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri stresovom modeli CIR1	880,19 € (3 816,37 €)	1 010,48 € (4 381,27 €)	810,35 € (3 513,56 €)	915,21 € (3 968,20 €)	1 028,45 € (4 459,21 €)	833,24 € (3 612,80 €)
odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri stresovom modeli CIR3	-803,68 € (-1 576,96 €)	-600,29 € (-1 177,87 €)	-870,63 € (-1 708,32 €)	-760,15 € (-1 491,55 €)	-611,05 € (-1 198,98 €)	-883,73 € (-1 734,03 €)
odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri stresovom modeli NS1	302,08 € (1 885,69 €)	413,01 € (2 578,21 €)	210,05 € (1 311,24 €)	310,94 € (1 941,04 €)	432,87 € (2 702,19 €)	235,25 € (1 468,51 €)
odhad súčasnej hodnoty (akumulovanej hodnoty) zisku pri stresovom modeli NS2	-866,51 € (-2 140,52 €)	-675,52 € (-1 668,73 €)	-956,81 € (-2 363,61 €)	-866,23 € (-2 139,84 €)	-688,10 € (-1 699,81 €)	-971,58 € (-2 400,09 €)

(Zdroj: vlastné spracovanie)

sme opäť počítali pomocou vzťahu (5.8) pri technickej úrokovej miere 1,9% p. a. a základných demografických modeloch ÚT ŠÚSR 2013 (spolu), resp. LCA DL. Uvedené demografické modely sme stresovali stredným variantom s postupným prechodom, resp. Leeho-Carterovým modelom dlhovekosti a scenármi EIOPA10, EIOPA18. Potom pre každú dvojicu modelov úmrtnosti sme odhadli súčasnú a akumulovanú hodnotu zisku poisťovne pri vybraných trhových modeloch výnosov (VAS1, CIR1, CIR3,



*NS1*, *NS2*).<sup>21</sup> Výsledky týchto testov sú prezentované v Tab. 17. Vo výsledkoch kombinovaných stresových testov sa silnejšie prejavil efekt úrokových mier. Napríklad pri optimistických modeloch vývoja trhových výnosov *CIR1* a *NS1* by poisťovňa skončila v zisku, a to aj napriek aplikovaniu vybraných scenárov dlhovekosti. Zisk poisťovne by bola v tomto prípade samozrejme nižšia ako pri čistom stresovom teste pre úrokové miery, bez uvažovania efektu dlhovekosti (viď rozdiely medzi výsledkami v Tab. 14 a Tab. 17). Pri ostatných trhových modeloch by poisťovňa utrpela stratu, pričom veľkosť straty by závisela od špecifik modelu výnosov a prísnosti scenára dlhovekosti.

## 5.6 Stresové testy doživotných dôchodkov pomocou dynamickej metódy spárovania aktív a pasív

Ako sme to už spomínali v podkapitole 5.5, pri našich výpočtoch a stresových testoch sme používal niekoľko modelových predpokladov, ktoré nám zjednodušili dané výpočty. Jeden z týchto umelých predpokladov sme stanovili o existencii celého súboru štandardných bezkupónových dlhopisov s polročnou, 1-ročnou, 1,5-ročnou, atď. až 40-ročnou splatnosťou. Aplikácia dynamickej metódy spárovania aktív a pasív, ktorá je prezentovaná v tejto časti, ponúka riešenie, ako sa zaobísť bez spomínaného predpokladu, resp. ako ho trochu priblížiť k realite. V dynamickej metóde spárovania (definovanej vo štvrtej kapitole tejto práce) je totiž prípustné spárovanie aktív a pasív vo všetkých časových bodoch (pri danej časovej jednotke). To znamená, že pri tejto metóde životná poisťovňa môže spraviť investičné rozhodnutia v každom časovom bode (pri danom delení časových bodov, v našom prípade v každom polroku), napr. reinvestovať čiastočné zisky z prebytkov investícií. Opäť by sme podotkli, že ani v tomto prípade sme neuvažovali zákonné rozdelenie prebytku z výnosov medzi poistenými.

V našich ďalších modelových výpočtoch sme predpokladali, že na trhu existujú len štandardné dlhopisy so 6-mesačnou, 1-ročnou, 2-ročnou, 5-ročnou, 10-ročnou, 15-ročnou, resp. 30-ročnou dobou splatnosti. Pri tomto predpoklade by bola statická metóda spárovania aktív a pasív neúčinná, pretože poisťovňa by nedokázala v čase podpisu poistnej zmluvy “jedným ťahom” pokryť všetky svoje očakávané budúce záväzky spojené s vyplácaním doživotného dôchodku s podmienkou vrátenia časti po-

---

<sup>21</sup>Poznamenali by sme, že ani v tomto prípade sme nebrali do úvahy §42a zákona [85] o rozdelení prebytku z výnosov medzi poistenými.

istného v prvých siedmych rokoch vyplácania dôchodku. V tomto prípade naša modelová poisťovňa môže investovať len do daných dlhopisov a väčšinu očakávaných dávok a poistných plnení môže vyrovnať len vo viacerých krokoch, viacerými vhodnými investíciami. Ako by mala rozložiť svoje investície v čase a z hľadiska hodnoty investovaných prostriedkov, aby maximalizovala akumulovanú hodnotu svojho zisku, a zároveň dodržiavala aj pravidlo solventnosti? Práve dynamická metóda spárovania aktív a pasív nám môže dať odpoveď na túto otázku.

Uvažujme opäť modelové nastavenia zmluvy o vyplácaní doživotného dôchodku uvedené v podkapitolách 5.4 a 5.5, nech teda  $P = 10000$  EUR,  $\alpha = 5\%$ ,  $\beta = 4\%$ ,  $\gamma = 1\%$ ,  $\varepsilon = 5\%$ , ďalej uvažujme polročnú časovú jednotku,  $n = 80$  polrokov (maximálnu dobu vyplácania) a formálne ročné predlehotné vyplácanie dôchodkových dávok. Základnú dávku  $S_r$  sme opäť počítali brutto-princípom, pri technickej úrokovej miere 1,9% p. a. a demografickom modeli *LCA DL* (teda rovno pri výpočte dávky sme brali do úvahy možnú dlhovekosť dôchodcov). Len pre ilustráciu by sme uviedli, že ročná dávka mala v tomto prípade výšku  $S_r = 553,09$  EUR, kým výšky poistných plnení  $\bar{D}_1$  až  $\bar{D}_7$  vyplácané v prípade úmrtia dôchodcu by boli v prvom až siedmom roku postupne 3280,43; 2818,85; 2343,02; 1852,03; 1344,69; 819,93; 276,54 (uvedené v EUR). Definovali sme vektory pravdepodobností a peňažných tokov, ktoré vstupujú do metódy spárovania aktív a pasív (špeciálne sme ich prispôbili pre náš doživotný dôchodok so 7-ročnou ochranou pre prípad úmrtia a pre polročnú časovú jednotku)

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^P &= (1, 0, 0, \dots, 0)^\top, \\
\mathbf{CF}^P &= ((1 - \gamma)P, 0, 0, \dots, 0)^\top, \\
\mathbf{p}^S &= ({}_0p_{62}, {}_0p_{62} q_{62}, {}_1p_{62}, {}_1p_{62} q_{63}, \dots, {}_6p_{62}, {}_6p_{62} q_{68}, {}_7p_{62}, 0, {}_8p_{62}, 0, \\
&\quad \dots, {}_{38}p_{62}, 0, {}_{39}p_{62}, 0, 0, 0)^\top, \\
\mathbf{CF}^S &= (\alpha S + (1 + \beta)S, (1 - \varepsilon)\bar{D}_1, (1 + \beta)S, (1 - \varepsilon)\bar{D}_2, \dots, (1 + \beta)S, (1 - \varepsilon)\bar{D}_7, \\
&\quad (1 + \beta)S, 0, \dots, (1 + \beta)S, 0, (1 + \beta)S, 0, 0, 0)^\top,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

pričom dĺžka každého vektora je 82 a  $S \triangleq S_r$  je formálna ročná výška dôchodkovej dávky. Pred aplikáciou samotnej dynamickej metódy spárovania sme skonštruovali tri modelové scenáre budúceho vývoja trhových výnosov štandardných dlhopisov:

(SC1) jednoduchý scenár založený na *CIR1* modeli, pri ktorom sme predpokladali,

že výnosy sa riadia počas celej skúmanej 40-ročnej doby (v každom čase) podľa *CIR1* výnosovej krivky,

(SC2) scenár so striedavými odhadnutými CIR modelmi, v rámci ktorého jednotlivé modely sa menia v 5-ročných cykloch v poradí *CIR1, CIR4, CIR2, CIR3, CIR4, CIR1, CIR2, CIR1*,

(SC3) scenár založený na náhodne vybraných NS výnosových krivkách.<sup>22</sup>

Aj na tomto mieste by sme chceli zdôrazniť, že vytvorené varianty (SC1), (SC2), (SC3) nepovažujeme za predpovede budúceho vývoja trhových výnosov. Sú to len modelové scenáre, ktoré nám pomôžu odhaliť časť rizík vyskytujúcich pri vyplácaní doživotných dôchodkov a ilustrovať účinnosť a detaily fungovania dynamickej metódy spárovania aktív a pasív.

Pri jednotlivých scenároch sme naplnili maticu investičných výnosov  $\tilde{\mathcal{J}} = \left\{ \tilde{\mathcal{J}} \right\}_{t,k}$ , resp. maticu výnosových faktorov  $\tilde{\mathcal{I}} = \left\{ \tilde{\mathcal{I}} \right\}_{t,k}$  pre  $t = 0, 1, 2, \dots, 80$  a  $k = 1, 2, 4, 10, 20, 30, 60$ . Následne sme hľadali optimálne hodnoty investičných koeficientov  ${}_t c_k$  pre  $t = 0, 1, 2, \dots, 80$ ,  $k = 1, 2, 4, 10, 20, 30, 60$  také, že  $t + k \leq 80$  a  ${}_t c_1$  pre  $t = 0, 1, 2, \dots, 13$ . (Z nastavení modelového dôchodku je známe, že vyplácanie plnení pri úmrtí poistenca skončí po siedmych rokoch, a preto v ďalších časoch sme už polročné investície ďalej neuvažovali). Ostatné koeficienty  ${}_t c_k$  sme položili rovné nule.<sup>23</sup> Spolu sme mali 373 potenciálne nenulových investičných koeficientov, pre ktoré sme riešili maximalizačnú úlohu (špeciálny prípad dynamickej metódy spárovania aktív a pasív)

$$\max_{\substack{{}_t c_k \\ t \in \{0, 1, 2, \dots, 80\} \\ k \in \{1, 2, 4, 10, 20, 30, 60\}; t+k \leq 80}} AV_{80} \quad (5.11)$$

<sup>22</sup>Uvažovali sme dátové obdobie od 03.01.2011 do 31.12.2014 pre súbory EURIBOR 1M-12M, VSVS 5Y, VSVD 10Y a nakalibrovali sme 118 vybraných NS výnosových kriviek. Z nich sme potom v náhodnom poradí postupne vybrali 80 výnosových kriviek, pomocou ktorých sme popísali trhové výnosy platné v časoch  $1, 2, \dots, 80$ . Pre začiatkový časový bod 0 sme zvolili základný model *NS2*.

<sup>23</sup>Napr.  ${}_2 c_8 = 0$ , pretože v čase 2 naša modelová poisťovňa nemôže investovať do 4-ročného dlhopisu (do dlhopisu s 8-polročnou dobou splatnosti), keďže taký cenný papier vôbec neexistuje; alebo  ${}_{54} c_{60} = 0$ , pretože v čase 54 sa už neoplatí investovať do 30-ročného dlhopisu, keďže doba vyplácania dôchodkových dávok končí už o 13 rokov (o  $80 - 54 = 26$  polrokov).

pri podmienkach

$$\begin{aligned}
AV_t &\geq 0, \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, 79\}, \\
{}_t c_1 + {}_t c_2 + {}_t c_4 + {}_t c_{10} + {}_t c_{20} + {}_t c_{30} + {}_t c_{60} &= 1, \quad \forall t \in \{0, 1, 2, \dots, 80\}, \\
{}_t c_k &\in \langle 0, 1 \rangle, \quad \forall t \in \{0, 1, 2, \dots, 80\}, \quad \forall k \in \{1, 2, 4, 10, 20, 30, 60\}, \\
{}_t c_h &= 0, \quad \forall t \in \{0, 1, 2, \dots, 80\}, \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, 80\} \setminus \{1, 2, 4, 10, 20, 30, 60\}, \\
{}_t c_1 &= 0, \quad \forall t \in \{14, 15, 16, \dots, 80\}, \\
{}_{77} c_2 &= 1, \quad {}_{78} c_2 = 1,
\end{aligned}$$

pričom čistú akumulovanú hodnotu v čase  $t$  sme definovali vzťahom

$$AV_t = p_{t+1}^P \times CF_{t+1}^P - p_{t+1}^S \times CF_{t+1}^S + \sum_{h=0}^{t-1} AV_h \times {}_h c_{t-h} \times \tilde{I}_{h+1, t-h}, \quad (5.12)$$

kde  $p_{t+1}^P, p_{t+1}^S, CF_{t+1}^P, CF_{t+1}^S$  sú zložky príslušných vektorov  $\mathbf{p}^P, \mathbf{p}^S, \mathbf{CF}^P, \mathbf{CF}^S$  definovaných vzťahmi (5.10).<sup>24</sup> Maximalizačnú úlohu (5.11) sme riešili numericky v prostredí štatistického softvéru  $\mathcal{R}$  pomocou vlastných algoritmov a zabudovanej funkcie `optim()`. Aplikovali sme optimalizačnú metódu L-BFGS-B, ktorá je kvázi-Newtonovou iteračnou metódou s dolným a horným ohraničením pre dané premenné. Táto metóda bola pre naše účely ideálna, pretože parametre  ${}_t c_k$  sme potrebovali hľadať len v intervale  $\langle 0; 1 \rangle$ . Nákladovú funkciu vstupujúcu do numerického optimalizačného algoritmu sme definovali pomocou rozdielu cieľovej funkcie  $AV_{80}$  a penalizačnej funkcie  $Z_\nu$ , ktorá obsahovala hraničné podmienky typu  $AV_t \geq 0$  pre všetky  $t \in \{0, 1, \dots, 79\}$  (ďalšie podrobnosti sú uvedené v podkapitole 4.1.2). Technicky najnáročnejšou časťou hľadania optimálneho rozloženia investícií bolo rešpektovanie práve týchto nerovností – pravidiel solventnosti. Priame preskúšanie všetkých možných kombinácií investičných parametrov a následný výber najlepšej kombinácie, ktorá maximalizuje zisku poisťovne, by bolo v týchto rozmeroch prakticky nemožné. Práve preto sme uprednostnili spomínanú iteračnú metódu. Ako pravidlo zastavenia iteračného algoritmu sme používali preddefinovanú toleranciu metódy L-BFGS-B vo funkcii `optim()` (detaily sú uvedené v [94]). Samotný programový kód pre odhad investičných koeficientov a akumulovanej hodnoty zisku pri scenári (SC2) je uvedený v Prílohe F.

<sup>24</sup>Maximalizačná úloha (5.11) je z technického hľadiska mierne nepresne formulovaná (napr. koeficient  ${}_{23} c_1$  by nemal vystupovať v argumente maximalizačnej úlohy). Presné zadanie úlohy sme upresnili slovne, vid' vyššie, nad matematickou formuláciou úlohy.

Výsledkom numerickej optimalizácie boli odhadnuté (optimálne) investičné koeficienty  ${}_t\hat{c}_k$ , pri ktorých by poisťovňa maximalizovala akumulovanú hodnotu svojho zisku (pri danej matici výnosových faktorov zo scenáru (SC1), (SC2), resp. (SC3)), a zároveň optimálne pokryla všetky svoje budúce záväzky. Keďže išlo o numerickejšiu maximalizačnú metódu, pri výslednej investičnej stratégii danej odhadnutými investičnými koeficientmi  ${}_t\hat{c}_k$  sme zaznamenali mierne porušenie hraničných podmienok  $AV_t \geq 0$  pre niektoré  $t \in \{1, \dots, 79\}$ , teda nedodržanie pravidla solventnosti v niektorých časových bodoch. Len pre ilustráciu by sme uviedli, že pri (SC1) najvýraznejšie porušenie malo výšku  $-1,37$  EUR, pri (SC2) bola minimálna hodnota  $AV_t$  na úrovni  $-2,81$  EUR, kým v prípade (SC3) to bolo  $-1,24$  EUR. Aj z toho vidíme, že pri čistom poistnom  $P = 10000$  EUR tieto chyby môžeme považovať za zanedbateľné. Na záver pomocou odhadnutých koeficientov  ${}_t\hat{c}_k$  sme vypočítali odhad akumulovanej hodnoty zisku poisťovne, výsledky sú uvedené v Tab. 18.

Tabuľka 18: Odhad akumulovanej hodnoty zisku poisťovne pomocou dynamickej metódy spárovania aktív a pasív pri rôznych scenároch vývoja trhových výnosov štandardných dlhopisov

scenáre vývoja trhových výnosov štandardných dlhopisov	odhad akumulovanej hodnoty zisku poisťovne pomocou dynamickej metódy spárovania aktív a pasív (ročná dávka sa počítala pri technickej úrokovej miere $i = 0,019$ p. a. a demografickom modeli LCA DL)
(SC1)	1 925,31 €
(SC2)	1 493,84 €
(SC3)	59,35 €

(Zdroj: vlastné spracovanie)

Z definície (SC1) poznáme, že pri tomto scenári výnosy dlhopisov sa riadia v každom čase výlučne len podľa modelu *CIR1*. V porovnaní s testami uvedenými v podkapitole 5.5 však máme taký rozdiel, že pri (SC1) sme zúžili počet existujúcich štandardných dlhopisov na 7, kým pri statických testoch sme používali celú sadu dlhopisov s polročnou až 40-ročnou dobou splatnosti. Odhad akumulovanej hodnoty zisku poisťovne uvedený v prvom riadku Tab. 18 (1925,30 EUR) je výrazne nižší, ako odhad akumulovanej hodnoty prezentovaný v Tab. 14 pri kombinácii *CIR1* + *LCA DL* (5704,73 EUR), čo je priamym dôsledkom neexistencie plného súboru dostupných štandardných

dlhopisov. Pri (SC1) totiž poisťovňa nemôže investovať napr. do najvýhodnejších 40-ročných dlhopisov, alebo napr. očakávanú dôchodkovú dávku v čase 26 musí pokryť minimálne tromi dlhopismi (napr. s 10-, 2- a 1-ročnou splatnosťou), čo prináša pri týchto nastaveniach menší výnos, ako priama investícia do 13-ročného dlhopisu (povolená pri statickej metóde spárovania aktív a pasív). Z Tab. 18 vidíme aj to, že pri ďalších dvoch prezentovaných scenároch vývoja trhových výnosov by poisťovňa skončila v zisku, avšak tieto odhady kvôli odlišnosti modelov už nedokážeme porovnať so žiadnymi výsledkami z Tab. 14. Skutočnosť, že naša modelová poisťovňa by skončila v zisku pri všetkých troch scenároch (SC1), (SC2), (SC3), vyplýva z pomerne optimistického nastavenia modelových scenárov v porovnaní s 1,9%-nou hladinou technickej úrokovej miery, pri ktorej sa počítala výška formálnej ročnej dôchodkovej dávky.

