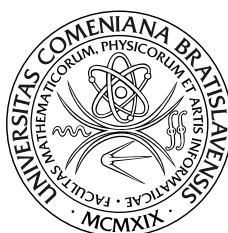


FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITA KOMENSKÉHO BRATISLAVA

KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY



# Matematické spracovanie lineárne-kvadratickej aproximácie v RBC modeloch

Dizertačná práca

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Autor: Mgr. Michal Zákopčan

Vedúci dizertačnej práce: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.

Bratislava 2009

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského  
Mlynská dolina  
842 48 Bratislava

©2009 Michal Zákopčan

Chcel by som sa poďakovať môjmu školiťovi Pavlovi Brunovskému za jeho neoceniteľnú pomoc a neuveriteľnú schopnosť neustále nachádzať nové spôsoby riešenia tam, kde všetky predošlé zlyhali.

## Abstrakt

ZÁKOPČAN, Michal: *Matematické spracovanie lineárne-kvadratickej aproximácie v RBC modeloch*, Dizertačná práca, Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Vedúci práce: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc., Bratislava, 2009

V tejto dizertačnej práci sa zaoberáme lineárne-kvadratickou aproximáciou ako nástrojom riešenia RBC modelov. Podávame matematické odôvodnenie správnosti tejto aproximácie a poukazujeme na konvergenciu optimálneho riadenia a jeho odozvy do rovnovážneho bodu úlohy. Začiatok práce je venovaný príkladu jednoduchého makroekonomického modelu, v ktorom sa využíva táto aproximácia, a následnému zovšeobecneniu pre viacrozmerné premenné. V ďalších kapitolách podávame matematické spracovanie uvedenej problematiky. Najprv uvádzame definíciu rovnovážnej trojice, potom sa zaoberáme lineárne-kvadratickými úlohami s diskontom a bez diskontu a následne úlohami s pôvodnou účelovou funkciou s diskotným faktorom a bez neho. Dôležité je, že sa venujeme úlohám a ich aproximáciám, v ktorých vystupujú v účelovej funkcii nenulové lineárne členy.

**Kľúčové slová:** rovnica dynamického programovania, nutné podmienky optimality, RBC ("Real Business Cycles") model, lineárne-kvadratická úloha optimálneho riadenia, aproximácia

# Predhovor

Práca sa zaoberá matematickým spracovaním lineárne-kvadratickej aproximácie v RBC modeloch. Cieľom práce je ukázať, že táto aproximácia lokálne dostatočne presne opisuje optimálne riadenie a jeho odozvu a teda je oprávnené jej použitie a zároveň ukázať, že optimálne riadenia a ich odozvy konvergujú k rovnovážnemu bodu úlohy. Na začiatku zrodu tejto práce stojí niekoľko publikácií a z nich vychádzajúcich diplomových prác, v ktorých sa uvedená aproximácia využíva. Môjmu školiťovi Pavlovi Brunovskému pri čítaní týchto prác neschádzala z mysle otázka matematickej korektnosti používanej metódy a keďže mu tieto a iné práce podobného charakteru neposkytli uspokojivú odpoveď, rozhodol sa, že by táto téma bola vhodná na spracovanie v dizertačnej práci. Tým sa začala naša spolupráca, ktorej výsledkom je táto práca.

# Obsah

|                                                                                                  |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Úvod                                                                                             | 4         |
| <b>1 Lineárne-kvadratická aproximácia v RBC modeloch</b>                                         | <b>5</b>  |
| 1.1 Základný neoklasický model rastu . . . . .                                                   | 5         |
| 1.2 Riešenie podľa Blancharda a Kahna . . . . .                                                  | 8         |
| <b>2 Formulácia úlohy</b>                                                                        | <b>10</b> |
| 2.1 Rovnovážna trojica . . . . .                                                                 | 10        |
| 2.2 Nutné podmienky optimality pre lineárne-kvadratickú<br>úlohu s diskontom . . . . .           | 15        |
| 2.3 Nutné podmienky optimality pre pôvodnú úlohu . . . . .                                       | 17        |
| <b>3 Lineárne-kvadratická úloha pre <math>\beta=1</math></b>                                     | <b>19</b> |
| 3.1 Účelová funkcia bez lineárnych členov . . . . .                                              | 21        |
| 3.2 Účelová funkcia s lineárnymi členmi . . . . .                                                | 28        |
| <b>4 Lineárne-kvadratická úloha s diskontom</b>                                                  | <b>32</b> |
| 4.1 Účelová funkcia bez lineárnych členov . . . . .                                              | 34        |
| 4.2 Účelová funkcia s lineárnymi členmi . . . . .                                                | 39        |
| <b>5 Extremálne riešenia pre pôvodnú úlohu</b>                                                   | <b>42</b> |
| <b>6 Rovnica dynamického programovania a jej riešenie metódou postupných<br/>    aproximácií</b> | <b>49</b> |
| 6.1 Rovnica dynamického programovania . . . . .                                                  | 49        |
| 6.2 Metóda postupných aproximácií . . . . .                                                      | 51        |
| <b>7 Existencia hodnotovej funkcie a optimálneho riadenia</b>                                    | <b>56</b> |

|                                                            |           |
|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>8 Existencia optimálneho riadenia pre pôvodnú úlohu</b> | <b>62</b> |
| <b>Záver</b>                                               | <b>67</b> |

# Úvod

RBC (z anglického "Real Business Cycles") modely sa v makroekonómii používajú už dlhšiu dobu. V týchto modeloch sa rieši úloha maximalizácie celoživotného úžitku domácností za istých (zvyčajne lineárnych) podmienok na stav a na vlastnosti účelovej a produkčnej funkcie. Ide o úlohu optimálneho programovania, v ktorej vystupuje pri tých jednoduchších modeloch ako riadiaca premenná spotreba domácnosti a ako stavová premenná hodnota kapitálu na hlavu alebo na efektívnu hlavu. Presnejšie ide o úlohu optimálneho programovania na nekonečnom časovom horizonte s diskretným alebo spojitým časom. My sa v našej práci venujeme len tým s diskretným časom. V praxi sa tieto úlohy riešia v okolí rovnovážneho bodu, tj. bodu vyjadrenému napr. rovnovážnou hodnotou kapitálu a spotreby domácností, v ktorom keď sa ekonomika nachádza, tak v ňom už zostáva natrvalo. Účelová funkcia sa aproximuje na okolí tohto bodu Taylorovým polynómom druhého rádu, čo je za predpokladu zápornej definitnosti Hessevej matice účelovej funkcie v tomto bode rýdzokónkávna kvadratická funkcia. Za lineárnych podmienok na stav v nasledujúcej perióde tak dostávame lineárne-kvadratickú úlohu optimálneho riadenia, ktorá sa potom numericky rieši obyčajne metódou postupných aproximácií hodnotovej funkcie.

Cieľom tejto práce bude ukázať, že táto aproximácia lokálne dostatočne presne opisuje optimálne riadenie a jeho odozvu a teda je oprávnené jej použitie a súčasne ukázať, že optimálne riadenia a ich odozvy konvergujú k rovnovážnemu bodu úlohy. Ten je pre úlohu s pôvodnou účelovou funkciou a úlohu s jej kvadratickou aproximáciou rovnaký.

Práca je členená na osem kapitol. Prvá kapitola je venovaná motivačnému príkladu makroekonomického modelu, v ktorom sa využíva spomínaná aproximácia, a rozšíreniu pre viac-rozmerné premenné. V nasledujúcich kapitolách potom podávame matematické spracovanie uvedenej problematiky. Najprv uvádzame definíciu rovnovážnej trojice a vyjadrenie nutných podmienok optimality, potom sa zaoberáme lineárne-kvadratickými úlohami s diskontom a bez diskontu a následne úlohami s pôvodnou účelovou funkciou s diskontným faktorom a bez neho. Všetky spomenuté prípady sú rozdelené na dve časti, z ktorých jedna sa venuje účelovej funkcii bez lineárnych členov a druhá účelovej funkcii, v ktorej lineárne členy vystupujú.

