Vedecká Rada Fakulty Matematiky,
Fyziky a Informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave

Mgr. Alexandra Urbánová Csajková

Autoreferát dizertačnej práce

Kalibrácia modelov úrokovej miery

na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia:
11-14-09 Aplikovaná matematika

Bratislava 2007

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre aplikovanej matematiky a štatistiky, Fakulty matematiky, fyziky a informatiky (FMFI) Univerzity Komenského (UK) v Bratislave.

Predkladateľ: Mgr. Alexandra Urbánová Csajková
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI - UK v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Školiteľ: Doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI - UK v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Oponenti:

Autoreferát bol rozoslaný dňa: ....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa: .... o .... pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia 11-14-09 Aplikovaná matematika vymenovanou podpredsedom spoločnej odborovej komisie dňa .... na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Podpredseda spoločnej odborovej komisie:
Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
FMFI - UK v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Úvod

V predchádzajúcej dekáde sa na trhu objavili nové nástroje závislé na úrokovej miere ako napr. futures, swapy, opcie na dlhopisy atď, ktorých payoff závisí od úrokovej sadzby. To znamená, že ich hodnota je ovplyvnená úrokom. Expanzia trhu s úrokovými derivátmi nastala z dvoch dôvodov, jednak kvôli zlepšiemu riadeniu rizík, na druhej strane sa však objavili špekulatívne obchody. Oba dôvody ale vedú k požiadavke správneho oceňovania takýchto finančných nástrojov. Pri oceňovaní treba mať na pamäti stochastickosť úrokovej sadzby. Náhodná fluktuácia trhu úrokovej miery by mohla byť správnym a realistickým prístupom. Stochastickosť úrokovej sadzby, zvlášť časovej štruktúry úrokovej miery by sa mala korektne modelovať.

Časová štruktúra úrokových mier je funkčná závislosť medzi dobou splatnoti (maturity) dlhopisu a jeho výnosom. Mnohé modely úrokovej miery charakterizujú cenu (výnos) dlhopisu ako funkciu maturity, stavovej premennej (napr. okamžitej úrokovej miery) a niekoľkých parametrov modelu. Hoci bolo niekoľko modelov derivátov úrokovej miery predstavených, žiadna z nich nerieši dokonale problém oceňovania. Modely časovej štruktúry úrokovej miery predstavujú dôležitú časť teórie finančných derivátov a mnohí sa sústreďujú na túto problematiku ako z radov teoretikov tak aj z radov praktikov.

Existuje mnoho pokusov o kalibráciu modelov úrokovej sadzby. Medzi najznámejšie metódy patria zovšeobecnená metóda momentov (Generalized Method of Moments), metóda Gaussovho odhadu (the Gaussian estimation methods), prístup Monte Carlo filtrácie (Monte Carlo filtering approach) alebo MCMC (Markov Chain Monte Carlo) metóda. Použitie týchto metód sa nelimituje len na oceňovanie dlhopisov, ale často sa používajú aj pri úrokových swapoch.

V poslednom čase sa objavili aj iné metódy odhadov modelov úrokovej miery, ktoré sú založené na derivátoch ako sú capy a floory. Takými finančnými nástrojmi sa však na mnohých finančných trhoch neobchoduje, vrátane trhov krajín strednej Európy.

Menej pozornosti bolo venované aplikácii modelov úrokovej miery pre krajiny ako sú Česká republika, Slovensko, Poľsko a Maďarsko. Navyše ani porovnania pre stabilnejšie západoeurópske finančné trhy neboli doteraz uskutočnené.

Napriek konvergencii bývalých socialistických krajín k západoeurópskym je medzi strednou a západnou Európou ako aj medzi ich finančnými trhmi značný rozdiel. Zostáva však otázka, ako ďaleko sú od seba tieto štáty. Ináč, je modelovanie úrokovej miery odlišné v týchto krajinách Európy? Aby sme dostali na túto otázku odpoveď, musíme sa oboznámiť jednak pozadím trhov strednej Európy ako aj modelovaním časovej štruktúry úrokovej miery.

V tejto práci sme sa zaoberali analýzou jednofaktorových modelov ako sú Cox-Ingersoll-Ross-ov model a Vašičkov model. Patria do triedy tzv. "equilibrium" modelov a generujú časovú štruktúru úrokovej miery závislú na počiatočnej okamžitej (krátkodobej) úrokovej sadzbe a na parametroch modelu.

Prehľad kalibračných techník a metód odhadov

V podstate existujú tri generácie modelov úrokovej miery. Prvá generácia modeluje úrok priamo. Nazývajú sa modely krátkodobej úrokovej miery. Modely druhej generácie, tzv. Heath-Jarrow-Morton (HJM) modely modelujú celú forwardovú krivku. Tie automaticky fitujú výnosovú krivku. Riadiacou premennou týchto modelov je forwardová miera. Dá sa ukázať, že všetky modely prvej generácie sa dajú naformulovať v HJM rámci [10]. Posledná generácia modelov zahŕňa LIBOR market modely (LMM) alebo Brace-Gatarek-Musiela modely , ktoré modelujú konkrétnu časť forwardovej krivky.

Existuje niekoľko štúdií, ktoré sa zaoberajú kalibráciou alebo odhadom modelov úrokovej miery či už cez úrokovú sadzbu alebo pomocou derivátov úrokovej miery. V nasledovných odsekoch predstavíme reprezentatívne príklady metód patriacich do vyššie spomenutých troch generácií.

- 1. generácia: Chan, Karolyi, Longstaff a Sandres [6] odhadovali a porovnávali rôzne modely krátkodobej úrokovej miery pomocou GMM. Určili, ktorý z modelov najlepšie popisuje výnos vládnych dlhopisov.

  Neskôr Li [11] odhadoval jednofaktorový model tiež pomocou tej istej metódy momentov ale v austrálskom kontexte. Ukázal, že neobmedzený jednofaktorový model lepšie fituje historické dáta úrokovej sadzby.