Pomocou dynamickej metódy spárovania aktív a pasív sme chceli poukázať na ďalší možný faktor, ktorý môže ovplyvniť ziskovosť modelovej životnej poisťovne pri vyplácaní doživotných dôchodkov z úspor v druhom pilieri. Stresové testy trhových výnosov prezentované v tejto podkapitole považujeme za realistickejšie ako analýzy uvedené v časti 5.5, pričom ešte aj tie sú ďaleko od reálnych investičných stratégií a stresových testov skutočných životných poisťovní. Naším ďalším cieľom bolo ukázať použiteľnosť dynamickej metódy v reálnej aplikácii a zvýrazniť jeho výhody v porovnaní so statickou metódou spárovania aktív a pasív. Pre krátkosť priestoru sme prezentovali len tri vybrané stresové scenáre výnosov dlhopis, pričom efekt dlhovekosti sme v tomto prípade vôbec netestovali. Aplikácia dynamickej verzie spárovania aktív a pasív totiž v oveľa väčšej miere vplýva na efekt výnosov ako na demografické predpoklady, teda v konečnom dôsledku pri ďalších kombinovaných stresových testoch by sme dosiahli podobné výsledky, aké sme dostali v časti 5.5.3 (viď Tab. 17).

## Záver

V rámci tejto dizertačnej práce sme publikovali výsledky získané počas nášho výskumného procesu. Zaoberali sme sa modelovaním úrokových mier a demografického vývoja špeciálnej skupiny obyvateľstva s aplikáciou v životnom poistení. V prvej kapitole práce sme prezentovali teoretické základy finančnej matematiky, potom sme zhrnuli štyri základné smery finančného modelovania. Druhú kapitolu sme venovali modelom úrokových mier a výnosových kriviek a detailne sme skúmali Vašíčkov, resp. CIR model. V ďalšej časti kapitoly sme definovali priame modely výnosových kriviek, Nelsonov-Siegelov, resp. Svenssonov model, a ich aplikácie na modelovanie výnosov štandardných dlhopisov.

V tretej kapitole sme popísali základy poistnej matematiky a definovali sme základné poistné produkty životného poistenia. Uvedli sme aj niekoľko tvrdení pre bázičné poistenia, ktoré sme potom aplikovali v podkapitole 3.3 pri odvodení špeciálnych výpočtových vzorcov pre prvotné oceňovanie doživotných dôchodkov vyplácaných z úspor v druhom dôchodkovom pilieri. Najprv sme uvažovali prípad doživotných dôchodkov bez zvyšovania dávok, potom sme brali do úvahy aj zvyšovanie dôchodkov konštantným, resp. meniacim sa tempom.

Definíciu a základné označenia metódy spárovania aktív a pasív životnej poisťovne sme sformulovali vo štvrtej kapitole práce. Vymedzili sme aj úlohu metódy spárovania a možnosti jej riešenia. Navrhli sme numerické riešenie maximalizačnej úlohy pomocou tzv. penalizačnej metódy. V podkapitole 4.2 sme vytvorili prehľad o časti súvisiacej odbornej literatúry, ktorá sa zaoberá penzijnými schémami.

Podstatnú časť našich výsledkov sme publikovali v piatej kapitole. Najprv sme uviedli modelové predpoklady aplikované pri modelovom vyplácaní doživotných dôchodkov zo starobného dôchodkového sporenia. V časti 5.2 sme prezentovali demografické modely, ktoré sme vytvorili špeciálne pre slovenskú populáciu. Pri konštrukcii týchto modelov sme používali úmrtnostné tabuľky Štatistického úradu Slovenskej republiky a aplikovali sme metódu posunutých pravdepodobností, resp. Leeho-Carterov model. Pomocou týchto metód sme skonštruovali modelové scenáre pre možnú dlhovekosť budúcich dôchodcov. V podkapitole 5.3 sme uviedli deväť odhadnutých modelov pre úrokové miery a výnosy štandardných dlhopisov, pričom aj tieto modely sme nastavili pre slovenské podmienky. V časti 5.4 sme prezentovali prvotné odhady pre mesačné

dôchodkové dávky (pre prípad dôchodku bez zvyšovania dávok) pri rôznych kombináciách demografických a úrokových modelov. Ukázali sme, aké rozdiely môžu spôsobiť pesimistické nastavenia jednotlivých modelov. Potvrdilo sa, že čím horší scenár trhového zhodnotenia zvolíme a čím prísnejší variant dlhovekosti berieme do úvahy, tým bude mesačná dávka nižšia. V posledných dvoch podkapitolách sme zhrnuli výsledky, závery a komentáre našich stresových testov, ktoré sme vykonali pri rôznych nastaveniach demografických a úrokových stresových scenárov. Opäť sme sa zameriavali na možné negatívne výkyvy trhových výnosov a vplyv dlhovekosti dôchodcov. V prípade testov pre výnosy sme dospeli k záveru, že pri pesimistických modeloch vývoja trhových výnosov by modelová poisťovňa utrpela stratu, a to bez ohľadu na to, ktorý demografický model aplikovala pri výpočte mesačnej dávky. Ďalej, pri analýze scenárov dlhovekosti sme prezentovali, akú stratu môže utrpieť poisťovňa, keď úmrtnosť dôchodcov sa riadi iným spôsobom, aký predpokladala. Skúmali sme aj odolnosť našich modelov dlhovekosti voči odporúčaným stresovým scenárom Európskeho orgánu pre poisťovníctvo a dôchodkové poistenie zamestnancov. Zistili sme, že obe naše demografické modely dlhovekosti by úspešne absolvovali miernejší stresový test, no prísnejším testom by neprešli.

Na záver by sme skonštatovali, že táto dizertačná práca splnila stanovené ciele. Počas jej tvorby sme vybudovali pevnú teoretickú základňu zameranú na modelovanie úrokových mier a výnosov dlhopisov v oblasti životného poistenia, ktorú sme potom úspešne aplikovali pri analýze a modelovaní vyplácania dôchodkov zo starobného dôchodkového sporenia na Slovensku.



## Literatúra

- [1] AASE, K. K., PERSSON, S.-A. 2004. New ECON for life actuaries. *ASTIN Bulletin*, 33(2), s. 117-121. [cit. 08.03.2013.] Dostupné na adrese: <http://www.actuaries.org/LIBRARY/ASTIN/vol133no2/117.pdf>.
- [2] ANDERSEN, T. G., LUND, J. 1997. Estimating continuous-time stochastic volatility models of the short-term interest rate. *Journal of Econometrics*, 72, s. 343–377. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.math.ku.dk/~rolf/teaching/thesis/AndLund.pdf>.
- [3] ARO, H., PENNANEN, T. 2013. Liability-driven Investment in Longevity Risk Management. *International Series in Operations Research & Management Science*, článok prijatý na publikovanie. [cit. 06.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.mth.kcl.ac.uk/~teemu/ldi.pdf>.
- [4] BATES, D. M., WATTS, D. G. 1988. *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications*. First edition, Wiley. 384 s. ISBN 10: 0-471-81643-4.
- [5] BATTOCCHIO, P., MENONCIN, F., SCAILLET, O. 2007. Optimal asset allocation for pension funds under mortality risk during accumulation and decumulation phases. *Ann. Oper. Res.*, 152. [cit. 15.04.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.swissfinanceinstitute.ch/rp66.pdf>.
- [6] BAXTER, M., RENNIE, A. 1996. *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom. ISBN 0 521 55289 3.
- [7] BELLINI, F. 2012. The Vasicek model. *Lectures and notes*. Universita di Milano Bicocca, Milano, Italy. [cit. 01.01.2015.] Dostupné na adrese: [http://www.economia.unimib.it/DATA/moduli/11\\_8460/materiale/vasicek\\_2013.pdf](http://www.economia.unimib.it/DATA/moduli/11_8460/materiale/vasicek_2013.pdf).
- [8] BERGSTROM, A. R. 1984. *Continuous time stochastic models and issues of aggregation over time*, *Handbook of Econometrics*, Z. Griliches & M. D. Intriligator (ed.), *Handbook of Econometrics*, edition 1, volume 2, chapter 20, s. 1145-1212.
- [9] BLAKE, D., CAIRNS, A., DOWD, K. 2001. PensionMetrics: Stochastic pension plan design and value-at-risk during the accumulation phase. *Insurance: Mathematics and Economics*, č. 29: s. 187-215. [cit. 15.04.2015.] Dostupné na adrese: [http://www.wu.ac.at/wutv/gc/whatwedo/bridging/symposia/2003/papers/paper\\_blake\\_1.pdf](http://www.wu.ac.at/wutv/gc/whatwedo/bridging/symposia/2003/papers/paper_blake_1.pdf).
- [10] BLAKE, D., CAIRNS, A., DOWD, K. 2003. PensionMetrics 2: Stochastic pension plan design during the distribution phase. *Insurance: Mathematics and Economics*, č. 33, s. 29-47. [cit. 15.04.2015.] Dostupné na adrese: <http://eprints.lse.ac.uk/24830/1/dp442.pdf>.
- [11] BRIGO, D., MERCURIO, F. 2007. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Second Edition, Springer.

- [12] BROWN, J. R. 2001. Private pensions, mortality risk, and the decision to annuitize. *Journal of Public Economics*, č. 82, s. 29-62. [cit. 15.04.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.aria.org/rts/proceedings/2000/pensions.pdf>.
- [13] BUCHANAN, J. I., TURNER, P. R. 1992. *Numerical methods and analysis*. Springer, New York. ISBN-13: 978-0070087170.
- [14] BÜHLMANN, H. 2002. New math for life actuaries. *ASTIN Bulletin*, 32(2), s. 209-211. [cit. 11.02.2014.] Dostupné na adrese: <http://www.casact.org/library/astin/vol32no2/v32n2.pdf>.
- [15] CAIRNS, A. J. G. 2000. Some notes on the dynamics and optimal control of stochastic pension fund models in continuous time. *ASTIN Bulletin*, 30(1), s. 19-55. [cit. 15.04.2015.] Dostupné na adrese: <https://www.casact.org/library/astin/vol30no1/019.pdf>.
- [16] CAIRNS, A. J. G. 2004. A family of term-structure models for long-term risk management and derivative pricing. *Mathematical Finance*, 14, s. 415-444. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.ma.hw.ac.uk/~andrewc/papers/mathfinance2004.pdf>.
- [17] CAIRNS, A. J. G. 2004. Interest-Rate Models. *Working paper*, prepared for the Encyclopaedia of Actuarial Science. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.ma.hw.ac.uk/~andrewc/papers/ajgc33.pdf>.
- [18] CHAN, K. C., KÁROLYI, G. A., LONGSTAFF, F. A., SANDERS, A. B. 1992. An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest rate. *Journal of Finance*, 47, s. 1209–1227.
- [19] CIPRA, T. 2012. *Penze: kvantitativní přístup*. Ekopress, Praha. 409 s. ISBN: 978-80-86929-87-3.
- [20] CONSIGLIO, A. - GUIRRERI, S. S. 2011. Simulating the Term Structure of Interest Rates with arbitrary marginals. *International Journal of Risk Assessment and Management*, 15, č. 4, September 2011.
- [21] COX, J., INGERSOLL, J., ROSS, S. 1985a. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53, s. 385–407. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.fin.ntu.edu.tw/~tzeng/course/CIR%281985%29-Eca.pdf>.
- [22] COX, J., INGERSOLL, J., ROSS, S. 1985b. An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica*, 53, s. 363–384. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.jstor.org/>.
- [23] DAI, Q., SINGLETON, K. 2000. Specification analysis of affine term structure models. *Journal of Finance*, 55, s. 1943–1978. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: [http://www.unc.edu/~colacitr/Teaching/Dai\\_Singleton.PDF](http://www.unc.edu/~colacitr/Teaching/Dai_Singleton.PDF).
- [24] DE ROSSI, G. 2004. Maximum Likelihood Estimation of the Cox-Ingersoll-Ross Model Using Particle Filters. *Computing in Economics and Finance 2004*, 302, Society for Computational Economics. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.eea-esem.com/papers/eea-esem/2004/2625/cirpfm.pdf> .

- [25] DEELSTRA, G., 2000. Long-Term Returns in Stochastic Interest Rate Models: Applications. *ASTIN Bulletin*, 30(1), s. 123-140. [cit. 04.02.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.casact.org/library/astin/vol30no1/123.pdf>.
- [26] DEELSTRA, G., DELBAEN, F. 1995. Long-term returns in stochastic interest rate models. *Insurance. Mathematics and Economics*, č. 17, s. 163-169. [cit. 04.02.2015.] Dostupné na adrese: <http://homepages.ulb.ac.be/~grdeelst/DD1.pdf>.
- [27] DHAENE, J. 1989. Stochastic interest rates and autoregressive integrated moving average processes. *Astin Bulletin*, 19, s. 131-138. [cit. 04.03.2014.] Dostupné na adrese: <https://www.casact.org/library/astin/vol19s/43.pdf>.
- [28] DIEBOLD, F. X., LI, C. 2006. Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields. *Journal of Econometrics*, 130, s. 337-364. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.ssc.upenn.edu/~fdiebold/papers/paper49/Diebold-Li.pdf>.
- [29] DUFFIE, D., KAN, R., 1996. A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, 6, s. 379-406. [cit. 12.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://darrellduffie-com.gowest1.gowesthosting.com/uploads/pubs/DuffieKan1996.pdf>.
- [30] EPISCOPOS, A. 1999. Further evidence on alternative continuous time models of the short-term interest rate. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money* 10, s. 199-212 [cit. 01.02.2013.] Dostupné na adrese: <https://www.ucm.es/data/cont/media/www/pag-41459/Episcopos.pdf>.
- [31] GERBER, H. U. 1997. *Life insurance mathematics*. Third Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997. 217 s. ISBN 3-540-58858-3.
- [32] GRAY, S. F. 1996. Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process. *Journal of Financial Economics*, 42(1), s. 27-62. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: [http://schwert.ssb.rochester.edu/f532/jfe96\\_sg.pdf](http://schwert.ssb.rochester.edu/f532/jfe96_sg.pdf).
- [33] GUIRRERI, S. S. 2010. *Simulating the Term Structure of Interest Rates with arbitrary marginals*. University of Palermo - Department of Statistics and Mathematics "S. Vianelli".
- [34] HALGAŠOVÁ, J., STEHLÍKOVÁ, B., BUČKOVÁ, Z. 2014. Estimating the short rate from the term structures in the Vasicek model. *Tatra Mt. Math. Publ.*, č. 61 (2014), s. 1-17. Článok prijatý na publikovanie.
- [35] HEATH, D., JARROW, R., MORTON, A. 1992. Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60, s. 77-105. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://efinance.org.cn/cn/Feshuo/Bond%20Pricing%20and%20the%20Term%20Structure%20of%20Interest%20Rates%20A%20New%20Methodology%20for%20Contingent%20Claims%20Valuation1992.pdf>.

- [36] HESTON, S., NANDI, S. 1998. Pricing Bonds and Interest Rate Derivatives under a Two Factor Model of Interest Rates with GARCH Volatility: Analytical Solution of Their Applications. *Working Paper*, Federal Reserve Bank of Atlanta. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <https://www.frbatlanta.org/-/media/Documents/research/publications/wp/1999/wp9920.pdf?la=en>.
- [37] HILLI, P., KOIVU, M., PENNANEN, T. 2011. Cash-flow based valuation of pension liabilities. *European Actuarial Journal*, 1/2011, s. 329-343. [cit. 06.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.mth.kcl.ac.uk/~teemu/valuation.pdf>.
- [38] HYNDMAN, R. J. (with contributions from Booth, H. Tickle, L. and Maindonald, J.). 2014. *demography: Forecasting mortality, fertility, migration and population data*. R package version 1.18. [cit. 26.03.2015.] Dostupné na adrese: <http://CRAN.R-project.org/package=demography>.
- [39] HO, T. S. Y., LEE, S. 1986. Term structure movements and pricing of interest rate contingent claims. *Journal of Finance*, 41, s. 1011-1029.
- [40] HULL, J., WHITE, A. 1990. Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of Financial Studies*, 3, s. 573–592. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://zenithcad.com/pricing%20interest-rate-derivative%20securities.pdf>.
- [41] JOSA-FOMBELLIDA, R., RINCÓN-ZAPATERO, J. P. 2001. Minimization of risks in pension funding by means of contributions and portfolio selection. *Insurance: Mathematics and Economics*, č. 29, s. 35-45. [cit. 01.04.2015.] Dostupné na adrese: <http://e-archivo.uc3m.es/bitstream/handle/10016/5565/?sequence=1>.
- [42] KILIANOVÁ, S., MELICHERČÍK, I., ŠEVČOVIČ, D. 2006. Dynamic Accumulation Model for the Second Pillar of the Slovak Pension System. *Finance a úvěr – Czech Journal of Economics and Finance*, roč. 56, č. 11-12, s. 506-521.
- [43] KWOK, Y. K. 1998. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag.
- [44] LAMOŠ, F., POTOCKÝ, R. 1998. *Pravdepodobnosť a matematická štatistika (Štatistické analýzy)*. Bratislava, Univerzita Komenského v Bratislave, 343 str. ISBN 80-223-1262-2.
- [45] LEE, R. D., CARTER, L. R. 1992. Modeling and Forecasting U. S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, roč. 87, č. 419, s. 659-671. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.jstor.org/>.
- [46] LIN, X. S., TAN, K. S. 2003. Valuation of Equity-Linked Annuities under Stochastic Interest Rates. *North American Actuarial Journal*, roč. 7, č. 3, s. 72-91. [cit. 04.01.2015.] Dostupné na adrese: <https://promathmedia.files.wordpress.com/2013/10/valuation-of-equity-indexed-annuities-under-stochastic-interest-rates.pdf>.
- [47] LONGSTAFF, F. A., AND SCHWARTZ, E. S. 1992. Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two Factor General Equilibrium Model. *Journal of Finance*, 47, s. 1259-1282. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://personal.anderson.ucla.edu/francis.longstaff/interestrate.pdf>.