## Kapitola 1

# Lineárne-kvadratická aproximácia v RBC modeloch

V tejto kapitole na ilustračnom príklade demonštrujeme použitie lineárne-kvadratickej aproximácie v RBC modeloch. V týchto modeloch sa rieši úloha maximalizácie celoživotného úžitku domácností, pričom sa zvyčajne berie jedna reprezentatívna domácnosť ako dôsledok predpokladu identity domácností. Ide o úlohu optimálneho programovania, v ktorej vystupuje ako riadiaca premenná obyčajne spotreba domácnosti a ako stavová premenná hodnota kapitálu na hlavu alebo na efektívnu hlavu. Tendenciou sa v poslednej dobe stáva zavedenie náhodnej premennej do modelu ako reprezentanta nepredpovedateľných šokov v ekonomike a tým odstránenie úplnej predeterminovanosti modelu. Úloha sa rieši v okolí rovnovážneho bodu, ku ktorému potom dokonverguje optimálne riadenie a jeho odozva. Je to bod vyjadrený napr. rovnovážnou hodnotou kapitálu a spotreby domácností, v ktorom keď sa ekonomika nachádza, tak v ňom už zostáva natrvalo. Spravidla sa v okolí tohto bodu robí lineárne-kvadratická aproximácia za účelom zjednodušenia úlohy, ktorú potom možno numericky ľahko zrátať.

### 1.1 Základný neoklasický model rastu

Tento klasický ilustračný model sa zaoberá prerozdeľovaním zdrojov v ekonomike pozostávajúcej z mnoho identických, nekonečne dlho žijúcich domácností. Ide o príklad ekonomiky, v ktorej je prerozdelenie zdrojov v dokonale konkurenčnom prostredí identické s tým, ktoré určí sociálny plánovač pri maximalizovaní celoživotného úžitku domácností. Predpokladáme v ňom, že domácnosti majú k dispozícii jednu jednotku produktívneho času a  $k_0 > 0$  produktívneho kapitálu, ktorý amortizuje konštantnou mierou  $0 < \delta < 1$ . Pretože sú všetky domácnosti identické, tak môžeme vybrať jednu reprezentatívnu domácnosť.

V každej perióde  $t$  máme len jediný tovar (ide o jednosektorový model rastu) produkovaný s využitím voľne dostupnej technológie a kapitálu:

$$y_t = F(k_t, z_t) \quad (1.1)$$

kde  $F(k, z)$  je produkčná funkcia, o ktorej sa zvyčajne predpokladá, že je dvakrát spojite diferencovateľná, ostro rastúca a rýdzokonkávna v premennej  $k$ . Najčastejšie sa používa funkcia:

$$F(k, z) = e^z k^\alpha$$

Premenná  $z$  reprezentuje technologický šok pozorovaný na začiatku každej periódy a riadi sa lineárnym Markovovým procesom prvého rádu:

$$z_{t+1} = \eta z_t + \varepsilon_{t+1} \quad (1.2)$$

kde  $\varepsilon_t$  je identicky distribuovaná náhodná premenná s nulovou strednou hodnotou a konečnou varianciou.

V každej perióde sa výstup rozdeľuje medzi bežnú spotrebu  $c_t$  a hrubé investície  $i_t$ :

$$y_t = c_t + i_t \quad (1.3)$$

Kapitál sa riadi tzv. zákonom pohybu kapitálu:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t \quad (1.4)$$

Úlohou sociálneho plánovača je maximalizovať celoživotný úžitok domácností:

$$E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \quad (1.5)$$

kde  $E$  je operátor racionálnych očakávaní,  $\beta \in (0, 1)$  je diskontný faktor a funkcia  $U : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  je dvakrát spojite diferencovateľná, ostro rastúca a rýdzokonkávna, pričom platí:

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial U(c)}{\partial c} = \infty$$

Dostávame teda úlohu dynamického programovania na nekonečnom časovom horizonte:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \\ & y_t = c_t + i_t \\ & k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t \\ & z_{t+1} = \eta z_t + \varepsilon_{t+1} \\ & k_0, z_0 - \text{dané} \end{aligned}$$

Vyjadrieme  $c$  zo vzťahu (1.3) a dosadíme do účelovej funkcie, potom máme:

$$\begin{aligned} \max_{\{i_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(F(k_t, z_t) - i_t) \\ & k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t \\ & z_{t+1} = \eta z_t + \varepsilon_{t+1} \\ & k_0, z_0 - \text{dané} \end{aligned}$$

V tejto úlohe vystupuje  $i$  ako riadiaca premenná, kapitál  $k$  je endogénnou stavovou premennou a  $z$  je exogénnou stavovou premennou.

Označme si účelovú funkciu:

$$f^0(k, z, i) = U(F(k, z) - i)$$

Potom rovnica dynamického programovania (viď. [3]) pre túto úlohu vyzerá takto:

$$V(k, z) = \max_i \{f^0(k, z, i) + \beta EV(k', z')\} \quad (1.6)$$

kde  $k', z'$  predstavujú hodnoty premenných  $k, z$  v nasledujúcej perióde a  $V$  je hodnotová funkcia definovaná pre počiatočné  $k_0$  a  $z_0$  ako:

$$V(k_0, z_0) = \max_{\{i_t\}_{t=0}^{\infty}} E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(k_t, z_t, i_t)$$

Prepíšme ďalej sústavu rovníc pre stavové premenné v nasledujúcej perióde do tvaru:

$$\begin{pmatrix} k_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} k_t \\ z_t \end{pmatrix} + B i_t$$

kde matica  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} (1 - \delta) & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$$

a vektor  $B$ :

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nájďme teraz pevný bod tejto úlohy, ktorý sa pri vytváraní tohto ekonomického modelu chápe ako bod  $(\bar{k}, \bar{z}, \bar{i})$ , ktorý spĺňa:

$$0 = \frac{\partial f^0(\bar{k}, \bar{z}, \bar{i})}{\partial i} + \beta \left( \frac{\partial f^0(\bar{k}, \bar{z}, \bar{i})}{\partial k}, \frac{\partial f^0(\bar{k}, \bar{z}, \bar{i})}{\partial z} \right) (I - \beta A)^{-1} B \quad (1.7)$$

$$\bar{k} = (1 - \delta)\bar{k} + \bar{i} \quad (1.8)$$

$$\bar{z} = \eta \bar{z} \quad (1.9)$$

Ide o bod, ktorý vyhovuje nutným podmienkam optimality (viď. [3]) a ak existuje optimálne riešenie pre úlohu sociálneho plánovača, je predpoklad, že by ekonomika mohla k nemu dokonvergovať.