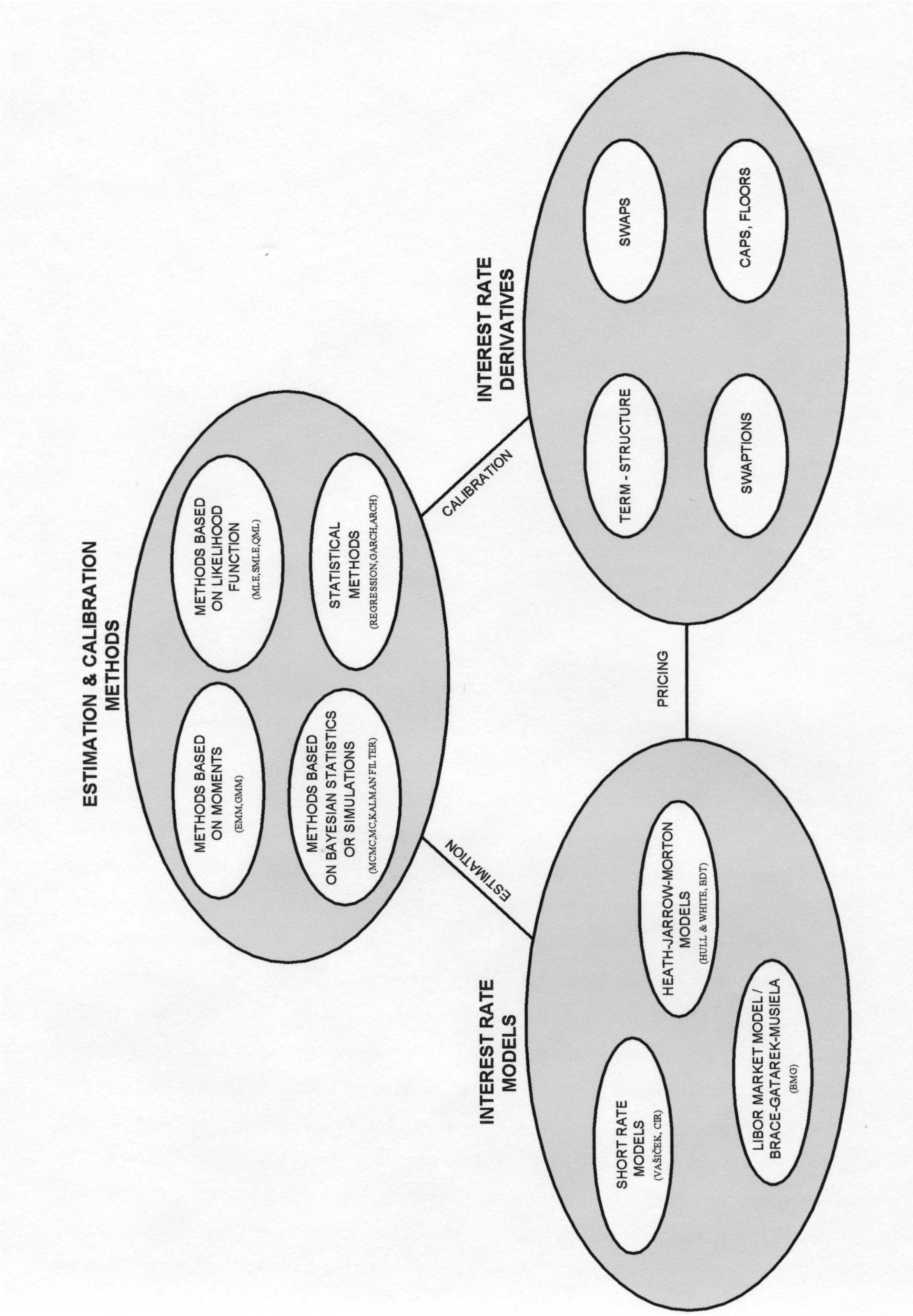
  Jensen [9] demonštroval, že Longstaff a Schwartz model nie je vhodný na popis krátkodobej úrokovej miery pomocou implementácie novej metódy efektívnych momentov. Jeho výsledky sú robustné aj pre analýzu podperiód.

  Duan, Gauthier, Simonato a Zaanoun v [7] aplikovali ďalšiu metódu a to metódu maximálnej vierohodnosti (MLE) na odhad parametrov modelu Merton Longstaff a Schwartz.

- 2. generácia: Boyle, Tan a Tian [4] zistili matematické podmienky za ktorých odhad ďalšieho jednofaktorového modelu, tzv. Black-Derman-Toy modelu, dáva rozumné výsledky. Výhoda tohto modelu je v tom, že je použiteľný na kalibráciu súčasnej časovej štruktúry úrokovej miery a volatility. Ich hlavným výsledkom bolo, že v prípade pozitívnej súčasnej implikovanej forwardovej miery a volatility krátkodobej úrokovej sadzby je kalibrácia BDT modelu možná.

- 3. generácia: Takahashi a Sato [16] vyvinuli novú metodológiu na odhad všeobecnej triedy modelov časovej štruktúry úrokovej miery založenú na prístupe Monte Carlo filtrácie. Použili ju v kontexte japonského trhu na LIBOR-y a swapy.

  Vojtek [17] prezentoval metodológiu kalibrácie viacfaktorových modelov pre krajiny strednej Európy. Odhadoval parametre Brace, Gatarek a Musiela modelu, špeciálne podmienené volatility a korelácie pomocou GARCH modelov. BGM model (známy aj ako LIBOR market model) sa prvý krát predstavil a kalibroval v prácach [5] Brace, Gatarek a Musiela, [8] Jamshidian a [12] Miltersen, Sandmann a Sondermann.



Obr. 1: Schématický diagram rôznych kalibračných techník a metód odhadov

Ako vidíme na odhad modelov úrokovej miery sa používajú rôzne metódy, ktoré boli založené hlavne na zovšeobecnenej metóde momentov, na metóde maximálnej vierohodnosti alebo na Monte Carlo filtrácii. Menej prác sa ale venuje odhadom a aplikácii jednofaktorových modelov v kontexte krajín strednej Európy.

Ciele

Správne ocenenie derivátov úrokovej miery je veľmi dôležité pre finančnú činnosť. Ako bolo uvedené v predchádzajúcej časti veľa prác sa venuje tejto téme, ale žiadna z nich nedáva jasnú odpoveď na presné ocenenie. Mnohí kalibrovali model úrokovej miery pomocou trhových cien úrokových nástrojov. Iní sa zase pokúšali odhadnúť parametre priamo a použiť ich pri oceňovaní derivátov úrokovej miery. Ak si niekto zvolí prvý prístup, tak potrebuje trh s rôznymi finančnými nástrojmi. Použitie tejto metódy je v prípade nových členských štátov prakticky nemožné, keďže trh s finančnými derivátmi je menej aktívny a prevláda dominancia bankového sektora. To ale znamená, že kalibrácia modelov úrokovej miery je umožnená cez dlhopisy. Teraz si už treba len zvoliť vhodnú kalibračnú metódu na riešenie tejto úlohy. V predchádzajúcej časti sa spomínali niektoré metódy odhadov a kalibrácie. Problémy, ktoré sú podrobnejšie vysvetlené v dizertačnej práci, nás inšpirovali k vyvinutiu novej metódy založenej na dvojfázovej minmax optimalizácii. Táto procedúra sa skladá z dvoch krokov. V prvom kroku sa minimalizuje tzv. stratový funkcionál. Táto minimalizácia vedie k jednorozmernej λ-parametrizovanej krivke miním. V druhom kroku sa maximalizuje funkcia vierohodnoti obmedzená na túto krivku. Kvalita fitu je dôležitá preto predstavíme dve miery: nelineárny R^2 pomer a pomer maximálnej vierohodnosti.

Ako rozšírenie tejto metódy predstavíme ďalší prístup, ktorý je založený na ohraničení časovej štruktúry úrokovej miery. Využíva dodatočné (štatistické) informácie získané z výnosových kriviek na to, aby sa stredná hodnota, prípadne významná časť časovej štruktúry výnosových kriviek ohraničila nejakým rozumným intervalom. Preto samotné výsledky sú vo forme intervalov. Samozrejme k samotnej kalibrácii sa využíva navrhutá redukcia parametrov. Jedným z cielov tejto práce je aj porovnanie výsledkov pre strednú a západnú Európu.

V práci sa sústreďujeme na internú kalibračnú metódu a jej možnú aplikáciu pre rôzne dáta (ktoré samozrejme nemusia nutne byť aktuálne). Po interných kalibračných metódach predstavíme aj tzv. externú metódu, ktorá predpokladá externe poskytnutú dodatočnú informáciu. To znamená, že sa kalibrácia uskutočňuje nielen na základe dát (alebo informácií získaných z dát) ale aj na základe skúseností experta. Opäť dostávame ako výsledok nie bod ale interval riešení.

Našim cieľom je nielen predstaviť metódu na kalibráciu jednofaktorových modelov, ale navrhúť možný spôsob riešenia tejto problematiky aj pre viacfaktorové modely. Úplná demonštrácia navrhnutej metódy pre viacfaktorové modely je obtiažna, porozumenie a interpretácia výsledkov je komplexná. Hlavným dôvodom zvoleného prístupu je extrakcia maximálne možných informácií z jednofaktorových modelov, špeciálne z

CIR a Vašičkovho modelu, a náznak riešenia pre viacfaktorovú kalibráciu. Na základe získaných výsledkov budeme schopní komentovať naše výsledky z pohľadov či už výhod alebo nevýhod danej metodológie.