- [48] MELICHERČÍK, I., OLŠÁROVÁ, L., ÚRADNÍČEK, V. 2005. *Kapitoly z finančnej matematiky*. Epos, Bratislava. ISBN 80-8057-651-3.
- [49] MELICHERČÍK, I., SZŰCS, G. 2014. Vplyv vybraných faktorov na zisk životnej poisťovne pri doživotných dôchodkoch vyplácaných z úspor v II. dôchodkovom pilieri na Slovensku. *Forum Statisticum Slovacum*, X. ročník, č. 6/2014, s. 103-114. ISSN 1336-7420.
- [50] MELICHERČÍK, I., SZŰCS, G., VILČEK, I. 2015. Investment Strategies in the Funded Pillar of the Slovak Pension System. *Ekonomický časopis*, Ekonomický ústav Slovenskej akadémie vied. Článok prijatý na publikovanie.
- [51] MELICHERČÍK, I., ŠEVČOVIČ, D. 2010. Dynamic Stochastic Accumulation Model with Application to Pension Savings Management. *Yugoslav Journal of Operations Research*, roč. 20, č. 1, s. 1-24.
- [52] MENONCIN, F., SCAILLET, O. 2003. Mortality risk and real optimal asset allocation for pension funds. *FAME Research Paper Series rp101*, International Center for Financial Asset Management and Engineering. [cit. 15.04.2015.] Dostupné na adrese: [http://www.ifid.ca/conference\\_material/menoncin\\_paper.pdf](http://www.ifid.ca/conference_material/menoncin_paper.pdf).
- [53] MIKOSCH, T. 1998. *Elementary Stochastic Calculus: With Finance in View*. World Scientific, Singapore, 212 s. ISBN 9810235437.
- [54] MILEVSKY, M. 1998. Optimal asset allocation towards the end of the life cycle: To annuitise or not to annuitise? *Journal of Risk and Insurance*, č. 65, s. 401-26. [cit. 15.04.2015.] Dostupné na adrese: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.200.3020&rep=rep1&type=pdf>.
- [55] NELSON, C. R., SIEGEL, A. F. 1987. Parsimonious Modeling of Yield Curve. *Journal of Business*, 1987, roč. 60, č. 4, s. 473-489. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.math.ku.dk/~rolf/teaching/NelsonSiegel.pdf>.
- [56] NOVIYANTI, L., SYAMSUDDIN, M. 2005. Life insurance with stochastic interest rates. *Working paper*. Universitas Padjadjaran, Bandung, Indonesia. [cit. 28.01.2013.] Dostupné na adrese: [http://www.actuaries.org/EVENTS/Seminars/EAAC\\_Bali/12%20%28201-210%29%20Lienda\\_Noviyanti.pdf](http://www.actuaries.org/EVENTS/Seminars/EAAC_Bali/12%20%28201-210%29%20Lienda_Noviyanti.pdf).
- [57] NOWMAN, K. 1997. Gaussian estimation of single-factor continuous time models of the term structure of interest rates. *The Journal of Finance*, roč. 52, č. 4, s. 1695-1706. [cit. 28.01.2013.] Dostupné na adrese: <http://www.ucm.es/info/ecocuan/anc/ectriaqf/Nowman.pdf>.
- [58] OKSENDAL, B. 2003. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Sixth Edition, Springer-Verlag Heidelberg New York, 363 s. ISBN 3-540-04758-1.
- [59] Opatrenie Národnej banky Slovenska z 25. júna 2013 o maximálnej výške technickej úrokovej miery. [cit. 10.11.2014.] Dostupné na adrese: [http://www.nbs.sk/\\_img/Documents/\\_Legislativa/\\_Vestnik/OPAT3-2013.pdf](http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Legislativa/_Vestnik/OPAT3-2013.pdf).

- [60] PASTOR, K., RAUČINOVÁ, E. 1991. Parametrizácia úmrtnostných tabuliek a jej použitie v regionálnom plánovaní. *Acta Facultatis Rerum Naturalium Universitatis Comenianae*, s. 119-124.
- [61] PARKER, G. 1995. Stochastic Rates of Return: Practical Applications of First and Second Order SDE. In: *25th International Congress of Actuaries*, Brussels, Belgium.
- [62] PARKER, G. 1998. Stochastic interest rates with actuarial applications. *Appl. Stochastic Models Data Anal.*, 14: s. 335–341.
- [63] PEARSON, N. D., SUN, T. 1994. Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model. *The Journal of Finance*, roč. 49, č. 4, s. 1279-1304. Wiley for the American Finance Association. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.jstor.org/stable/2329186>.
- [64] POTOCKÝ, R. 2012. *Modely v životnom a neživotnom poistení*. Prvé vydanie, Vydavateľstvo STATIS Bratislava, 217 str. ISBN 978-80-85659-71-9.
- [65] POTOCKÝ, R., WALDL, H., STEHLÍK, M. 2014. On Sums of Claims and Their Applications in Analysis of Pension Funds and Insurance Products. *Prague Economic Papers*, roč. 3, 2014, s. 349-370.
- [66] POULSEN, R. 2003. Working with the Cox-Ingersoll-Ross Model. *Working paper*. Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, Copenhagen, Denmark. [cit. 28.01.2013.] Dostupné na adrese: <http://www.math.ku.dk/~rolf/teaching/ctff03/cir.pdf>.
- [67] R CORE TEAM. 2012. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0. Dostupné na adrese: <http://www.R-project.org/>.
- [68] REBONATO, R. *Interest-rate option models: understanding, analysing and using models for exotic interest rate options*. Second edition, Wiley, England. ISBN 0-471-97958-9.
- [69] SAKÁLOVÁ, K. 2006. *Aktuárske analýzy*. Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava. 113 str. ISBN 80-225-2115-9.
- [70] SIEGEL, A. F., NELSON, C. R. 1988. Long-term behavior of yield curves. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 23, s. 105–110. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.nber.org/papers/w1789.pdf>.
- [71] STEHLÍK, M., POTOCKÝ, R., KISELÁK, J., JORDANOVA, P. 2014. On generalized interest rate dynamics. *Applied Mathematics & Information Sciences*, roč. 9, č. 2L.
- [72] SVENSSON, L. E. O. 1994. Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994. *National Bureau of Economic Research Working Paper*, Cambridge, Massachusetts, september 1994, č. 4871. [cit. 12.11.2014.] Dostupné na adrese: [http://www.nber.org/papers/w4871.pdf?new\\_window=1](http://www.nber.org/papers/w4871.pdf?new_window=1).

- [73] SZŰCS, G. 2015. Kde je pravda v spore o dôchodky? *Týždenník .týždeň*, ročník XII., č. 6/2015, 2. februára 2015, str. 28-29. ISSN 1336-5932.
- [74] ŠESTÁK, L. 2012. *Mathematical Analysis and Calibration of a Multifactor Panel Model for Credit Spreads and Risk-free Interest Rate*. Dissertation Thesis. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University, Bratislava. [cit. 11.02.2015.] Dostupné na adrese: [http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/phd/sestak/Thesis\\_Sestak\\_final.pdf](http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/phd/sestak/Thesis_Sestak_final.pdf).
- [75] ŠEVČOVIČ, D., STEHLÍKOVÁ, B., MIKULA, K. 2009. *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. Prvé vydanie, Slovenská technická univerzita, Bratislava, 200 str. ISBN 978-80-227-3014-3.
- [76] ŠEVČOVIČ, D., URBÁNOVÁ CSAJKOVÁ, A. 2005. On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model. *Central European J. of Operation Research*, roč. 13, s. 169-188. [cit. 30.10.2014.] Dostupné na adrese: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/papers/cl26.pdf>.
- [77] ŠKROVÁNKOVÁ, L., ŠKROVÁNKOVÁ, P. 2010. *Dôchodkové, zdravotné a nemocenské poistenie*. Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava. 126 s. ISBN 978-80-225-2924-2.
- [78] ŠTULAJTER, F. 2001. *Time series and random processes*. Vydavateľstvo UK, Univerzita Komenského v Bratislave. 212 s. ISBN 80-223-1540-0.
- [79] URBÁNOVÁ CSAJKOVÁ, A. 2007. *Calibration of term structure models*. Dissertation Thesis. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University, Bratislava. [cit. 19.02.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/phd/urbanova/urbanova-thesis.pdf>.
- [80] VAŠÍČEK, O. A. 1977. An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, č. 5, s. 177-188. [cit. 24.10.2014.] Dostupné na adrese: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304405X77900162>.
- [81] VENTER, G. G. 2004. Testing distributions of stochastically generated yield curves. *ASTIN Bulletin*, 34(1), s. 229-247. [cit. 02.01.2015.] Dostupné na adrese: <http://www.actuaries.org/LIBRARY/ASTIN/vol34no1/229.pdf>.
- [82] ZÁKON Národnej rady Slovenskej republiky č. 747/2004 Z. z. o dohľade nad finančným trhom a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov. [cit. 25.04.2014.] Dostupné na adrese: [http://www.nbs.sk/\\_img/Documents/\\_Legislativa/\\_UplneZneniaZakonov/UZ-747-2004-2012-29.pdf](http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Legislativa/_UplneZneniaZakonov/UZ-747-2004-2012-29.pdf).
- [83] ZÁKON Národnej rady Slovenskej republiky č. 8/2008 Z. z. o poisťovníctve a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov. [cit. 25.04.2014.] Dostupné na adrese: [http://www.nbs.sk/\\_img/Documents/\\_Legislativa/\\_UplneZneniaZakonov/Z0082008.PDF](http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Legislativa/_UplneZneniaZakonov/Z0082008.PDF).
- [84] ZÁKON Národnej rady Slovenskej republiky č. 39/2015 Z. z. o poisťovníctve a o zmene a doplnení niektorých zákonov. [cit. 11.03.2015.] Dostupné na adrese: [www.zbierka.sk/sk/predpisy/39-2015-z-z.p-36045.pdf](http://www.zbierka.sk/sk/predpisy/39-2015-z-z.p-36045.pdf) .

- [85] ZÁKON Národnej rady Slovenskej republiky č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov. [cit. 11.03.2015.] Dostupné na adrese: [http://www.nbs.sk/\\_img/Documents/\\_Legislativa/\\_UplneZneniaZakonov/Z0432004.PDF](http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Legislativa/_UplneZneniaZakonov/Z0432004.PDF).

### Internetové zdroje:

- [86] ČSR [online]. *Úmrtnostní tabulky za ČR od roku 1920*. Český statistický úřad. [cit. 25.03.2015.] Dostupné na adrese: [https://www.czso.cz/csu/czso/umrtnostni\\_tabulky](https://www.czso.cz/csu/czso/umrtnostni_tabulky).
- [87] EIOPA [online]. EIOPA Stress Test 2014. [cit. 11.11.2014.] Dostupné na adrese: [https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx\\_dam/files/activities/financial\\_stability/insurance\\_stress\\_test\\_2014/eiopa-14-215\\_stress\\_test\\_2014\\_specifications.pdf](https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/activities/financial_stability/insurance_stress_test_2014/eiopa-14-215_stress_test_2014_specifications.pdf).
- [88] EMMI [online]. Historické dáta o úrokových mierach EURIBOR (1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 12M) a EONIA. [cit. 22.12.2014.] Dostupné na adrese: <http://www.emmi-benchmarks.eu/>.
- [89] EUROSTAT [online]. *Euro yield curves*. Webová stránka Európskeho štatistického úradu. [cit. 13.12.2012]. Dostupné na internete: [http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/interest\\_rates/data/database](http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/interest_rates/data/database).
- [90] INFOSTAT [online]. Prognóza vývoja obyvateľstva SR do roku 2050. *Edícia: Akty*, Bratislava, november 2002. [cit. 21.10.2014]. Dostupné na adrese: <http://www.infostat.sk/vdc/pdf/prognoza2050vdc2.pdf>.
- [91] NBS [online]. *Výnosy do splatnosti vybraných vládnych dlhopisov*. Webová stránka Národnej banky Slovenska, Bratislava, Slovenská republika. [cit. 08.02.2013.] Dostupné na adrese: [http://www.nbs.sk/\\_img/Documents/STATIST/US/VDSVD\\_CR.xls](http://www.nbs.sk/_img/Documents/STATIST/US/VDSVD_CR.xls).
- [92] NBS [online]. *Dohľad nad poisťovníctvom*. Webová stránka NBS, Bratislava, Slovenská republika. [cit. 08.02.2013.] Dostupné na adrese: <http://www.nbs.sk/sk/dohlad-nad-financnym-trhom/dohlad-nad-poistovnictvom>.
- [93] OECD [online]. Historické dáta o okamžitej úrokovej miere (short rate). [cit. 10.11.2014.] Dostupné na adrese: <http://stats.oecd.org/index.aspx?querytype=view&queryname=86>.
- [94] R CORE TEAM [online]. General-purpose Optimization. [cit. 14.02.2015.] Dostupné na adrese: <https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/optim.html>.
- [95] ŠÚSR [online]. Tabuľky úmrtnosti (roky 1996 - 2013): Slovenská republika. *Obyvateľstvo a migrácia: Tabuľky života*. Štatistický úrad Slovenskej republiky. [cit. 21.10.2014.] Dostupné na adrese: [http://slovak.statistics.sk/wps/wcm/connect/221c1ae4-1e73-491a-ba30-744fba17f037/Umrtnostne\\_tabulky\\_SR\\_1996\\_2013.zip?MOD=AJPERES](http://slovak.statistics.sk/wps/wcm/connect/221c1ae4-1e73-491a-ba30-744fba17f037/Umrtnostne_tabulky_SR_1996_2013.zip?MOD=AJPERES).



## Príloha A.

### Odvozenie formuly pre mesačnú výšku dávky v prípade doživotného starobného dôchodku so zvyšovaním dôchodku

Uvažujme mesačne vyplácaný doživotný starobný dôchodok so zvyšovaním dôchodku a bez pozostalostných dôchodkov (podľa bodu a) 2. odseku 1 §46 zákona [85]) pre sporiteľa vo veku  $x$  rokov. Označme finálnu výšku úspor v starobnom dôchodkovom sporení symbolom  $P$  (táto suma slúži ako jednorazové brutto-poistné pri kúpe doživotného dôchodku). Nech  $i$  označuje ročnú technickú úrokovú mieru,  $v = (1 + i)^{-1}$  je ročný diskontný faktor,  $m = 12$  je počet výplat v jednom roku (keďže sa zaoberáme s mesačne vyplácaným dôchodkom) a nech maximálna doba vyplácania je  $n = \omega - x$  rokov. Nech  $S^{(12)}$  označuje základnú ročnú výšku dávky vyplácanej mesačne v prvom roku a nech  $S_m = S^{(12)}/12$  je mesačná výška dávky v prvom roku vyplácania dôchodku. Predpokladajme, že v ďalších rokoch sa ročná dávka zvyšuje konštantným koeficientom  $g > 0$ , vždy vo výročí vzniku povinnosti poistiteľa plniť zo zmluvy o poistení dôchodku (podľa §42 zákona [85]). Potom ročné výšky dávok vyplácaných mesačne v jednotlivých rokoch sú postupne  $S^{(12)}$ ,  $S^{(12)}(1+g)$ ,  $S^{(12)}(1+g)^2$ ,  $S^{(12)}(1+g)^3, \dots$

Berme do úvahy aj odsek 1 §41 zákona [85], podľa ktorého starobný dôchodok, predčasný starobný dôchodok a pozostalostný dôchodok sa vypláca mesačne pozadu (t. j. polehotne). Uvažujme aj odsek 2 §32 zákona [85] o vrátení časti poistného, ak dôchodca zomrie pred vyplatením prvých 84 mesačných dávok. Podľa spomínaného paragrafu pozostalí dostanú sumu zodpovedajúcu rozdielu sumy určenej na výplatu týchto 84 mesačných súm doživotného dôchodku a súčtu vyplatených mesačných súm doživotného dôchodku. Predpokladáme, že poistná suma sa vypláti na konci mesiaca, v ktorom nastala smrť dôchodcu.

Označme symbolom  $\bar{D}_j$  pre  $j = 1, 2, \dots, 7$  dávku, ktorú dostanú pozostalí v  $j$ -tom roku, ak dôchodca zomrie niekedy v  $j$ -tom roku (za predpokladu, že zomrie v prvých 7 rokoch vyplácania dôchodku). Ďalej označme symbolom  $D_j$  pre  $j = 0, 1, \dots, 7$  nevyplatenú časť v čase  $j$ -tej sumy, ktorá sa vyčlenila na vyplatenie prvých 84 mesačných dávok. Pri výpočte hodnôt  $D_0, D_1, \dots, D_6$  aplikujme zovšeobecnenie aproximačnej formuly (3.15) uvedenej v tretej kapitole v tvare

$${}_k|a_{x:\bar{n}}^{(m)} \approx {}_k|\ddot{a}_{x:\bar{n}} - \frac{m+1}{2m} \left( A_{x:k} - A_{x:k+n} \right) \quad (\text{podľa [64]}),$$

resp. jeho špeciálnu verziu

$${}_k|a_{x:\bar{n}}^{(12)} \approx {}_k|\ddot{a}_{x:\bar{n}} - \frac{13}{24} \left( A_{x:k} - A_{x:k+n} \right). \quad (1)$$

Nech

$D_0 =$  suma, ktorá sa vyčlenila na vyplatenie prvých 84 dávok

$$D_0 = S^{(12)} a_{x:\bar{1}}^{(12)} + S^{(12)}(1+g) {}_1|a_{x:\bar{1}}^{(12)} + S^{(12)}(1+g)^2 {}_2|a_{x:\bar{1}}^{(12)} + \dots + S^{(12)}(1+g)^6 {}_6|a_{x:\bar{1}}^{(12)}.$$

Po dosadení aproximácie (1) dostaneme

$$\begin{aligned} D_0 &\approx S^{(12)} \left( \ddot{a}_{x:\bar{1}} - \frac{13}{24} (1 - A_{x:\bar{1}}) \right) + S^{(12)}(1+g) \left( {}_1|\ddot{a}_{x:\bar{1}} - \frac{13}{24} (A_{x:\bar{1}} - A_{x:\bar{2}}) \right) + \\ &+ S^{(12)}(1+g)^2 \left( {}_2|\ddot{a}_{x:\bar{1}} - \frac{13}{24} (A_{x:\bar{2}} - A_{x:\bar{3}}) \right) + \dots + \\ &+ S^{(12)}(1+g)^6 \left( {}_6|\ddot{a}_{x:\bar{1}} - \frac{13}{24} (A_{x:\bar{6}} - A_{x:\bar{7}}) \right). \end{aligned}$$