Všimnime si, že rovnicu (1.7) môžeme vďaka tomu, že vektor  $B$  má druhý argument nulu, prepísať nasledujúcim spôsobom:

$$0 = \frac{\partial f^0(\bar{k}, \bar{z}, \bar{i})}{\partial i} + \beta \frac{\partial f^0(\bar{k}, \bar{z}, \bar{i})}{\partial k} (1 - \beta(1 - \delta))^{-1} \quad (1.10)$$

Predpokladajme, že existuje taký bod. Označme si vektor premenných  $(k, z, i)$  ako  $y$  a pevný bod ako  $\bar{y}$ , teda nech  $y = (k, z, i)$  a  $\bar{y} = (\bar{k}, \bar{z}, \bar{i})$ . Urobme Taylorov rozvoj druhého rádu funkcie  $f^0$  v rovnovážnom bode:

$$f^0(y) \approx f^0(\bar{y}) + \frac{\partial f^0(\bar{y})}{\partial y} y + \frac{1}{2} y^T \frac{\partial^2 f^0(\bar{y})}{\partial y^2} y \quad (1.11)$$

Pokiaľ nahradíme pôvodnú účelovú funkciu v úlohe týmto rozvojom, dostaneme úlohu lineárne-kvadratického programovania na nekonečnom časovom horizonte. Táto úloha má oproti pôvodnej istú výhodu v tom, že optimálne riadenie je nezávislé na variancii premennej  $\varepsilon$ . Platí tu tzv. princíp ekvivalencie (viď. [9]), ktorý nám umožňuje bez straty na všeobecnosti predpokladať, že variancia je nulová a premennú  $\varepsilon$  nahradiť jej nulovou strednou hodnotou a teda *de facto* odstrániť operátor  $E$  z rovnice (1.6).

Rovnaký spôsob riešenia takýchto alebo podobných ekonomických modelov aj pre viac-rozmerné premenné sa nachádza v publikáciách [9], [11].

## 1.2 Riešenie podľa Blancharda a Kahna

Ako sme videli v predchádzajúcom prípade, RBC modely vedú na úlohy optimálneho riadenia. Oproti predošlému urobíme teraz zovšeobecnenie na viacrozmerné premenné.

Vychádzajme z predpokladu, že náhodnosť vstupuje aditívne do vzťahu pre stavovú premennú, ale nevyskytuje sa priamo v účelovej funkcii. Čo môžeme zapísať ako:

$$\begin{aligned} \max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t) \\ & x_{t+1} = F(x_t, u_t) + \varepsilon_t \\ & x_0 - \text{dané} \end{aligned}$$

V tejto úlohe je  $x$  endogénna stavová premenná, ktorou je obyčajne kapitál,  $\varepsilon$  exogénna stavová premenná, definovaná ako v predchádzajúcom, reprezentujúca tzv. biely šum, a  $u$  riadiaca premenná, zvyčajne spotreba.  $f^0$  značí účelovú funkciu.

Pre túto úlohu dostávame ako nutnú podmienku pre optimálne riešenie (viď. [3]) sústavu rovníc, v ktorej  $\psi$  označuje tzv. adjungovanú premennú:

$$x_{t+1} = F(x_t, u_t) + \varepsilon_t \quad (1.12)$$

$$\psi_t = \frac{\partial f^0(x_t, u_t)}{\partial x} + \beta E[\psi_{t+1} \frac{\partial F(x_t, u_t)}{\partial x}] \quad (1.13)$$

$$0 = \frac{\partial f^0(x_t, u_t)}{\partial u} + \beta E[\psi_{t+1} \frac{\partial F(x_t, u_t)}{\partial u}] \quad (1.14)$$

Predpokladajme, že  $u$  sa dá vyjadriť z (1.14) jednoznačne ako funkcia premenných  $(x, \psi)$ , teda  $u = g(x, \psi)$ . Predpokladajme ďalej, že pre  $\beta = 1$  má sústava rovníc (1.12) až (1.14) pevný bod  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi})$ , teda bod, pre ktorý platí:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= F(\bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{\psi} &= \frac{\partial f^0(\bar{x}, g(\bar{x}, \bar{\psi}))}{\partial x} + \bar{\psi} \frac{\partial F(\bar{x}, g(\bar{x}, \bar{\psi}))}{\partial x} \end{aligned}$$

Za určitých podmienok sa dá rozšíriť pevný bod ako funkcia parametra  $\beta$  aj pre  $\beta$  blízke 1. Ďalej môžeme transformovať tento pevný bod do nuly. Potom pokiaľ by bola funkcia  $F$  lineárna a funkcia  $f^0$  kvadratická, uvedený systém sa dá prepísať do tvaru:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Mx_t + NE\psi_{t+1} + \varepsilon_t \\ \psi_t &= Px_t + RE\psi_{t+1} \end{aligned}$$

kde  $M$ ,  $N$ ,  $P$  a  $R$  sú príslušné matice. V tomto systéme sa premenné  $x$  označujú ako predeterminované (predurčené) a  $\psi$  ako nepredeterminované (nepredurčené).

Článok [14] sa zaoberá predpokladmi, za ktorých má tento systém pre každú danú hodnotu  $x_0$  predurčenej premennej jediné riešenie ležiace na stabilnej ceste do rovnovážneho bodu.

V našej práci overíme platnosť týchto predpokladov pre úlohu lineárne-kvadratického programovania bez diskontného faktoru aj s diskontným faktorom a pre deterministický prípad ukážeme, aký je vzťah medzi optimálnym riešením lineárne-kvadratickej aproximácie a optimálnym riešením úlohy, v ktorej je funkcia  $F$  pre stav v nasledujúcej perióde lineárna a účelová funkcia  $f^0$  je nekvadratická so zápornou Hessovou maticou v rovnovážnom bode.

## Kapitola 2

# Formulácia úlohy

### 2.1 Rovnovážna trojica

V tejto kapitole sformulujeme typ úloh, ktorými sa v našej práci hodláme zaoberať, odvodieme nutné podmienky optimality a definujeme pojem rovnovážnej trojice pre tieto úlohy.

Uvažujme nasledujúcu autonómnú úlohu optimálneho programovania s diskretným časom na nekonečnom časovom horizonte:

$$\begin{aligned} \sup_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t) \\ & x_{t+1} = F(x_t, u_t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$x_t \in X \subseteq \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

$$u_t \in U \subseteq \mathbb{R}^m \tag{2.3}$$

$$x_0 - \text{dané} \tag{2.4}$$

kde  $\beta \in (0, 1]$  (pre účely práce je užitočné uvažovať aj prípad, keď  $\beta = 1$ ), ďalej účelová funkcia  $f^0$  je aspoň trikrát spojitely diferencovateľná a funkcia  $F$  je lineárna v oboch argumentoch:

$$F(x, u) = Ax + Bu + c$$

kde  $A$  je regulárna matica typu  $n \times n$ , matica  $B$  je typu  $n \times m$  a  $c$  je vektor konštánt z  $\mathbb{R}^n$ . Nás bude zaujímať prípad, keď stavová premenná  $x$  je z  $\mathbb{R}^n$  a riadiaca premenná  $u$  z  $\mathbb{R}^m$  a teda môžeme postaviť  $X = \mathbb{R}^n$  a  $U = \mathbb{R}^m$ . Pre konkrétne  $\beta$  označujme túto úlohu  $(U_\beta)$ .

Lubovoľná postupnosť  $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$  v  $\mathbb{R}^m$  sa nazýva riadenie. Pod odozvou na riadenie  $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$  rozumieme postupnosť  $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$  v  $\mathbb{R}^n$  spĺňajúcu podmienky (2.1) a (2.4). Riadenie  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^{\infty}$

a jeho odozva  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ , ktoré spĺňajú (2.2) a (2.3) sa nazývajú prípustné riadenie a jeho odozva pre úlohu  $(U_{\beta})$ . Označme si  $J(x_0, \omega) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t)$ . Ak sa navyše v prípustnom riadení  $\omega$  realizuje suprénum radu  $J(x_0, \omega)$ , nazýva sa optimálne riadenie pre túto úlohu.

Hodnotovou funkciou rozumieme funkciu  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ktorá nám pre každý počiatočný stav  $x_0$  poskytne suprénum radu  $J(x_0, \omega)$  na množine prípustných riadení, teda funkciu, pre ktorú platí:

$$V(x_0) = \sup_{\omega} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t) \quad (2.5)$$

kde  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^{\infty}$  je prípustné riadenie.