Veľká časť výsledkov internej kalibračnej metódy je nová a bola vyvinutá a publikovaná v [14, 15] Ševčovičom a Urbánovou-Csajkovou.

Metódy

Predpokladajme, že krátkodobá/okamžitá úroková sadzba r_t [1] sleduje špeciálny typ spojitého Markovovského stochastického procesu, tzv. mean reverting proces v tvare:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dw_t, \tag{1}$$

kde $\{w_t, t \geq 0\}$ označuje štandardný Wienerov proces, κ, θ, σ sú kladné konštanty a γ je nezáporná konštanta. Parameter κ je rýchlosť reverzie, σ označuje volatilitu procesu a θ je limitná úroková miera. Parameter γ určuje typ modelu. Ak $\gamma = \frac{1}{2}$ tak model odvodený z (1) sa nazýva ako Cox-Ingersoll-Ross (CIR) model.

Dizertačná práca je založená na jednofaktorových modeloch úrokovej miery. Využíva sa v nej úroková miera na medzibankovom trhu a preto sa uvažuje s kalibráciou pomocou dlhopisov.

Tvrdenie 0.1. ([10], p. 321) Cena bezkupónového dlhopisu $P = P(t, T, r)$ sleduje parabolickú parciálnu diferenciálnu rovnicu v tvare:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\kappa(\theta - r) - \widetilde{\lambda}\sigma r^\gamma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \tag{2}$$

kde $t \in (0, T)$ a $r > 0$, spĺňajúcu $P(T, T, r) = 1 \; \forall r$.

Parameter $\widetilde{\lambda}$ je rozdielna pre Vašičkov a CIR model. V prípade CIR modelu $\widetilde{\lambda}(r) = \lambda r^{\frac{1}{2}}/\sigma$ zatiaľ čo pre Vašičkov model $\widetilde{\lambda}(r) = \lambda$, kde λ je konštanta.

Tvrdenie 0.2. ([10], pp. 322-325) Parciálna diferenciálna rovnica (2) má explicitné riešenie pre oba modely v tvare:

$$P(T - \tau, T, r) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}, \tag{3}$$

kde $\tau = T - t \in [0, T]$ a funkcie $A(\tau), B(\tau)$ spĺňajú

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\eta\tau} - 1)}{(\kappa + \lambda + \eta)(e^{\eta\tau} - 1) + 2\eta}, \quad A(\tau) = \left(\frac{\eta e^{(\kappa+\lambda+\eta)\tau/2}}{e^{\eta\tau} - 1} B(\tau)\right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}, \tag{4}$$

pre CIR model, kde $\eta = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$.

[1] Krátkodobá/okamžitá úroková miera sa bude označovať ako $r_t = r$.

Vašičkov model je ďalej popísaný v dizertačnej práci. Všimnime si, že trhová cena rizika vo vyššie uvedených vzorcoch sa objavuje len v súčte s κ, ako to bolo poznamenané v práci [13] Pearson a Sun. Táto motivácia nás viedla k redukcii parametrov zahrnutých v jednofaktorovom modeli CIR. Existuje mnoho spôsobov ako redukovať pôvodný štvorrozmerný priestor parametrov na tri parametre. V práci predstavujeme transformáciu parametrov pre CIR model, kde teda nové premenné majú nasledovný tvar:

$$\beta = e^{-\eta}, \quad \xi = \frac{\kappa + \lambda + \eta}{2\eta}, \quad \varrho = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}, \tag{5}$$

kde $\eta = \sqrt{(\kappa+\lambda)^2 + 2\sigma^2}$. Návrat k pôvodným parametrom CIR modelu $(\kappa, \sigma, \theta, \lambda)$ je nasledovný:

$$\kappa = \eta(2\xi - 1) - \lambda, \quad \sigma = \eta\sqrt{2\xi(1-\xi)}, \quad \theta = \frac{\varrho\sigma^2}{2\kappa}, \tag{6}$$

kde $\eta = -\ln\beta$.

Po zavedení nových parametrov si zadefinujeme stratový funkcionál, ktorý meria kvalitu aproximácie reálnych trhových výnosov pomocou modelom vypočítaných výnosov.

Definícia 0.1. Stratový funkcionál je časovo vážená vzdialenosť reálnych $\{R_j^i, j = 1, ..., m\}$ a vypočítaných $\{\bar{R}_j^i, j = 1, ..., m\}$ výnosových kriviek v čase $i = 1, ..., n$, na základe vzťahu výnosu a ceny dlhopisu

$$A_j e^{-B_j R_0^i} = e^{-\bar{R}_j^i \tau_j} \tag{7}$$

kde $r^i = R_0^i$ je okamžitý úrok v čase $i = 1, ..., n$, $A_j = A(\tau_j)$ a $B_j = B(\tau_j)$ kde $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_m$ sú maturity dlhopisu vytvárajúce výnosovú krivku, definovaný nasledovne:

$$U(\beta, \xi, \varrho) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_j^i - \bar{R}_j^i)^2\tau_j^2. \tag{8}$$

$A(\tau)$ a $B(\tau)$ sú definované:

$$B = -\frac{1}{\ln\beta}\,\frac{1-\beta^\tau}{\xi(1-\beta^\tau)+\beta^\tau}, \quad A = \left(\frac{\beta^{(1-\xi)\tau}}{\xi(1-\beta^\tau)+\beta^\tau}\right)^{\varrho}. \tag{9}$$

Kvôli zjednodušeniu výpočtov sa odvodil jednoduchý tvar stratového funkcionálu.

Tvrdenie 0.3. V zmysle priemerných hodnôt časovej štruktúry úrokových mier a ich kovariancií sa stratový funkcionál dá vyjadriť v nasledovnej forme:

$$U(\beta, \xi, \varrho) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}((\tau_j E(R_j) - B_j E(R_0) + \ln A_j)^2 + D(\tau_j R_j - B_j R_0)), \tag{10}$$

kde $E(X_j)$ a $D(X_j)$ označujú strednú hodnotu a disperziu vektora $X_j = \{X_j^i, i = 1, ..., n\}$.

Ako sme už spomínali v prvom kroku treba uskutočniť minimalizáciu stratovej funkcie U na nejakom priestore Ω. Úlohou je nájsť vhodnú numerickú aproximáciu nasledovného problému:

$$\min_{x\in\Omega} U(x) \tag{11}$$

kde x je vektor neznámych parametrov a $\Omega \in \mathbb{R}^n$. V našom prípade $n = 3, x = (\beta, \xi, \varrho)$ a $\Omega = (0,1) \times (0,1) \times (0, \varrho_{max})$ je ohraničená množina v $\mathbb{R}^3$ kde $\varrho_{max} > 0$ je dostatočne veľké číslo.

Uvažovali sme tri metódy minimalizácie stratového funkcionálu $U = U(\beta, \xi, \varrho)$ a to:

- metódu najväčšieho spádu Newton-Kantorovichovho typu,
- metódu založenú na evolučných stratégiách,
- kombináciu týchto dvoch metód.

Podrobnejšie popisy týchto prístupov môžete nájsť v dizertačnej práci.

Interné kalibračné metódy

Kalibrácia založená na maximalizácii obmedzenej funkcie vierohodnosti

Táto časť je venovaná kalibračnej metóde jednofaktorových modelov. Základná idea postupu je identická pre oba modely CIR a Vašiček. Predpokladajme, že máme daný typ modelu, teda γ je známa. Prvý krok, minimalizácia stratového funkcionálu, vedie k jednorozmernej krivke parametrov. Metóda sa síce javí ako metóda najmenších štvorcov, ale problém je nelineárny. Po identifikácii jednorozmernej krivky nasleduje druhý krok. Tento krok pozostáva z maximalizácie obmedzenej funkcie vierohodnosti na vyššie spomínanej krivke. Akonáhle sa dosiahne globálne maximum máme odhadnuté parametre modelu.

