Vážené Centrálne Trajektórie v Semidefinitnom Programovaní

Mária Trnovská

dizertačná práca

Školiteľ: Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Osnova:

1 Základné pojmy a vlastnosti

- Semidefinitné programovanie
- Centrálna trajektória
- Vážená centrálna trajektória

2 Výsledky a prínos dizertačnej práce

- Existencia vážených trajektórii v SDP
- Limitné správanie vážených trajektórii

1. ZÁKL DNÉ POJMY
VL STNOSTI

Primárna a duálna úloha semidefinitného programovania

$$(P) \qquad \min_{\mathbf{X}\in S^n} \{\mathbf{C}\bullet\mathbf{X} \mid \mathbf{A}_i\bullet\mathbf{X} = b_i; i=1,\dots,n; \mathbf{X}\succeq 0\}$$

$$(D) \qquad \max_{(y,\mathbf{S})\in R^m\times S^n} \left\{b^T y \mid \textstyle\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C}; \mathbf{S}\succeq 0\right\}$$

kde $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_m,\mathbf{C}\in S^n, b\in R^m$;

S^n	vektorový priestor $n\times n$ reálnych symetrických matíc
$\bullet : S^n\times S^n\to R$	skalárny súčin definovaný na S^n
$\mathbf{Y}\succeq 0$ $(\mathbf{Y}\in S^n_+)$	$\mathbf{Y}$ je symetrická kladne semidefinitná
$\mathbf{Y}\succ 0$ $(\mathbf{Y}\in S^n_{++})$	$\mathbf{Y}$ je symetrická kladne definitná

Význam semidefinitného programovania

- Semidefinitné programovanie (SDP) v sebe zahŕňa dôležité triedy matematického programovania ako špeciálny prípad (lineárne, kvadratické konvexné proramovanie, optimalizácia nad kužeľmi 2. rádu)

- Úlohy semidefinitného programovania sa dajú v polynomiálnom čase vyriešiť pomocou metód vnútorného bodu

- Priame aplikácie SDP: kvázikonvexné programovanie, úlohy zo spektrálnej analýzy, teória riadenia, štatistika

- Relaxácie pomocou SDP: kombinatorická optimalizácia, nekonvexné kvadratické programovanie

Predpoklad 1: Matice $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ sú lineárne nezávislé

Predpoklad 2: $\exists(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}) \in S^n_{++} \times R^n \times S^n_{++}:$

$$\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i; i = 1, \ldots, n; \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C}$$

Podmienky optimality: $(\mathbf{X}, y, \mathbf{S})$ je optimálne riešenie (P) a (D) vtedy a len vtedy, keď

$\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i; i = 1, \ldots, n;\ \mathbf{X} \succeq 0$ (primárna prípustnosť)

$\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C};\ \mathbf{S} \succeq 0$ (duálna prípustnosť)

$\mathbf{XS} = 0$ (komplementarita)

Perturbované podmienky optimality:

$\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i; i = 1, \dots, n;\ \mathbf{X} \succeq 0$ (primárna prípustnosť)

$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C};\ \mathbf{S} \succeq 0$ (duálna prípustnosť)

$\mathbf{XS} = \mu \mathbf{I}$ (perturbovaná komplementarita)

Pre každé $\mu > 0$ existuje jediné riešenie tohto systému, ozn. $(\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu))$.

Centrálna trajektória sa definuje ako zobrazenie

$$R_{++} \to S^n \times R^m \times S^n, \qquad \mu \to (\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu)).$$

Vlastnosti centrálnej trajektórie

- Centrálna trajektória je analytickou funkciou pre $\mu > 0$.

- **Predpoklad 3:** Existuje ostro komplementárne riešenie $(\mathbf{X}^*, y^*, \mathbf{S}^*)$ úloh (P), (D), t.j. také, že $\mathbf{X}^* + \mathbf{S}^* \succ 0$.

- Limitné správanie centrálnej trajektórie závisí na splnení Predpokladu 3.

Za Predpokladu 3 bolo ukázané:

- Centrálna trajektória konverguje k analytickému stredu množiny optimálnych riešení.

  deKlerk, Roos, Terlaky-Topics in SD&IPM (1997);

  Luo, Sturm, Zhang - SIAM J. Opt. 8 (1998);

  Goldfarb, Scheinberg - SIAM J. Opt. 8 (1998)

- Centrálna trajektóra je analytická v $\mu = 0$.

  Halická - EJOR 143 (2002)

Bez Predpokladu 3 bolo ukázané:

- Centrálna trajektória konverguje pre $\mu \to 0$.

