

VEDECKÁ RADA FAKULTY MATEMATIKY,
FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

RNDr. Mária Trnovská

Autoreferát dizertačnej práce

VÁŽENÉ CENTRÁLNE TRAJEKTÓRIE V SEMIDEFINITNOM PROGRAMOVANÍ

na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia:

11-14-09 **Aplikovaná matematika**

Bratislava 2007

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre aplikovanej matematiky a štatistiky, Fakulty matematiky, fyziky a informatiky (FMFI) Univerzity Komenského (UK) v Bratislave.

Predkladateľ: RNDr. Mária Trnovská

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI - UK v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Školiteľ: Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI - UK v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Oponenti:

Prof. RNDr. Igor Bock, PhD., FEI STU Bratislava
Doc. RNDr. Ladislav Halada, PhD., Ústav informatiky SAV Bratislava
Doc. RNDr. Milan Hamala, CSc., FMFI UK Bratislava

Autoreferát bol rozoslaný dňa:

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa: o pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia 11-14-09 Aplikovaná matematika vymenovanou podpredsedom spoločnej odborovej komisie dňa na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Podpredseda spoločnej odborovej komisie:

Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI - UK v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

1 Úvod

Semidefinitné programovanie (SDP) je špeciálnou triedou matematického programovania. Úlohu SDP možno charakterizovať ako optimalizačnú úlohu s lineárnou účelovou funkciou a lineárnymi ohraňovacími, kde premennou je symetrická matica, od ktorej požadujeme kladnú semidefinitnosť, alebo alternatívne, ako úlohu s lineárnou účelovou funkciou a vektorovou premennou, ktorú optimalizujeme za podmienky, že afinná kombinácia daných matíc je kladne semidefinitná. Hlavný rozdiel medzi semidefinitným a lineárnym programovaním spočíva v tom, že množina prípustných riešení v SDP je síce konvexná, ale už nie polyedrická a napriek tomu, že teória duality v SDP vykazuje podobné symetrické črty ako teória duality v lineárnom programovaní, predsa len nie je taká silná.

Úloha semidefinitného programovania bola pravdepodobne prvý krát naformulovaná Bellmanom a Fanom [3] začiatkom šesťdesiatych rokov ako zovšeobecnenie úlohy lineárneho programovania. Avšak pozitívny rozvoj v SDP začal po roku 1984, keď Karmarkar publikoval svoj projektívny algoritmus pre lineárne programovanie [15], ktorý bol nie len polynomiálny, ale navyše vykazoval vynikajúce výsledky v praxi. Prekvapujúcim bolo neskôršie zistenie, že tento algoritmus úzko súvisí s (logaritmickou) bariérovou metódou (alebo inak metódou vnútorného bodu - MVB) vyvinutou v roku 1968 Fiaccom a McCormickom [8] pre nelineárne úlohy matematického programovania. Následne sa mnoho matematikov pokúšalo rozšíriť MVB na všeobecné úlohy konvexného programovania. Avšak pri aplikovaní novej metódy sa vyskytli problémy s analýzou Newtonovej metódy. Tieto boli vyriešené v roku 1988 Nesterovom a Nemirovskim definovaním tzv. vlastnosti self-concordance [25], [26]. Tento výsledok viedol k zovšeobecneniu MVB pre lineárne programovanie na MVB pre semidefinitné programovanie [2], [27].

V dôsledku tohto zovšeobecnenia sa v priebehu deväťdesiatych rokov SDP stalo populárnym a zaujalo odborníkov z mnohých oblastí matematiky, ako sú konvexné programovanie, lineárna algebra, numerická optimalizácia, kombinatorická optimalizácia, teória riadenia či štatistika. Tento záujem mal niekoľko príčin: špeciálnym prípadom semidefinitného programovania sú niektoré dôležité triedy konvexnej optimalizácie ako lineárne, kvadratické programovanie alebo tzv. programovanie nad kužeľmi druhého rádu; ohraňovania v tvare podmienky semidefinitnosti sa objavujú v mnohých aplikáciách, nielen v oblastiach, ktoré sme spomenuli vyššie, ale aj v teórii aproximácie, spektrálnej analýze alebo štrukturálnom dizajne (pozri napr. [34]); a napokon, semidefinitné úlohy sa dajú efektívne riešiť pomocou metód vnútorného bodu.

Okrem algoritmickej aspektov metód vnútorného bodu sa študovali aj teoretické aspekty, ktoré v sebe zahŕňajú centrálnu trajektóriu - analytickú krivku optimálnych riešení parametrizovaných bariérových úloh. Táto krivka leží vo vnútri množiny prípustných riešení a vedie k optimálnemu riešeniu pôvodnej úlohy. Väčšina algoritmov MVB sleduje centrálnu trajektóriu a jej vlastnosti sú dôležité pre analýzu konvergenzie. V dôsledku niektorých implementačných problémov pri navrhovaní algoritmov vznikol záujem o tzv. vážené centrálné trajektórie. Avšak zatiaľ čo v lineárnom programovaní sa

dá pojem centrálnej trajektórie ľahko rozšíriť na pojem váženej centrálnej trajektórie - definovaním váženej logaritmickkej bariérovej funkcie, v semidefinitnom programovaní takého zovšeobecnenie nie je zrejmé. Preto vzniklo niekoľko prístupov definovania centrálnej trajektórie. V dizertačnej práci sa študujú typy vážených centrálnych trajektórií uvažované v [24]. Tu je centrálna trajektória definovaná ako množina optimálnych riešení váženého centrujúceho systému a podľa typu symetrizácie tzv. podmienky komplementarity sa rozlišuje niekoľko typov vážených trajektórií.

2 Prehľad súčasného stavu problematiky

2.1 Základné fakty o semidefinitnom programovaní

V tejto časti podáme súhrn najdôležitejších poznatkov z oblasti semidefinitného programovania.

Označme S^n vektorový priestor symetrických matic $n \times n$. Budeme písať $\mathbf{X} \succeq 0$ alebo $\mathbf{X} \in S_+^n$, ak $\mathbf{X}$ je kladne semidefinitná symetrická matica a $\mathbf{X} \succ 0$ alebo $\mathbf{X} \in S_{++}^n$, ak $\mathbf{X}$ je kladne definitná symetrická matica. Na S^n definujeme skalárny súčin "•" ako

$$\mathbf{X} \bullet \mathbf{Y} = \text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{Y}).$$

Nech $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m, \mathbf{C} \in S^n$ a $b \in R^m$ sú dané. Uvažujeme nasledujúcu primárnu úlohu semidefinitného programovania

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{X} \bullet \mathbf{C} \\ & \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mathbf{X} \succeq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $\mathbf{X} \in S^n$ je premenná. Duálnu úlohu semidefinitného programovania možno vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C}, \\ & \mathbf{S} \succeq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

kde $(\mathbf{S}, y) \in S^n \times R^m$ sú premenné. Označme

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{X} \in S^n \mid \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad \mathbf{X} \succeq 0 \},$$

$$\mathcal{P}^0 = \{ \mathbf{X} \in S^n \mid \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad \mathbf{X} \succ 0 \}$$

primárnu množinu prípustných riešení, resp. primárnu množinu ostro prípustných riešení a

$$\mathcal{D} = \left\{ (y, \mathbf{S}) \in R^m \times S^n \mid \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{S} \succeq 0 \right\},$$

$$\mathcal{D}^0 = \left\{ (y, \mathbf{S}) \in R^m \times S^n \mid \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{S} \succ 0 \right\}$$

duálnu množinu prípustných riešení, resp. duálnu množinu ostro prípustných riešení.