Teraz priblížime podrobnosti druhého kroku. Prvý krok nám dáva bod $(\breve{\beta}, \breve{\xi}, \breve{\varrho})$, ktorý predstavuje globálne minimum stratového funkcionálu $U = U(\beta, \xi, \varrho)$. Majúc na pamäti redukciu parametrov predstavenú vyššie, existuje C^∞ hladká jednorozmerná krivka pôvodných parametrov modelu $(\kappa_\lambda, \theta_\lambda, \sigma_\lambda, \lambda) \in R^4$ parametrizovaná λ-ou prislúchajúca k transformovaným parametrom $(\breve{\beta}, \breve{\xi}, \breve{\varrho})$ pre ktoré sa minimum funkcie U nadobúda. Druhý krok optimalizácie, je nájsť globálne maximum funkcie vierohodnosti (LF) štandardného Gaussovského typu obmedzenú na λ-parametrizovanú krivku, vedie ku konštrukcii odhadu parametrov modelu $\kappa, \theta, \sigma, \lambda$. Takže samotná metóda kombinuje 2 kroky.

Ak uvažujeme teda, že krátkodobá úroková miera sleduje proces (1) potom LF je v tvare:

$$\ln L(\kappa, \sigma, \theta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=2}^{n}\left(\ln v_t^2 + \frac{\varepsilon_t^2}{v_t^2}\right) \tag{12}$$

kde $v_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa}\right) r_{t-1}^{2\gamma}$, $\varepsilon_t = r_t - e^{-\kappa} r_{t-1} - \theta\left(1 - e^{-\kappa}\right)$ (vid. [1, 2, 3]). Ak sa odhad parametrov (κ, σ, θ) uskutoční maximalizáciou funkcie vierohodnosti na celej množine $\mathbb{R}_+^3$, potom sa jedná o neobmedzenú maximalizáciu. Hodnota neobmedzenej funkcie maximálnej vierohodnosti je:

$$\ln L^u = \ln L(\kappa^u, \sigma^u, \theta^u) = \max_{\kappa,\sigma,\theta>0} \ln L(\kappa, \sigma, \theta)\,. \tag{13}$$

V našom prípade maximalizácia $\ln L$ prebieha na obmedzenom priestore (λ-parametrizovanej krivke) $\{(\kappa_\lambda, \theta_\lambda, \sigma_\lambda), \lambda \in \check{J}\}$. V pôvodných parametroch sa to dá napísať nasledovne:

$$\ln L^r = \ln L(\kappa_{\bar{\lambda}}, \sigma_{\bar{\lambda}}, \theta_{\bar{\lambda}}) = \max_{\lambda\in\check{J}} \ln L(\kappa_\lambda, \sigma_\lambda, \theta_\lambda), \tag{14}$$

kde $\check{J} = (-\infty, -(2\check{\xi} - 1)\ln\check{\beta})$ pre CIR model. Argument $\bar{\kappa} = \kappa_{\bar{\lambda}}$, $\bar{\sigma} = \sigma_{\bar{\lambda}}$, $\bar{\theta} = \theta_{\bar{\lambda}}$ maxima obmedzenej funkcie vierohodnosti $\ln L^r$ sa chápe ako výsledok dvojkrokovej optimalizačnej metódy. Globálne maximum funkcie $\ln L^u$ sa počítalo pomocou metódy evolučných stratégií. Podrobnosti sa nachádzajú v dizertačnej práci. Keďže maximalizácia $\ln L^r$ sa uskutočňuje vzľadom na λ a funkcia $\lambda \mapsto \ln L(\kappa_\lambda, \sigma_\lambda, \theta_\lambda)$ je hladká môžeme použiť štandardný optimalizačný softvérový balík Mathematica na túto problematiku. Presnosť kalibrácie sme merali pomocou dvoch pomerov a to pomocou pomeru maximálnej vierohodnosti (MLR) a nelineárneho R^2 pomeru. Podrobnosti sa nachádzajú v dizertačnej práci. Je však dôležité podotkúť, že MLR≤ 1 a v prípade, že MLR je blízko k 1, tak podľa definície samotného pomeru hodnota obmedzenej maximálnej vierohodnosti je blízko k hodnote neobmedzenej maximálnej vierohodnosti. V tom prípade odhady $(\bar{\kappa}, \bar{\sigma}, \bar{\theta})$ sú blízko hodnôt globálneho maxima neobmedzenej vierohodnostnej funkcie $(\kappa^u, \sigma^u, \theta^u)$. To môže indikovať, že odhad parametrov priamo na základe mean reverznej rovnice (1) pre krátkodobú úrokovú mieru môže byť tiež vhodným prístupom kalibrácie.

Ohraničenie časovej štruktúry úrokovej miery intervalom očakávaného dlhodobého úroku

Vo vyššie popísanej dvojkrokovej optimalizačnej metóde: v prvom kroku minimalizácia stratového funkcionálu a v druhom kroku maximalizácia obmedzenej funkcie vierohodnosti sa využívajú agregované štatistiky z dát ako to vidíme vo vzorci (10).

To znamená, že vypočítajú sa stredné hodnoty, kovariancie z časových radov a kalibrácia zúžitkuje tieto informácie. Výnosová krivka ale obsahuje omnoho viac informácií, ktoré môžu byť užitočné počas kalibrácie. Takže sa v druhom kroku využijú dodatočné informácie z dát. Je dôležité podotknúť, že sa naďalej snažíme držať informácií získaných z dát. V tejto metóde sa použijú výnosové krivky. Ohraničujú sa stredy a významná časť časovej štruktúry úrokovej miery nejakým rozumným intervalom.

Hlavná idea tohto prístupu je nasledovná:

- v prvom kroku sa minimalizuje stratový funkcionál $U = U(\beta, \xi, \varrho)$ na λ-parametrizovanej krivke globálnych miním U,

- v druhom kroku sa použije extra informácia z dát. Využije sa bohatosť výnosových kriviek na kalibráciu štvrtého parametra λ.

Interval očakávaného dlhodobého úroku $[\theta_d, \theta_u]$ slúži ako pomôcka pri kalibrácii a je určený na základe dát. V tomto prípade ale nedostaneme bod ako riešenie neznámych parametrov CIR modelu, ale interval. Podrobnosti sa nachádzajú v dizertačnej práci.

Externá kalibračná metóda

Táto metodológia, tzv. externá kalibračná metóda, je založená na externe dodanom parametri. Tento parameter môže byť napríklad očakávaný dlhodobý úrok θ. Tento vstup sa získava na základe expertnej analýzy dát alebo z očakávania expertov.

V jednofaktorových modeloch diskutovaných v tejto práci vystupujú štyri parametre. Na základe ekonomickej interpretácie parametrov, ako sú očakávaný dlhodobý úrok, trhová cena rizika, volatilita krátkodobej úrokovej miery a faktor reverzie, je ťažké získať externe dodanú hodnotu pre ne. Najviac pravdepodobné je určiť akési očakávania na dlhodobý úrok teda parameter θ.

Kalibrácia založená na predpísanom intervale očakávaného dlhodobého úroku

Predpokladajme, že máme informáciu o očakávanom dlhodobom úroku θ, že je v intervale $I_\theta = [\theta_d, \theta_u]$, kde θ_d je dolná a θ_u horná hranica intervalu poskytnutá expertom a $0 < \theta_d < \theta_u$.