Potom Bellmanova funkcionálna rovnica (viď. [3]) pre túto úlohu vyzerá takto:

$$V(x) = \sup_u \{f^0(x, u) + \beta V[F(x, u)]\} \quad (2.6)$$

Nazýva sa tiež rovnica dynamického programovania a pre úlohu  $(U_{\beta})$  je nutnou podmienkou optimality.

Dajú sa však odvodiť aj iné nutné podmienky optimality pre túto úlohu. Z vety 3.4 v [3] sa dozvedáme, že optimálne riadenie a jeho odozva musia vyhovovať sústave (systému) diferenciálnych rovníc s adjungovanou premennou  $\psi_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $\psi_t \neq 0$  pre  $t = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= F(x_t, u_t) \\ 0^T &= \frac{\partial f^0(x_t, u_t)}{\partial u} + \beta \psi_{t+1}^T \frac{\partial F(x_t, u_t)}{\partial u} \\ \psi_t^T &= \frac{\partial f^0(x_t, u_t)}{\partial x} + \beta \psi_{t+1}^T \frac{\partial F(x_t, u_t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.7)$$

za predpokladu, že matica  $\frac{\partial F(x_t, u_t)}{\partial x}$  je regulárna pre všetky  $t$ .

Keďže  $F(x_t, u_t) = Ax_t + Bu_t + c$ , tak vlastne požadujeme, aby bola matica  $A$  regulárna. Uvedený predpoklad je urobený na začiatku kapitoly pri formulácii úlohy. Sústavu rovníc (2.7) môžeme potom prepísať takto:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t + c \\ 0^T &= \frac{\partial f^0(x_t, u_t)}{\partial u} + \beta \psi_{t+1}^T B \\ \psi_t^T &= \frac{\partial f^0(x_t, u_t)}{\partial x} + \beta \psi_{t+1}^T A \end{aligned} \quad (2.8)$$

Pod rovnovážnym (pevným) bodom tejto sústavy budeme rozumieť bod  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi})$ , ktorý spĺňa:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= A\bar{x} + B\bar{u} + c \\ 0^T &= \frac{\partial f^0(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u} + \beta \bar{\psi}^T B \\ \bar{\psi}^T &= \frac{\partial f^0(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x} + \beta \bar{\psi}^T A \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dostali sme  $2n + m$  rovníc o  $2n + m$  neznámých. Dá sa k nej tiež dopracovať cez rovnicu dynamického programovania. Za predpokladu, že existuje funkcia  $V$  spĺňajúca rovnicu dynamického programovania (2.6), ktorá je navyše diferencovateľná, tak derivovaním (2.6) podľa  $u$  dostávame:

$$0^T = \frac{\partial f^0(x, u)}{\partial u} + \beta \frac{\partial V[F(x, u)]}{\partial x} \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \quad (2.10)$$

Súčasne derivovaním (2.6) podľa premennej  $x$  dostaneme:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \frac{\partial f^0(x, u)}{\partial x} + \beta \frac{\partial V[F(x, u)]}{\partial x} \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} \quad (2.11)$$

V pevnom bode máme:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= A\bar{x} + B\bar{u} + c \\ 0^T &= \frac{\partial f^0(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u} + \beta \frac{\partial V(\bar{x})}{\partial x} B \\ \frac{\partial V(\bar{x})}{\partial x} &= \frac{\partial f^0(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x} + \beta \frac{\partial V(\bar{x})}{\partial x} A \end{aligned} \quad (2.12)$$

Po preznačení  $\bar{\psi}^T = \frac{\partial V(\bar{x})}{\partial x}$  získame systém (2.9).

Všimnime si, že pokiaľ pre konkrétne  $\beta$  existuje matica  $(I - \beta A)^{-1}$ , kde  $I$  je jednotková matica, tak uvedený systém môžeme zúžiť na dve rovnice a pritom odstrániť premennú  $\bar{\psi}$ .

Z tretej rovnice systému (2.9) dostávame:

$$\bar{\psi}^T = \frac{\partial f^0(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x} (I - \beta A)^{-1}$$

Dosadením do druhej máme:

$$0^T = \frac{\partial f^0(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u} + \beta \frac{\partial f^0(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x} (I - \beta A)^{-1} B$$

Po pretransformovaní:

$$0 = \frac{\partial f^0(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u}^T + \beta B^T (I - \beta A^T)^{-1} \frac{\partial f^0(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x}^T$$

Celkove máme:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= A\bar{x} + B\bar{u} + c \\ 0 &= \frac{\partial f^0(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u}^T + \beta B^T (I - \beta A^T)^{-1} \frac{\partial f^0(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x}^T \end{aligned}$$

Bod, ktorý vyhovuje týmto dvom rovniciam, sa obyčajne v ekonomickej literatúre (napr. [11]) chápe ako pevný bod. Uvedená definícia sa tiež vyskytuje v prvej kapitole tejto práce.

Pretože nutné podmienky optimality nezaručujú existenciu optimálneho riadenia, len hovoria, že ak existuje, musí vyhovovať systému (2.9), tak si teraz pre účely práce zadefinujeme rovnovážnu trojicu  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi})$ , pod ktorou budeme rozumieť pevný bod systému (2.9) nutných podmienok optimality:

**Definícia 2.1.** *Rovnovážna trojica pre úlohu  $(U_\beta)$  s  $\beta \in (0, 1]$  je taký bod  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi})$ , že platí:*

$$\begin{aligned}\bar{x} &= A\bar{x} + B\bar{u} + c \\ 0 &= \frac{\partial f^0(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u}^T + \beta B^T \bar{\psi} \\ \bar{\psi} &= \frac{\partial f^0(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x}^T + \beta A^T \bar{\psi}\end{aligned}$$

Urobme nasledujúci predpoklad:

**Predpoklad Q1:** Pre úlohu  $(U_1)$  existuje rovnovážna trojica  $(\bar{x}_1, \bar{u}_1, \bar{\psi}_1)$ .

V nasledujúcej vete si za pomoci tohto predpokladu ukážeme, že existuje okolie bodu 1 také, že rovnovážna trojica  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi})$  sa dá vyjadriť jednoznačne ako spojitá funkcia parametra  $\beta$ .

Označujme  $B[\bar{x}, \varepsilon]$  uzavretú guľu v  $\mathbb{R}^p$  so stredom v bode  $\bar{x}$  a polomerom  $\varepsilon$ , tj.:

$$B[\bar{x}, \varepsilon] = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - \bar{x}\| \leq \varepsilon\}$$

kde  $\|\cdot\|$  značí normu v  $\mathbb{R}^p$ . Ďalej označme:

$$f_1(\beta, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi}) = (I - A)\bar{x} - B\bar{u} - c \quad (2.13)$$

$$f_2(\beta, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi}) = \frac{\partial f^0(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u}^T + \beta B^T \bar{\psi} \quad (2.14)$$

$$f_3(\beta, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi}) = \frac{\partial f^0(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x}^T + (\beta A^T - I)\bar{\psi} \quad (2.15)$$

Potom systém rovníc pre rovnovážnu trojicu pre úlohu  $(U_\beta)$  s  $\beta \in (0, 1]$  môžeme prepísať ako:

$$f_1(\beta, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi}) = 0$$

$$f_2(\beta, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi}) = 0$$

$$f_3(\beta, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi}) = 0$$

Nech  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  je vektorová funkcia definovaná trojicou funkcií (2.13), (2.14), (2.15). Označme maticu parciálnych derivácií funkcie  $f$  v bode  $(1, \bar{x}_1, \bar{u}_1, \bar{\psi}_1)$  podľa premenných  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi})$  ako  $H$ , potom platí:

$$H = \begin{pmatrix} (I - A) & -B & 0 \\ \frac{\partial^2 f^0(\bar{x}_1, \bar{u}_1)}{\partial u \partial x}^T & \frac{\partial^2 f^0(\bar{x}_1, \bar{u}_1)}{\partial u^2}^T & B^T \\ \frac{\partial^2 f^0(\bar{x}_1, \bar{u}_1)}{\partial x^2}^T & \frac{\partial^2 f^0(\bar{x}_1, \bar{u}_1)}{\partial x \partial u}^T & A^T - I \end{pmatrix}$$