Nech p^* , d^* je primárna a duálna optimálna hodnota, t.j.

$$p^* \in \langle -\infty, \infty \rangle, \quad p^* = \inf \{ \mathbf{C} \bullet \mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in \mathcal{P} \},$$

$$d^* \in \langle -\infty, \infty \rangle, \quad d^* = \sup \{ b^T y \mid y \in \mathcal{D} \},$$

a definujeme $p^* = +\infty$, ak $\mathcal{P} = \emptyset$ a $d^* = -\infty$, ak $\mathcal{D} = \emptyset$.

Označme

$$\mathcal{P}^* = \{ \mathbf{X} \in \mathcal{P} \mid \mathbf{C} \bullet \mathbf{X} = p^* \},$$

$$\mathcal{D}^* = \{y \in \mathcal{D} \mid b^T y = d^*\}$$

primárnu a duálnu množinu optimálnych riešení.

Teória duality v semidefinitnom programovaní nie je taká silná ako v lineárnom programovaní. Je známe, že v lineárnom programovaní buď existujú optimálne riešenia primárnej a duálnej úlohy a $p^* = d^*$, alebo jeden z problémov je neohraničený a druhý neprípustný, alebo obe úlohy sú neprípustné. Avšak v SDP môže nastať, že $p^* > d^*$ aj v prípade keď optimálne riešenia existujú, alebo, že jedna z úloh má prázdnu množinu optimálnych riešení, hoci optimálna hodnota je konečná.

V nasledujúcej vete sú naformulované základné poznatky o dualite v SDP.

Veta 2.1. (*Veta o dualite*)

- a) Ak $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, tak $d^* = p^*$. Navyše, ak p^* je konečná, tak $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$.
- b) Ak $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$, tak $d^* = p^*$. Navyše, ak d^* je konečná, tak $\mathcal{D}^* \neq \emptyset$.
- c) Ak $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset, \mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, tak $d^* = p^*$ a $\mathcal{P}^* \neq \emptyset, \mathcal{D}^* \neq \emptyset$.

Nasledujúca veta uvádza nutné a postačujúce podmienky optimality.

Veta 2.2. Ak $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset, \mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, potom $(\mathbf{X}, y, \mathbf{S})$ je optimálnym riešením (1), (2) vtedy a len vtedy, keď spĺňa nasledujúci systém:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} &= b_i \quad i = 1, \dots, m, \quad \mathbf{X} \succeq 0 \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} &= \mathbf{C}, \quad \mathbf{S} \succeq 0, \\ \mathbf{XS} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3}$$

Prvá podmienka je primárna prípustnosť, druhá je duálna prípustnosť a posledná podmienka sa nazýva podmienka komplementarity. Optimálne riešenia, ktoré spĺňajú podmienku komplementarity sa nazývajú komplementárne.

Definícia 2.1. (*Ostro komplementárne riešenie*)

Komplementárne riešenie $(\mathbf{X}^*, y^*, \mathbf{S}^*)$ dvojice úloh $(P), (D)$ je ostro komplementárne ak

$$\mathbf{X}^* + \mathbf{S}^* \succ 0.$$

Hoci v lineárnom programovaní z existencie optimálneho riešenia vyplýva existencia ostro komplementárneho optimálneho riešenia, v semidefinitnom programovaní existencia ostro komplementárneho riešenia nie je zaručená.

V teórii metód vnútorného bodu pre SDP sa uvažujú nasledujúce dva predpoklady:

Predpoklad 1: Matice $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ sú lineárne nezávislé.

Predpoklad 2: $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset, \mathcal{D}^0 \neq \emptyset$.

Predpoklad 1 zaručuje jednoznačnú korešpondenciu medzi duálnymi premennými y a $\mathbf{S}$. Predpoklad 2 je nevyhnutný pre teóriu metód vnútorného bodu a navyše zabezpečuje také primárno-duálne vlastnosti aké platia v lineárnom programovaní (viď.

Veta 2.1.). Navyše, oba tieto predpoklady sú ekvivalentné s tým, že primárna i duálna množina optimálnych riešení je neprázdna a ohraničená (pozri [1 *]). V celej tejto časti budeme ďalej uvažovať, že tieto predpoklady sú splnené.

Pre fixné $\mu \in R_{++}$ definujme bariérové funkcie:

$$f_\mu^P : S_{++}^n \rightarrow R, \quad f_\mu^P(\mathbf{X}) = \mathbf{C} \bullet \mathbf{X} - \mu \ln \det(\mathbf{X})$$

a

$$f_\mu^D : R^m \times S_{++}^n \rightarrow R, \quad f_\mu^D(y, \mathbf{S}) = b^T y + \mu \ln \det(\mathbf{S}).$$

Príslušné bariérové úlohy sú dané nasledovne

$$\begin{aligned} \min \quad & f_\mu^P(\mathbf{X}) \\ & \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mathbf{X} \succ 0 \end{aligned} \tag{4}$$

a

$$\begin{aligned} \max \quad & f_\mu^D(y, \mathbf{S}) \\ & \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C}, \\ & \mathbf{S} \succ 0, \end{aligned} \tag{5}$$

kde $\mathbf{X} \in S^n$ a $(y, \mathbf{S}) \in R^m \times S^n$ sú premenné.

Veta 2.3. Pre ľubovoľné $\mu > 0$ má dvojica úloh (4), (5) jediné riešenie.

Označme $(\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu))$ optimálne riešenie dvojice úloh (4), (5).

Definícia 2.2. Množina

$$\{(\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu)) \mid \mu > 0\}$$

sa nazýva centrálna trajektória.

Poznámka. V teórii metód vnútorného bodu sa centrálna trajektória alternatívne definuje ako zobrazenie

$$f_{cp} : R_{++} \rightarrow S_{++}^n \times R^m \times S_{++}^n, \quad f_{cp}(\mu) = (\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu)).$$

V nasledujúcej vete sú naformulované nutné a postačujúce podmienky optimality pre dvojicu úloh (4), (5).