Tento problém je zložitý pre viacfaktorové modely, keďže sa predurčený interval musí trafiť viacerými parametrami ako je to v jednofaktorových modeloch. Kvôli jednoduchosti uvažujme jednofaktorový model pre bezkupónový dlhopis. Ako už vieme, existuje explicitné riešenie pre CIR model. To znamená, že sme schopní kalibrovať tento model aj s dodatočnou, externe poskytnutou informáciou I_θ.

Základný krok je opäť redukcia parametrov. Minimalizujeme stratový funkcionál (10) aby sme získali vektor $(\check{\beta}, \check{\xi}, \check{\varrho})$. V druhom kroku potrebujeme tú externú informáciu o intervale I_θ. Na základe týchto očakávaní sme schopní nájsť:

1. interval pre trhovú cenu rizika $I_\lambda = [\lambda_d, \lambda_u]$, kde $\lambda_d < \lambda_u$ sú definované pre CIR model nasledovným spôsobom:

$$\lambda_i = -\ln \check{\beta} \left[(2\check{\xi} - 1) + \frac{\check{\varrho}}{\theta_i} \check{\xi}(1 - \check{\xi}) \ln \check{\beta} \right] \tag{15}$$

   kde $i \in \{d, u\}$.

2. interval pre rýchlosť reverzie $I_\kappa = [\kappa_d, \kappa_u]$ pre CIR model, kde κ_d a κ_u sú definované ako:

$$\kappa_d = -(2\check{\xi} - 1) \ln \check{\beta} - \lambda_u, \quad \kappa_u = -(2\check{\xi} - 1) \ln \check{\beta} - \lambda_d$$

Tabuľka 1: Numerické výsledky kalibrácie pre BRIBOR, PRIBOR a EURIBOR s maturitou do 1 roka. Výsledky obsahujú 4 kvartály roka 2003.

BRIBOR	κ	σ	θ	λ	U ($\times 10^{-6}$)	R^2	ML ratio
1/4 2003	688.298	8.960	0.0025	-658.657	1.629	0.947	0.528
2/4 2003	38.467	1.509	0.0458	-6.302	1.704	0.971	0.719
3/4 2003	598.875	8.276	0.0031	-568.839	0.487	0.971	0.536
4/4 2003	793.487	9.396	0.0022	-764.117	0.339	0.986	0.551
PRIBOR							
1/4 2003	0.098	0.007	0.0248	0.092	0.134	0.633	0.904
2/4 2003	36.934	0.728	0.0209	-4.714	0.238	0.428	0.514
3/4 2003	2.823	0.060	0.0201	-0.200	0.028	0.897	0.814
4/4 2003	3.385	0.097	0.0187	-0.626	0.088	0.924	0.685
EURIBOR							
1/4 2003	40.927	1.030	0.0202	-8.724	0.506	0.783	0.654
2/4 2003	0.818	0.028	0.0240	0.252	0.319	0.746	0.876
3/4 2003	39.209	0.644	0.0178	-6.986	0.143	0.807	0.735
4/4 2003	15.592	0.360	0.0180	-3.451	0.145	0.941	0.778

3. a posledný parameter σ, ktorý je nezávislý na λ v tvare:

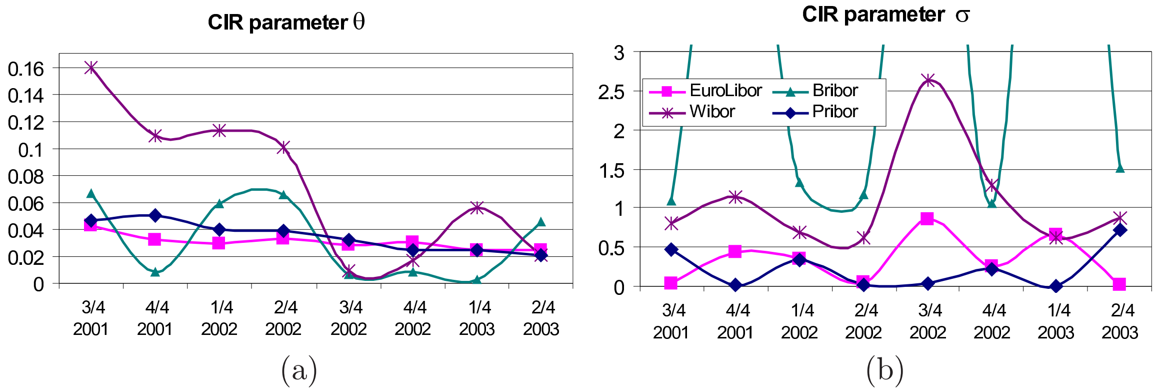
$$\sigma = \sigma_d = \sigma_u = -\ln \check{\beta}\sqrt{2\check{\xi}(1-\check{\xi})}.$$

Výsledky

Interná kalibračná metóda

Výsledky kalibrácie pomocou obmedzenej funkcie vierohodnosti

Výsledky kalibrácie parametrov pre CIR model, ako aj pomery MLR a R^2 sú zosumarizované v Tabuľke 1 pre rôzne časové štruktúry s maturitou do 1 roka. Tabuľka 1 obsahuje štvrťročné výsledky pre BRIBOR, PRIBOR a EURIBOR pre rok 2003. Správanie sa očakávaného dlhodobého úroku θ je v súlade s očakávaniami na trhu v dlhodobom horizonte. Predikuje úrokové miery blízko 1.7% pre EURIBOR ako aj PRIBOR. Ostatné úrokové sadzby naznačujú pokles v budúcnosti, ale kvantitatívny odhad θ je menej presvedčivý ako je to v prípade EURIBOR-u a PRIBOR-u. Odhady κ ukazujú, že sa najnižšia hodnota dosiahla pre PRIBOR a najvyššia pre BRIBOR, čo sa ale potvrdzuje vysokou volatilitou BRIBOR-u a charakteristikou slovenského medzibankového trhu. Parameter volatilita nadobúda vysoké hodnoty pre slovenské dáta. Na druhej strane však môžeme konštatovať, že kvalitatívne a kvantitatívne výsledky pre



Obr. 2: Výsledky odhadov parametrov pre rôzne trhy. Odhadnuté parametre θ a σ sú znázornené na obrázkoch (a) a (b).

PRIBOR sú blízko k výsledkom pre EURIBOR. Na základe kvality fitu meranej pomocou MLR, CIR model lepšie popisuje PRIBOR a EURIBOR. Nelineárny R^2 pomer je vo väčšine prípadov blízko k jednej.

Na Obrázku 2 časti (a) a (b) znázorňujú odhadnuté parametre θ (očakávaný dlhodobý úrok) a σ (volatilita procesu (1)). Výsledky sú porovnateľné pre PRIBOR a EURIBOR nielen čo sa týka θ ale aj σ. Volatilita procesu pre slovenské dáta je vysoká. Parameter θ vykazuje vysokú fluktuáciu.

