

Kalibrácia modelov úrokovej miery

Alexandra Urbánová Csajková



Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave

- riadenie rizík a špekulatívne obchody
- menej pozornosti venované aplikácii pre krajiny ako je Česká republika, Slovensko, Poľsko a Maďarsko
- výhliadky dlhodobých úrokových sadzieb
- porovnanie na stabilnejšie západoeurópske finančné trhy
- zjednodušenie kalibrácie

1. Úvod

- term structure
- umiestnenie problematiky
- odvodenie problematiky

2. Ciele

3. Metódy

- Interné kalibračné metódy
 - *metóda založená na obmedzenej funkcii vierohodnosti*
 - *intervalová metóda*
- Externá kalibračná metóda
 - *externe dodaný interval očakávaného dlhodobého úroku*

4. Výsledky

- Interné kalibračné metódy
- Externá kalibračná metóda

5. Záver

Term structure

- bezkupónový dlhopis
- cena dlhopisu:

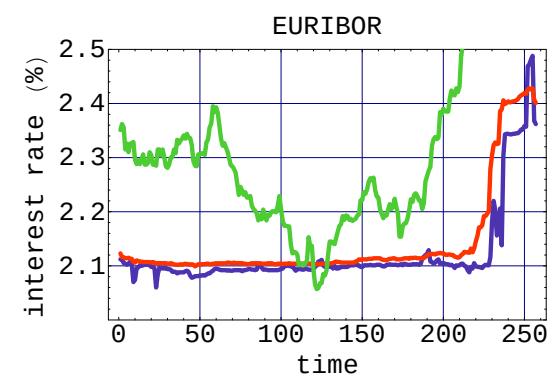
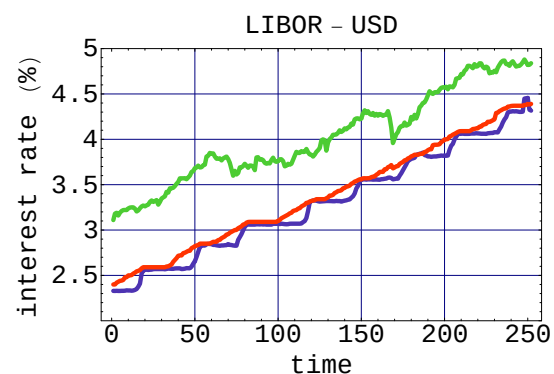
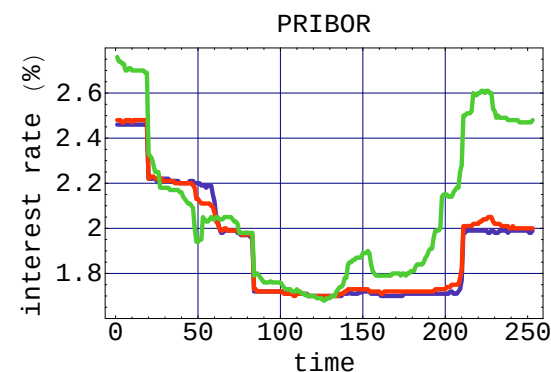
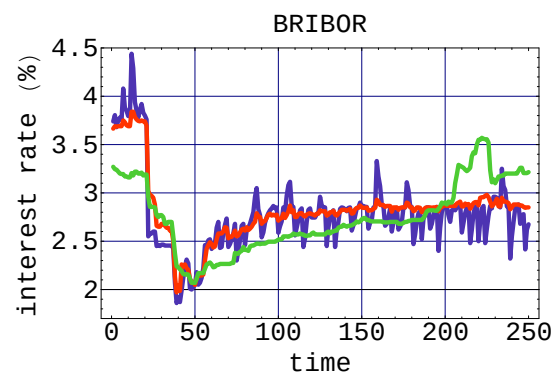
$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$$

- výnos do splatnosti:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T)$$

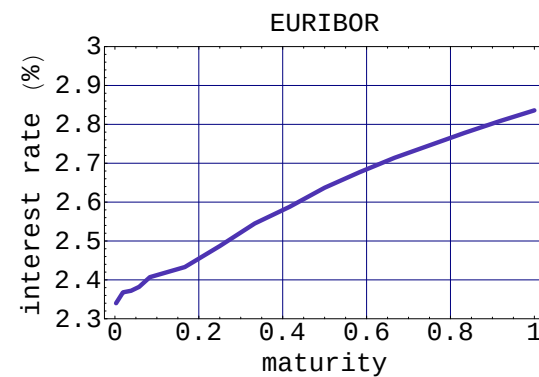
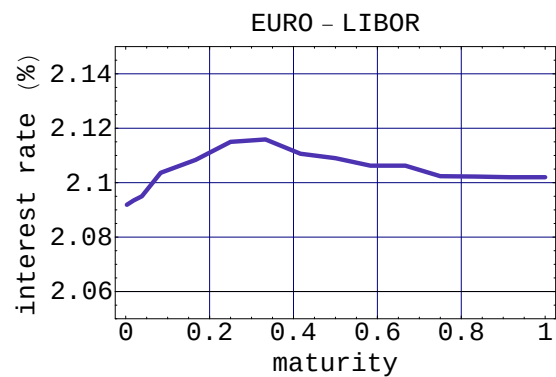
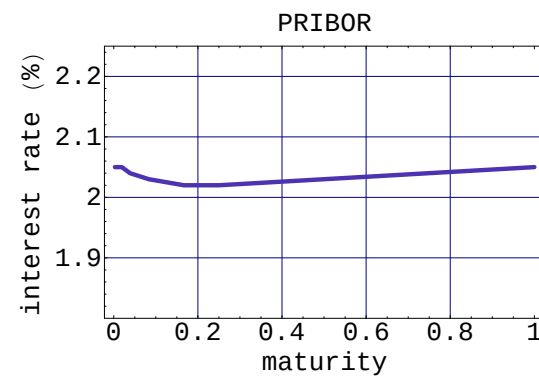
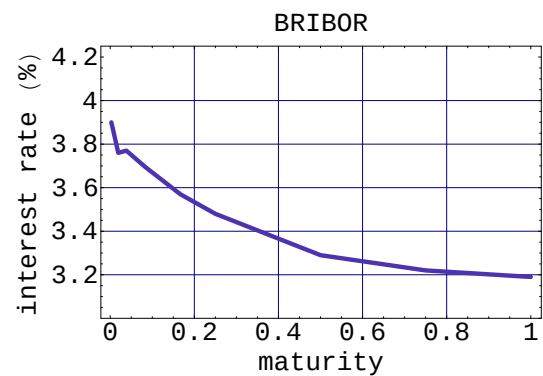
- výnosová krivka: závislosť $R(t, T)$ na T
- term structure: závislosť výnosov dlhopisu na $T - t$