Urobme ešte jeden predpoklad:

**Predpoklad Q2:** Matica  $H$  je regulárna.

**Veta 2.1.** *Nech funkcia  $f^0$  je  $C^r$  funkcia, kde  $r \geq 3$ . Nech je splnený predpoklad Q1 a pre rovnicu:*

$$f(\beta, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi}) = 0 \quad (2.16)$$

*predpoklad Q2. Potom existujú také  $\varepsilon_1 > 0$  a  $\varepsilon_2 > 0$ , že rovnica (2.16) určuje jediné  $C^{r-1}$  zobrazenie  $\varphi : B[1, \varepsilon_1] \rightarrow B[(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi}), \varepsilon_2]$  také, že  $\varphi(\beta) = (\bar{x}(\beta), \bar{u}(\beta), \bar{\psi}(\beta))$ , pričom  $\bar{x}(1) = \bar{x}_1$ ,  $\bar{u}_1 = \bar{u}(1)$  a  $\bar{\psi}_1 = \bar{\psi}(1)$ .*

*Dôkaz.* Bod  $(1, \bar{x}_1, \bar{u}_1, \bar{\psi}_1)$  vyhovuje (2.16). Na okolí tohto bodu je funkcia  $f$  spojitá, rovnako ako jej parciálna derivácia podľa premenných  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi})$ , pretože  $f^0$  je aspoň trikrát spojitely diferencovateľná. Keďže z predpokladu Q2 je matica  $H$  regulárna, tak sú splnené podmienky vety o implicitnej funkcii, čo dokazuje tvrdenie.  $\square$

Takže sme si ukázali, že existuje okolie bodu 1 také, že rovnovážna trojica  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi})$  sa dá vyjadriť jednoznačne ako funkcia parametra  $\beta$  príslušnej hladkosti. Zároveň z toho vyplýva, že funkčná hodnota účelovej funkcie  $f^0$  v bode  $(\bar{x}, \bar{u})$  bude na tomto okolí spojitou funkciou parametra  $\beta$ , rovnako ako aj parciálne derivácie  $\frac{\partial f^0}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f^0}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial^2 f^0}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f^0}{\partial x \partial u}$  a  $\frac{\partial^2 f^0}{\partial u^2}$  v tomto bode.

Urobme ďalší predpoklad:

**Predpoklad Q3:** Hessova matica účelovej funkcie  $f^0$  v rovnovážnom  $(\bar{x}_1, \bar{u}_1)$  je záporne definitná.

Potom, ak je splnený, existuje okolie bodu 1 také, že pre  $\beta$  z tohto okolia je Hessova matica účelovej funkcie  $f^0$  v bode  $(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta)$  záporne definitná.

Označujme prienik okolia bodu 1, na ktorom sa dajú vyjadriť  $\bar{x}$ ,  $\bar{u}$  a  $\bar{\psi}$  jednoznačne ako spojitú funkciu  $\beta$  a súčasne na ktorom je Hessova matica účelovej funkcie  $f^0$  v bode  $(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta)$  záporne definitná, s  $(0, 1]$  ako  $O$ .

## 2.2 Nutné podmienky optimality pre lineárne-kvadratickú úlohu s diskontom

Nech platia predpoklady Q1, Q2 a Q3. Nech  $\beta \in O$ . Označme  $\delta x = x - \bar{x}_\beta$ ,  $\delta u = u - \bar{u}_\beta$ . Urobme aproximáciu funkcie  $f^0$  Taylorovým polynómom do druhého rádu v bode  $(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta)$ :

$$\begin{aligned} f_\beta^0(x, u) &= f^0(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta) + k_\beta^T \delta x + l_\beta^T \delta u + \frac{1}{2} \delta x^T P_\beta \delta x + \frac{1}{2} \delta x^T Q_\beta^T \delta u \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta u^T Q_\beta \delta x + \frac{1}{2} \delta u^T R_\beta \delta u \end{aligned} \quad (2.17)$$

kde  $k_\beta^T = \frac{\partial f^0(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta)}{\partial x}$ ,  $l_\beta^T = \frac{\partial f^0(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta)}{\partial u}$ ,  $P_\beta = \frac{\partial^2 f^0(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta)}{\partial x^2}$ ,  $Q_\beta = \frac{\partial^2 f^0(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta)}{\partial u \partial x}$ ,  $R_\beta = \frac{\partial^2 f^0(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta)}{\partial u^2}$ .

Potom matica:

$$\begin{pmatrix} P_\beta & Q_\beta^T \\ Q_\beta & R_\beta \end{pmatrix}$$

je Hessovou maticou funkcie  $f^0$  a teda je záporne definitná. Úlohu  $(U_\beta)$  s kvadratickou účelovou funkciou, ktorá vznikla aproximáciou pôvodnej účelovej funkcie  $f^0$  Taylorovým polynómom do druhého rádu v bode  $(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta)$ , budeme označovať ako  $(U_\beta^Q)$ .

Funkciu  $F$  môžeme tiež zapísať nasledujúcim spôsobom:

$$F(x, u) = F(\bar{x}_\beta + \delta x, \bar{u}_\beta + \delta u) = F(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta) + A\delta x + B\delta u \quad (2.18)$$

Uvažujme teraz systém úloh  $(U_\beta^Q)$  pre  $\beta \in O$ . Dosadíme vyjadrenie (2.17) do druhej a tretej rovnice systému (2.9), dostaneme:

$$0 = l_\beta + \beta B^T \bar{\psi}_\beta \quad (2.19)$$

$$\bar{\psi}_\beta = k_\beta + \beta A^T \bar{\psi}_\beta \quad (2.20)$$

**Poznámka 2.1.** *Poznamenajme, že za predpokladu regulárnosti matice  $I - \beta A$  platí:*

$$\bar{\psi}_\beta = (I - \beta A^T)^{-1} k_\beta \quad (2.21)$$

*Dosadením (2.21) do (2.19), dostaneme vzťah medzi  $l_\beta$  a  $k_\beta$ :*

$$l_\beta = -\beta B^T (I - \beta A^T)^{-1} k_\beta \quad (2.22)$$

Dosadíme ďalej vyjadrenia (2.17) a (2.18) do systému (2.8), dostaneme:

$$\delta x_{t+1} = A\delta x_t + B\delta u_t \quad (2.23)$$

$$0 = l_\beta + Q_\beta \delta x_t + R_\beta \delta u_t + \beta B^T \psi_{t+1} \quad (2.24)$$

$$\psi_t = k_\beta + P_\beta \delta x_t + Q_\beta^T \delta u_t + \beta A^T \psi_{t+1} \quad (2.25)$$

Označme  $\delta\psi_t = \psi_t - \bar{\psi}_\beta$  a upravujme postupne rovnicu (2.24):

$$\begin{aligned}
0 &= l_\beta + Q_\beta \delta x_t + R_\beta \delta u_t + \beta B^T \psi_{t+1} \\
0 &= l_\beta + Q_\beta \delta x_t + R_\beta \delta u_t + \beta B^T \psi_{t+1} - \beta B^T \bar{\psi}_\beta + \beta B^T \bar{\psi}_\beta \\
0 &= Q_\beta \delta x_t + R_\beta \delta u_t + \beta B^T \delta \psi_{t+1} + l_\beta + \beta B^T \bar{\psi}_\beta \\
0 &= Q_\beta \delta x_t + R_\beta \delta u_t + \beta B^T \delta \psi_{t+1}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

kde posledný krok vyplýva zo vzťahu (2.19).