Výsledky kalibrácie založenej na ohraničení strednej hodnoty

V tejto metóde sa snažíme ohraničiť stredné hodnoty s najužším možným intervalom očakávaného dlhodobého úroku $I_\theta = [\theta_d, \theta_u]$ cez výnosové krivky nasledovným spôsobom:

$$r_d^* < E(R_j) < r_u^* \quad \forall j \in \{1, .., m\}. \tag{16}$$

Na základe tejto skutočnosti samotný algoritmus má tieto kroky:

1. získanie $(\breve{\beta}, \breve{\xi}, \breve{\varrho})$ v prvom kroku (minimalizácia stratového funkcionálu)

2. určenie najužšieho intervalu $I_\theta = [\theta_d, \theta_u]$ v druhom kroku

   I. ak je daná počiatočná aproximácia $\theta_d \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$ a $\theta_u \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$ a dostatočne malé kroky $\Delta\theta_u, \Delta\theta_d > 0$

   II. vypočítajú sa λ_d, λ_u a následne r_d^* and r_u^*

   III. overí sa podmienka $r_u^* \leq E(R_j) \leq r_d^*$ pre každé $j \in \{1, ..., m\}$ (v špeciálnom prípade len pre nejakú podmnožinu $j \in \{1, ..., m\}$)

   IV. ak III je splnená, tak sa navýši dolná hranica intervalu $\theta_d = \theta_d + \Delta\theta_d$ a zníži horná hranica $\theta_u = \theta_u - \Delta\theta_u$. Vrátime sa ku kroku II. V opačnom prípade ukončíme.

Tabuľka 2: Výsledky pre PRIBOR z roku 2005 v prípade zahrnutia všetkých maturít

PRIBOR	θ_d	θ_u	λ_d	λ_u
February	0.01005	0.02285	-0.46189	0.00570
March	0.02035	0.02215	-0.24978	0.75840
April	0.00865	0.02390	-0.71028	-0.03909
May	0.01580	0.01810	-0.35461	-0.06380
Jun	0.01705	0.01760	-0.13371	-0.00915
July	0.01660	0.01885	-0.17155	-0.06187
August	0.01700	0.01870	-0.25981	-0.11381
September	0.01560	0.02070	-0.24073	-0.08629

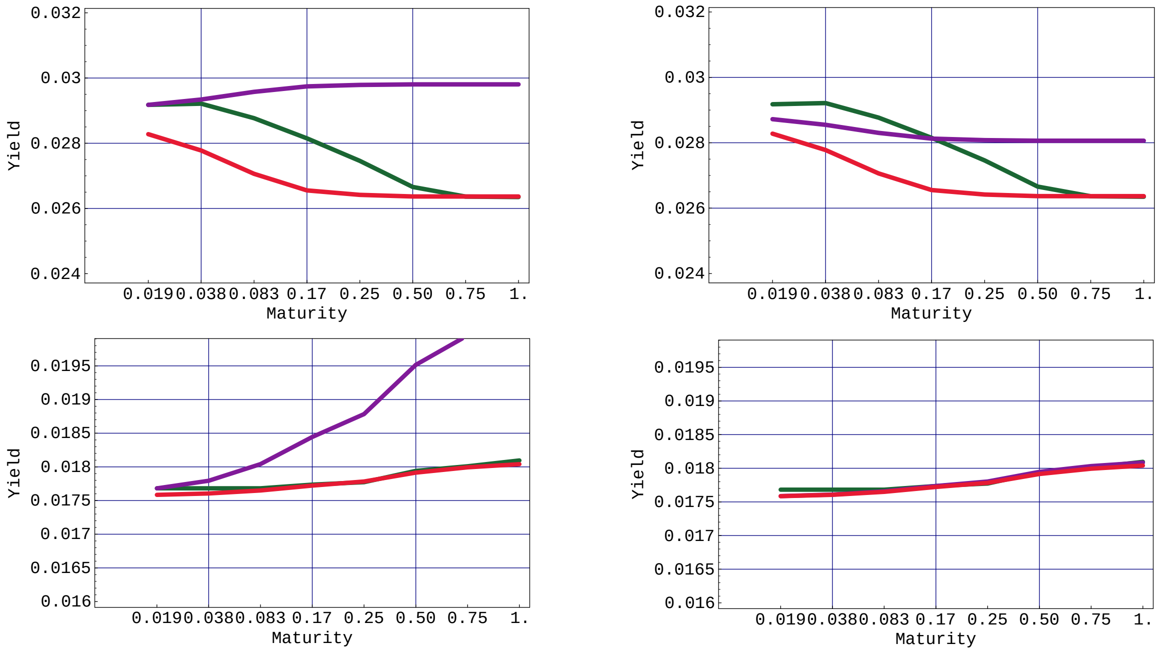
Tabuľka 3: Výsledky pre BRIBOR z roku 2005 v prípade zahrnutia všetkých maturít

BRIBOR	θ_d	θ_u	λ_d	λ_u
February	0.02805	0.04090	-1.29012	-0.34379
March	0.00580	0.03210	-7.04533	-0.26786
April	0.01170	0.02905	-10.33360	-0.67071
May	0.02545	0.02880	-0.46294	1.40862
Jun	0.02225	0.02795	-3.64359	0.31737
July	0.01955	0.03030	-8.23568	-1.33360
August	0.02825	0.02995	-0.16431	0.70541
September	0.02270	0.02745	-4.26512	-0.81113

Tabuľky 2-3 obsahujú výsledky pre PRIBOR a BRIBOR úrokové sadzby za obdobie február až september 2005 v prípade CIR modelu. Tento výpočet je dostatočne všeobecný, takže sa môže uskutočniť aj na iných dátach ako aj pre Vašičkov model.

Obrázok 3 prezentuje niekoľko reprezentatívnych výsledkov. Porovnáva hranice výnosu (r_d^* a r_u^*) so strednou hodnotou výnosovej krivky R_j. V prvom riadku sa nachádzajú výsledky pre BRIBOR a v druhom riadku pre PRIBOR (pre konkrétnu časovú periódu - v našom prípade pre máj), prvý stĺpec zahŕňa všetky doby splatnosti, druhý stĺpec len dlhšie splatnosti (a to od 2 mesiacov až po 1 rok).

Samotná kalibrácia sa uskutočnila výlučne na základe dát (to znamená, že interval očakávaného dlhodobého úroku I_θ sme získali z dát) a vyústila v pozitívnych výsledkoch z pohľadu negatívneho intervalu trhovej ceny rizika I_λ.



Obr. 3: Výsledky pre BRIBOR (horný riadok) a PRIBOR (dolný riadok) máj 2005 (vľavo – všetky maturity, vpravo – 2m až 1 rok); r_u^*–fialová, r_d^*–červená, $E(R_j)$–zelená.

Externá kalibračná metóda

Diskusia o výsledkoch intervalu očakávaného dlhodobého úroku

Ako sme to už spomínali, v prípade externe dodaného parametra je rozumné uvažovať o očakávanom dlhodobom úroku θ. Nastavenie tohto parametra je komplikované. Bolo by nezodpovedné určiť tento parameter ako fixovanú hodnotu. Z toho dôvodu sme nastavili interval pre očakávaný dlhodobý úrok. Sme si toho vedomí, že naše cieľové nastavenie nemusí byť správne napriek tomu, že naše úvahy sú realistické.

Slovenská ekonomika je malá otvorená ekonomika. Sme ovplyvnení európskymi krajinami. Naša mena je naviazaná na Euro (v nejakom štandardnom fluktuačnom intervale), keďže sme v novembri 2005 vstúpili do ERM II. V blízkej budúcnosti plánujeme prijať Euro a vstúpiť tým do Euro-zóny. Samozrejme musíme splniť Maastrichtské kritériá ešte pred samotným vstupom. Jedna z týchto kritérií hovorí o dlhodobých úrokových sadzbách, že nesmú presiahnúť priemer troch krajín EÚ (s najnižšou infláciou) o viac ako 2 percentuálne body. Centrálna banka bude tlačiť na rast ekonomiky cez znižovanie úrokových sadzieb. Všetky tieto skutočnosti ovplyvňujú očakávania trhu. Aby sa predišlo nejakým veľkým šokom, trh sa na tieto zmeny postupne pripravuje. Môžeme teda očakávať konvergenciu na medzibankovom trhu, konkrétne čo sa týka úrokových sadzieb.