Ukážka vývoja úrokov pre rôzne trhy a rôzne maturity



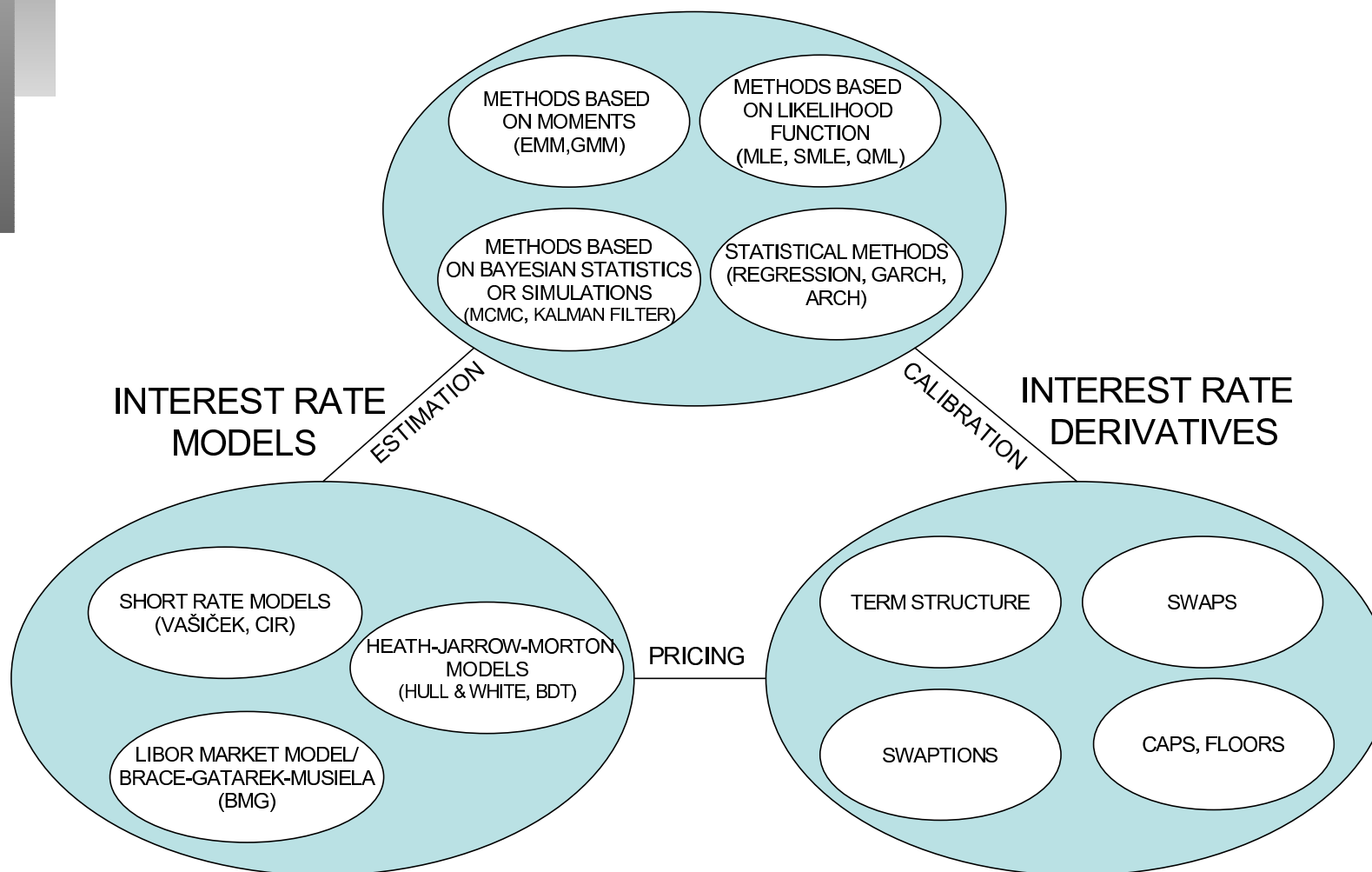
1 týždeň - modrá, 1 mesiac - červená, 1 rok - zelená