Urobme postupnosť úprav i pre rovnicu (2.25):

$$\begin{aligned}
\psi_t &= k_\beta + P_\beta \delta x_t + Q_\beta^T \delta u_t + \beta A^T \psi_{t+1} \\
\delta \psi_t &= P_\beta \delta x_t + Q_\beta^T \delta u_t + \beta A^T \delta \psi_{t+1} + k_\beta - \bar{\psi}_\beta + \beta \bar{A}^T \bar{\psi}_\beta \\
\delta \psi_t &= P_\beta \delta x_t + Q_\beta^T \delta u_t + \beta A^T \delta \psi_{t+1}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

kde opäť posledný krok vyplýva zo vzťahu (2.20).

Celkovo sme dostali systém nasledujúcich rovníc (2.23), (2.26), (2.27):

$$\begin{aligned}
\delta x_{t+1} &= A \delta x_t + B \delta u_t \\
0 &= Q_\beta \delta x_t + R_\beta \delta u_t + \beta B^T \delta \psi_{t+1} \\
\delta \psi_t &= P_\beta \delta x_t + Q_\beta^T \delta u_t + \beta A^T \delta \psi_{t+1}
\end{aligned}$$

Vidíme, že  $k_\beta$ ,  $l_\beta$  je možné odstrániť zo systému rovníc (2.23), (2.24) a (2.25) a teda lineárne členy nevstupujú do vzťahov, ktoré musí spĺňať optimálne riadenie a jeho odozva. Inými slovami nutné podmienky optimality sú rovnaké pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou s nenulovými i nulovými lineárnymi členmi.

Pretože matica  $R_\beta$  je záporne definitná, môžeme vyjadriť z rovnice (2.26)  $\delta u_t$  ako lineárnu funkciu premenných  $\delta x_t$  a  $\delta \psi_{t+1}$  a totiž:

$$\delta u_t = -R_\beta^{-1} Q_\beta \delta x_t - \beta R_\beta^{-1} B^T \delta \psi_{t+1} \tag{2.28}$$

Dosaďme (2.28) do (2.23) a (2.27), dostaneme:

$$\delta x_{t+1} = (A - \beta B R_\beta^{-1} Q_\beta) \delta x_t - \beta B R_\beta^{-1} B^T \delta \psi_{t+1} \tag{2.29}$$

$$\delta \psi_t = (P_\beta - Q_\beta^T R_\beta^{-1} Q_\beta) \delta x_t + \beta (A^T - Q_\beta^T R_\beta^{-1} B^T) \delta \psi_{t+1} \tag{2.30}$$

Označme  $\mathbf{P}_\beta = (P_\beta - Q_\beta^T R_\beta^{-1} Q_\beta)$ ,  $\mathbf{B}_\beta = -\beta B R_\beta^{-1} B^T$  a  $\mathbf{A}_\beta = (A - \beta B R_\beta^{-1} Q_\beta)$ , potom:

$$\delta x_{t+1} = \mathbf{A}_\beta \delta x_t + \mathbf{B}_\beta \delta \psi_{t+1} \tag{2.31}$$

$$\delta \psi_t = \mathbf{P}_\beta \delta x_t + \beta \mathbf{A}_\beta^T \delta \psi_{t+1} \tag{2.32}$$

## 2.3 Nutné podmienky optimality pre pôvodnú úlohu

V ďalšom budeme používať nasledujúce skrátené označovanie:

Nech  $f(x)$  je  $C^p$  funkcia v okolí bodu  $\bar{x}$  a  $f_r(x)$  je jej Taylorov polynóm stupňa  $r \leq p$ , potom skratka č. v. r. reprezentuje zvyšok  $\varphi(x)$  polynómu  $f_r(x)$ , tj.  $\varphi(x)$  je  $C^p$  a platí:

$$\frac{\partial^j \varphi(\bar{x})}{\partial x^j} = 0$$

pre  $j = 0, 1, \dots, r$ .

Nech sú stále splnené predpoklady Q1, Q2 a Q3. Vráťme sa k systému úloh  $(U_\beta)$  pre  $\beta \in O$ . Účelovú funkciu  $f^0$  môžeme rozpísať nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} f^0(x, u) &= f^0(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta) + k_\beta^T \delta x + l_\beta^T \delta u + \frac{1}{2} \delta x^T P_\beta \delta x + \frac{1}{2} \delta x^T Q_\beta^T \delta u \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta u^T Q_\beta \delta x + \frac{1}{2} \delta u^T R_\beta \delta u + \text{č. v. r.} \end{aligned} \quad (2.33)$$

kde  $k_\beta^T = \frac{\partial f^0(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta)}{\partial x}$ ,  $l_\beta^T = \frac{\partial f^0(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta)}{\partial u}$ ,  $P_\beta = \frac{\partial^2 f^0(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta)}{\partial x^2}$ ,  $Q_\beta = \frac{\partial^2 f^0(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta)}{\partial u \partial x}$ ,  $R_\beta = \frac{\partial^2 f^0(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta)}{\partial u^2}$  a matica:

$$\begin{pmatrix} P_\beta & Q_\beta^T \\ Q_\beta & R_\beta \end{pmatrix}$$

je záporne definitná.

Je jasné, že rovnovážna trojica  $(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta, \bar{\psi}_\beta)$  je rovnaká pre úlohu  $(U_\beta)$  ako i úlohu  $(U_\beta^Q)$ , a že pre  $\bar{\psi}_\beta$  platia vzťahy (2.19), (2.20).

Po dosadení vyjadrenia (2.33) do systému (2.8), dostávame:

$$\begin{aligned} \delta x_{t+1} &= A \delta x_t + B \delta u_t \\ 0 &= Q_\beta \delta x_t + R_\beta \delta u_t + \beta B^T \delta \psi_{t+1} + \text{č. v. r.} \\ \delta \psi_t &= P_\beta \delta x_t + Q_\beta^T \delta u_t + \beta A^T \delta \psi_{t+1} + \text{č. v. r.} \end{aligned} \quad (2.34)$$

V nasledujúcej vete si za pomoci vety o implicitnej funkcii ukážeme, že z druhej rovnice systému (2.34) sa na dostatočne malom okolí bodu  $(0, 0, 0)$  dá  $\delta u_t$  vyjadriť jednoznačne ako funkcia premenných  $\delta x_t$  a  $\delta \psi_{t+1}$ .