Veta 2.4. Nech $\mu > 0$. Potom $(\mathbf{X}, y, \mathbf{S})$ je optimálnym riešením úloh (4), (5) vtedy a len vtedy, ak spĺňa systém

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} &= b_i, \quad i = 1, \dots, m, & \mathbf{X} &\succ 0, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} &= \mathbf{C}, & \mathbf{S} &\succ 0, \\ \mathbf{X}\mathbf{S} &= \mu \mathbf{I}. \end{aligned} \tag{6}$$

Z Vety 2.4 vyplýva, že centrálna trajektória môže byť ekvivalentne definovaná ako implicitné riešenie systému (6). Táto vlastnosť sa využíva pri skúmaní jej analytických vlastností.

Fakt, že súčin dvoch symetrických matíc vo všeobecnosti nie je symetrická matica, spôsobuje problémy v algoritmoch metód vnútorného bodu, ktoré sú založené na riešení systému (6). Preto sa matica $\mathbf{XS}$ nahrádza nejakým typom symetrizovanej matice $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{S}) \in S^n$, od ktorej sa požaduje splnenie nasledujúcej vlastnosti:

$$\text{Ak } \mathbf{X} \succeq 0, \mathbf{S} \succeq 0, \text{ potom } \mathbf{XS} = 0 \text{ vtedy a len vtedy keď } \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = 0.$$

V predkladanej práci sa uvažujú nasledovné symetrizácie:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{S}) &= (\mathbf{XS} + \mathbf{SX})/2, \\ \Phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{S}) &= \mathbf{X}^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}, \\ \Phi_3(\mathbf{X}, \mathbf{S}) &= \mathbf{L}_{\mathbf{X}}^T\mathbf{S}\mathbf{L}_{\mathbf{X}}, \\ \Phi_4(\mathbf{X}, \mathbf{S}) &= (\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}^{\frac{1}{2}} + \mathbf{S}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}})/2, \\ \Phi_5(\mathbf{X}, \mathbf{S}) &= (\mathbf{U}_{\mathbf{S}}^T\mathbf{L}_{\mathbf{X}} + \mathbf{L}_{\mathbf{X}}^T\mathbf{U}_{\mathbf{S}})/2. \end{aligned} \tag{7}$$

Najbežnejšia z týchto symetrizácií je symetrizácia Φ_1 , ktorá sa v literatúre označuje ako AHO-symetrizácia (podľa autorov Alizadeh, Haeberly, Overton). Symetrizáciu Φ_2 budeme niekedy označovať aj ako "odmocninová" (square-root) symetrizácia a symetrizáciu Φ_3 ako Choleského symetrizácia. Tieto dve symetrizácie sa tiež často vyskytujú v algoritmoch. V práci [24] sa uvádzajú aj symetrizácie Φ_4, Φ_5 , ktoré sú však zatiaľ málo študované a používané.

Nahradíme v poslednej rovnici systému (6) súčin $\mathbf{XS}$ symetrizovanou maticou $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{S})$ a identickú maticu nejakou kladne definitnou maticou $\mathbf{W}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} &= b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \mathbf{X} \succ 0, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} &= \mathbf{C}, \quad \mathbf{S} \succ 0, \\ \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{S}) &= \mu \mathbf{W}. \end{aligned} \tag{8}$$

Váženú centrálnu trajektoriu potom môžeme definovať ako množinu riešení systému (8). Zrejme nie pre ľubovoľnú váhu $\mathbf{W}$ existuje jediné riešenie tohto systému. Aby sa zabezpečila dobrá definovanosť váženej centrálnej trajektórie váhová matica $\mathbf{W}$ sa hľadá tak, aby Jakobián systému (8) bol regulárny v bode $(\mathbf{X}, y, \mathbf{S})$ takom, že $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = \mu \mathbf{W}$. V dôsledku spôsobu definovania navyše máme, že vážená trajektória je analytickou funkciou parametra μ pre každé $\mu > 0$. Avšak keďže Jakobián systému (8) môže stratiť na hranici vlastnosť regularity, vznikajú problémy s dôkazom analytickosti váženej trajektórie v hraničnom bode.

2.2 Prehľad doterajších výsledkov o centrálnych trajektóriách

Ako bolo spomenuté vyššie, vlastnosti centrálnych trajektórií sú intenzívne študované pre ich hlboký súvis s algoritmami MVB. Tieto vlastnosti sa prevažne týkajú konvergenzie, limitného správania a analytickosti.

Centrálne trajektória sa zo začiatku študovala v kontexte lineárneho programovania. Jednou z prvých prác, ktoré sa zaoberali limitnými vlastnosťami, bola napr. [1]. Konvergencia derivácií centrálnej trajektórie bola dokázaná v [10] a v prácach [11] a [33] bolo nezávisle ukázané, že centrálne trajektória sa dá analyticky rozšíriť na hraničný bod.

Analýza vlastností centrálnej trajektórie v úlohách lineárnej komplementarity sa ukázala byť oveľa zložitejšia. V práci [17] bolo dokázané, že centrálne trajektória konverguje k riešeniu. Tu však asymptotické správanie trajektórií závisí od existencie tzv. ostro komplementárneho riešenia (pozri [22], [23]). Výsledky o analytickom rozšírení trajektórie možno nájsť v článkoch [30], [31].

Správanie centrálnej trajektórie v SDP tiež závisí na existencii ostro komplementárneho riešenia, ale je ešte komplikovanejšie ako v prípade úloh lineárnej komplementarity. Za predpokladu existencie ostro komplementárneho riešenia bola podaná charakterizácia limitného bodu centrálnej trajektórie a bolo ukázané, že centrálne trajektória konverguje k tzv. analytickému stredmu množiny optimálnych riešení (pozri [9], [16], [21]). Za tohto predpokladu bolo v [12] tiež ukázané, že centrálnu trajektóriu je možné analyticky predĺžiť na hraničný bod. Bez predpokladu existencie ostro komplementárneho riešenia bolo v prácach [7] a [9] ukázané, že každý limitný bod centrálnej trajektórie je maximálne komplementárne riešenie. Táto vlastnosť bola využitá na dôkaz konvergencie centrálnej trajektórie. Tento výsledok je zahrnutý v prácach [14] (tu bol dôkaz založený na hlbších výsledkoch z algebraickej geometrie) a [18] (kde sa uvažovala centrálne trajektória v úlohách semidefinitnej komplementarity, ktoré sú ekvivalentné SDP). V článku [13] bolo ukázané, že limitný bod centrálnej trajektórie možno charakterizovať ako analytický stred určitej konvexnej podmnožiny množiny optimálnych riešení. Analytickosť centrálnej trajektórie v hraničnom bode bola dokázaná len pre určitú podtriedu úloh SDP (pozri [6]), avšak nie pre všeobecné úlohy SDP.