Ukážka term structure pre rôzne trhy



Umiestnenie problematiky

ESTIMATION & CALIBRATION METHODS



Klady a zápory rôznych kalibračných a odhadovacích metód

metódy	zápory	klady
MCMC Eraker 2001	- cieľové rozdelenie je vysokej dimenzie - a-priori špecifikácia navrhutej hustoty rozdelenia a prednostného rozdelenia - modely časovej štruktúry úrokovej miery (nelinearita, stochastické singularity)	- schopnosť odhadovať viacfaktorové modely - vhodná aj pre parametre s nie normálnym príp. nie štandardným rozdelením
GMM Hansen 1982	- problém agregácie z dôvodu diskretizácie - nepoužíva celý term structure len overnight úrok	- rámec pre testovanie modelov - nepožaduje normalitu zmien úrokov
MLM Pedersen 1995	- požadovaná znalosť stavovej premennej (podmienená hustota premennej) - v niektorých prípadoch neexistencia funkcie maximálnej vierohodnosti	- prierezový prístup a/alebo prístup cez časové rady - v niektorých prípadoch je známy uzavretý tvar funkcie vierohodnosti

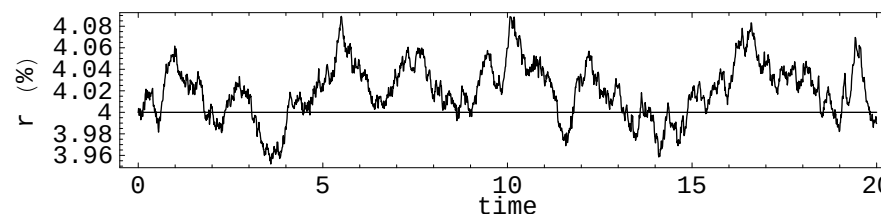
Výhody a nevýhody našej metódy

- výhody:
 - málo parametrov na odhadovanie
 - evolučné stratégie: takmer žiaden predpoklad na optimalizovanú funkciu
 - intervalový prístup: využitie viac informácií
 - externá metóda: využitie dodatočnej informácie
- nevýhody:
 - je založená na modeli, ktorý nie je dokonalý a má isté hranice použitia
 - časová náročnosť evolučných stratégií (minimalizácie stratovej funkcie)

Úvod do problematiky

Predpokladajme, že r_t sleduje **mean reverting proces** v tvare:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dw_t,$$



kde $\{w_t, t \geq 0\}$ označuje štandardný Wienerov proces, κ, θ, σ sú kladné konštanty a γ je nezáporná konštantka.

Cena bezkupónového dlhopisu $P = P(t, T, r)$ potom sleduje parabolickú PDR v tvare:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\kappa(\theta - r) - \tilde{\lambda}\sigma r^\gamma) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0,$$

kde $t \in (0, T)$ a $r > 0$, spĺňajúcu $P(T, T, r) = 1 \forall r$.

CIR model $\tilde{\lambda}(r) = \lambda r^{\frac{1}{2}}/\sigma$ Vašiček model $\tilde{\lambda}(r) = \lambda$ pričom λ je konštantka. Dôvod rozdielu je odlišný tvar mean reversion procesu.

Explicitné riešenie:

$$P(T - \tau, T, r) = A(\tau)e^{-B(\tau)r} \Rightarrow R(T - \tau, T, r) = \frac{B(\tau)r - \ln A(\tau)}{\tau}$$

kde $\tau = T - t \in [0, T]$ a funkcie $A(\tau)$, $B(\tau)$ spĺňajú

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\eta\tau} - 1)}{(\kappa + \lambda + \eta)(e^{\eta\tau} - 1) + 2\eta}, \quad A(\tau) = \left(\frac{\eta e^{(\kappa + \lambda + \eta)\tau/2}}{e^{\eta\tau} - 1} B \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}$$

pre Cox-Ingersoll-Ross model, kde $\eta = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$ a

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}, \quad A(\tau) = \exp \left[(B - \tau) \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma\lambda}{\kappa} \right) - \frac{\sigma^2 B^2}{4\kappa} \right]$$

pre Vašíčkov model.

Kwok 1988, Hull 1989

- interná kalibračná metóda
 - vyvinutie novej dvojfázovej metódy založenej na minmax optimalizácii
 - redukcia parametrov
- rozšírenie tejto metódy - intervalový prístup
- externá kalibračná metóda
- návrh riešenia pre viacfaktorové modely
- extrakcia maximálne možných informácií z jednofaktorových modelov
- možná aplikácia vyššie uvedených metód na rôznych dátach
- porovnanie výsledkov pre strednú a západnú Európu

Metóda redukcie dimenzie parametrov

Zavedenie nových parametrov

CIR:

$$\beta = e^{-\eta}, \quad \xi = \frac{\kappa + \lambda + \eta}{2\eta}, \quad \varrho = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}$$

kde $\eta = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$ a $(\beta, \xi, \varrho) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^3$

Vašiček:

$$\beta = e^{-\kappa}, \quad \xi = \theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma\lambda}{\kappa}, \quad \varrho = \frac{\sigma^2}{4\kappa}$$

pričom $(\beta, \xi, \varrho) \in \Omega = (0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^3$

4 pôvodné parametre $(\kappa, \theta, \sigma, \lambda) \rightarrow$ **3** nové (β, ξ, ϱ)

Pearson, Sun 1994; Ševčovič, Urbánová 2004, 2005

Nelineárna metóda najmenších štvorcov

Zavedenie **stratového funkcionálu**:

$$U(\beta, \xi, \varrho) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_j^i - \bar{R}_j^i)^2 \tau_j^2.$$

kde $\{R_j^i, j = 1, \dots, m\}$ sú reálne a $\{\bar{R}_j^i, j = 1, \dots, m\}$ sú vypočítané výnosové krivky v čase $i = 1, \dots, n$, (t.j. $\bar{R}_j^i = \bar{R}_j^i(R_0^i, \beta, \xi, \varrho)$).