Na základe toho sme nastavili dva možné intervaly pre očakávaný dlhodobý úrok nasledovným spôsobom; krátkodobý úrok (overnight) BRIBOR-u a PRIBOR-u za rok

Tabuľka 4: Interval očakávaného dlhodobého úroku pre EURIBOR z roku 2006.

	θ_d		θ_u	
	on (%)	1w (%)	on (%)	1w (%)
February	2.3299	2.3588	2.3691	2.3862
March	2.3898	2.5656	2.6502	2.6402
April	2.5967	2.6212	2.6600	2.6478
May	2.5162	2.6105	2.6375	2.6318
Jun	2.5365	2.6785	2.8589	2.9067
July	2.7923	2.8310	2.8353	2.8551
August	2.8269	2.9833	3.1096	3.1208
September	3.0159	3.0659	3.0660	3.0820

2005 sa očakáva byť v intervale jednej štandardnej odchýlky okolo stredných hodnôt EURIBOR overnight sadzieb za rok 2006. Vypočítali sme štandardnú odchýlku a strednú hodnotu EURIBOR-u v 2006 pre rôzne mesiace a doby splatnosti. Finálne intervaly zhrnuté v Tabuľke 4, sú nasledovné:

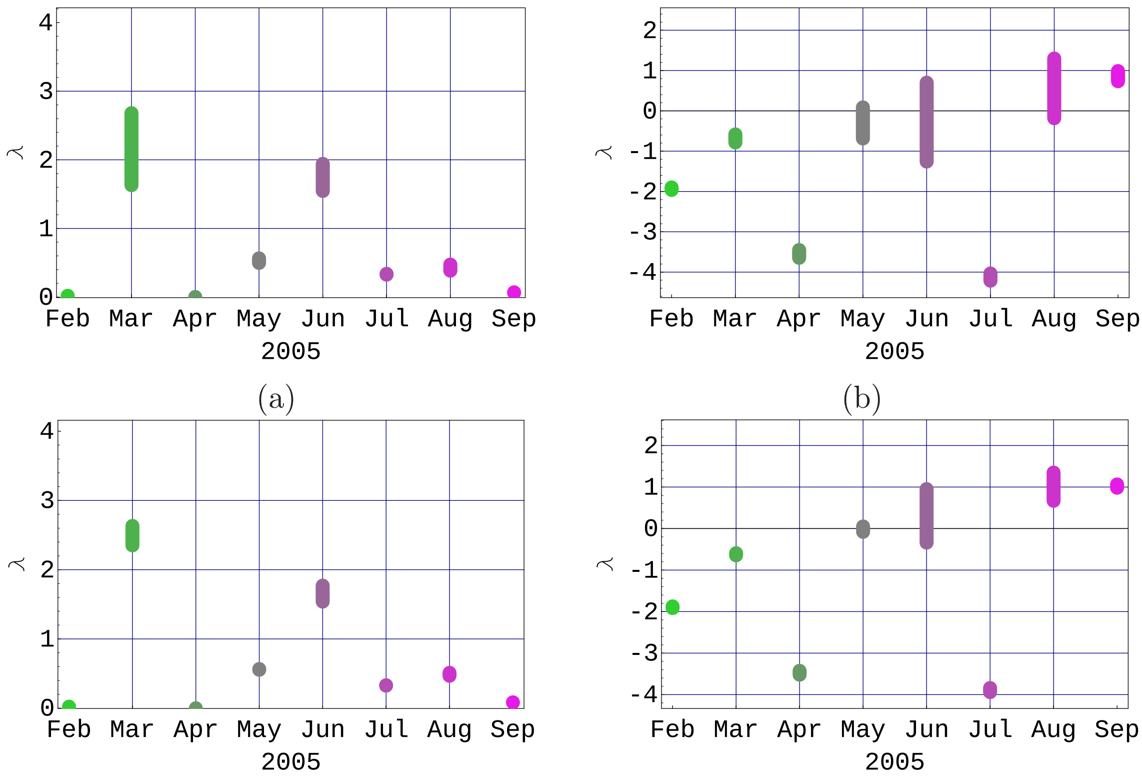
$$I_\theta = [\theta_d, \theta_u] = [\mu_j - \sigma_j, \mu_j + \sigma_j]$$

kde $\mu_j = E(R_j^i)$, $\sigma_j = \sqrt{D(R_j^i)}$, R_j^i -EURIBOR sadzby, i označuje mesačný interval a $j \in \{on, 1w\}$ je maturita. V prípade konvergencie k intervalu s kratšou maturitou I_θ je oveľa širšia ako v prípade konvergencie k intervalu s maturitou napr. jeden týždeň. Dôvod je ten, že ovenight EURIBOR-u je volatilný. Samozrejme tento interval sa môže nastaviť aj iným spôsobom.

Týmpádom máme externe dodanú informáciu. Môžeme pokračovať s druhým krokom aby sme získali interval pre trhovú cenu rizika. Ukážka nakalibrovaných intervalov pre trhovú cenu rizika I_λ je znázornená na Obrázku 4. Kalibrácia sa uskutočnila na vzorke BRIBOR-u a PRIBOR-u za rok 2005 s očakávaním konvergencie k EURIBOR-u z 2006 použitím CIR modelu. Prvý krok kalibrácie bol identický s internou kalibračnou metódou (získanie $(\check{\beta}, \check{\xi}, \check{\varrho})$ pre akékoľvek λ). V ďalšom kroku sme pridali tú dodatočnú informáciu o I_θ a riešenie pre trhovú cenu rizika bolo v tvare intervalu.

Ako vidieť z výsledkov trhová cena rizika je vo väčšine prípadov BRIBOR-u $\lambda < 0$. Opak je pravdou pre PRIBOR sadzby. Keďže λ je konštanta určujúca $1 - \lambda B(\tau)$ (prémium za riziko), tak očakávaná návratnosť dlhopisu $r^* = (1 - \lambda B(\tau))r$ je väčšia ako overnight r vtedy a len vtedy keď $\lambda < 0$.

Jeden zo záverov z takýchto výnosových kriviek môže byť, že zvolené intervaly I_θ pre BRIBOR na základe dát EURIBOR z roku 2006 potvrdzujú vlastnosť väčšej návratnosti dlhopisov ako je overnight r^*. Na druhej strane pre české dáta cieľový interval I_θ je vyššie nastavený keďže udáva kladné hodnoty λ, čo vedie k nižším návratnostiam dlhopisov v porovnaní s overnightom. Ak by sme posunuli interval I_θ (napr. znížením



(a) (b) (c) (d)

Obr. 4: Výsledky kalibrácie založenej na intervale očakávaného dlhodobého úroku pre PRIBOR (vľavo) a BRIBOR (vpravo) s rôznymi konvergenčnými očakávaniami, k overnightu (a)-(b) a k 1 týždňovým sadzbám (c)-(d) EURIBO-u.

θ_d a θ_u tak aby $\lambda_u < 0$) potom by sme mohli dosiahnúť väčšiu návratnosť dlhopisov r^* ako je overnight úrok.

Teraz je zaujímavé si porovnať výsledky kalibrácie založenej na internej a externej metodológii. V časti o výsledkoch kalibrácie založenej na ohraničení strednej hodnoty sme predstavili niekoľko výstupov internej kalibračnej metódy. Ako sme ukázali v Tabuľkách 2 a 3 vo väčšine prípadov interval I_λ pre trhovú cenu rizika bol záporný pre BRIBOR aj PRIBOR. To ale znamená, že nastavený interval pre očakávaný dlhodobý úrok I_θ potvrdzuje vlastnosť vyššej návratnosti dlhopisu ako je overnight úrok. Neznamená to, že v prípade externej kalibračnej metódy expert nemôže nastaviť svoje očakávania tak, aby získal porovnateľný výsledok ako je to v interných kalibračných metódach.