Ako bolo spomenuté vyššie, v lineárnom programovaní je možné pojem centrálnej trajektórie ľahko rozšíriť na pojem váženej centrálnej trajektórie. Avšak táto charakterizácia pomocou logaritmických bariérových funkcií sa nezdá byť možnou pre definovanie vážených trajektórií v SDP (táto metóda sa dala použiť len pri špeciálnom type vážených trajektórií v SDP, asociovaných s Choleského typom symetrizácie a kladnou diagonálnou váhou, pozri [4]). Preto vzniklo niekoľko iných prístupov - viď práce [4], [22], [24], [28], [32].

Existencia vážených centrálnych trajektórií v SDP bola študovaná viacerými autormi. Všeobecný prístup prezentovaný v práci [24] využíva výsledky z nelineárnej analýzy a teóriu lokálne homeomorfných zobrazení. Dôkaz existencie uvedený v [28] bol elementárnejší, založený na vete o implicitnej funkcii. Avšak tu autori uvažovali len jeden typ vážených trajektórií - asociovaný s AHO-symetrizáciou. Vážené trajektórie asociované s Choleského typom symetrizácie a kladnou diagonálnou váhou bola študovaná v článku [4] a ich existencia bola ukázaná definovaním vážených logaritmických bariérových funkcií. Jednotný dôkaz pre všetky typy vyššie uvažovaných trajektórií, pomocou zovšeobecnenia dôkazu [28] je uvedený v [3 *] a v podrobnejšej verzii je aj

súčasťou 2. kapitoly predkladanej dizertačnej práce.

Limitné správanie a analytickosť v hraničnom bode vážených centrálnych trajektórií v SDP bolo tiež študované niekoľkými autormi a všetky známe výsledky boli dosiahnuté za predpokladu existencie ostro komplementárneho riešenia. Tieto výsledky sú zahrnuté v prácach [5], [19], [20], [29]. Ďalšie nové výsledky sa nachádzajú v predkladanej dizertačnej práci.

3 Výsledky dizertačnej práce

Výsledky dizertačnej práce by sme mohli zhrnúť do troch častí.

Prvá časť pozostáva zo všeobecného dôkazu existencie všetkých typov vážených trajektórií, asociovaných so symetrizáciami uvedenými vyššie. Spomínané typy vážených trajektórií v SDP boli skúmané pre úlohy nelineárnej komplementarity [24], kde dôkaz existencie využíval výsledky teórie lokálne homeomorfných zobrazení. V práci [28] boli skúmané vážené trajektórie pre úlohy lineárnej komplementarity, avšak asociované len s AHO-symetrizáciou Φ_1 . V článku [4] bola pomocou definovania logaritmických bariérových funkcií dokázaná existencia vážených trajektórií pre Choleského typ symetrizácie Φ_3 a kladné diagonálne váhy. V predkladanej práci je podaný nový, relatívne jednoduchý dôkaz existencie všetkých vyššie spomenutých typov vážených trajektórií v SDP. Tento dôkaz je založený na zovšeobecnení výsledkov [28] pre všetky typy symetrizácie, pričom predpoklady pre existenciu trajektórií sú naformulované priamo v termínoch úloh SDP. Spracovanie tejto časti sme považovali za potrebné pre skúmanie ďalších vlastností vážených trajektórií v SDP.

Druhá časť pozostáva z výsledkov o asymptotickom správaní spomínaných typov trajektórií. Tieto výsledky boli dosiahnuté za predpokladu existencie ostro komplementárneho riešenia a sú zovšeobecnením výsledkov z [29] (AHO-symetrizácia) pre všetky typy skúmaných symetrizácií a k nim prislúchajúcich trajektórií. Bolo ukázané, že toto správanie závisí nielen od typu symetrizácie, ale v špeciálnych prípadoch aj od typu uvažovanej váhy.

Tretia časť obsahuje nové výsledky týkajúce sa analytickosti určitých typov vážených trajektórií v hraničnom bode, pričom sa využili niektoré poznatky o asymptotickom správaní. Tu sme nadväzovali na známe výsledky z tejto oblasti: v článkoch [29], [19] bolo ukázané, že vážená trajektória asociovaná s AHO-symetrizáciou Φ_1 je analytická v bode $\mu = 0$ ako funkcia μ . Autori [20] dokázali, že vážená trajektória asociovaná s "odmocninovou" symetrizáciou Φ_2 je analytická v $\mu = 0$ ako funkcia $\sqrt{\mu}$ a napokon v práci [5] bolo ukázané, že vážená trajektória asociovaná s Choleského symetrizáciou Φ_3 a kladnou diagonálnou váhou je analytická v $\mu = 0$ ako funkcia μ . V predkladanej práci sme skúmali analytickosť v $\mu = 0$ vážených trajektórií asociovaných s Φ_3 a ľubovoľnou vhodnou kladne definitnou (avšak nie nutne diagonálnou) váhou. Ukázali sme, že takáto trajektória je analytická v $\mu = 0$ ako funkcia $\sqrt{\mu}$ a navyše, je analytická v $\mu = 0$ ako funkcia μ práve vtedy keď váha je blokovo diagonálna. Analytickosť v $\mu = 0$ ako funkcia μ pre blokovo diagonálne váhy sme ukázali aj pre trajektórie asociované s Φ_2 ako rozšírenie výsledku [20] (tu bola ukázaná len analytickosť ako funkcia $\sqrt{\mu}$).

3.1 Existencia vážených trajektórií v SDP

Uvažujeme systém

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} &= b_i + \mu \Delta b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \mathbf{X} \succ 0, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} &= \mathbf{C} + \mu \Delta \mathbf{C}, \quad \mathbf{S} \succ 0, \\ \Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S}) &= \phi_j(\mu) \mathbf{W}, \end{aligned} \quad (9)$$

kde $\Delta b \in R^m$, $\Delta \mathbf{C} \in S^n$ sú pevne zvolené, $\mathbf{W} \succ 0$ je váha, $\Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S})$ jedna zo symetrizácií (7) a

$$\phi_j(\mu) = \mu, \quad j = 1, 2, 3; \quad \phi_j(\mu) = \sqrt{\mu}, \quad j = 4, 5.$$

Vážená centrálna trajektória s váhou $\mathbf{W}$ sa definuje ako množina

$$\{ (\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu)) \mid \mu \in (0, \mu_0) \}$$

riešení systému (9), kde μ_0 je nejaké pevne zvolené. Aby bola táto definícia korektná, je potrebné dokázať existenciu a jednoznačnosť riešení tohto systému.