Zjednodušený tvar:

$$U(\beta, \xi, \varrho) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m ((\tau_j E(R_j) - B_j E(R_0) + \ln A_j)^2 + D(\tau_j R_j - B_j R_0)),$$

kde $E(X_j)$ a $D(X_j)$ označujú výberovú strednú hodnotu a disperziu vektora $X_j = \{X_j^i, i = 1, \dots, n\}$.

Efektívne metódy minimalizácie

Úlohou je nájsť vhodnú numerickú aproximáciu nasledovného problému:

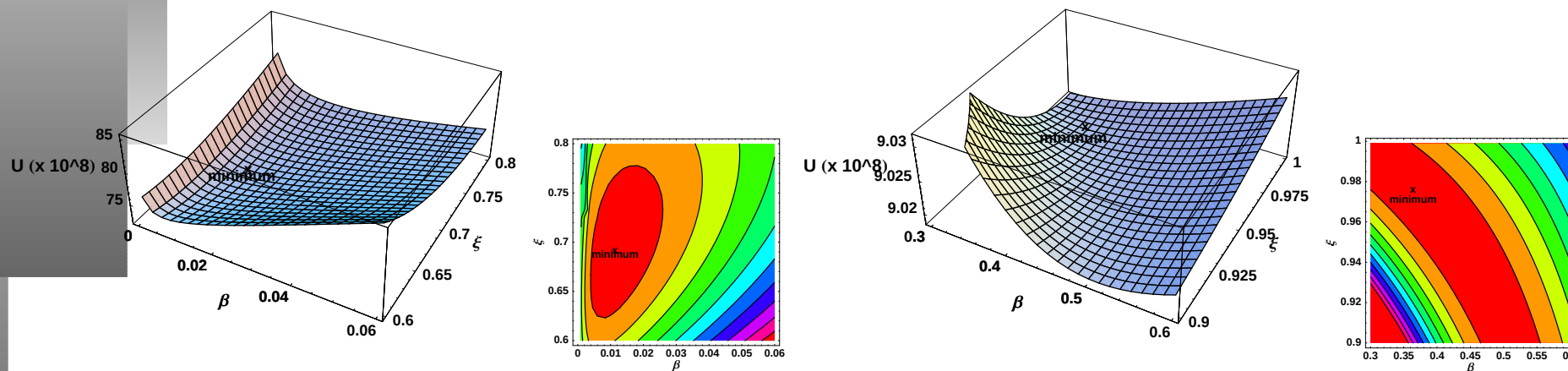
$$\min_{x \in \Omega} U(x)$$

kde x je vektor neznámych parametrov a $\Omega \in \mathbb{R}^n$.

Použité metódy minimalizácie stratového funkcionálu $U = U(\beta, \xi, \varrho)$:

- metóda najväčšieho spádu Newton-Kantorovičovho typu,
- metóda založená na evolučných stratégiách,
- kombinácia týchto dvoch metód.

Ukážka minimalizovanej funkcie



Bribor 2/2005 (vľavo) a Pribor 7/2005 (vpravo).

Upozornenie: funkcia U je plochá v okolí minima!

Metóda evolučných stratégií

- stochastický optimalizačný algoritmus
- $(p + c)$ evolučné stratégie: p rodičov, c detí $\rightarrow p$ najlepších jedincov
- modifikácia $(p + c + d)$ ES:
 - p rodičov (10^5), c detí ($c \leq p$) cez mutáciu a rekombináciu, d náhodných jedincov
 - p najlepších "intermediate"
 - p vylepšených ($NK = 30$ iterácií cez metódu najväčšieho spádu)
 - výber p najlepších spomedzi p vylepšených rodičov, p rodičov, c potomkov a d náhodných jedincov
 - opakovať $N = 300$ krát

Rechenberg 1973; Schwefel 1995; Ševčovič, Urbánová 2005

Interné kalibračné metódy

Kalibrácia založená na maximalizácii obmedzenej funkcie vierohodnosti

- Prvý krok nám dáva bod $(\check{\beta}, \check{\xi}, \check{\varrho})$, ktorý predstavuje globálne minimum stratového funkcionálu $U = U(\beta, \xi, \varrho)$. V pôvodných parametroch je to jednorozmerná λ -parametrizovanej krivka (po transformácii $4 \rightarrow 3$ dostávame hodnotu $((\check{\beta}, \check{\xi}, \check{\varrho}))$).
- V druhom kroku maximalizácia vierohodnostnej funkcie prebieha na obmedzenom priestore (λ -parametrizovanej krivke) $\{(\kappa_\lambda, \theta_\lambda, \sigma_\lambda), \lambda \in \check{J}\}$.

$$\ln L^r = \ln L(\kappa_{\bar{\lambda}}, \sigma_{\bar{\lambda}}, \theta_{\bar{\lambda}}) = \max_{\lambda \in \check{J}} \ln L(\kappa_\lambda, \sigma_\lambda, \theta_\lambda),$$

$\check{J} = (-\infty, -(2\check{\xi} - 1) \ln \check{\beta})$ pre CIR model a $\check{J} = \mathbb{R}$ pre Vašíčkov model.