Pre odložený predlehotný dôchodok používame vzťah  ${}_k|\ddot{a}_{x:\overline{n}} = A_{x:k}^{\frac{1}{24}} \ddot{a}_{x+k:\overline{n}}$  (podľa [64]).  
 Ďalej poznáme, že  $\ddot{a}_{x+k:\overline{1}} = 1$ . Potom môžeme písať

$$\begin{aligned}
 D_0 &\approx S^{(12)} \left( 1 - \frac{13}{24} (1 - A_{x:\overline{1}}) \right) + S^{(12)} (1 + g) \left( A_{x:\overline{1}} - \frac{13}{24} (A_{x:\overline{1}} - A_{x:\overline{2}}) \right) + \\
 &\quad + S^{(12)} (1 + g)^2 \left( A_{x:\overline{2}} - \frac{13}{24} (A_{x:\overline{2}} - A_{x:\overline{3}}) \right) + \dots + \\
 &\quad + S^{(12)} (1 + g)^6 \left( A_{x:\overline{6}} - \frac{13}{24} (A_{x:\overline{6}} - A_{x:\overline{7}}) \right) \\
 D_0 &\approx S^{(12)} \left( \frac{11}{24} + \frac{13}{24} A_{x:\overline{1}} \right) + S^{(12)} (1 + g) \left( \frac{11}{24} A_{x:\overline{1}} + \frac{13}{24} A_{x:\overline{2}} \right) + \\
 &\quad + S^{(12)} (1 + g)^2 \left( \frac{11}{24} A_{x:\overline{2}} + \frac{13}{24} A_{x:\overline{3}} \right) + \dots + S^{(12)} (1 + g)^6 \left( \frac{11}{24} A_{x:\overline{6}} + \frac{13}{24} A_{x:\overline{7}} \right) \\
 D_0 &\approx S^{(12)} \sum_{k=0}^6 (1 + g)^k \left( \frac{11}{24} A_{x:k}^{\frac{1}{24}} + \frac{13}{24} A_{x:k+1}^{\frac{1}{24}} \right). \tag{2}
 \end{aligned}$$

Analogicky, pre  $D_1$  môžeme písať rovnicu ekvivalencie a môžeme previesť rovnaké úpravy ako v prípade  $D_0$

$$\begin{aligned}
 D_1 &= S^{(12)} (1 + g) a_{x+1:\overline{1}}^{(12)} + S^{(12)} (1 + g)^2 {}_1|a_{x+1:\overline{1}}^{(12)} + S^{(12)} (1 + g)^3 {}_2|a_{x+1:\overline{1}}^{(12)} + \\
 &\quad + \dots + S^{(12)} (1 + g)^6 {}_5|a_{x+1:\overline{1}}^{(12)} \\
 D_1 &\approx S^{(12)} (1 + g) \left( \ddot{a}_{x+1:\overline{1}} - \frac{13}{24} (1 - A_{x+1:\overline{1}}) \right) + \\
 &\quad + S^{(12)} (1 + g)^2 \left( {}_1|\ddot{a}_{x+1:\overline{1}} - \frac{13}{24} (A_{x+1:\overline{1}} - A_{x+1:\overline{2}}) \right) + \dots + \\
 &\quad + S^{(12)} (1 + g)^6 \left( {}_5|\ddot{a}_{x+1:\overline{1}} - \frac{13}{24} (A_{x+1:\overline{5}} - A_{x+1:\overline{6}}) \right) \\
 D_1 &\approx S^{(12)} (1 + g) \left( 1 - \frac{13}{24} (1 - A_{x+1:\overline{1}}) \right) + \\
 &\quad + S^{(12)} (1 + g)^2 \left( A_{x+1:\overline{1}} - \frac{13}{24} (A_{x+1:\overline{1}} - A_{x+1:\overline{2}}) \right) + \dots + \\
 &\quad + S^{(12)} (1 + g)^6 \left( A_{x+1:\overline{5}} - \frac{13}{24} (A_{x+1:\overline{5}} - A_{x+1:\overline{6}}) \right) \\
 D_1 &\approx S^{(12)} \sum_{k=0}^5 (1 + g)^{k+1} \left( \frac{11}{24} A_{x+1:k}^{\frac{1}{24}} + \frac{13}{24} A_{x+1:k+1}^{\frac{1}{24}} \right). \tag{3}
 \end{aligned}$$

Teda všeobecne pre  $D_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, 6$  teda platí vzťah

$$D_j \approx S^{(12)} \sum_{k=0}^{6-j} (1 + g)^{k+j} \left( \frac{11}{24} A_{x+j:k}^{\frac{1}{24}} + \frac{13}{24} A_{x+j:k+1}^{\frac{1}{24}} \right) \tag{4}$$

a  $D_7 = 0$ .

Predpokladajme, že priemerný dôchodca zomrie v strede roka, takže dávku  $\bar{D}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 7$  dostanú pozostalí tiež v strede  $j$ -teho roka. Za aproximáciu dávky  $\bar{D}_j$  zoberme aritmetický

priemer dávok  $D_{j-1}$  a  $D_j$ , teda nech platí

$$\begin{aligned}\bar{D}_1 &\approx \frac{D_0 + D_1}{2}, & \bar{D}_2 &\approx \frac{D_1 + D_2}{2}, & \bar{D}_3 &\approx \frac{D_2 + D_3}{2}, & \bar{D}_4 &\approx \frac{D_3 + D_4}{2}, \\ \bar{D}_5 &\approx \frac{D_4 + D_5}{2}, & \bar{D}_6 &\approx \frac{D_5 + D_6}{2}, & \bar{D}_7 &\approx \frac{D_6 + D_7}{2}.\end{aligned}$$

Po dosadení namiesto  $D_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, 7$  dostaneme vzťahy typu

$$\begin{aligned}\bar{D}_j &\approx \frac{1}{2}S^{(12)} \left( \sum_{k=0}^{6-(j-1)} (1+g)^{k+j-1} \left( \frac{11}{24}A_{x+j-1:\overline{k}|} + \frac{13}{24}A_{x+j-1:\overline{k+1}|} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{6-j} (1+g)^{k+j} \left( \frac{11}{24}A_{x+j:\overline{k}|} + \frac{13}{24}A_{x+j:\overline{k+1}|} \right) \right) \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots, 6, \quad (5) \\ \bar{D}_7 &\approx \frac{1}{2}S^{(12)}(1+g)^6 \left( \frac{11}{24}A_{x+6:\overline{0}|} + \frac{13}{24}A_{x+6:\overline{1}|} \right) = \frac{1}{2}S^{(12)}(1+g)^6 \left( \frac{11}{24} + \frac{13}{24}A_{x+6:\overline{1}|} \right).\end{aligned}$$

Pozerajme sa teraz na podmienku vrátenia časti poistného ako na samostatný poistný produkt, t. j. ako na dočasné poistenie pre prípad úmrtia na dobu 7 rokov s klesajúcou výškou dávky. Súčasnú hodnotu tohto produktu môžeme počítať z rovnice ekvivalencie

$$\begin{aligned}(GA)_{x:\overline{7}|}^1 &= \bar{D}_1 {}_0p_x q_x (1+i)^{-0,5} + \bar{D}_2 {}_1p_x q_{x+1} (1+i)^{-1,5} + \dots + \\ &\quad + \bar{D}_7 {}_6p_x q_{x+6} (1+i)^{-6,5} \\ (GA)_{x:\overline{7}|}^1 &= \sum_{j=1}^7 \bar{D}_j {}_{j-1}p_x q_{x+j-1} (1+i)^{-(j-0,5)}.\end{aligned}$$

Po dosadení namiesto  $\bar{D}_j$  zo vzťahu (5) dostaneme

$$\begin{aligned}(GA)_{x:\overline{7}|}^1 &\approx \frac{S^{(12)}}{2} \sum_{j=1}^6 \left( \sum_{k=0}^{6-(j-1)} (1+g)^{k+j-1} \left( \frac{11}{24}A_{x+j-1:\overline{k}|} + \frac{13}{24}A_{x+j-1:\overline{k+1}|} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{6-j} (1+g)^{k+j} \left( \frac{11}{24}A_{x+j:\overline{k}|} + \frac{13}{24}A_{x+j:\overline{k+1}|} \right) \right) \times \\ &\quad \times {}_{j-1}p_x q_{x+j-1} (1+i)^{-(j-0,5)} + \\ &\quad + \frac{1}{2}S^{(12)}(1+g)^6 \left( \frac{11}{24} + \frac{13}{24}A_{x+6:\overline{1}|} \right) {}_6p_x q_{x+6} (1+i)^{-6,5}.\end{aligned} \quad (6)$$

Zavedieme pomocné označenie

$$\begin{aligned}G &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \left( \sum_{k=0}^{6-(j-1)} (1+g)^{k+j-1} \left( \frac{11}{24}A_{x+j-1:\overline{k}|} + \frac{13}{24}A_{x+j-1:\overline{k+1}|} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{6-j} (1+g)^{k+j} \left( \frac{11}{24}A_{x+j:\overline{k}|} + \frac{13}{24}A_{x+j:\overline{k+1}|} \right) \right) {}_{j-1}p_x q_{x+j-1} (1+i)^{-(j-0,5)} + \\ &\quad + \frac{1}{2}(1+g)^6 \left( \frac{11}{24} + \frac{13}{24}A_{x+6:\overline{1}|} \right) {}_6p_x q_{x+6} (1+i)^{-6,5}.\end{aligned} \quad (7)$$

Potom

$$(GA)_{x:\overline{7}|}^1 \approx S^{(12)} \times G. \quad (8)$$

Uvažujme koeficientu brutto-princípu  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  z časti 3.3.1. Potom rovnica ekvivalencie pre uvažovaný mesačne vypláčaný doživotný starobný dôchodok so zvyšovaním dôchodku a bez pozostalostných dôchodkov pre sporiteľa vo veku  $x$  rokov a možnosťou vrátenia časti poisťného v prípade úmrtia poistenca v prvých siedmych rokoch poistenia má tvar

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{1-\gamma} \left[ (1+\beta) \sum_{k=0}^{\omega-x} S^{(12)} (1+g)^k {}_k|a_{x:\overline{1}|}^{(12)} + \alpha S^{(12)} + (1-\varepsilon)(GA)_{x:\overline{7}|}^1 \right], \\
P &\approx \frac{1}{1-\gamma} \left[ (1+\beta) S^{(12)} \sum_{k=0}^{\omega-x} (1+g)^k \left( {}_k|\ddot{a}_{x:\overline{1}|} - \frac{13}{24} \left( A_{x:k|}^1 - A_{x:k+1|}^1 \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \alpha S^{(12)} + (1-\varepsilon) S^{(12)} G \right] \\
P &\approx \frac{1}{1-\gamma} \left[ (1+\beta) S^{(12)} \sum_{k=0}^{\omega-x} (1+g)^k \left( A_{x:k|}^1 \times 1 - \frac{13}{24} \left( A_{x:k|}^1 - A_{x:k+1|}^1 \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \alpha S^{(12)} + (1-\varepsilon) S^{(12)} G \right].
\end{aligned}$$

Po ďalších úpravách dostaneme

$$\begin{aligned}
P &\approx \frac{1}{1-\gamma} \left[ (1+\beta) S^{(12)} \sum_{k=0}^{\omega-x} (1+g)^k \left( \frac{11}{24} A_{x:k|}^1 + \frac{13}{24} A_{x:k+1|}^1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \alpha S^{(12)} + (1-\varepsilon) S^{(12)} G \right].
\end{aligned}$$

Po vyjadrení neznámej dôchodkovej dávky a použitím vzťahu  $S_m = S^{(12)}/12$  pre mesačnú dôchodkovú dávku platnú v prvom roku dostaneme

$$S_m \approx \frac{P(1-\gamma)}{12} \left[ (1+\beta) \sum_{k=0}^{\omega-x} (1+g)^k \left( \frac{11}{24} A_{x:k|}^1 + \frac{13}{24} A_{x:k+1|}^1 \right) + \alpha + (1-\varepsilon)G \right]^{-1}, \quad (9)$$

kde premenná  $G$  je definovaná vzťahom (7), pričom v ďalších rokoch budú vypláčané mesačné dávky vo výške  $S_m(1+g)$ ,  $S_m(1+g)^2$ ,  $S_m(1+g)^3$ , ...,  $S_m(1+g)^n$ .

Celý predošlý postup, aj výpočtová formula (9) pre základnú mesačnú výšku dôchodkovej dávky sa dá zovšeobecniť aj pre ten prípad, keď tempo rastu dávok nie je konštantné počas celej doby vyplácania dôchodku. Predpokladajme, že v čase  $t$  pre  $t = 0, 1, \dots, n-1$  (teda na začiatku  $(t+1)$ . roku) sa aplikuje valorizačný koeficient  $g_t$ , pričom nech  $g_0 = 0$ . Označme symbolom  $\tilde{S}_m$  výšku mesačnej dávky vyplácanej v prvom roku poistenia. Potom mesačné výšky dávok v ďalších rokoch vyplácania dôchodku sú

$$\tilde{S}_m(1+g_1), \tilde{S}_m(1+g_1)(1+g_2), \dots, \tilde{S}_m \prod_{t=1}^j (1+g_t), \dots, \tilde{S}_m \prod_{t=1}^{n-1} (1+g_t).$$

Keďže  $g_0 = 0$ , tak výška mesačnej dávky v  $j$ -tom roku vyplácania dôchodku je rovné

$$\tilde{S}_m \prod_{t=0}^{j-1} (1+g_t).$$

Potom súčasná hodnota 7-ročného poistenia pre prípad úmrtia dôchodcu aproximovaná vzťahom (8) sa dá počítať nasledovne

$$\begin{aligned}
(\widetilde{GA})_{x:\overline{7}|}^1 &\approx S^{(12)} \times \tilde{G}, \\
\text{kde } \tilde{G} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \left( \sum_{k=0}^{6-(j-1)} \left( \prod_{t=0}^{k+j-1} (1+g_t) \right) \left( \frac{11}{24} A_{x+j-1:\overline{k}|} + \frac{13}{24} A_{x+j-1:\overline{k+1}|} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{6-j} \left( \prod_{t=0}^{k+j} (1+g_t) \right) \left( \frac{11}{24} A_{x+j:\overline{k}|} + \frac{13}{24} A_{x+j:\overline{k+1}|} \right) \right) {}_{j-1}p_x q_{x+j-1} \times \\
&\quad \times (1+i)^{-(j-0,5)} + \frac{1}{2} \left( \prod_{t=0}^6 (1+g_t) \right) \left( \frac{11}{24} + \frac{13}{24} A_{x+6:\overline{1}|} \right) {}_6p_x q_{x+6} (1+i)^{-6,5}.
\end{aligned}$$

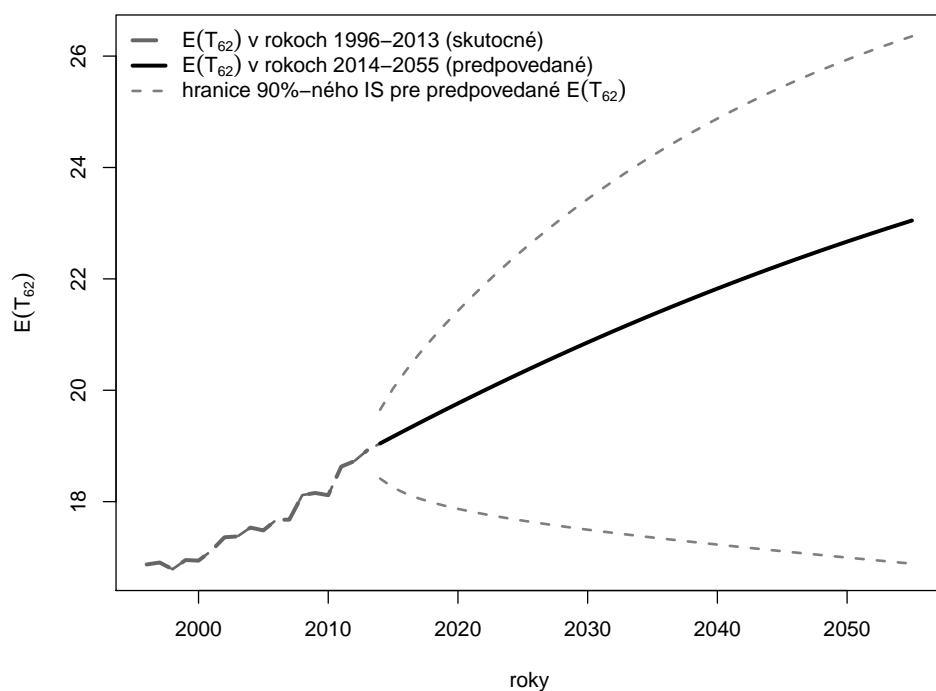
Pre mesačnú výšku dávky v prvom roku približne platí

$$\tilde{S}_m \approx \frac{P(1-\gamma)}{12} \left[ (1+\beta) \sum_{k=0}^{\omega-x} \left( \prod_{t=0}^k (1+g_t) \right) \left( \frac{11}{24} A_{x:\overline{k}|} + \frac{13}{24} A_{x:\overline{k+1}|} \right) + \alpha + (1-\varepsilon)\tilde{G} \right]^{-1}. \quad (10)$$

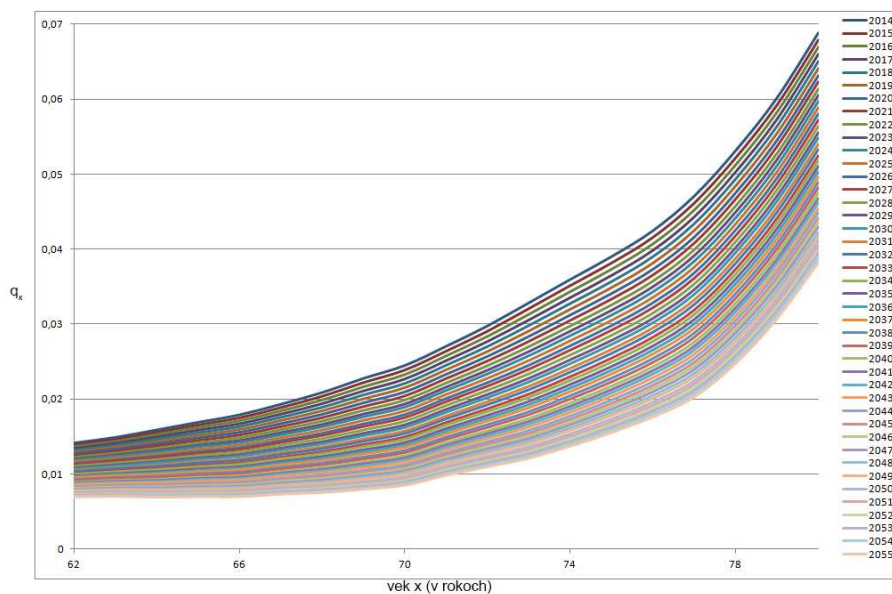
## Príloha B.