Záver

Hlavné prínosy dizertačnej práce sú:

1. zavedenie nových premenných pre CIR a Vašičkov model, ktoré vedú k redukcii štvorrozmerného priestoru parametrov jednofaktorových modelov na trojrozmerný priestor,

2. tranformácia explicitného riešenia PDR pre bezkupónový dlhopis pomocou nových parametrov,

3. zavedenie agregovaného tvaru stratového funkcionálu v optimalizačnom procese,

4. predstavenie novej kalibračnej metódy tzv. min-max procedúry založenej na dvoch krokoch,

5. meranie kvality fitu pomocou nelineárneho R^2 pomeru a pomeru maximálnej vierohodnosti,

6. navrhutie iných kalibračných metód (ktoré využívajú nielen kumulatívne štatistiky výnosových kriviek) založených na ohraničení stredných hodnôt,

7. predstavenie externej kalibračnej metódy, ktorá využíva externe dodanú informáciu,

8. analýza a porovnanie výsledkov kalibrácie pre krajiny strednej a západnej Európy,

9. rozšírenie na viacfaktorové modely.

Výsledky z bodov (1)–(5) sa publikovali v článkoch [14, 15]. Podľa našich vedomostí a starostlivej kontroly literatúry, príspevky (1)–(9) sú nové a originálne prínosy v oblasti kalibrácie modelov úrokovej miery.

Abstract

The main goal of this thesis was to identify and analyze a lot of possibilities of using one factor interest rate models in the context of the European and new member states markets. Of course, there exist many different papers dealing with these models, but many of them are focusing only on particular aspect connected with the one factor models. We attempted to add a new value and insight in this theses. We proposed new and hopefully interesting issues and topics which came out during the analysis and expertise of the possibilities of usage of these models for real data.

The core results of this theses could be divided into two main parts. The first part is the so-called internal calibration method. This method is based on the new two phase minmax optimization method for parameter estimation of the CIR and Vašiček one factor interest rate model. It is based on minimization of the loss functional together with the maximization of the likelihood function restricted to the set of minimizers. We have tested the estimation method on various term structures including stable west Europe inter-bank offered rates as well as those of the new EU member states. Based on our results of parameter estimation for the CIR one factor model we can state that the western European term structure data are better described with CIR model compared to the new EU member states represented by Central European countries.

It is very important to emphasize the possibility of the parameter reduction in the CIR and Vašiček model too. This is utilized during all introduced methods and approaches in this theses.

Before turning to the second part of our analysis and results, we insert a somehow new view on the internal calibration method. This is the calibration based on binding interval approach. It means that we do not try to calibrate all the parameters of the one factor models to be a point, but we allow some freedom of a parameter. The endogenity of this method remains, because all the parameters are obtained from the data.

Final part of the theses deals with the external calibration method. In this case the exogenity of this approach is coming from an externally provided parameter. Based on that information which is the expected long-term interest rate interval we have calibrated the remained parameters of the one factor interest rate models. We assumed that the BRIBOR and PRIBOR rates in 2005 will converge to the mean values of EURIBOR with specific maturity in 2006. We prefer the results for BRIBOR from the point of view of negative market price of risk. Our assumption about the expected long-term interest rate interval is not justified for PRIBOR.

Literatúra

[1] Bergstrom, A. R., Gaussian estimation of structural parameters in higher order continuous time dynamic models, Econometrica 51 (1983), 117–152.

[2] Bergstrom, A. R., Continuous time stochastic models and issues of aggregation over time, in: Z. Griliches and M.D. Intriligator, Eds., Handbook of Econometrics, Vol II, Elsevier Science Amsterdam, 1984.

[3] Bergstrom, A. R., The estimation of parameters in nonstationary higher-order continuous time dynamic models, Econometric Theory 1 (1985), 369–385.

[4] Boyle, P. P., Tan, K. S., and Tian, W., Calibrating the Black-Derman-Toy model: some theoretical results, Applied Mathematical Finance 8 (2001), 27–48.

[5] Brace, A., Gatarek, D., and Musiela, M., The Market Model of Interest Rate Dynamics, Math. Finance 7 (1997), 127–154.

[6] Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A., and Sanders, A. B., An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate, Journal of Finance 47 (1992), 1209–1227.

[7] Duan, J.-CH., Gauthier, G., Simonato, J.-G., and Zaanoun, S., Maximum Likelihood Estimation of Structural Credit Spread Models – Deterministic and Stochastic Interest Rates, (2002). Available at: `www.globalriskguard.com/resources/deriv/MLECreditSpread.pdf`

[8] Jamshidian, F., LIBOR and Swap Market Models and Measures, Finance and Stochastics 1 (1997), 293–330.

[9] Jensen, M. B., Efficient method of moments estimation of the Longstaff and Schwartz interest rate model, Working paper series 52 (2000). Available at: `www.cls.dk/caf/wp/wp-52.pdf`

[10] Kwok, Y. K., Mathematical Models of Financial Derivatives, New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1988.

[11] Li, S., An Empirical Study of Australian Short-term Interest Rate: A Comparison of Single Factor Models, School of Finance and

Business Economics Working Paper Series (2000). Available at: `www.business.ecu.edu.au/schools/afe/wps/papers/pdfs/wp0011sl.pdf`

[12] Miltersen, K. R., Sandmann, K., and Sondermann, D., Closed form solutions for term structure derivatives with log-normal interest rates, Journal of Finance 1 (1997), 409–430.

[13] Pearson, N. D., and Sun, T.-S., Exploiting the conditional density in estimating the term structure: An application to the Cox, Ingersoll, and Ross model, Journal of Finance 49 (1994), 1279–1304.

[14] Ševčovič, D. and Urbánová Csajková, A., Calibration of one factor interest rate models, Journal of Electrical Engineering 55, No. 12/s (2004), 46-50.

[15] Ševčovič, D. and Urbánová Csajková, A., On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model, Central European Journal of Operational Research 13 (2005), 169-188.

[16] Takahashi, A. and Sato, S., A Monte Carlo filtering approach for estimating the term structure of interest rates, Annuals of the Inst. of Statistical Mathematics 53 (2001), 50–62.

[17] Vojtek, M., Calibration of Interest Rate Models - Transition Market Case, Discussion Paper Series, CERGE-EI, 2004.

Zoznam vlastných publikácií

1. Ševčovič, D. and Urbánová Csajková, A., On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model, Central European Journal of Operational Research 13 (2005), 169–188.

   Citované v:

   - Kilianová, S., The second pillar of the Slovak pension system - interest rate targeting, Journal of Electrical Engineering 57, No. 12/s (2006), 51–54.
   - Stehlíková, B., Modeling Volatility Clusters with Application to Two-Factor Interest Rate Models. Journal of Electrical Engineering 56, No. 12/s (2005), 90–93.

2. Ševčovič, D. and Urbánová Csajková, A., Calibration of one factor interest rate models, Journal of Electrical Engineering 55, No. 12/s (2004), 46–50.

   Citované v:

   - Olšárová, L., Quantitative comparison of calibration methods for interest rate. Journal of Electrical Engineering 56, No. 12/s (2005), 110–112.

- Stehlíková, B., Modeling Volatility Clusters with Application to Two-Factor Interest Rate Models. Journal of Electrical Engineering 56, No. 12/s (2005), 90–93.

3. Urbánová Csajková, A., Min-max calibration for interest rate models and its application to central European financial markets, Proceedings of 4^{th} International scientific seminar of doctoral students, May 21 (2004), 371–376.