Pre pevne zvolené $\Delta b \in R^m$, $\Delta \mathbf{C} \in S^n$ uvažujme zobrazenia $F_{\mu, \mathbf{W}}^j : S^n \times R^m \times S^n \rightarrow R^m \times S^n \times S^n$ s parametrami $\mu > 0$ a $\mathbf{W} \succ 0$ ($j = 1, \dots, 5$) :

$$F_{\mu, \mathbf{W}}^j(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(\mathbf{X}) - b - \mu \Delta b \\ \mathcal{A}^*(y) + \mathbf{S} - \mathbf{C} - \mu \Delta \mathbf{C} \\ \Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S}) - \phi_j(\mu) \mathbf{W} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

kde zobrazenie $\mathcal{A}$ je dané ako

$$\mathcal{A} : S^n \rightarrow R^m, \quad \mathcal{A}(\mathbf{X}) = (\mathbf{A}_1 \bullet \mathbf{X}, \dots, \mathbf{A}_m \bullet \mathbf{X}), \quad (11)$$

a k nemu adjungované zobrazenie je

$$\mathcal{A}^* : R^m \rightarrow S^n, \quad \mathcal{A}^*(y) = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i.$$

Zrejme, systém (9) je ekvivalentný

$$F_{\mu, \mathbf{W}}^j(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}) = 0, \quad \mathbf{X} \succ 0, \quad \mathbf{S} \succ 0.$$

Prvým krokom v dôkaze existencie je pre každú zo symetrizácií daných (7) nájsť množinu vhodných váh. Táto množina je určená nasledovnou vlastnosťou

$\mathbf{X} \succ 0, \mathbf{S} \succ 0 \Rightarrow [\Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S}) \in \mathcal{W}_j \Rightarrow DF_{\mu, \mathbf{W}}^j(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}) \text{ je regulárne lineárne zobrazenie.}]$

Je známe, že $\mathcal{W}_1 = S_{++}^n$ a z výsledkov [24] vyplýva, že je možné zvoliť $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3 = \mathcal{M}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ a $\mathcal{W}_4 = \mathcal{W}_5 = \mathcal{M}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, kde

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \{ \mathbf{W} \in S_{++}^n; \exists \nu : \|\mathbf{W} - \nu \mathbf{I}\|_2 < \varepsilon \nu \}.$$

V predkladanej dizertačnej práci je ukázané, že je možné zvoliť $\mathcal{W}_3 = D_{++}^n$ a je podaná nasledujúca charakterizácia množín $\mathcal{M}_\varepsilon$:

Tvrdenie 3.1. Množina $\mathcal{M}_\varepsilon$ je konverný kužeľ, navyše ak $\varepsilon \in (0, 1)$ potom

$$\mathbf{W} \in \mathcal{M}_\varepsilon \Leftrightarrow \kappa(\mathbf{W}) < \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

(kde $\kappa(\mathbf{W})$ je číslo podmnienenosti $\mathbf{W}$).

Ďalej bolo v práci ukázané, že symetrizácie (7) majú nasledujúce vlastnosti:

Lema 3.1. Ak $\mathbf{X} \succeq 0, \mathbf{S} \succeq 0$, potom

- a) $\mathbf{X} \bullet \mathbf{S} = \text{tr}(\Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S}))$, $j = 1, 2, 3$;
- b) $\mathbf{X} \bullet \mathbf{S} \leq 2 \text{tr}(\Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S})^2)$, $j = 4, 5$.

Lema 3.2. Nech $j \in \{1, \dots, 5\}$ je ľubovoľné, $\mathbf{X} \succeq 0$, $\mathbf{S} \succeq 0$ a $\Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S}) \succ 0$. Potom $\mathbf{X} \succ 0$, $\mathbf{S} \succ 0$.

Lema 3.3. Nech $j \in \{1, \dots, 5\}$ je ľubovoľné, $\nu > 0$ a $\mathbf{X} \succ 0$, $\mathbf{S} \succ 0$. Potom $\mathbf{XS} = \nu \mathbf{I}$ práve vtedy, keď $\Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = \phi(\nu) \mathbf{I}$.

Ďalej sa v tejto časti sa okrem vyššie uvedeného Predpokladu 1 uvažuje platnosť nasledujúcich predpokladov:

Predpoklad 3: Systém (3) má riešenie.

Predpoklad 4: Pre ľubovoľné $j \in \{1, \dots, 5\}$ nech $\Delta b, \Delta \mathbf{C}$ sú také pre ktoré existuje $\mathbf{W}^0 \in \mathcal{W}_j$ a $\mu_0 > 0$ tak, že systém (9) je riešiteľný pre $\mathbf{W} = \mathbf{W}^0$ a $\mu = \mu_0$.

Pre $\mu > 0$ a $\mathbf{W} \succ 0$ budeme označovať

$$(\mathbf{X}_{(\mu, \mathbf{W})}, y_{(\mu, \mathbf{W})}, \mathbf{S}_{(\mu, \mathbf{W})})$$

riešenie systému (9) (pre nejaké $j \in \{1, \dots, 5\}$).

Hlavný výsledok tejto časti vyplýva z nasledujúcich šiestich tvrdení, ktoré sú zovšeobecnením tvrdení z [28] pre Φ_1 a $\mathcal{W}_1 = S_{++}^n$ na všetky typy uvedených symetrizácií (7) a vyššie spomenutých množín prípustných váh. Možnosť takého zovšeobecnenia vyplýva z Lemy 4.1, Lemy 4.2 a Lemy 4.3.

Lema 3.4. Nech $\mathcal{O}(\mathbf{W}^0) \subset S_{++}^n$ je ohraničené okolie $\mathbf{W}^0$. Potom je množina

$$\mathcal{M} = \{(\mathbf{X}_{(\mu, \mathbf{W})}, y_{(\mu, \mathbf{W})}, \mathbf{S}_{(\mu, \mathbf{W})}) \mid 0 < \mu \leq \mu_0, \mathbf{W} \in \mathcal{O}(\mathbf{W}^0)\}$$

ohraničená.

Lema 3.5. Nech $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ a

$$G_j : S^n \times R^m \times S^n \times R \times S^n \rightarrow R^m \times S^n \times S^n$$

je zobrazenie také, že

$$G_j(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}, \mu, \mathbf{W}) = F_{\mu, \mathbf{W}}^j(\mathbf{X}, y, \mathbf{S})$$

Predpokladajme, že $\mu_1 \in (0, \mu_0)$, $\mathbf{W}^1 \in \mathcal{W}_j$ a nech

$$\psi : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow (0, \mu_0) \times \mathcal{W}_j, \quad \psi(t) = (\mu_t, \mathbf{W}^t)$$

je spojitá cesta z $\psi(0) = (\mu_0, \mathbf{W}^0)$ do $\psi(1) = (\mu_1, \mathbf{W}^1)$. Potom pre ľubovoľné $t \in \langle 0, 1 \rangle$ má systém

$$G_j(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}, \mu_t, \mathbf{W}^t) = 0$$

lokálne jediné riešenie $(\mathbf{X}^t, y^t, \mathbf{S}^t)$, kde $\mathbf{X}^t \succ 0, \mathbf{S}^t \succ 0$. Navyše existuje funkcia

$$g_j : R_{++} \times S_{++}^n \rightarrow S_{++}^n \times R^m \times S_{++}^n,$$

ktorá je definovaná a analytická na nejakom okolí $\psi(t)$, spĺňajúca $g_j(\psi(t)) = (\mathbf{X}^t, y^t, \mathbf{S}^t)$ a

$$G_j(g_j(\psi(t)), \psi(t)) = 0.$$

Dôsledok 3.1. Pre ľubovoľné $\mu \in (0, \mu_0)$ a $\mathbf{W} \in \mathcal{W}_j$ existuje riešenie systému (9).