$$\ln L(\kappa, \sigma, \theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left(\ln v_t^2 + \frac{\varepsilon_t^2}{v_t^2} \right) \text{ kde } v_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa}) r_{t-1}^{2\gamma},$$

$$\varepsilon_t = r_t - e^{-\kappa} r_{t-1} - \theta (1 - e^{-\kappa})$$

Bergstrom 1984

Interné kalibračné metódy

Ohraničenie časovej štruktúry úrokovej miery intervalom očakávaného dlhodobého úroku

- V prvom kroku sa minimalizuje stratový funkcionál $U = U(\beta, \xi, \varrho)$ na λ -parametrizovanej krivke globálnych miním U .
- V druhom kroku sa použije extra informácia z dát. Nová metodika využíva bohatosť výnosových kriviek na kalibráciu štvrtého parametra λ .

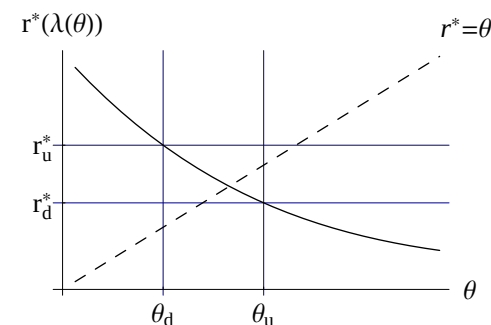
Rieši sa problém neprázdnoti množín:

$$\theta_u = \inf\{\theta > 0 \mid \forall j \in \{1 \dots m\}, \quad r^*(\lambda(\theta), \tau_j, R) < E(R_j)\}$$

$$\theta_d = \sup\{\theta > 0 \mid \forall j \in \{1 \dots m\}, \quad r^*(\lambda(\theta), \tau_j, R) > E(R_j)\}$$

$r^*(\lambda(\theta), \tau_j, R) = (1 - \lambda(\theta)B_j)R$ pre CIR model

$r^*(\lambda(\theta), \tau_j, R) = R - \lambda(\theta)\sigma B_j$ pre Vašíčkov model.



Externá kalibračná metóda

Kalibrácia založená na predpísanom intervale očakávaného dlhodobého úroku

- Minimalizácia stratového funkcionálu, získanie bodu $(\check{\beta}, \check{\xi}, \check{\varrho})$.
- V druhom kroku sa zúžitkuje externe dodaná informácia o intervale $I_{\theta} = [\theta_d, \theta_u]$.

Na základe týchto očakávaní sme schopní nájsť:

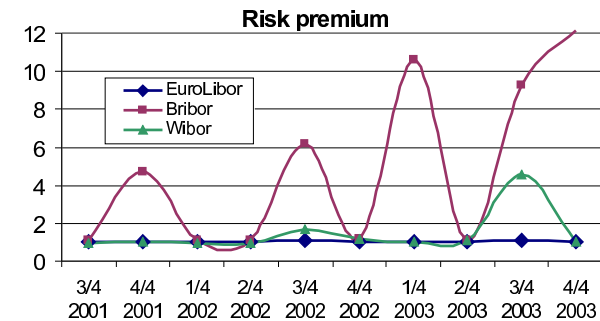
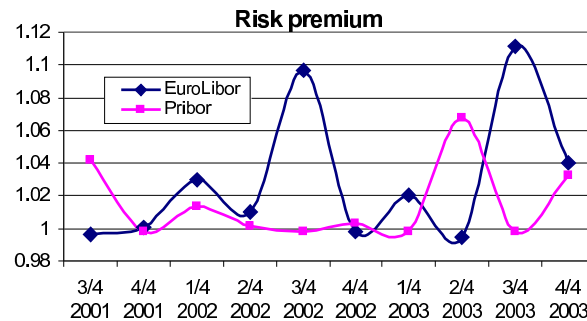
- interval pre trhovú cenu rizika $I_{\lambda} = [\lambda_d, \lambda_u]$, kde $\lambda_d < \lambda_u$
- interval pre rýchlosť reverzie $I_{\kappa} = [\kappa_d, \kappa_u]$
- a posledný parameter σ , ktorý je nezávislý na λ

- 2 term structure modely: Vašiček, CIR model
- dáta z rôznych finančných trhov: BRIBOR, PRIBOR, BUBOR, WIBOR, EURIBOR, USD-LIBOR
- dáta z rokov 2003-2005
- kalibrácia: štvrťročná, mesačná
- kvalita fitu meraná: nelineárny R^2 pomer a MLR pomer

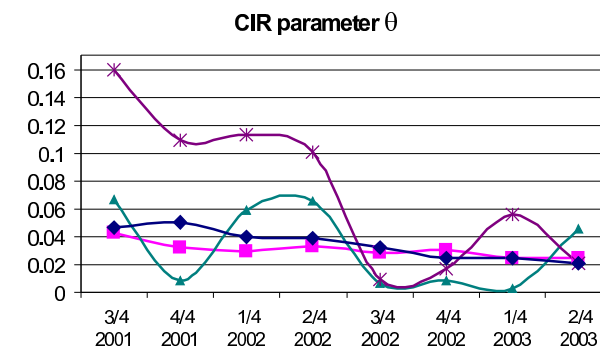
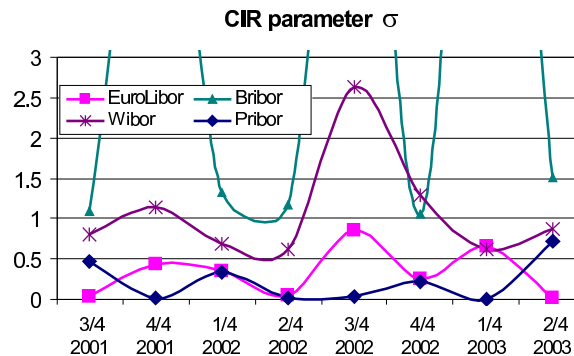
CIR: Ševčovič, Urbánová 2005; Vašiček: Ševčovič, Urbánová 2004