### Odhady parametrov Leecho-Carterovho modelu pri historických ÚT ŠÚSR 1996-2013 pre vekovú skupinu 62 až 100 rokov

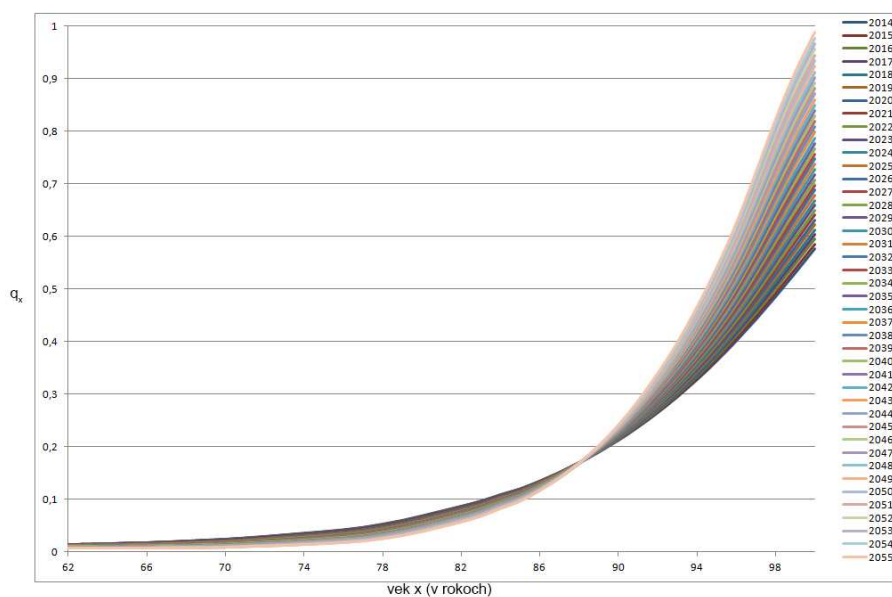
#	ax	bx	kt
62	-4.1018776710216729	0.0535931276364064943	1.6213392837951988
63	-4.0238999831328437	0.0565913576905249585	1.4425682872716006
64	-3.9446103359834295	0.0626843772545830763	2.0625697177893558
65	-3.8659999251331709	0.0665669752144872756	1.7889674165825185
66	-3.7877389532862846	0.0709459497313541104	2.0574671256833876
67	-3.7058750764037440	0.0732084217646215285	1.3739232137036368
68	-3.6253324796817159	0.0768279201247208665	0.7935128340344608
69	-3.5410256617803140	0.0792738713590733501	0.7492409967985095
70	-3.4517436282417036	0.0798418180554478635	0.2019609613784897
71	-3.3589576073889380	0.0764547038725471861	0.8242788964104736
72	-3.2675129787285191	0.0754396811464155964	-0.1634837722945043
73	-3.1754427759855175	0.0755082035620969899	0.4539279694040915
74	-3.0793368542070434	0.0730989891715747020	-1.9298306978327251
75	-2.9829214228735230	0.0698614251717708246	-1.1889256998816755
76	-2.8857734777191482	0.0667690304129784917	-0.5882016887542262
77	-2.7868404017318436	0.0640804035197413829	-2.6503384707018469
78	-2.6857260956550491	0.0582226460482854272	-2.9873717790822032
79	-2.5809095633811103	0.0514736522507387925	-3.9026786953995964
80	-2.4739770069079161	0.0452450973032422626	
81	-2.3674414409150213	0.0388342211219119063	
82	-2.2606544090207832	0.0338178333329284542	
83	-2.1541596327192845	0.0285648736692570328	
84	-2.0460076483220941	0.0224951989994981658	
85	-1.9382914938174103	0.0177841883152343866	
86	-1.8289847038903828	0.0118946807400270287	
87	-1.7188074554501245	0.0061589383552767066	
88	-1.6080222829240460	0.0005060015650300819	
89	-1.4967611681508615	-0.0050884352111201896	
90	-1.3852255248603771	-0.0106734532969155436	
91	-1.2737200653255365	-0.0163680012986607837	
92	-1.1618353054429080	-0.0218058132986850596	
93	-1.0499544339859967	-0.0271258923632941712	
94	-0.9387304362833390	-0.0327761013673373292	
95	-0.8278706655646036	-0.0383265425015295591	
96	-0.7186325590801832	-0.0444691357857513805	
97	-0.6122281426074240	-0.0515739670286200561	
98	-0.5074924241352283	-0.0583980211219979964	
99	-0.4026151751673616	-0.0632118994570472770	
100	-0.2969448700537589	-0.0659263246588156354	



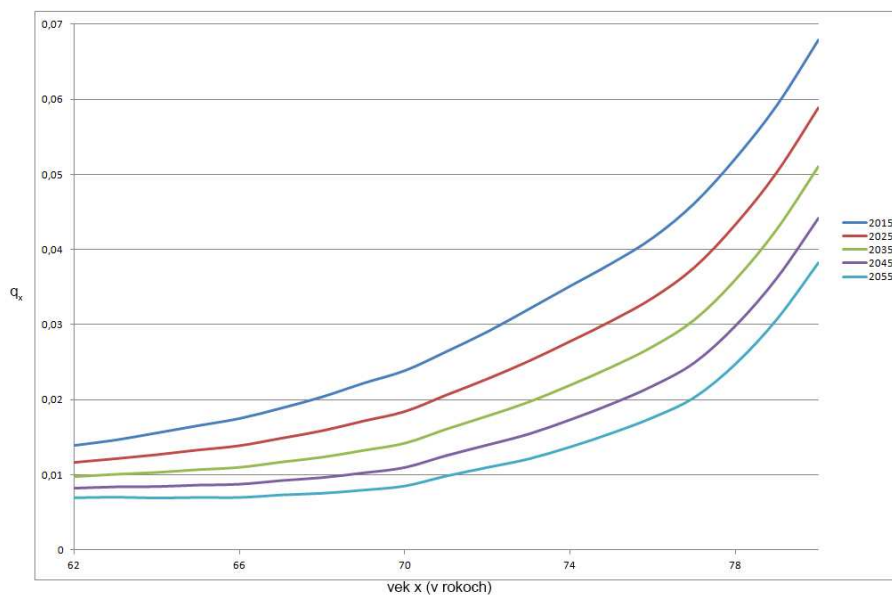
Obr. 17: Historické stredné budúce dĺžky života 62-ročnej osoby v rokoch 1996 až 2013, Leeho-Carterove predikcie stredných budúcich dĺžok života na roky 2014 až 2055 a hranice 90%-ného predikčného intervalu spoľahlivosti (Zdroj: [95], vlastné spracovanie)



Obr. 18: Predikované jednorokové pravdepodobnosti úmrtia (úmrtnostné krivky) pre roky 2014-2055, zobrazené pre vekovú skupinu 62 až 80 rokov (Zdroj: vlastné spracovanie)

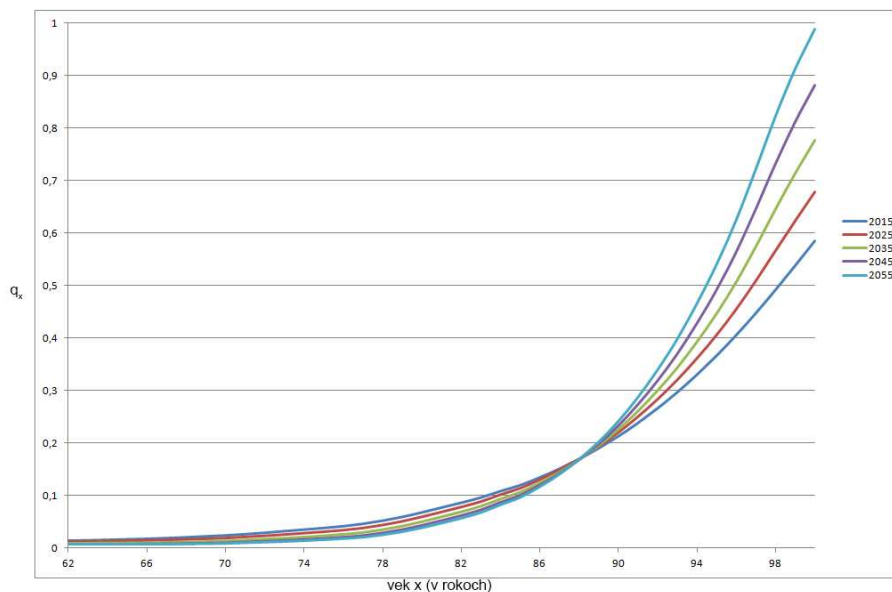


Obr. 19: Predikované jednorôčné pravdepodobnosti úmrtia (úmrtnostné krivky) pre roky 2014-2055, zobrazené pre vekovú skupinu 62 až 100 rokov) (Zdroj: vlastné spracovanie)

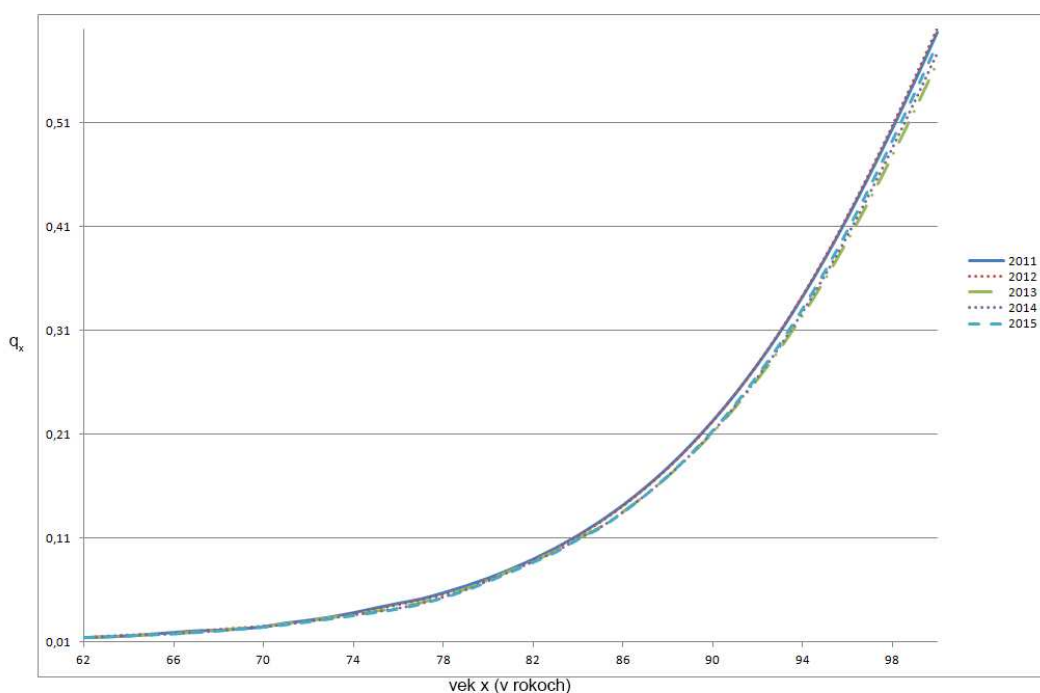


Obr. 20: Predikované jednorôčné pravdepodobnosti úmrtia (úmrtnostné krivky) v rokoch 2015, 2025, 2035, 2045, 2055, zobrazené pre vekovú skupinu 62 až 80 rokov) (Zdroj: vlastné spracovanie)





Obr. 21: Predikované jednoróčné pravdepodobnosti úmrtia (úmrtnostné krivky) v rokoch 2015, 2025, 2035, 2045, 2055, zobrazené pre vekovú skupinu 62 až 100 rokov (*Zdroj: vlastné spracovanie*)



Obr. 22: Porovnanie historických úmrtnostných kriviek z rokov 2011, 2012, 2013 a Leeho-Carterových predikovaných úmrtnostných kriviek pre roky 2014, 2015 pre vekové rozpätie 62-100 rokov (*Zdroj: vlastné spracovanie*)

**Leeho-Carterove predikcie ročných pravdepodobností úmrtia pre rok 2015  
vo vekoch 62 až 100 rokov a hranice 90%-ného intervalu spoľahlivosti pre  
predikované pravdepodobnosti**

# predikcie ročných pravdepodobností úmrtia pre rok 2015

# vo vekoch 62 až 100 rokov

c(0.0138700987992,0.0145944444264,0.0155407329614,0.0165155691614,  
0.0174625056231,0.0188309375380,0.0203387187556,0.0221671318708,  
0.0238405698279,0.0263667942042,0.0290296638439,0.0320398160820,  
0.0351078430257,0.0381304421582,0.0415428937665,0.0461173638088,  
0.0521553659568,0.0591965349470,0.0678645244082,0.0770002234079,  
0.0863275006430,0.0961115670605,0.1084636041551,0.1196864973319,  
0.1344897585288,0.1510677837588,0.1695924989211,0.1902351295506,  
0.2131682136458,0.2385673922851,0.2665253593310,0.2971711126935,  
0.3306583206946,0.3669453807152,0.4061336440211,0.4482119123223,  
0.4927023972221,0.5388123125210,0.5859729250151)

# dolná hranica 90%-ného intervalu spoľahlivosti

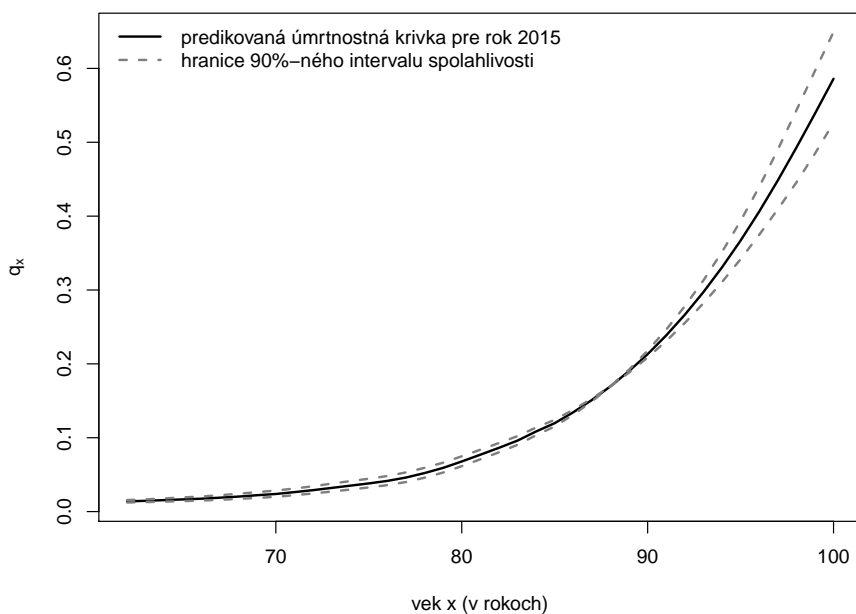
# pre predikované pravdepodobnosti

c(0.0123030558015,0.0128595516566,0.0135087909488,0.0142330095903,  
0.0149034992559,0.0159920012265,0.0171354380567,0.0185769610179,  
0.0199568254963,0.0222432473465,0.0245501949181,0.0270981230903,  
0.0298592359776,0.0326708756934,0.0358479155437,0.0400449226235,  
0.0458940590835,0.0528894327512,0.0614931978873,0.0707812108082,  
0.0802518622650,0.0903949034769,0.1033833681870,0.1152591114806,  
0.1311685793749,0.1491423618325,0.1694157389297,0.1882719252995,  
0.2086341620831,0.2309315685685,0.2553856204892,0.2820463203202,  
0.3107893083088,0.3417907228333,0.3746861448211,0.4091223694919,  
0.4455166367582,0.4846507614168,0.5264122878790)

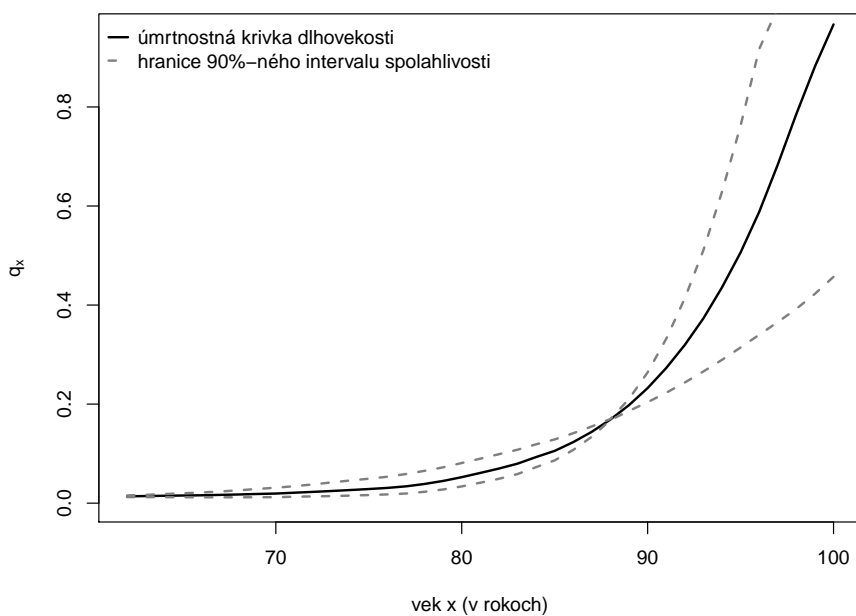
# horná hranica 90%-ného intervalu spoľahlivosti

# pre predikované pravdepodobnosti

c(0.0156351664122,0.0165614423239,0.0178755618279,0.0191606526352,  
0.0204563784051,0.0221682171256,0.0241335291281,0.0264418775613,  
0.0284692521980,0.0312427056442,0.0343122675262,0.0378653945179,  
0.0412597201344,0.0444817180113,0.0481204392095,0.0530856935810,  
0.0592450016021,0.0662301802568,0.0748704895261,0.0837419354123,  
0.0928408636309,0.1021704151743,0.1137785057343,0.1242727363945,  
0.1378888251049,0.1530160077918,0.1697694262317,0.1922166331833,  
0.2177888200177,0.2464205278162,0.2780735570010,0.3129592227358,  
0.3515332313911,0.3935120031741,0.4395068110892,0.4898861848094,  
0.5431395601486,0.5966434490786,0.6493031496310)



Obr. 23: Leecho-Carterova predikovaná úmrtnostná krivka pre rok 2015 a hranice 90%-ného intervalu spoľahlivosti pre predikovanú krivku  
 (Zdroj: vlastné spracovanie)



Obr. 24: Leecho-Carterova úmrtnostná krivka dlhovekosti a hranice 90%-ného intervalu spoľahlivosti pre predikovanú krivku dlhovekosti  
 (Zdroj: vlastné spracovanie)