  Halická, de Klerk, Roos - SIAM J. Opt. 12 (2002)

- Centrálna trajektóra je pre istú podtriedu úloh analytická v $\mu = 0$.

  da Cruz Neto, Ferreira, Monteiro - Math. Prog. 103 (2005)

Motivácia pre definovanie (nepripustných) vážených trajektórii

- Vo všeobecnosti $\mathbf{XS} \notin S^n$ ak $\mathbf{X}, \mathbf{S} \in S^n$ $\longrightarrow$ symetrizácia podmienky komplementarity

  $\mathbf{XS} = \mu \mathbf{I}$ $\longrightarrow$ $\Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = \mu \mathbf{I}$

  Typy Symetrizácií

  $$\Phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = (\mathbf{XS} + \mathbf{SX})/2$$
  $$\Phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = \mathbf{X}^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}$$
  $$\Phi_3(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = \mathbf{L_X}^T\mathbf{S}\mathbf{L_X}$$
  $$\Phi_4(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = (\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}^{\frac{1}{2}} + \mathbf{S}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}})/2$$
  $$\Phi_5(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = (\mathbf{L_X}^T\mathbf{U_S} + \mathbf{U_S}^T\mathbf{L_X})/2$$

Vnútorný bod neexistuje alebo nie je známy	$\longrightarrow$	perturbácia podmienok prípustnosti
$\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i$	$\longrightarrow$	$\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i + \mu \triangle b_i$
$\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C}$	$\longrightarrow$	$\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C} + \mu \triangle \mathbf{C}$

- Niektoré numerické prístupy preferujú pracovať s kladne definitnou maticou $\mathbf{W}$ namiesto identickej matice $\mathbf{I}$ v podmienke komplementarity

$$\Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = \mu \mathbf{I} \quad \longrightarrow \quad \Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = \mu \mathbf{W}$$

Vážená centrálna trajektória je definovaná ako zobrazenie

$$R_{++} \longrightarrow S^n \times R^m \times S^n, \qquad \mu \rightarrow (\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu))$$

kde $(\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu))$ je riešenie systému

$$\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i + \mu \triangle b_i; \;\; i = 1, \dots, n; \quad \mathbf{X} \succ 0$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C} + \mu \triangle \mathbf{C}; \qquad \mathbf{S} \succ 0$$

$$\Phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = \phi_j(\mu)\mathbf{W}$$

$\triangle b, \triangle \mathbf{C}$ sú fixné, $\mathbf{W}$ je váha, Φ_j je symetrizácia a

$$\phi_j(\mu) = \mu, \;\; j = 1, 2, 3; \qquad \phi_j(\mu) = \sqrt{\mu}, \;\; j = 4, 5.$$

Existencia vážených centrálnych trajektórií bola skúmaná

- pre (semidefinitné) úlohy nelineárnej komplementarity

  - *Monteiro, Zanjacomo - Math. Oper. Res. (2000)*
  - nelineárna analýza - teória lokálne homeomorfných zobrazení
  - všetky symetrizácie

- pre (semidefinitné) úlohy lineárnej komplementarity

  - *Preiss, Stoer - working paper (2003)*
  - metóda analytickej kontinuácie, veta o implicitnej funkcii
  - AHO-symetrizácia $(\mathbf{XS}+\mathbf{SX})/2$

- pre úlohu SDP

  - *Chua - SIAM J. Opt. 16 (2006)*
  - pomocou definovania vážených bariérových funkcii
  - Choleskeho symetrizácia $\mathbf{L_X}^T\mathbf{SL_X}$

Limitné správanie a analytickosť vážených trajektórií sa skúmalo jednotlivo pre rôzne typy symetrizácií:

- $(\mathbf{XS}+\mathbf{SX})/2$: Trajektória je ako funkcia μ analytická v bode $\mu = 0$.

  - *Preiss, Stoer, Math. Prog. 99 (2004)*
  - *Lu, Monteiro, Optim. Meth.& Soft. 22 (2007)*

- $\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}$: Trajektória ako funkcia $\sqrt{\mu}$ je analytická v bode $\mu = 0$.

  - *Lu, Monteiro, SIAM J. Opt. 15 (2004)*

- $\mathbf{L_X}^T\mathbf{S}\mathbf{L_X}$: Trajektória ako funkcia μ je analytická v bode $\mu = 0$ pre $\mathbf{W} \in D^n_{++}$.