Interné kalibračné metódy

Výsledky kalibrácie pomocou obmedzenej funkcie vierohodnosti



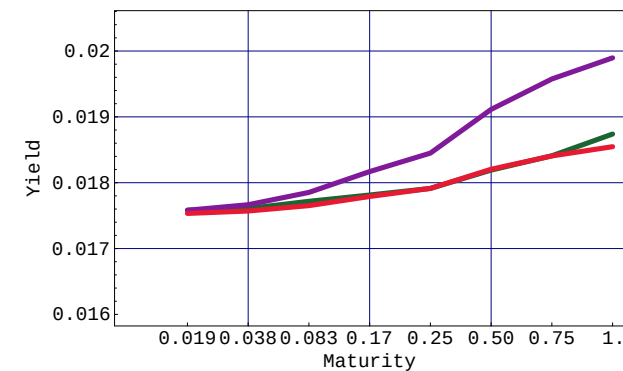
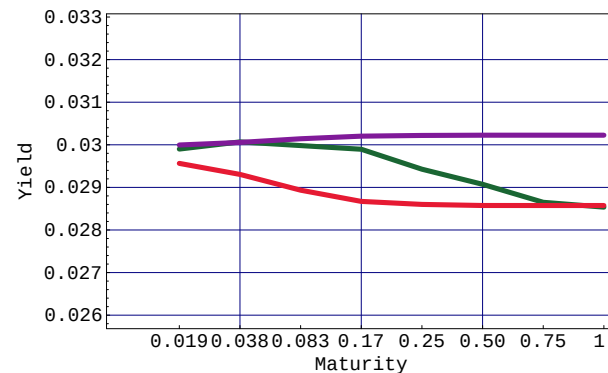
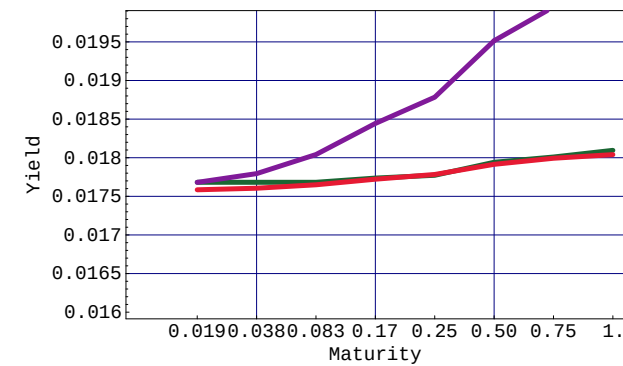
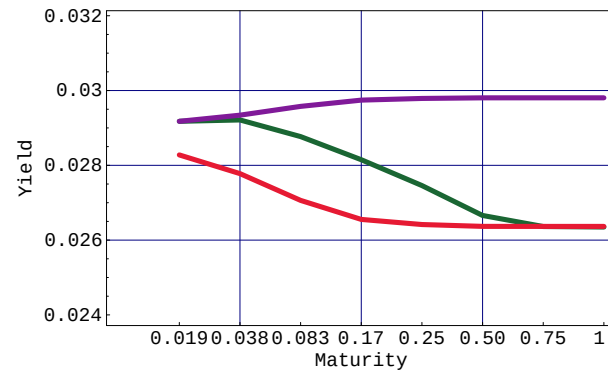
Porovnanie faktora rizikovej prémie $1 - \lambda B_1$ pre rôzne trhy.



Výsledky odhadov parametrov pre rôzne trhy. Odhadnuté parametre sú σ a θ .

Interné kalibračné metódy

Výsledky kalibrácie založenej na ohraničení strednej hodnoty



Výsledky pre BRIBOR (vľavo) a PRIBOR (vpravo) máj a august 2005

r_u^* —fialová, r_d^* —červená, $E(R_j)$ —zelená.