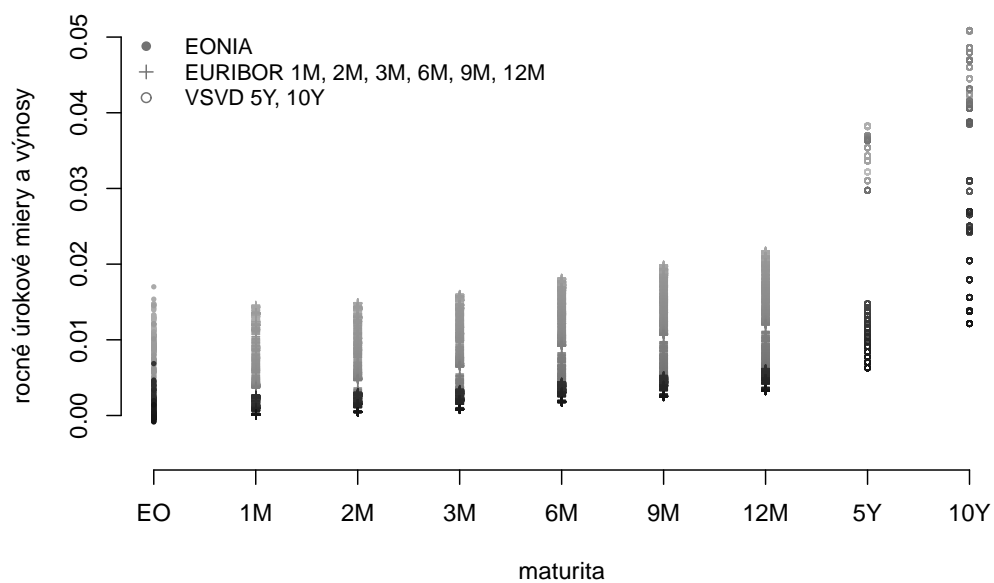
**Leeho-Carterov model dlhovekosti: ročné pravdepodobnosti úmrtia a hranice 90%-ného intervalu spoľahlivosti pre predikované pravdepodobnosti dlhovekosti**

```
# ročné pravdepodobnosti úmrtia - dlhovekosť
c(0.0138700987992,0.0143304262401,0.0149249922497,0.0154859201418,
  0.0159365008933,0.0167368857289,0.0175342171228,0.0185436059335,
  0.0194155369526,0.0211398534263,0.0227904900844,0.0245541792079,
  0.0265161043900,0.0285251162578,0.0308284309167,0.0339557475447,
  0.0387975636302,0.0448746870903,0.0524991886884,0.0610865090096,
  0.0698901087617,0.0797690962990,0.0931015873476,0.1055767865070,
  0.1233099427824,0.1442270986263,0.1689301528549,0.1980601480830,
  0.2323817862100,0.2729244259706,0.3195656503493,0.3731278813116,
  0.4356835088962,0.5062496126712,0.5880399964426,0.6835710495943,
  0.7858503185452,0.8817313082807,0.9665734507467)

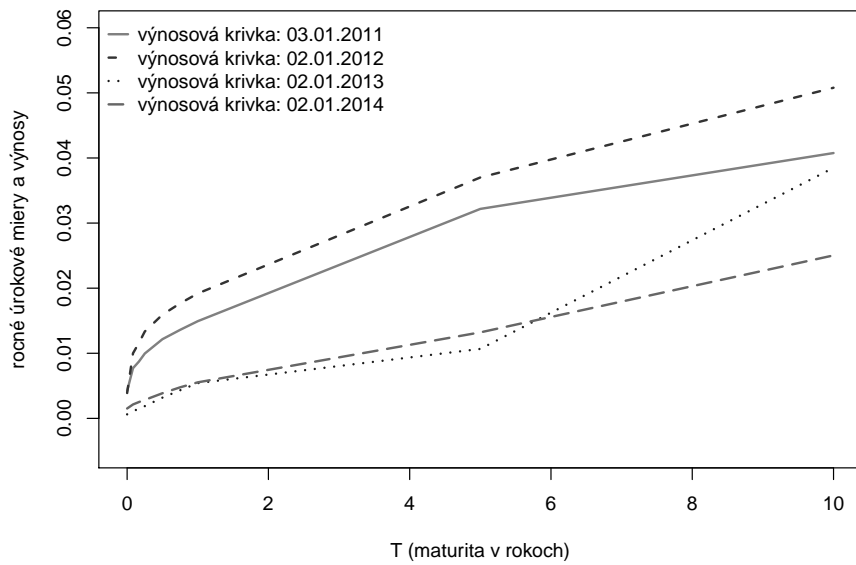
# dolná hranica 90%-ného intervalu spoľahlivosti
# pre predikované pravdepodobnosti dlhovekosti
c(0.0123030558015,0.0122230700795,0.0121168289624,0.0120209909649,
  0.0117784891916,0.0118634533077,0.0118242653092,0.0119471634157,
  0.0120680078283,0.0130025494616,0.0136929018603,0.0143157961040,
  0.0152894830439,0.0164089171955,0.0177192712335,0.0194850592947,
  0.0229337044300,0.0276849491228,0.0338103339178,0.0413350064443,
  0.0491931841377,0.0587642993794,0.0727165277353,0.0864019604636,
  0.1075328509549,0.1341880866483,0.1679182085340,0.1862714754647,
  0.2039619708221,0.2229779564987,0.2436525351431,0.2659339884638,
  0.2893895646365,0.3143853409915,0.3400453461229,0.3656212266627,
  0.3923954114621,0.4227317637224,0.4570195391553)

# horná hranica 90%-ného intervalu spoľahlivosti
# pre predikované pravdepodobnosti dlhovekosti
c(0.0156351664122,0.0167980373103,0.0183779510641,0.0199395628045,
  0.0215464559308,0.0235885409728,0.0259655006837,0.0287295400427,
  0.0311664273980,0.0342818136989,0.0378174512098,0.0419601279883,
  0.0457958956587,0.0493651600777,0.0533749329617,0.0588538187533,
  0.0652725929323,0.0723461265822,0.0810923547836,0.0898431420863,
  0.0988535484404,0.1078646975271,0.1188489090917,0.1287207570788,
  0.1412290845182,0.1549547848885,0.1699476298699,0.2105083048447,
  0.2641791108422,0.3319687441352,0.4135612922619,0.5108021801889,
  0.6287498900291,0.7622552787532,0.9169856542741,1.0000000000000,
  1.0000000000000,1.0000000000000,1.0000000000000)
```

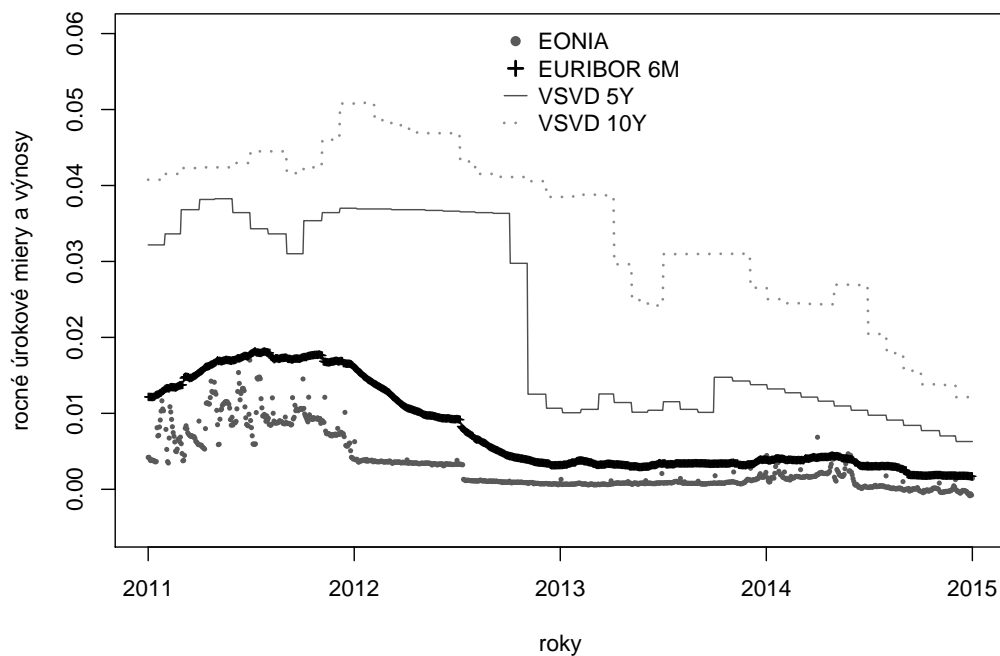
## Príloha C.



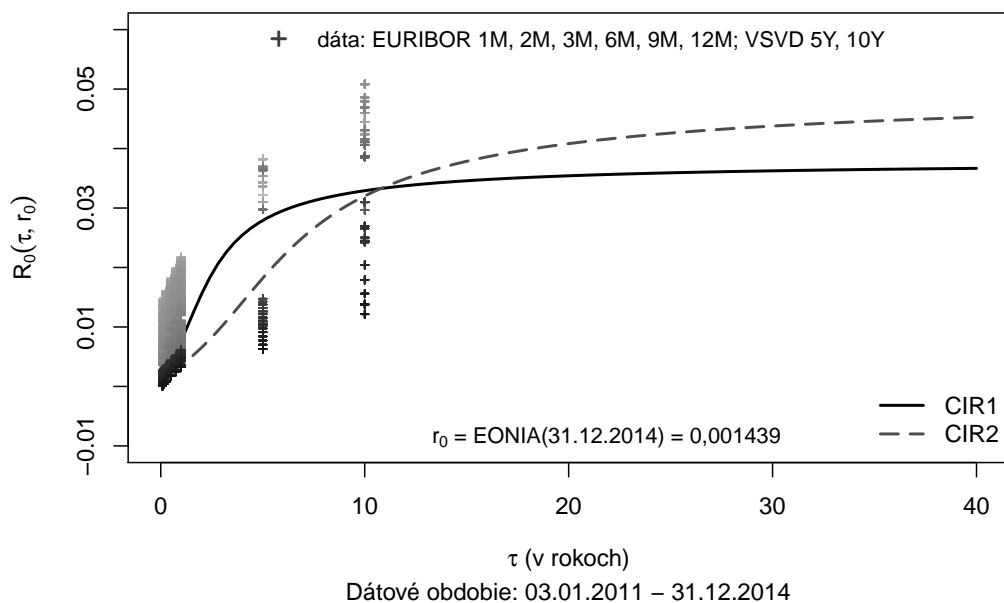
Obr. 25: Historické úrokové miery (EONIA, EURIBOR) a výnosy dlhopis (VSVD) medzi rokmi 2011 a 2014 (*Zdroj: [88], [91], vlastné spracovanie*)



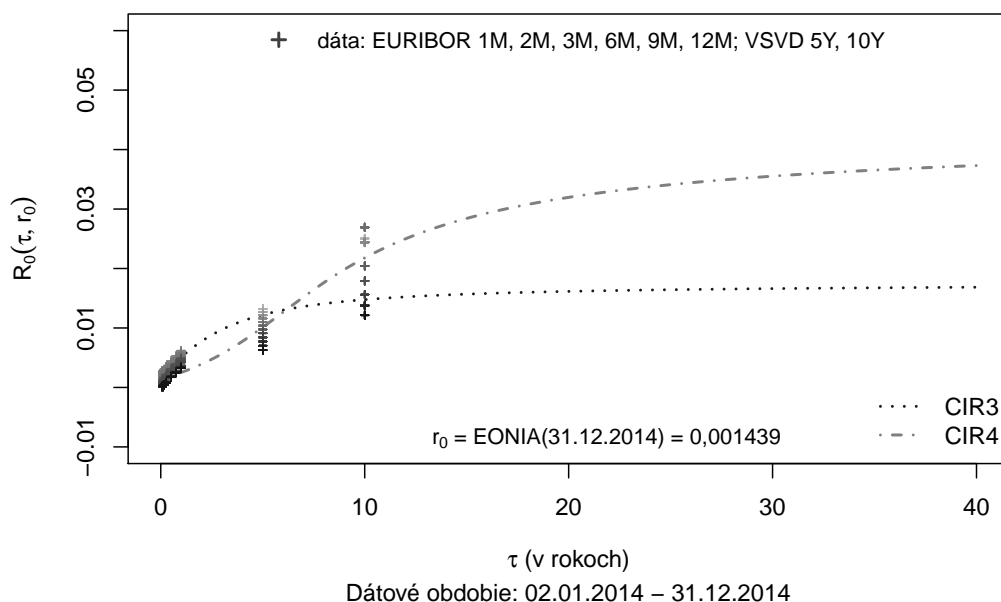
Obr. 26: Vybrané historické výnosové krivky skonštruované pomocou dát EONIA, EURIBOR 1M-12M a VSVD 5Y, VSVD 10Y (Zdroj: [88], [91], *vlastné spracovanie*)



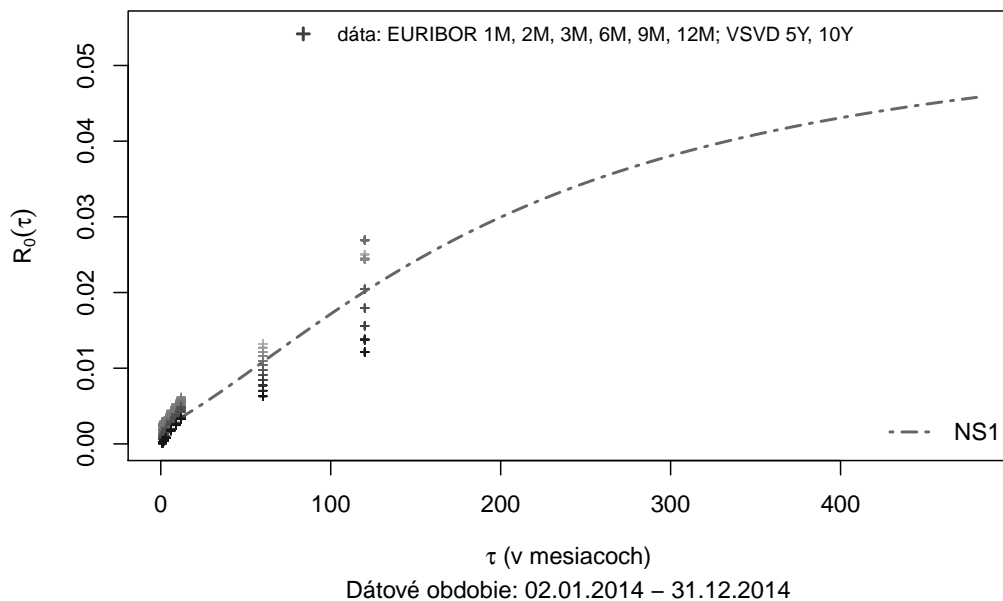
Obr. 27: Vývoj historických úrokových mier (EONIA, EURIBOR) a výnosov dlhopisov (VSVD) medzi rokmi 2011 a 2014 (Zdroj: [88], [91], *vlastné spracovanie*)



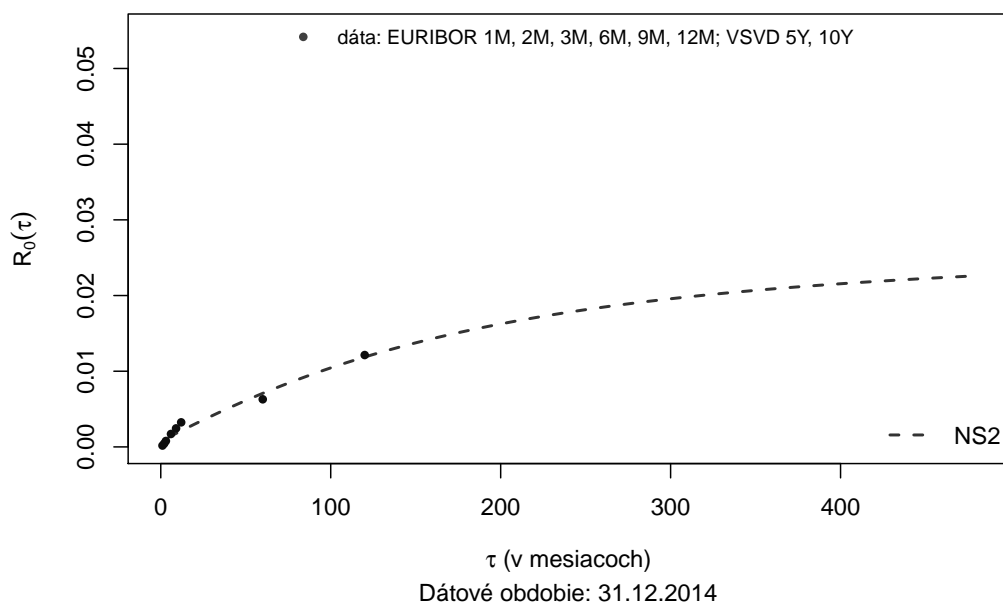
Obr. 28: Vizuálny fit odhadnutých výnosových kriviek *CIR1* a *CIR2* voči historickým úrokovým mieram a výnosom dlhopisov použitým pri odhade parametrov (Zdroj: [88], [91], *vlastné spracovanie*)



Obr. 29: Vizuálny fit odhadnutých výnosových kriviek *CIR3* a *CIR4* voči historickým úrokovým mieram a výnosom dlhopisov použitým pri odhade parametrov (Zdroj: [88], [91], *vlastné spracovanie*)

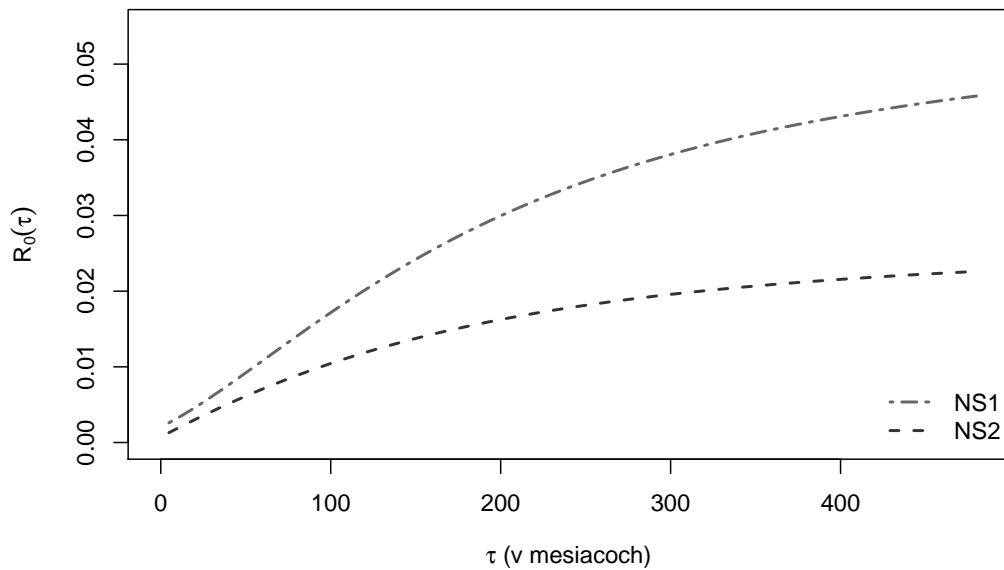


Obr. 30: Vizuálny fit odhadnutých výnosových kriviek modelu *NS1* voči historickým úrokovým mieram a výnosom dlhopisov použitým pri odhade parametrov (Zdroj: [88], [91], *vlastné spracovanie*)