**Veta 2.2.** *Nech funkcia  $f^0$  je  $C^r$  funkcia, kde  $r \geq 3$ . Nech  $\beta \in O$ . Uvažujme druhú rovnicu systému (2.34):*

$$0 = Q_\beta \delta x_t + R_\beta \delta u_t + \beta B^T \delta \psi_{t+1} + \text{č. v. r.} \quad (2.35)$$

*Potom existujú také  $\varepsilon_1 > 0$  a  $\varepsilon_2 > 0$ , že rovnica (2.35) určuje jediné  $C^{r-1}$  zobrazenie  $\delta u_t : B[(0, 0), \varepsilon_1] \rightarrow B[0, \varepsilon_2]$  také, že  $\delta u_t(0, 0) = 0$ , pričom platí:*

$$\delta u_t(\delta x_t, \delta \psi_{t+1}) = -R_\beta^{-1} Q_\beta \delta x_t - \beta R_\beta^{-1} B^T \delta \psi_{t+1} + \text{č. v. r.} \quad (2.36)$$

*Dôkaz.* Označme výraz na pravej strane rovnice (2.35) ako  $\Phi(\delta x, \delta u)$ , potom musí platiť:

$$\Phi(0, 0) = 0$$

Funkcia  $\Phi(\delta x, \delta u)$  je spojitá aj spojite diferencovateľná, pretože  $f^0$  je aspoň trikrát spojite diferencovateľná funkcia. Ďalej platí:

$$\frac{\partial \Phi(0, 0)}{\partial u} = R$$

čo je záporne definitná matica a teda regulárna matica. Tým pádom sú všetky podmienky vety o implicitnej funkcii splnené, čo dokazuje tvrdenie.  $\square$

Dosadením (2.36) do prvej a tretej rovnice systému (2.34), dostaneme:

$$\delta x_{t+1} = \mathbf{A}_\beta \delta x_t + \beta \mathbf{B}_\beta \delta \psi_{t+1} + \text{č. v. r.} \quad (2.37)$$

$$\delta \psi_t = \mathbf{P}_\beta \delta x_t + \beta \mathbf{A}_\beta^T \delta \psi_{t+1} + \text{č. v. r.} \quad (2.38)$$

Vidíme, že s použitím transformácie  $\delta x = x - \bar{x}_\beta$ ,  $\delta u = u - \bar{u}_\beta$ ,  $\delta \psi_t = \psi_t - \bar{\psi}_\beta$  môžeme rovnovážnu trojicu  $(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta, \bar{\psi}_\beta)$  bez ujmy na všeobecnosti posunúť do bodu  $(0, 0, 0)$ . Rovnako môžeme miesto účelovej funkcie  $f^0$  brať ako účelovú funkciu funkciu  $\mathbf{f}_\beta$  definovanú vzťahom:

$$\mathbf{f}_\beta(x, u) = f^0(x, u) - f^0(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta) \quad (2.39)$$

Resp. pri úlohách  $(U_\beta^Q)$  môžeme miesto  $f_\beta^0$  brať ako účelovú funkciu funkciu  $\delta f_\beta^0$  definovanú vzťahom:

$$\delta f_\beta^0 = f_\beta^0(x, u) - f^0(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta) \quad (2.40)$$

Je to preto, lebo pri derivovaní nezáleží na posune o konštantu a teda nutné podmienky optimality sú pre obe dvojice funkcií rovnaké. Z toho vyplýva, že všetky doposiaľ odvodené vzťahy platia aj pre funkciu  $\mathbf{f}_\beta$ , resp. v úlohách  $(U_\beta^Q)$  pre funkciu  $\delta f_\beta^0$ .

Aby sme sa vyhli neustálemu vypisovaniu  $\delta$ , preznačíme spätne  $\delta x$  na  $x$ ,  $\delta u$  na  $u$ ,  $\delta \psi$  na  $\psi$  a  $\delta f_\beta^0$  na  $f_\beta^0$ . Označenie funkcie  $\mathbf{f}_\beta$  ponecháme. Pod funkciou  $F$  budeme rozumieť funkciu definovanú vzťahom:

$$F(x, u) = Ax + Bu$$

Označenie úlohy s účelovou funkciou  $f_\beta^0$  a funkciou  $F$  definovanou predchádzajúcim vzťahom ponecháme ako  $(U_\beta^Q)$  a úlohy s účelovou funkciou  $\mathbf{f}_\beta$  a funkciou  $F$  definovanou predchádzajúcim vzťahom ponecháme ako  $(U_\beta)$ .

## Kapitola 3

# Lineárne-kvadratická úloha pre $\beta=1$

V tejto kapitole sa budeme venovať úlohám lineárne-kvadratického programovania bez diskontného faktoru. Ukážeme si v nej, za akých predpokladov možno systém doposiaľ odvodených nutných podmienok prepísať na systém so symplektickou maticou a v ďalšom potom využijeme niektoré jej vlastnosti. Kapitola je členená na dve časti. Prvá podkapitola sa zaoberá lineárne-kvadratickou úlohou s účelovou funkciou bez lineárnych členov a druhá potom lineárne-kvadratickou úlohou, v ktorej vystupuje účelová funkcia aj s nimi. Cieľom oboch podkapitol bude nájsť predpoklady, za ktorých existujú optimálne riadenie a jeho odozva, ukázať, kedy sú jediné a k čomu konvergujú a naformulovať pre ne vzťahy, ktorými sa riadia.

V ďalšom pre celú kapitolu predpokladajme, že je splnený predpoklad Q1. Nech  $\beta = 1$ . Uvažujme úlohu  $(U_1^Q)$ . Teda úlohu:

$$\begin{aligned} \sup_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} f_1^0(x_t, u_t) \\ & x_{t+1} = F(x_t, u_t) \\ & x_t \in \mathbb{R}^n \\ & u_t \in \mathbb{R}^m \\ & x_0 - \text{dané} \end{aligned}$$

Označme si:

$$\mathbf{Q}_1(x, u) = \frac{1}{2}(x^T P_1 x + x^T Q_1^T u + u^T Q_1 x + u^T R_1 u) \quad (3.1)$$

Potom môžeme funkciu  $f_1^0$  zapísať nasledujúcim spôsobom:

$$f_1^0(x, u) = k_1^T x + l_1^T u + \mathbf{Q}_1(x, u) \quad (3.2)$$

Z predchádzajúcej kapitoly vieme, že optimálne riadenie pre úlohu  $(U_1^Q)$  (ak existuje) musí vyhovovať systému rovníc (2.31), (2.32) pre  $\beta = 1$ :

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= \mathbf{A}_1 x_t + \mathbf{B}_1 \psi_{t+1} \\ \psi_t &= \mathbf{P}_1 x_t + \mathbf{A}_1^T \psi_{t+1}\end{aligned}$$

Predpokladajme, že matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna, potom vieme vyjadriť  $\psi_{t+1}$  z druhej rovnice:

$$\psi_{t+1} = -(\mathbf{A}_1^T)^{-1} \mathbf{P}_1 x_t + (\mathbf{A}_1^T)^{-1} \psi_t$$

Dosadením do prvej rovnice dostávame:

$$x_{t+1} = [\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1(\mathbf{A}_1^T)^{-1} \mathbf{P}_1] x_t + \mathbf{B}_1(\mathbf{A}_1^T)^{-1} \psi_t$$

Celkovo máme:

$$x_{t+1} = [\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1(\mathbf{A}_1^T)^{-1} \mathbf{P}_1] x_t + \mathbf{B}_1(\mathbf{A}_1^T)^{-1} \psi_t \quad (3.3)$$

$$\psi_{t+1} = -(\mathbf{A}_1^T)^{-1} \mathbf{P}_1 x_t + (\mathbf{A}_1^T)^{-1} \psi_t \quad (3.4)$$

Teda sme za predpokladu, že matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna, odvodili sústavu diferenčných rovníc, ktorá je nutnou podmienkou pre optimálne riešenie úlohy  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u)$ , ale zároveň aj s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = k_1^T x + l_1^T u + \mathbf{Q}_1(x, u)$ . V ďalšom si ukážeme, že matica tejto sústavy je sympletická.

Hovoríme, že matica  $M$  typu  $2n \times 2n$  je sympletická, keď spĺňa podmienku:

$$M^T \Omega M = \Omega$$

kde  $\Omega$  je matica:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

a matica  $I$  je jednotková matica typu  $n \times n$ .

Vlastné hodnoty symplektickej matice vystupujú v recipročných pároch, tj. ak  $\lambda$  je vlastná hodnota matice  $M$ , tak aj  $\frac{1}{\lambda}$  je vlastná hodnota matice  $M$  (viď. [13]). Takže ak  $|\lambda| < 1$ , potom  $|\frac{1}{\lambda}| > 1$ . Ak vlastná hodnota  $\lambda$  leží na jednotkovej kružnici, potom aj vlastná hodnota  $\frac{1}{\lambda}$  leží na jednotkovej kružnici.