Dôsledok 3.2. Pre ľubovoľné $t \in \langle 0, 1 \rangle$ je funkcia $g(\psi(t))$ jednoznačne určená cestou ψ a začiatočnou hodnotou $g(\psi(0))$.

Lema 3.6. Nech $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ je ľubovoľné. Ak má systém

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{X}) &= b + \mu \Delta b, & \mathbf{X} &\succ 0, \\ \mathcal{A}^*(y) + \mathbf{S} &= \mathbf{C} + \mu \Delta \mathbf{C}, & \mathbf{S} &\succ 0, \\ \Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S}) &= \phi_j(\mu) \mathbf{I} \end{aligned}$$

nejaké riešenie pre $\mu > 0$ tak toto riešenie je jediné.

Lema 3.7. Nech $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ je ľubovoľné. Ak má systém

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{X}) &= b + \mu \Delta b, & \mathbf{X} &\succ 0, \\ \mathcal{A}^*(y) + \mathbf{S} &= \mathbf{C} + \mu \Delta \mathbf{C}, & \mathbf{S} &\succ 0, \\ \Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S}) &= \phi_j(\mu) \mathbf{W} \end{aligned}$$

nejaké riešenie pre $\mu > 0$, tak toto riešenie je jediné.

Napokon, hlavný výsledok tejto časti možno zhrnúť v nasledujúcich tvrdeniach:

Veta 3.1. Nech $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$. Potom pre ľubovoľné $\mu \in (0, \mu_0)$ a $\mathbf{W} \in \mathcal{W}_j$ existuje jediné riešenie systému (9).

Dôsledok 3.3. Nech platí Predpoklad 1 a Predpoklad 2 a nech $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$. Potom pre ľubovoľné $\mu > 0$ a $\mathbf{W} \in \mathcal{W}_j$ existuje jediné riešenie systému

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{X}) &= b, & \mathbf{X} &\succ 0, \\ \mathcal{A}^*(y) + \mathbf{S} &= \mathbf{C}, & \mathbf{S} &\succ 0, \\ \Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S}) &= \phi_j(\mu) \mathbf{W}. \end{aligned} \tag{12}$$

3.2 Asymptotické správanie vážených centrálnych trajektórií

Uvažujme päť spomínaných typov vážených trajektórií, asociovaných so symetrizáciami $\Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S})$ ($j = 1, \dots, 5$).

V tejto časti sme skúmali možnosť zovšeobecnenia výsledkov z [29] pre Φ_1 a $\mathcal{W}_1 = S_{++}^n$ na všetky typy uvedených symetrizácií (7). Navyše sme uvažovali platnosť nasledujúceho predpokladu:

Predpoklad 5: Existuje ostro komplementárne optimálne riešenie systému (3).

Bez ujmy na všeobecnosti (ak je nutné, aplikujeme ortogonálnu transformáciu) možno predpokladať, že každé optimálne riešenie je v tvare

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_N \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{X}_B \succeq 0$, $\mathbf{S}_N \succeq 0$.

V ďalšom budeme uvažovať, že ľubovoľná symetrická, dolná trojuholníková, resp. horná trojuholníková matica má nasledovné blokové rozdelenie:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_B & \mathbf{M}_V \\ \mathbf{M}_V^T & \mathbf{M}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_B & 0 \\ \mathbf{L}_V^T & \mathbf{L}_N \end{pmatrix}.$$

Ukázali sme, že príslušné trajektórie vykazujú dva typy asymptotického správania:

$$\mathbf{X}(\mu) = \begin{pmatrix} \Theta(1) & o(\sqrt{\mu}) \\ o(\sqrt{\mu}) & \Theta(\mu) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mu) = \begin{pmatrix} \Theta(\mu) & o(\sqrt{\mu}) \\ o(\sqrt{\mu}) & \Theta(1) \end{pmatrix} \quad (13)$$

a

$$\mathbf{X}(\mu) = \begin{pmatrix} \Theta(1) & \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) \\ \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) & \Theta(\mu) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mu) = \begin{pmatrix} \Theta(\mu) & \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) \\ \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) & \Theta(1) \end{pmatrix} \quad (14)$$

Konkrétne,

- ak $j = 2, 3$, správanie závisí od toho, či je váhová matica $\mathbf{W}$ blokovo diagonálna, ak áno, tak príslušné bloky trajektórie majú vlastnosť (13), inak ich správanie možno popísať ako (14);
- ak $j = 4, 5$, tak príslušné bloky trajektórie majú vlastnosť (14).

Tiež bolo skúmané asymptotické správanie odmocnín a Choleského faktorov trajektórie. Podobne, aj tieto funkcie vykazujú dva typy asymptotického správania:

$$\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}(\mu) = \begin{pmatrix} \Theta(1) & o(\sqrt{\mu}) \\ o(\sqrt{\mu}) & \Theta(\mu) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_{\mathbf{X}(\mu)} = \begin{pmatrix} \Theta(1) & 0 \\ o(\sqrt{\mu}) & \Theta(\sqrt{\mu}) \end{pmatrix} \quad (15)$$

a

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{\frac{1}{2}}(\mu) &= \begin{pmatrix} \Theta(1) & \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) \\ \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) & \Theta(\sqrt{\mu}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{\frac{1}{2}}(\mu) = \begin{pmatrix} \Theta(\sqrt{\mu}) & \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) \\ \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) & \Theta(1) \end{pmatrix} \\ \mathbf{L}_{\mathbf{X}(\mu)} &= \begin{pmatrix} \Theta(1) & 0 \\ \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) & \Theta(\sqrt{\mu}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{\mathbf{S}(\mu)} = \begin{pmatrix} \Theta(\sqrt{\mu}) & \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) \\ 0 & \Theta(1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Tu

- ak $j = 2, 3$, správanie závisí od toho, či je váhová matica $\mathbf{W}$ blokovo diagonálna, ak áno, tak príslušné bloky trajektórie majú vlastnosť (15), inak ich správanie možno popísať ako (16);
- ak $j = 4, 5$, tak príslušné bloky trajektórie majú vlastnosť (16).