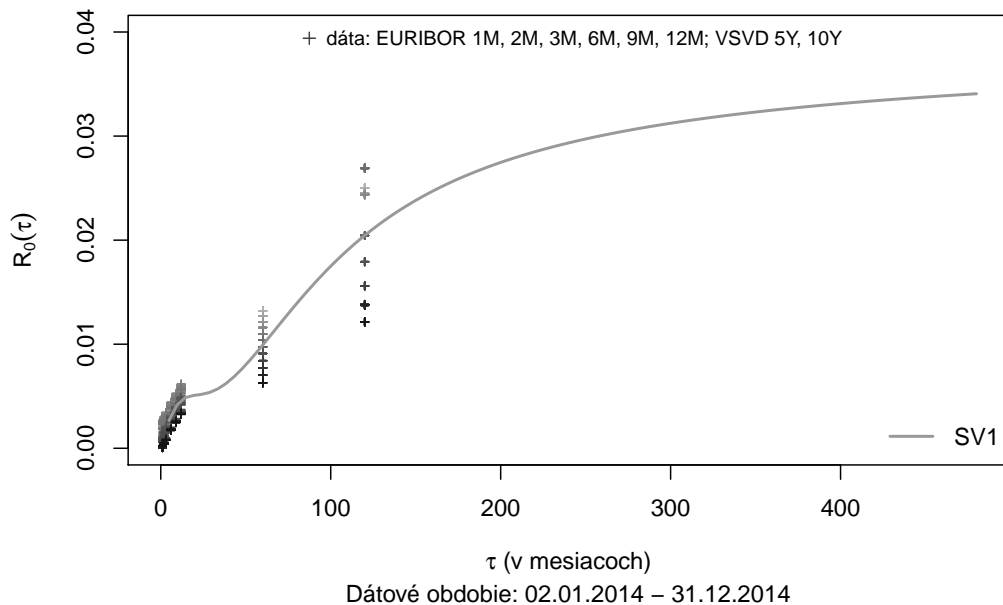


Obr. 31: Vizuálny fit odhadnutých výnosových kriviek modelu *NS2* voči historickým úrokovým mieram a výnosom dlhopisov použitým pri odhade parametrov (Zdroj: [88], [91], *vlastné spracovanie*)

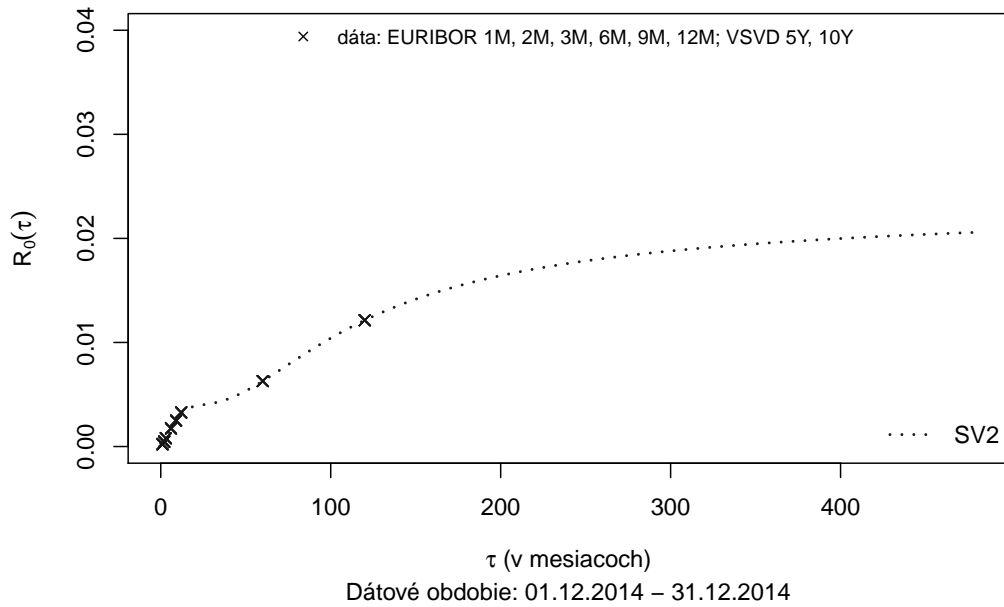




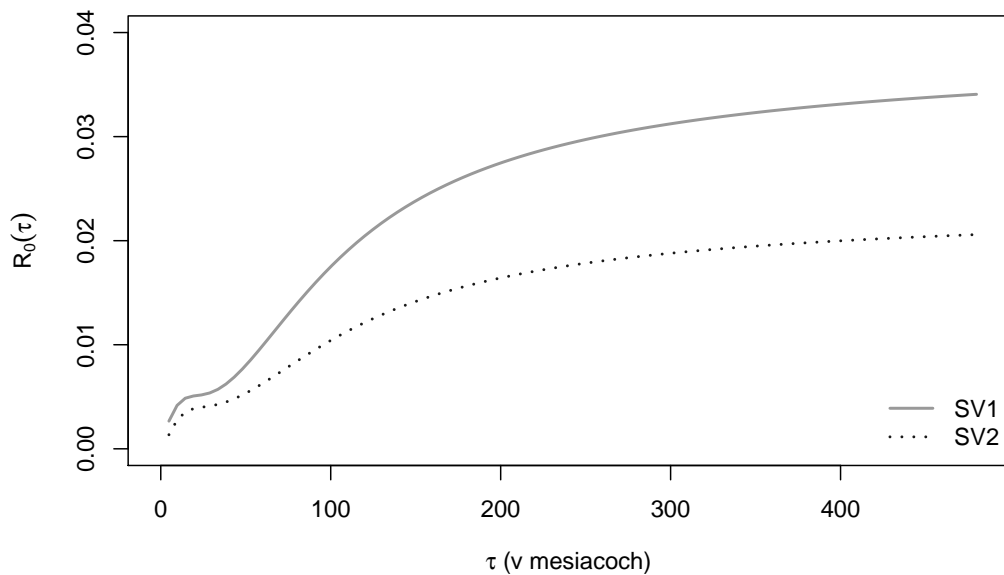
Obr. 32: Porovnanie odhadnutých výnosových kriviek modelov *NS1* a *NS2*  
(Zdroj: vlastné spracovanie)



Obr. 33: Vizualný fit odhadnutých výnosových kriviek modelu *SV1* voči historickým úrokovým mieram a výnosom dlhopisov použitým pri odhade parametrov (Zdroj: [88], [91], vlastné spracovanie)



Obr. 34: Vizuálny fit odhadnutých výnosových kriviek modelu *SV2* voči historickým úrokovým mieram a výnosom dlhopisov použitým pri odhade parametrov (Zdroj: [88], [91], *vlastné spracovanie*)



Obr. 35: Porovnanie odhadnutých výnosových kriviek modelov *SV1* a *SV2* (Zdroj: *vlastné spracovanie*)

## Príloha D.

### Programový kód pre odhad neznámych parametrov Vašíčkovho modelu

```
# ALGORITMY PRE ODHAD PARAMETROV VAŠÍČKOVHO MODELU
# postupy podľa práce Urbánová Csajková (2007)
# a podľa článku Ševčovič, Urbánová Csajková (2005)

# Vašíčkov short rate model:
# drt = kappa*(theta - rt)dt + sigma*dWt
# Vašíčková výnosová krivka:
# R(tau,r) = (B(tau)*r - ln(A(tau)))/tau
# -----

# definícia funkcií A(tau) a B(tau) pre Vašíčkov model:
B.VAS <- function(tau, phi) {
  (-(1-phi^tau)/log(phi)) }

A.VAS <- function(tau, phi, xi, rho) {
  exp(xi*(B.VAS(tau,phi)-tau) - rho*(B.VAS(tau,phi))^2) }

PT.VAS <- function(tau, phi, xi, rho, r) {
  A.VAS(tau, phi, xi, rho)*exp(-B.VAS(tau, phi)*r) }

RT.VAS <- function(tau, phi, xi, rho, r) {
  -log(PT.VAS(tau, phi, xi, rho, r)) / tau }
# -----

# logaritmus funkcie vierohodnosti pre Vašíčkov model
loglike <- function(theta, kappa, sigma, r=R0) {
  suma<-0; N<-length(r);
  for(t in 2:N) { suma <- suma + log(
    ((sigma^2)/(2*kappa)) * (1-exp(-2*kappa)) * r[t-1]^0) +
    (r[t] - exp(-kappa)*r[t-1] - theta*(1-exp(-kappa)))^2 /
    (((sigma^2)/(2*kappa)) * (1-exp(-2*kappa)) * r[t-1]^0) }
  -(1/2)*suma
}

loglik <- function(par) {
  theta <- par[1]; kappa <- par[2]; sigma <- par[3];
  suma<-0; N<-length(r);
  for(t in 2:N) { suma <- suma + log(
    ((sigma^2)/(2*kappa)) * (1-exp(-2*kappa)) * r[t-1]^0) +
    (r[t] - exp(-kappa)*r[t-1] - theta*(1-exp(-kappa)))^2 /
    (((sigma^2)/(2*kappa)) * (1-exp(-2*kappa)) * r[t-1]^0) }
  -(1/2)*suma
}
# -----

# pomocná funkcia na riešenie lineárneho systému
LS.VAS <- function(phi)
{
```

```

model <- function(z) {
  x<-z[1]; y<-z[2]; # xi=x, rho=y
  C1<-0; M1<-0; C2<-0; M2<-0;
  for(j in 1:m) {
C1 <- C1 + (tau[j]*mean(R[,j]) - B.VAS(tau[j],phi)*mean(R0) +
           x*(B.VAS(tau[j],phi)-tau[j]))*(B.VAS(tau[j],phi))^2
#
M1 <- M1 + (B.VAS(tau[j],phi))^4
C2 <- C2 + (tau[j]*mean(R[,j]) - B.VAS(tau[j],phi)*mean(R0) +
           y*(B.VAS(tau[j],phi))^2)*(B.VAS(tau[j],phi)-tau[j])
M2 <- M2 + (B.VAS(tau[j],phi)-tau[j])^2
  }
  F1 <- y - C1/M1
  F2 <- x + C2/M2
  c(F1 = F1, F2 = F2)
  }
res <- multiroot(f = model, start = c(0.1, 0.1))
res$root
}
# -----

# nákladový funkcionál pre Vašíčkov model
U <- function(phi)
{
  xi<-LS.VAS(phi)[1]; rho<-LS.VAS(phi)[2];
  FS<-0
for(j in 1:m)
{
  FS <- FS + ((tau[j]*mean(R[,j])-B.VAS(tau[j],phi)*mean(R0) +
  log(A.VAS(tau[j],phi,xi,rho)))^2+var(tau[j]*R[,j]-B.VAS(tau[j],phi)*R0))
}
FS/m
}
# -----

# min-max účelová funkcia
FF <- function(lambda)
{
  kappa <- -log(phi)
  sigma <- 2*sqrt(rho*kappa)
  theta <- xi + sigma^2/(2*kappa^2) + sigma*lambda/kappa
loglike(theta=theta, kappa=kappa, sigma=sigma, r=R0)
}
# -----

# Načítanie dátových súborov: VAS1 model
t0 <- 937; n0 <- 1023;
RR.data <- read.table("D:\\data\\euribor20112014.txt", header=TRUE)
RR.master <- log(1+as.matrix(cbind(RR.data$EURIBOR1M, RR.data$EURIBOR2M,
  RR.data$EURIBOR3M, RR.data$EURIBOR6M,
  RR.data$EURIBOR9M, RR.data$EURIBOR12M))/100)

```

```

RR.data2 <- read.table("D:\\data\\vsvd20112014d.txt", header=TRUE)
RR2 <- log(1+as.matrix(cbind(RR.data2$VSVD10Y))/100)

R <- cbind(RR.master[t0:n0,], RR2[t0:n0,]); RR <- R

R.E.data <- read.table("D:\\data\\eonia20112014.txt", header=TRUE)
R.E <- log(1 + as.vector(R.E.data$EONIA)/100)
R0 <- R.E[t0:n0]

# maturity uvedené v rokoch
tau <- c(1/12,2/12,3/12,6/12,9/12,12/12,10)
n <- length(R0); m <- length(tau)

# úprava súboru okamžitých úrokových mier
for(t in 1:n) { if(R0[t]<=0) R0[t]<-1 }
for(t in 1:n) { if(R0[t]==1) R0[t]<-min(R0) }
# =====

options(digits=16)
phi <- NULL; xi<-NULL; rho<-NULL; lambda<-NULL;
# minimalizácia nákladového funkcionálu
library(rootSolve)
OPT <- optim(c(0.7), U, lower=c(1e-8), upper=c(1-1e-8), method="L-BFGS-B")

phi <- OPT$par[1]; xi<-LS.VAS(phi)[1]; rho<-LS.VAS(phi)[2];
# -----

# Odhad parametra lambda
LAMB.OPT <- NULL
LAMB.OPT <- optim(c(-1), FF, lower=c(-Inf), upper=c(Inf),
                 method="L-BFGS-B", control=list(fnscale=-1))
lambda <- LAMB.OPT$par[1]

# spätná transformácia na pôvodné parametre: theta, kappa, sigma
kappa <- -log(phi)
sigma <- 2*sqrt(rho*kappa)
theta <- xi + sigma^2/(2*kappa^2) + sigma*lambda/kappa

# VÝSLEDNÉ ODHADNUTÉ PARAMETRE
c(theta, kappa, sigma, lambda)
# 0.0001206708099604874 0.3566745809140577372
# 0.0016420135278958341 -4.1153421900880742257
# -----

# POSÚDENIE KVALITY VAS1 modelu
#
# MLR = ln(Lr) / ln(Lu)
r<-R0
OPT_u <- optim(c(0.1,0.2,0.05), loglik, lower=c(-Inf,-Inf,1e-16),
              upper=c(Inf,Inf,Inf), method="L-BFGS-B",
              control=list(fnscale=-1, maxit=100000))

```

```

MLR.VAS1 <- loglike(theta, kappa, sigma, r=R0) /
              loglike(OPT_u$par[1], OPT_u$par[2], OPT_u$par[3], r=R0)
MLR.VAS1
# MLR.VAS1 = 0.9462670695833679
# -----

# Nelineárny koeficient R^2
# R^2 = 1 - U(phi)/U(1,1,1)
U111 <- 0; SU111 <- 0;
for(j in 1:m){
SU111 <- SU111 + (tau[j]^2)*(mean(R[,j] - R0)^2) }
U111 <- 1/m * SU111

VAS1.R2 <- 1 - U(phi) / U111
VAS1.R2
# VAS1.R2 = 0.9911619292736735
# -----

```

## Príloha E.

Programový kód pre výpočet mesačnej dôchodkovej dávky: kombinácia ÚT ŠÚSR 2013 (spolu) s technickou úrokovou mierou 1,9%

```
# NAČÍTANIE DÁT
#
# pravdepodobnosti úmrtia do jedného roka
# vo veku 62, 63, ..., 101 rokov (zdroj: ÚT ŠÚSR 2013 (spolu))
q <- c(
0.0143581673431376,0.0151370509512284,0.0161816693852722,0.0172394325621499,
0.0182789624778921,0.0197394557652727,0.0213688695106597,0.0233254186787697,
0.0250943333098687,0.0276913693339128,0.0304661486568316,0.0336241845373200,
0.0367845078963094,0.0398662327924588,0.0433452835667935,0.0480313692119067,
0.0541122144804971,0.0611486983596026,0.0698189502642189,0.0788906363385238,
0.0881612226690605,0.0978243489893087,0.1099730808558690,0.1209936482542400,
0.1354627272518600,0.1516277253524830,0.1696435460837480,0.1896666408707070,
0.2118507703366440,0.2363414207764870,0.2632686724353270,0.2927383500858470,
0.3248213587027550,0.3595412324153440,0.3968601192488090,0.4366637020362650,
0.4787459261350640,0.5227948632475310,0.5683815610904700,1)

# pravdepodobnosti prežitia jedného roka a faktory prežitia
pp <- 1-q; ppp <- rep(1, times=(length(pp)+1))
for(i in 2:(length(pp)+1))
  { ppp[i] <- ppp[i-1]*pp[i-1] }
# =====

# FUNKCIE
# súčasná hodnota predlehotného dôchodku
äxn <- function(x,n,i)
{ v<-(1+i)^(-1)
  if(n==0) { SHD <- 1; SHD }
  else{
    pppx <- rep(1, times=(n+1)); SHD <- rep(0, times=n);
    for(k in 2:(n+1)){ pppx[k] <- pppx[k-1]*pp[x-62+k-1] }
    for(t in 1:n) { SHD[t] <- pppx[t]*v^(t-1) }
    sum(SHD)
  }
}

# súčasná hodnota poistenia na dožitie
Axn1 <- function(x,n,i)
{ v<-(1+i)^(-1);
  if(n==0) { SHD <- 1; SHD }
  else{
    pppx <- rep(1, times=(n+1)); SHD <- 0;
    for(k in 2:(n+1)){ pppx[k] <- pppx[k-1]*pp[x-62+k-1] }
    SHD <- pppx[n+1]*v^n
    SHD
  }
}
# =====
```

```

# PARAMETRE MODELU
n<-40      # maximálna doba vyplácania dôchodku
i<-0.019   # technická úroková miera
v<-1/(1+i) # diskontný faktor

P<-10000   # jednorazové poistné

alfa <- 0.05 # začiatkové náklady
beta <- 0.04 # bežné náklady spojené s vyplácaním dávok
gamma <- 0.01 # inkasné náklady, marža z prineseného poistného
e <- 0.05    # marža poisťovne pri vyplatení dávky pri úmrtí dôchodcu
# =====

# POMOCNÝ VÝPOČET
M <- 0; DDN <- rep(0, times=7);
for(j in 1:6)
{
DDN[j] <- (((äxn(62+(j-1),7-(j-1),i)-13/24*(1-Axn1(62+(j-1),7-(j-1),i))) +
            (äxn(62+j,7-j,i)-13/24*(1-Axn1(62+j,7-j,i)))))/2
M <- M + DDN[j]*ppp[j]*(1-pp[j])*(1+i)^(-(j-0.5))
}
DDN[7] <- (äxn(68,1,i)-13/24*(1-Axn1(68,1,i)))/2
M <- M + DDN[7]*ppp[7]*(1-pp[7])*(1+i)^(-6.5)
# -----

# VÝPOČET MESAČNEJ DÔCHODKOVEJ DÁVKY
Sm <- (1/12)*(1-gamma)*P / ((äxn(62,n,i)-13/24)*(1+beta)+alfa+(1-e)*M)
options(digits=4)
Sm      # mesačná výška dávky = 50.43
# =====