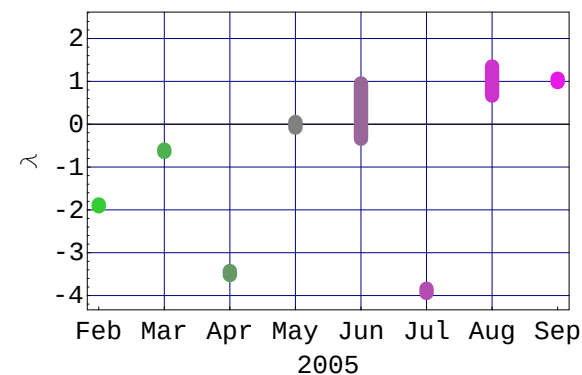
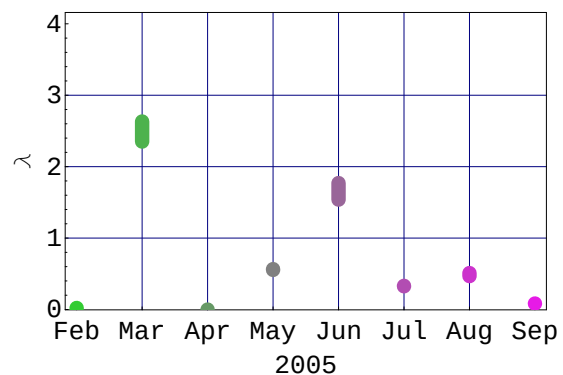
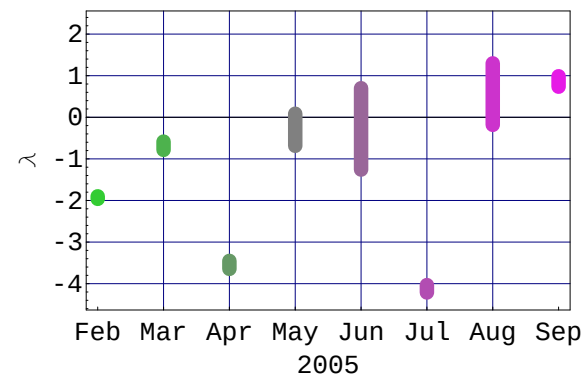
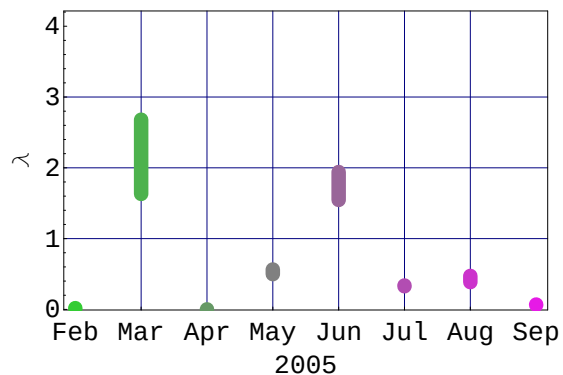
Externá kalibračná metóda

Výsledky kalibrácie na základe externe dodaného intervalu I_θ

	θ_d		θ_u	
	on (%)	1w (%)	on (%)	1w (%)
February	2.3299	2.3588	2.3691	2.3862
March	2.3898	2.5656	2.6502	2.6402
April	2.5967	2.6212	2.6600	2.6478
May	2.5162	2.6105	2.6375	2.6318
Jun	2.5365	2.6785	2.8589	2.9067
July	2.7923	2.8310	2.8353	2.8551
August	2.8269	2.9833	3.1096	3.1208
September	3.0159	3.0659	3.0660	3.0820

Interval očakávaného dlhodobého úroku na základe EURIBOR-u z roka 2006.

Externá kalibračná metóda



Výsledky kalibrácie založenej na intervale očakávaného dlhodobého úroku pre PRIBOR (vľavo) a BRIBOR (vpravo) s rôznymi konvergenčnými očakávaniami, k overnighu (1. riadok) a k 1 týždňovým sadzbám (2. riadok) EURIBOR-u.

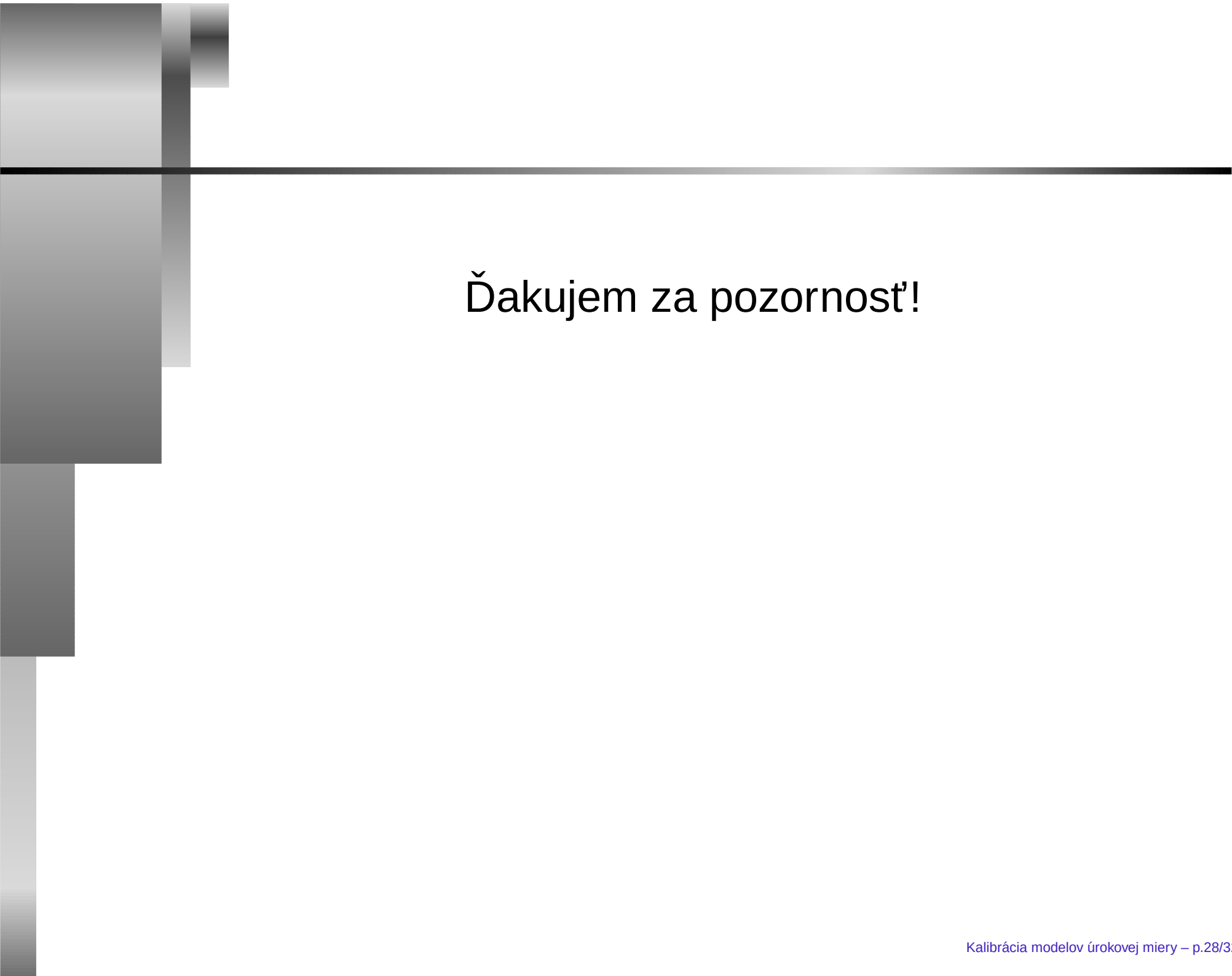
Hlavné prínosy dizertačnej práce sú:

- zavedenie nových premenných pre CIR a Vašíčkov model, ktoré vedú k redukcii štvorrozmerného priestoru parametrov jednofaktorových modelov na trojrozmerný priestor,
- transformácia explicitného riešenia PDR pre bezkupónový dlhopis pomocou nových parametrov,
- zavedenie agregovaného tvaru stratového funkcionálu v optimalizačnom procese,
- predstavenie novej kalibračnej metódy tzv. min-max procedúry založenej na dvoch krokoch,
- meranie kvality fitu pomocou nelineárneho R^2 pomeru a pomeru maximálnej vierohodnosti,
- navrhnutie iných kalibračných metód (ktoré využívajú nielen kumulatívne štatistiky výnosových kriviek) založených na ohraničení stredných hodnôt,

- predstavenie externej kalibračnej metódy, ktorá využíva externe dodanú informáciu,
- analýza a porovnanie výsledkov kalibrácie pre krajiny strednej a západnej Európy,
- analýza postupu pre rozšírenie na viacfaktorové modely.

Vlastné publikácie:

1. Ševčovič, D. and Urbánová Csajková, A., *On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model*, Central European Journal of Operational Research **13** (2005), 169–188.
2. Ševčovič, D. and Urbánová Csajková, A., *Calibration of one factor interest rate models*, Journal of Electrical Engineering **55**, No. 12/s (2004), 46–50.
3. Urbánová Csajková, A., *Min-max calibration for interest rate models and its application to central European financial markets*, Proceedings of 4th International scientific seminar of doctoral students, May 21 (2004), 371–376.



Ďakujem za pozornosť!

Odpovede na otázky oponentov - 1

- dôvodom pozornosti venovanej normalite reziduí je tvar stratového funkcionálu, ktorý predpokladá normalitu
- cieľom bolo poukázať na tento problém, ktorý sa často zanedbáva pri rôznych metódach
- minimalizácia pomocou iného stratového funkcionálu v tvare
$$U(\beta, \xi, \varrho) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| (R_j^i - \bar{R}_j^i) \tau_j \right|^p, \text{ kde } 1 < p < \infty \text{ a } p \neq 2$$
by mohla viesť k lepším výsledkom
- šikmosť a špicatosť vstupujú do JB testu, kritická hodnota JB testu je $JB \geq 5.99$ na hladine významnosti 5%

Odpovede na otázky oponentov - 2

- výpočtová zložitosť použitých metód:
interná metóda: evolučné stratégie - C++ (40 min. kvôli dobrým výsledkom),
intervalový prístup - Mathematica (5-10 min.)
externá metóda - Mathematica (5 min.)
- odhad iných charakteristík - "Jackknife" metóda, ale nerobili sme
- intervalový prístup nahradiť prístupom cez rozdelenia je možný uskutočniť (Monte Carlo simulácia, výsledok rozdelenie parametrov a nie bodové odhady)

Odpovede na otázky oponentov - 2

- kvalita fitu
 - MLR pomer porovnáva neobmedzenú a obmedzenú kalibráciu parametrov (cez model a priamo z mean reversion rovnice)
 - nelineárny R^2 pomer porovnáva výnosovú krivku z reálnych dát a vypočítanú na základe odhadnutých parametrov
 - oba miery hovoria o kalibračnej schopnosti metódy a nie o predikčnej schopnosti
 - schopnosť predikcie - tabuľka
 - cieľom bolo odhadnúť parametre modelu, predovšetkým dlhodobý úrok θ

obdobie	EURIBOR	PRIBOR	BRIBOR
2/4 2003	0.33	0.93	0.95
3/4 2003	0.37	0.13	0.38
4/4 2003	0.57	0.62	0.40

Odpovede na otázky oponentov - 3

- tvar throvej ceny rizika: vo Vašíčkovom modeli je volatilita konštantná, v CIR modeli klesá k nule ako sa úrok vracia k dlhodobej úrokovej sadzbe
- tvar vierohodnostnej funkcie: vzniká diskretizáciou mean reverting procesu a predpokladá normalitu zmien, na základe toho sa vie odvodiť funkcia vierohodnosti
- ostatné chyby, nezrovnalosti