3.3 Analytickosť vážených trajektórií v bode $\mu = 0$

V tejto časti dizertačnej práce sa študovali v súvislosti s analytickosťou už len vážené trajektórie asociované so symetrizáciami Φ_1, Φ_2, Φ_3 , pričom nové výsledky sa dosiahli len pre symetrizácie Φ_2, Φ_3 . Okrem predpokladov potrebných pre existenciu trajektórií budeme uvažovať platnosť Predpokladu 5.

Nové výsledky možno zhrnúť do nasledujúcich viet.

Veta 3.2. *Nech $j = 3$. Potom vážená trajektória $(\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu))$ je analytickou funkciou $\rho = \sqrt{\mu}$ pre každé $\mu \geq 0$ (dostatočne malé).*

Podotýkame, že tento výsledok bol dokázaný pre $j = 2$ v [20].

Ako dôsledok je tiež v predkladanej dizertačnej práci ukázané, že ak váhová matica je blokovo diagonálna, konkrétne ak $\mathbf{W}_V = 0$, tak vážené trajektórie (pre $j = 2, 3$) majú nasledovné asymptotické správanie

$$\mathbf{X}(\mu) = \begin{pmatrix} \Theta(1) & \mathcal{O}(\mu) \\ \mathcal{O}(\mu) & \Theta(\mu) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mu) = \begin{pmatrix} \Theta(\mu) & \mathcal{O}(\mu) \\ \mathcal{O}(\mu) & \Theta(1) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Navyše, pre Choleského faktor $\mathbf{L}_{\mathbf{X}(\mu)}$ a odmocninu $\mathbf{X}(\mu)^{\frac{1}{2}}$ máme

$$\mathbf{L}_{\mathbf{X}(\mu)} = \begin{pmatrix} \Theta(1) & 0 \\ \mathcal{O}(\mu) & \Theta(\sqrt{\mu}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(\mu)^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \Theta(1) & \mathcal{O}(\mu) \\ \mathcal{O}(\mu) & \Theta(\sqrt{\mu}) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Nasledujúca lema je dôsledkom (13) a Tvrdenia 3.2.

Lema 3.8. *Nech $j \in \{2, 3\}$ a $\mathbf{W}_V \neq 0$. Potom $\frac{d\mathbf{X}_V(\mu)}{d\mu}$ a $\frac{d\mathbf{S}_V(\mu)}{d\mu}$ nie sú ohraničené pre $\mu \rightarrow 0$.*

Nasledujúca veta zúplňuje výsledok o analytickosti vážených trajektórií asociovaných so symetrizáciami Φ_2, Φ_3 . Jedna implikácia je priamym dôsledkom Lemy 3.8.

Veta 3.3. *Nech $j \in \{2, 3\}$. Potom vážená trajektória $(\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu))$ je analytickou funkciou μ pre každé $\mu \geq 0$ vtedy a len vtedy, keď $\mathbf{W}_V = 0$.*

Poznamenávame, že výsledok [5] týkajúci sa analytickosti vázenej trajektórie asociovej s Φ_3 a kladnou diagonálnou váhou je obsiahnutý v predchádzajúcej vete ako špeciálny prípad.

4 Záver

Hlavné prínosy dizertačnej práce sú:

1. Podanie nového, relatívne jednoduchého dôkazu existencie vážených centrálnych trajektórií v semidefinitnom programovaní, pričom predpoklady pre existenciu sú naformulované v termínoch SDP.
2. Charakterizácia asymptotického správania všetkých typov vážených centrálnych trajektórií, pre ktoré ešte neboli asymptotické vlastnosti skúmané. Táto charakterizácia bola dôležitá pre skúmanie analytickosti vážených trajektórií v hraničnom bode.
3. Úplná analýza analytickosti v hraničnom bode pre dva špeciálne typy vážených trajektórií.

Technika dôkazu existencie trajektórií sa ukazuje byť použiteľná na korektné definovanie ďalších typov vážených centrálnych trajektórií. Charakterizácia asymptotického správania trajektórií, ktoré vykazovali lepšie asymptotické vlastnosti, bola využitá pri skúmaní ich analytickosti v hraničnom bode. Avšak je možné, že pri ostatných typoch vážených trajektórií budú výsledky o ich asymptotickom správaní užitočné na ukázanie podobných, hoci pravdepodobne slabších výsledkov. Vlastnosti týkajúce sa analytickosti v hraničnom bode by mohli byť dôležité pre analýzu chýb a superlineárnej konverencie algoritmov metód vnútorného bodu pre SDP.

Literatúra

- [1] I. Adler, R. D. C. Monteiro. *Limiting behavior of the affine scaling continuous trajectories for linear programming problems*. Math. Prog. 50 (1), 29-51, 1991.
- [2] F. Alizadeh. *Optimization over positive semi-definite cone; interior-point methods and combinatorial applications*. In P. Pardalos, editor, Advances in Optimization and Parallel Computing, 1-25, Holland, 1992.
- [3] R. Bellman, K. Fan. *On systems of linear inequalities in hermitian matrix variables*. Convexity, vol. 7, 1-11, Proc. Symposia in Pure Mathematics, Amer. Math. Society, Providence, 1963.
- [4] C. B. Chua. *A new notion of weighted centers for semidefinite programming*. SIAM J. Opt, 16, 1092-1109, 2006.
- [5] C. B. Chua. *Analyticity of weighted central path and error bound for semidefinite programming*. 2005, www.optimization-online.org
- [6] J. X. da Cruz Neto, O. P. Ferreira, R. D. C. Monteiro. *Asymptotic behavior of the central path for a special class of degenerate SDP problems* Math. Prog., 103(3), 487-514, 2005.
- [7] E. de Klerk, C. Roos, T. Terlaky. *Initialization in semidefinite programming via a self-dual skew-symmetric embedding* Oper. Res. Let., 20, 213-221, 1998.
- [8] A. V. Fiacco, G.P. McCormick. *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques*. Classics in Applied Mathematics (reprinted in 1990), 4, 1968.
- [9] D. Goldfarb, K. Scheinberg. *Interior point trajectories in semidefinite programming*. SIAM J. Opt., 8, 871-886, 1998.
- [10] O. Güler. *Limiting behavior of weighted central paths in linear programming*. Math. Prog. 95, 347-363, 1994.
- [11] M. Halická. *Analytical properties of the central path at the boundary point in linear programming*. Math. Prog., 84(2), 335-355, 1999.
- [12] M. Halická. *Analyticity of the central path at the boundary point in semidefinite programming*. EJOR, 143, 311-324, 2002.
- [13] M. Halická, E. de Klerk, C. Roos. *Limiting behavior of the central path in semidefinite optimization*. Optim. Methods & Soft., 20(1), 99-113, 2005.
- [14] M. Halická, E. de Klerk, C. Roos. *On the convergence of the central path in semidefinite optimization*. SIAM J. Opt., 12, 1090-1099