```

**Programový kód pre výpočet mesačnej dôchodkovej dávky: kombinácia ÚT ŠÚSR 2013 (spolu) s modelom VAS1**

```

# NAČÍTANIE DÁT
#
# pravdepodobnosti úmrtia do jedného roka
# vo veku 62, 63, ..., 101 rokov (zdroj: ÚT ŠÚSR 2013 (spolu))
q <- c(
0.0143581673431376,0.0151370509512284,0.0161816693852722,0.0172394325621499,
0.0182789624778921,0.0197394557652727,0.0213688695106597,0.0233254186787697,
0.025094333098687,0.0276913693339128,0.0304661486568316,0.0336241845373200,
0.0367845078963094,0.0398662327924588,0.0433452835667935,0.0480313692119067,
0.0541122144804971,0.0611486983596026,0.0698189502642189,0.0788906363385238,
0.0881612226690605,0.0978243489893087,0.1099730808558690,0.1209936482542400,
0.1354627272518600,0.1516277253524830,0.1696435460837480,0.1896666408707070,
0.2118507703366440,0.2363414207764870,0.2632686724353270,0.2927383500858470,
0.3248213587027550,0.3595412324153440,0.3968601192488090,0.4366637020362650,
0.4787459261350640,0.5227948632475310,0.5683815610904700,1)

```



```

# pravdepodobnosti prežitia jedného roka a faktory prežitia
pp <- 1-q; ppp <- rep(1, times=(length(pp)+1))
for(i in 2:(length(pp)+1))
  { ppp[i] <- ppp[i-1]*pp[i-1] }
# =====

# FUNKCIE
# súčasná hodnota predlehotného dôchodku pri trhovom výpočte
äxn.MV <- function(x,n,I)
{ if(n==0) { SHD <- 1; SHD }
  else{
    if(n==1) { SHD <- 1; SHD }
    else{
      pppx<-rep(1,times=(n+1)); SHD<-rep(0, times=(n+1)); SHD[1]<-1;
      for(k in 2:(n+1)){ pppx[k] <- pppx[k-1]*pp[x-62+k-1] }
      for(T in 1:(n-1)) { SHD[T+1] <- pppx[T+1]/I[1,T] }
      sum(SHD)
    }
  }
}
# -----

# súčasná hodnota poistenia na dožitie pri trhovom výpočte
Axn1.MV <- function(x,n,I)
{ if(n==0) { SHD <- 1; SHD }
  else{
    pppx <- rep(1, times=(n+1)); SHD <- 0;
    for(k in 2:(n+1)){ pppx[k] <- pppx[k-1]*pp[x-62+k-1] }
    SHD <- pppx[n+1]/I[1,n]
    SHD
  }
}

# pomocné funkcie Vašíčkovho modelu
B.VAS <- function(tau, phi)
{ (-(1-phi^tau)/log(phi)) }

A.VAS <- function(tau, phi, xi, rho)
{ exp(xi*(B.VAS(tau,phi)-tau) - rho*(B.VAS(tau,phi))^2) }

PT.VAS <- function(tau, phi, xi, rho, r)
{ A.VAS(tau, phi, xi, rho)*exp(-B.VAS(tau, phi)*r) }

RT.VAS <- function(tau, phi, xi, rho, r)
{ -log(PT.VAS(tau, phi, xi, rho, r)) / tau }
# =====

# PARAMETRE MODELU
n<-40          # maximálna doba vyplácania dôchodku
i<-0.019       # technická úroková miera
v<-1/(1+i)     # diskontný faktor

```

```

P<-10000      # jednorazové poistné

alfa <- 0.05   # začiatkové náklady
beta <- 0.04   # bežné náklady spojené s vyplácaním dávok
gamma <- 0.01  # inkasné náklady, marža z prineseného poistného
e <- 0.05     # marža poisťovne pri vyplatení dávky pri úmrtí dôchodcu
# =====

# NAPLNENIE MATICE ÚROKOVÝCH FAKTOROV
# parametre VAS1 modelu
phi <- 7.000002541173184e-01
xi <- 1.905576812799110e-02
rho <- 1.889823784809175e-06
r00 <- 0.00011937 # začiatková okamžitá úroková miera

# matica investičných výnosov (obsahuje prvky R(tau))
J <- matrix(rep(0, times=(n^2)), ncol=n)
for(t in 1:n)
{ for(T in 1:n)
{ J[t,T] <- RT.VAS(T, phi, xi, rho, r00) }
}
# matica výnosových faktorov (obsahuje prvky exp(R(tau)*tau))
I <- matrix(rep(0, times=(n^2)), ncol=n)
for(t in 1:n)
{ for(T in 1:n)
{ I[t,T] <- exp(J[t,T]*T) }
}

# POMOCNÝ VÝPOČET
M <- 0; DDN <- rep(0, times=7)
DDN[1] <- (((äxn.MV(62,7,I)-13/24*(1-Axn1.MV(62,7,I))) +
            (äxn.MV(63,6,I)-13/24*(1-Axn1.MV(63,6,I)))))/2
M <- M + DDN[1]*ppp[1]*(1-pp[1])/(exp(RT.VAS(0.5, phi, xi, rho, r00)*0.5))

for(j in 2:6){
  DDN[j] <- (((äxn.MV(62+(j-1),7-(j-1),I) -
              13/24*(1-Axn1.MV(62+(j-1),7-(j-1),I))) +
              (äxn.MV(62+j,7-j,I) -
              13/24*(1-Axn1.MV(62+j,7-j,I)))))/2
  M <- M + DDN[j]*ppp[j]*(1-pp[j])/
        (exp(RT.VAS(j-0.5, phi, xi, rho, r00)*(j-0.5)))
}
DDN[7] <- (äxn.MV(68,1,I)-13/24*(1-Axn1.MV(68,1,I)))/2
M <- M + DDN[7]*ppp[7]*(1-pp[7])/
      (exp(RT.VAS(6.5, phi, xi, rho, r00)*6.5))
# -----

# TRHOVÝ VÝPOČET MESAČNEJ DŮCHODKOVEJ DÁVKY
Sm <- (1/12)*(1-gamma)*P / ((äxn.MV(62,n,I)-13/24)*(1+beta)+alfa+(1-e)*M)
options(digits=4)
Sm      # mesačná výška dávky = 48.36
# =====

```

## Príloha F.

### Programový kód pre stresové testy úrokových mier pomocou dynamickej metódy spárovania aktív a pasív

```
# Stresové testy úrokových mier
# Dynamická metóda spárovania aktív a pasív
# striedavé CIR model + LCA DL

# formálna výška dávky
S <- 553.0874482693401
# priemerné dávky vyplácané pri úmrtí v prvých siedmych rokoch
DDN <- c(3280.4300352936375, 2818.8547669616319, 2343.0180724602619,
         1852.0303171009818, 1344.6914076770895, 819.9326331808060,
         276.5437241346701)
# -----

# FUNKCIE
A.CIR <- function(T)
{ (2*eta*exp((kappa+lambda+eta)*T/2) /
  ((kappa+lambda+eta)*(exp(eta*T)-1)+2*eta))^(2*kappa*theta/sigma^2) }

B.CIR <- function(T)
{ 2*(exp(eta*T)-1) / ((kappa+lambda+eta)*(exp(eta*T)-1)+2*eta) }

PT.CIR.curve <- function(T)
{ A.CIR(T)*exp(-B.CIR(T)*r00) }

RT.CIR.curve <- function(T)
{ -log(PT.CIR.curve(T)) / T }
# -----

# globálne parametre
n<-80; # maximálna doba vyplácania dôchodku
m<-1; # doba platenia poistného; poistné sa platí jednorazovo
l<-0; # doba odkladu
# =====

# údaje o úmrtnosti (pri týchto pravdepodobnostiach sa počítala ročná dávka)
# model LCA DL
q <- c(
0.0138700987992, 0.0143304262401, 0.0149249922497, 0.0154859201418,
0.0159365008933, 0.0167368857289, 0.0175342171228, 0.0185436059335,
0.0194155369526, 0.0211398534263, 0.0227904900844, 0.0245541792079,
0.0265161043900, 0.0285251162578, 0.0308284309167, 0.0339557475447,
0.0387975636302, 0.0448746870903, 0.0524991886884, 0.0610865090096,
0.0698901087617, 0.0797690962990, 0.0931015873476, 0.1055767865070,
0.1233099427824, 0.1442270986263, 0.1689301528549, 0.1980601480830,
0.2323817862100, 0.2729244259706, 0.3195656503493, 0.3731278813116,
0.4356835088962, 0.5062496126712, 0.5880399964426, 0.6835710495943,
0.7858503185452, 0.8817313082807, 0.9665734507467, 1)
```

```

# pravdepodobnosti prežitia jedného roka
pp <- 1-q
# faktory prežitia
ppp <- rep(1, times=(length(pp)+1))
for(i in 2:(length(pp)+1))
{ ppp[i] <- ppp[i-1]*pp[i-1] }
# =====

P<-10000      # poistné, ktoré klient doniesol z II. piliera
alfa <- 0.05   # začiatkové náklady
beta <- 0.04   # bežné náklady spojené s vyplácaním dávok
gamma <- 0.01  # inkasné náklady, marža z prineseného poistného
e <- 0.05      # marža poisťovne pri vyplácaní časti poistného
# =====

# DYNAMICKÁ METÓDA SPÁROVANIA AKTÍV A PASÍV
# časová jednotka = 1 polrok

# vektory pravdepodobností
ppP <- c(ppp[1], rep(0, times=(n+1+1)))
ppS <- as.vector(rbind(ppp,ppp*c(q,1)))

# Cash-flow vektory
CFP <- c(rep((1-gamma)*P, times=m), rep(0, times=(n+1+1)))
CFS <- as.vector(rbind(c(rep(S, times=(n/2)), 0),
  c((1-e)*DDN,rep(0,times=(41-7)))) + c(alfa*S,rep(0,times=(n+1))) +
  as.vector(rbind(c(rep(beta*S, times=(n/2)), 0), rep(0,times=41)))
# -----

# funkcia akumulovanej hodnoty poistenia
AH.rekurent <- function(CX, I, cas)
{
  AH <- rep(0, times=(cas+1))
  AH[1] <- CFP[1]*ppP[1] - CFS[1]*ppS[1]
  if(cas>0) {
for(k in 2:(cas+1)) { GL <- 0;
for(o in 1:(k-1)) { GL <- GL + AH[o]*CX[o,k-o]*I[o,k-o] }
AH[k] <- GL + CFP[k]*ppP[k] - CFS[k]*ppS[k]
}
}
AH[cas+1]
}
# =====

# matica investičných výnosov (striedavé CIR modely)
J <- matrix(rep(0, times=((1+n)^2)), ncol=(1+n))
for(t in 1:(1+n))
{
  if(t<=9) { # CIR1
theta <- 1.020850925978414e-04; kappa <- 7.216178848084256e+01;
sigma <- 7.317726664919095e-01; lambda<- -73.346011180566805;
eta <- 1.572693826970634; r00 <- 0.001438964;

```

```

    for(T in 1:(l+n)) { J[t,T] <- RT.CIR.curve(T/2)} }
if(t>9 && t<=19) { # CIR4
theta <- 0.0002078876133594524; kappa <- 6.1673531847063998157;
sigma <- 0.1648599964471293700; lambda<- -6.5894392883615538;
eta <- 0.4821973825684711; r00 <- 0.001438964;
  for(T in 1:(l+n)) { J[t,T] <- RT.CIR.curve(T/2)} }
if(t>19 && t<=29) { # CIR2
theta <- 2.870041901112366e-04; kappa <- 1.017456052309447e+01;
sigma <- 2.633996146058024e-01; lambda<- -10.7063182864766073;
eta <- 0.6492495921185776; r00 <- 0.001438964;
  for(T in 1:(l+n)) { J[t,T] <- RT.CIR.curve(T/2)} }
if(t>29 && t<=39) { # CIR3
theta <- 2.442298561689059e-04; kappa <- 3.620538781142688e+01;
sigma <- 3.742869009281550e-01; lambda<- -35.8405215462492635;
eta <- 0.6428909393337791; r00 <- 0.001438964;
  for(T in 1:(l+n)) { J[t,T] <- RT.CIR.curve(T/2)} }
if(t>39 && t<=49) { # CIR4
theta <- 0.0002078876133594524; kappa <- 6.1673531847063998157;
sigma <- 0.1648599964471293700; lambda<- -6.5894392883615538;
eta <- 0.4821973825684711; r00 <- 0.001438964;
  for(T in 1:(l+n)) { J[t,T] <- RT.CIR.curve(T/2)} }
if(t>49 && t<=59) { # CIR1
theta <- 1.020850925978414e-04; kappa <- 7.216178848084256e+01;
sigma <- 7.317726664919095e-01; lambda<- -73.346011180566805;
eta <- 1.572693826970634; r00 <- 0.001438964;
  for(T in 1:(l+n)) { J[t,T] <- RT.CIR.curve(T/2)} }
if(t>59 && t<=69) { # CIR2
theta <- 2.870041901112366e-04; kappa <- 1.017456052309447e+01;
sigma <- 2.633996146058024e-01; lambda<- -10.7063182864766073;
eta <- 0.6492495921185776; r00 <- 0.001438964;
  for(T in 1:(l+n)) { J[t,T] <- RT.CIR.curve(T/2)} }
if(t>69 && t<=80) { # CIR1
theta <- 1.020850925978414e-04; kappa <- 7.216178848084256e+01;
sigma <- 7.317726664919095e-01; lambda<- -73.346011180566805;
eta <- 1.572693826970634; r00 <- 0.001438964;
  for(T in 1:(l+n)) { J[t,T] <- RT.CIR.curve(T/2)} }
}
# -----

# matica výnosových faktorov
I <- matrix(rep(1, times=((l+n)^2)), ncol=(l+n))
for(t in 1:(l+n))
{
  if(t<=15) { for(T in c(1,2,4,10,20,30,60))
    {I[t,T]<-exp(J[t,T]*T/2)} }
  if(t>15 && t<=21) { for(T in c(2,4,10,20,30,60))
    {I[t,T]<-exp(J[t,T]*T/2)} }
  if(t>21 && t<=51) { for(T in c(2,4,10,20,30))
    {I[t,T]<-exp(J[t,T]*T/2)} }
  if(t>51 && t<=61) { for(T in c(2,4,10,20))
    {I[t,T]<-exp(J[t,T]*T/2)} }
  if(t>61 && t<=71) { for(T in c(2,4,10))

```

```

        {I[t,T]<-exp(J[t,T]*T/2)} }
if(t>71 && t<=77) { for(T in c(2,4))
        {I[t,T]<-exp(J[t,T]*T/2)} }
if(t>77 && t<=79) { for(T in c(2))
        {I[t,T]<-exp(J[t,T]*T/2)} }
}
# =====

# pravidlo solventnosti
border.cond <- function(CX, cas)
{ AH.rekurent(CX, I, cas) }
# -----

# penalizačná funkcia
penalize <- function(CX, nu)
{ PEN <- 0;
  for(i in 1:(1+n-1)) { PEN <- PEN + nu*(min(border.cond(CX,i),0))^2 }
  return(PEN)
}
# =====

options(digits=16)
# iniciálny vektor investičných koeficientov
init <- c(rep(rep(1/7,7),15), rep(rep(1/6,6),6), rep(rep(1/5,5),30),
          rep(rep(1/4,4),10), rep(rep(1/3,3),10), rep(rep(1/2,2),6))

# pomocná účelová funkcia
F.AH.REK <- function(dd, nu)
{ CX <- matrix(rep(0, times=((1+n+1)^2)), ncol=(1+n+1)); j <- 1;
  for(t in 1:(1+n+1)) {
    if(t<=15) { for(k in c(1,2,4,10,20,30,60)) {CX[t,k]<-dd[j]; j<-j+1;} }
    else{
      if(t<=21) { for(k in c(2,4,10,20,30,60)) {CX[t,k]<-dd[j]; j<-j+1;} }
      else{
        if(t<=51) { for(k in c(2,4,10,20,30)) {CX[t,k]<-dd[j]; j<-j+1;} }
        else{
          if(t<=61) { for(k in c(2,4,10,20)) {CX[t,k]<-dd[j]; j<-j+1;} }
          else{
            if(t<=71) { for(k in c(2,4,10)) {CX[t,k]<-dd[j]; j<-j+1;} }
            else{
              if(t<=77) { for(k in c(2,4)) {CX[t,k]<-dd[j]; j<-j+1;} }
            }
          }
        }
      }
    }
  }
  CX[78,2]<-1; CX[79,2]<-1;

  for(t in 1:(1+n-1))
    { M <- sum(CX[t,])
      if(M>0) { for(k in c(1,2,4,10,20,30,60)) CX[t,k] <- CX[t,k]/M }
    }

AH.rekurent(CX, I, cas=n) - penalize(CX,nu)
}
# -----

```

```

# OPTIMALIZÁCIA
res <- NULL; eps <- 1e-17; cc <- NULL;
res <- optim(init, F.AH.REK, nu=0.7, lower = rep(eps,times=373),
            upper = rep(1,times=373), method="L-BFGS-B",
            control=list(fnscale=-1))
cc <- res$par

CX.res.norm <- matrix(rep(0, times=((1+n+1)^2)), ncol=(1+n+1))
j <- 1;
for(t in 1:(1+n+1))
{
  if(t<=15) { for(k in c(1,2,4,10,20,30,60))
    {CX.res.norm[t,k]<-cc[j]; j<-j+1;} }
  if(t>15 && t<=21) { for(k in c(2,4,10,20,30,60))
    {CX.res.norm[t,k]<-cc[j]; j<-j+1;} }
  if(t>21 && t<=51) { for(k in c(2,4,10,20,30))
    {CX.res.norm[t,k]<-cc[j]; j<-j+1;} }
  if(t>51 && t<=61) { for(k in c(2,4,10,20))
    {CX.res.norm[t,k]<-cc[j]; j<-j+1;} }
  if(t>61 && t<=71) { for(k in c(2,4,10))
    {CX.res.norm[t,k]<-cc[j]; j<-j+1;} }
  if(t>71 && t<=77) { for(k in c(2,4))
    {CX.res.norm[t,k]<-cc[j]; j<-j+1;} }
}

# normovanie
for(t in 1:(1+n-2))
{ M <- sum(CX.res.norm[t,])
  if(M>0) { for(k in 1:(1+n+1))
    CX.res.norm[t,k] <- CX.res.norm[t,k]/M }}
# hľadaná investičná matica: CX.res.norm

AH <- rep(0, times=(n+2))
for(i in 0:n) { AH[i+1]<-AH.rekurent(CX=CX.res.norm, I, cas=i) }
AH
# akumulovaná hodnota poistenia v časoch 0,1,...,80: AH
# =====

```