  - *Chua, Math. Prog. 111 (2007)*

2.VÝSLEDKY PRÍNOS DIZERT ČNEJ PRÁCE

A. **Existencia vážených trajektórií**
B. **Limitné správanie vážených trajektórií**

A. Existencia vážených centrálnych trajektórií

- v dizertačnej práci je podaný nový dôkaz existencie (všetkých 5 typov) vážených centrálnych trajektórii

- zovšeobecnenie techniky autorov *Preiss, Stoer (2003)* pre všetky typy symetrizácii

- formulácia v termínoch semidefinitného programovania

- Pri určení množín vhodných váh sme využili výsledky: *Monteiro, Tsuchiya (1999)* a *Monteiro, Zanjacomo (2000)*; navyše sme ukázali, že tieto množiny je možné ekvivalentne definovať pomocou čísla podmienenosti váhovej matice.

- Špeciálne pre Choleskeho symetrizáciu (Φ_3) sme ukázali, že alternatívnou množinou váh je D^n_{++}.

- Zistili a dokázali sme vlastnosti symetrizácií $\Phi_2 - \Phi_5$ potrebné na to, aby dôkaz existencie vážených trajektórií asociovaných s AHO symetrizáciou Φ_1 mohol byť zovšeobecnený pre všetky typy symetrizácií.

B. Limitné správanie vážených centrálnych trajektórií

I. Skúmali sme asymptotické správanie všetkých typov trajektórií, konkrétne funkcií $\mathbf{X}(\mu), \mathbf{S}(\mu)$ a tiež funkcií $\mathbf{X}(\mu)^{\frac{1}{2}}, \mathbf{S}(\mu)^{\frac{1}{2}}$, $\mathbf{L}_{\mathbf{X}(\mu)}, \mathbf{U}_{\mathbf{S}(\mu)}$.

II. Tieto výsledky sa použili na analýzu analytickosti vážených trajektórií v hraničnom bode.

Všetky výsledky boli dosiahnuté za predpokladu existencie ostro komplementárneho riešenia.

B.I. Asymptotické správanie

- V dizertačnej práci je podaná jednotná a úplná analýza asymptotického správania vážených trajektórií **pre všetky symetrizácie**. Navyše sú skúmane asymptotické vlastnosti funkcií $\mathbf{X}(\mu)^{\frac{1}{2}}, \mathbf{S}(\mu)^{\frac{1}{2}}$, $\mathbf{L}_{\mathbf{X}(\mu)}, \mathbf{U}_{\mathbf{S}(\mu)}$, ktoré sú zaujímavé v prípade symetrizácií $\Phi_2 - \Phi_5$.

- Výsledky zahŕňajú ako špeciálny prípad známe výsledky autorov *Preiss, Stoer (2004)* o vážených trajektóriách asociovaných s AHO symetrizáciou Φ_1 a autorov *Lu, Monteiro (2004)* o správaní trajektórií asociovanej s "odmocninovou" symetrizáciou Φ_2.

- Tiež sa skúmalo asymptotické správanie v o-notácii. Bolo ukázané, že v prípade symetrizácií Φ_2, Φ_3 toto správanie závisí od toho, či je váhová matica blokovo diagonálna.

- Dokázané vlastnosti boli užitočné na dokázanie (nových) výsledkov týkajúcich sa analytickocti vážených trajektórií v hraničnom bode.

B.II. Analytickosť v hraničnom bode

Známe výsledky	Symetrizácia	Nové výsledky
Vážená centrálna trajektória je analytická v $\mu = 0$		**Vážená centrálna trajektória je analytická v $\mu = 0$**
■ ako funkcia $\sqrt{\mu}$.	$\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}$	■ ako funkcia μ $\Leftrightarrow$ váhová matica je blokovo diagonálna.
■ ako funkcia μ, ak je váhová matica (kladná) diagonálna.	$\mathbf{L_X}^T\mathbf{S}\mathbf{L_X}$	■ ako funkcia $\sqrt{\mu}$. ■ ako funkcia μ $\Leftrightarrow$ váhová matica je blokovo diagonálna.

- Technika dôkazu je čiastočným zovšeobecnením techniky použitej autormi *Preiss, Stoer (2004)*, ktorí skúmali analyticKosť vážených trajektórií asociovaných s AHO symetrizáciou v úlohe lineárnej komplementarity a dokázali, že vážená trajektória je analytická v $\mu = 0$ ako funkcia μ.

- Výsledky o analytickosti vážených trajektórií sa ukazujú byť užitočné na navrhovanie a analýzu algoritmov metód vnútorného bodu (algoritmy vyšších rádov, superlineárne konvergentné algoritmy).

  -Preiss, Stoer (2003), Control and Cybernetics

  -Lu, Monteiro (2004), SIAM J. Opt. 15

- Rovnakým spôsobom je možné ukázať podobné, hoci slabšie výsledky o analytickosti v hraničnom bode vážených trajektórií asociovaných so symetrizáciami Φ_4, Φ_5.