- [15] N. Karmarkar. *A new polynomial time algorithm for linear programming*. Combinatorica, 4, 373-395, 1984.
- [16] E. deKlerk, C. Roos, T. Terlaky. *Infeasible start semidefinite programming algorithms via self-dual embeddings*. In P.M. Pardalos, H. Wolkowicz, editors, Topics in semidefinite and Interior-Point Methods, 18, 215-236, 1998.
- [17] M. Kojima, S. Shida, S. Shindoh. *Local convergence of predictor-corrector infeasible-interior-point algorithms for SDPS and SDPSLPS*. Math. Prog. 80, 129-160, 1998.
- [18] M. Kojima, S. Shindoh, S. Hara. *Interior point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problem in symmetric matrices*. SIAM J. Opt. 7, 86-125, 1997.
- [19] Z. Lu, R. D. C. Monteiro. *Limiting behavior of the Alizadeh-Haeberly-Overton weighted paths in semidefinite programming*. accepted in Opt. Met. & Soft., 2003
- [20] Z. Lu, R. D. C. Monteiro. *Error bounds and limiting behavior of weighted paths associated with the map $X^{\frac{1}{2}}SX^{\frac{1}{2}}$* . SIAM J. Opt. , 15, 348-374, 2004.
- [21] Z.-Q. Luo, J. F. Sturm, S. Zhang. *Superlinear convergence of a symmetric primal-dual path following algorithm for semidefinite programming*. SIAM J. Opt., 8, 59-81, 1998.
- [22] R. D. C. Monteiro, J.-S. Pang. *On two interior point mappings for nonlinear semidefinite complementarity problems*. Math. Oper. Res., 23, 39-60, 1998.
- [23] R. D. C. Monteiro, T. Tsuchiya. *Limiting behavior of the derivatives of certain trajectories associated with a monotone horizontal linear complementarity problem*. Math. Oper. Res., 21, 793-814, 1996.
- [24] R. D. C. Monteiro, P. R. Zanjacomo. *General interior point maps and existence of weighted paths for nonlinear semidefinite complementarity problems*. Math. Oper. Res. 25 (3), 381-399, 2000.
- [25] Y. Nesterov, A. Nemirovsky. *A general approach to polynomial time algorithms design for convex programming*. tech. report, Centr. Econ. & Math. Inst., USSR, Acad. Sci., Moscow, 1988
- [26] Y. Nesterov, A. Nemirovsky. *Self-concordant functions and polynomial time methods for convex programming*. tech. report, Centr. Econ. & Math. Inst., USSR, Acad. Sci., Moscow, 1990
- [27] Y. Nesterov, A. Nemirovsky. *Optimization over positive semidefinite matrices: Mathematical background and user's manual*. Centr. Econ. & Math. Inst., USSR, Acad. Sci., Moscow, 1990

- [28] M. Preiss, J. Stoer. *Analysis of infeasible-interior-point paths arising with semi-definite complementarity problems*. working paper.
- [29] M. Preiss, J. Stoer. *Analysis of infeasible-interior-point paths arising with semi-definite complementarity problems*. Math. Prog., 99(3), 2004.
- [30] J. Stoer, M. Wechs. *Infeasible-interior-point paths for sufficient linear complementarity problems and their analyticity*. Math. Prog., 83, 403-423, 1998.
- [31] J. Stoer, M. Wechs. *On the analyticity properties of infeasible-interior-point paths for monotone linear complementarity problems*. Numer. Math. 81, 631-645, 1999.
- [32] J. F. Sturm, S. Zhang. *On weighted centers for semidefinite programming*. EJOR, 126, 391-407, 2000.
- [33] M. Wechs. *The analyticity of interior point paths at strictly complementary solutions of linear programs*. Opt. Met. & Soft., 9, 209-324, 1998.
- [34] H. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenberghe, editors. *Handbook of Semidefinite Programming: Theory, Algorithms and Applications*. Kluwer Academic Publisher, 2000.

5 Zoznam publikácií dizertanta

- [1 *] M. Trnovská. Strong duality conditions in semidefinite programming. *Journal of Electrical Engineering*, 56, 87-89, 2005.
- [2 *] M. Trnovská. Weighted central path in semidefinite programming associated with the symmetrization map $(xs+sx)/2$. *Journal of Electrical Engineering*, 57, 57-60, 2006.
- [3 *] M. Trnovská. Existence of Weighted Interior-Point Paths in Semidefinite Programming. Mathematical Methods in Economics and Industry, Faculty of Economics, Technical University, Košice, refereed conference proceedings CD, 2007.
<http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/institute/trnovska/TrnovskaPaper.pdf>

6 Summary

In this thesis we study the weighted interior point paths in semidefinite programming. In the concrete, we focused on the existence, the asymptotic behavior and the analyticity of the weighted paths at the boundary point. The main results included in this thesis could be summarized as follows.

We presented a new and relatively simple proof of the existence of weighted central paths associated with certain type of symmetrization map. These types of weighted paths were studied for the nonlinear complementarity problems [24] where the result was proved using the theory of local homeomorphic maps. In the work [28] the weighted paths with linear complementarity problems were studied, however only the ones, associated with the AHO-symmetrization. The weighted path in SDP associated with the Cholesky-type-symmetrization and positive diagonal weight was studied in the paper [4] and the existence was shown by defining weighted logarithmic barrier functions. The proof presented in the thesis is based on generalization of the result of [28] to all five symmetrization maps and the assumptions for the existence are formulated in terms of semidefinite programming.

The second part consists of the results concerning the asymptotic behavior of the weighted paths. These results were obtained under the assumption of the existence of the strict complementary optimal solution and can be considered as the generalization of the results of [29] (for the AHO-symmetrization) to all types of symmetrization maps. It was shown that this behavior depends not only on the symmetrization type but also on the type of the weight matrix.

The results about the asymptotic behavior were useful for analyzing the analyticity of the weighted paths at the boundary point. We followed the known results from this area: in the papers [29], [19] it was shown that the weighted central path associated with AHO-symmetrization is an analytic function of μ at $\mu = 0$. The authors of [20] proved that the weighted path associated with the square-root-type symmetrization is analytic at $\mu = 0$ as a function of $\sqrt{\mu}$. Finally, in the work [5] it was shown that the weighted path associated with the Cholesky-type symmetrization and positive diagonal weight is an analytic function of μ at $\mu = 0$. In the dissertation thesis the weighted path associated with Cholesky type symmetrization and a suitable symmetric positive definite weight was studied and it was proved that this path is an analytic at $\mu = 0$ as a function of $\sqrt{\mu}$. Moreover it was shown that it is an analytic function of μ (at the boundary point) if and only if the weight matrix is block diagonal. The analyticity at $\mu = 0$ as a function of μ for block diagonal weights was shown also for the square-root-type symmetrization as a completeness of the result [20]. These results could be useful for the error bound and superlinear convergence analysis of the interior point algorithms for SDP.