Ďalej platí veta (viď. [13]), že bloková matica  $M$  typu  $2n \times 2n$  daná ako:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

kde matice  $A, B, C$  a  $D$  sú typu  $n \times n$ , je symplektická práve vtedy, keď sú splnené nasledujúce tri podmienky:

$$A^T D - C^T B = I \quad (3.5)$$

$$A^T C = C^T A \quad (3.6)$$

$$D^T B = B^T D \quad (3.7)$$

Označme maticu systému rovníc (3.3), (3.4):

$$M_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1(\mathbf{A}_1^T)^{-1}\mathbf{P}_1 & \mathbf{B}_1(\mathbf{A}_1^T)^{-1} \\ -(\mathbf{A}_1^T)^{-1}\mathbf{P}_1 & (\mathbf{A}_1^T)^{-1} \end{pmatrix}$$

V nasledujúcej vete ukážeme, že  $M_1$  je symplektická.

**Veta 3.1.** *Nech matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna. Potom matica  $M_1$  systému rovníc (3.3), (3.4) je symplektická.*

*Dôkaz.* Dôkaz bude pozostávať z overenia podmienok (3.5)-(3.7).

Najprv overme podmienku (3.5):

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_1^T - \mathbf{P}_1(\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1](\mathbf{A}_1^T)^{-1} + [\mathbf{P}_1(\mathbf{A}_1)^{-1}][\mathbf{B}_1(\mathbf{A}_1^T)^{-1}] &= I \\ I &= I \end{aligned}$$

Teraz podmienku (3.6):

$$-[\mathbf{A}_1^T - \mathbf{P}_1(\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1][(\mathbf{A}_1^T)^{-1}\mathbf{P}_1] = -\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1(\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1(\mathbf{A}_1^T)^{-1}\mathbf{P}_1$$

čo je symetrická matica.

A napokon podmienku (3.7):

$$(\mathbf{A}_1)^{-1}[\mathbf{B}_1(\mathbf{A}_1^T)^{-1}] = (\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1(\mathbf{A}_1^T)^{-1}$$

čo je tiež symetrická matica. □

### 3.1 Účelová funkcia bez lineárnych členov

Táto podkapitola sa venuje úlohám typu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $\mathbf{Q}_1(x, u)$ . Za predpokladu Q3 je kvadratická forma  $\mathbf{Q}_1(x, u)$  záporne definitná.

V nasledujúcej vete si ukážeme, za akých predpokladov prípustné riadenie pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u)$  spolu so svojou odozvou konvergujú k bodu  $(0, 0)$  pre  $t \rightarrow \infty$ .

**Veta 3.2.** *Nech  $k_1 = 0$  a  $l_1 = 0$  a teda účelová funkcia  $f_1^0(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u)$ . Nech je splnený predpoklad Q3. Nech  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^\infty$  je prípustné riadenie a  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^\infty$  jeho odozva. Nech rad  $\sum_{t=0}^\infty f_1^0(x_t, u_t)$  konverguje. Potom postupnosť  $\{(x_t, u_t)\}_{t=0}^\infty$  konverguje k bodu  $(0, 0)$  pre  $t \rightarrow \infty$ .*

*Dôkaz.* Nech  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^\infty$  je prípustné riadenie a  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^\infty$  jeho odozva. Ak konverguje rad  $\sum_{t=0}^\infty f_1^0(x_t, u_t)$ , tak musí platiť:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_1^0(x_t, u_t) = 0 \quad (3.8)$$

Pretože  $f_1^0(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u)$  a  $\mathbf{Q}_1(x, u)$  je podľa predpokladu Q3 záporne definitná kvadratická forma, tak  $\mathbf{Q}_1(x, u)$  dosahuje nulu len v bode  $(0, 0)$ . To dokazuje tvrdenie.  $\square$

V ďalšej vete dokážeme, že pre každé  $x_0$  existuje pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u)$  optimálne riadenie. Budeme nato potrebovať definíciu stabilizovateľnosti páru matic.

Hovoríme, že  $\lambda$  je nekontrolovateľná vlastná hodnota páru (dvojice) matic  $(A, B)$ , kde matica  $A$  je typu  $n \times n$  a matica  $B$  je typu  $n \times m$ , ak existuje riadkový vektor  $w \neq 0$  taký, že  $wA = \lambda w$  a súčasne  $wB = 0$ .

Hovoríme, že dvojica matic  $(A, B)$  je stabilizovateľná, ak existuje matica  $Z$  taká, že matica  $A + BZ$  je stabilná, tj. všetky jej vlastné hodnoty sú v absolútnej hodnote menšie ako 1. Alternatívne dvojica matic  $(A, B)$  je stabilizovateľná práve vtedy, keď sú nestabilné vlastné hodnoty páru  $(A, B)$ , tj. tie, pre ktoré  $|\lambda| > 1$ , kontrolovateľné (bližšie viď. [1]).

**Veta 3.3.** *Nech  $k_1 = l_1 = 0$ . Nech je splnený predpoklad Q3. Nech dvojica matic  $(A, B)$  je stabilizovateľná. Potom pre každé  $x_0$  existuje pre úlohu  $(U_1^Q)$  optimálne riadenie.*

*Dôkaz.* Nech  $x_0$  je ľubovoľné. Nech  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^\infty$  je prípustné riadenie a  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^\infty$  jeho odozva. Označme množinu prípustných riadení z počiatku  $x_0$  ako  $\pi(x_0)$ . Označme ďalej:

$$\sigma = \sup_{\omega \in \pi(x_0)} \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{Q}_1(x_t, u_t)$$

Pretože dvojica matic  $(A, B)$  je stabilizovateľná, tak existuje matica  $Z$  a prípustné riadenie  $u_t = Zx_t$  stabilizujúce systém  $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$ . Označme  $\bar{\lambda} = \max_i |\lambda_i|$  maximum spomedzi absolútnych hodnôt všetkých vlastných hodnôt stabilnej matice  $A + BZ$ , potom existuje  $C > 0$  také, že pre každé  $t$  platí:

$$\|(A + BZ)^t\| \leq C\bar{\lambda}^t$$

Vezmime si prípustné riadenie  $\{u_t = Zx_t\}_{t=0}^{\infty}$  a postupne upravujeme:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{Q}_1(x_t, Zx_t) \right| &\leq \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2} |x_t^T P_1 x_t + 2x_t^T Q_1^T Z x_t + x_t^T Z^T R_1 Z x_t| \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2} |x_0^T (A^T + Z^T B^T)^t (P_1 + 2Q_1^T Z + Z^T R_1 Z) (A + BZ_1)^t x_0| \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2} |x_0^T (A^T + Z^T B^T)^t (P_1 + 2Q_1^T Z + Z^T R_1 Z) (A + BZ_1)^t x_0| \\
&\leq \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2} C^2 \bar{\lambda}^{2t} \|(P_1 + 2Q_1^T Z + Z^T R_1 Z)\| \|x_0\|^2 \\
&= K \sum_{t=0}^{\infty} \bar{\lambda}^{2t}
\end{aligned}$$

kde  $K$  je príslušná kladná konštanta. Z toho vyplýva, že  $\sigma$  je konečné číslo, a z definície supréma vyplýva, že existuje taká postupnosť ohraňovaných prípustných riadení spolu s ich odozvami (teda postupnosť postupností  $\{(x_t^k, u_t^k)\}_{t=0}^{\infty}\}_{k=0}^{\infty}$ , kde  $x_0^k = x_0$  a  $x_{t+1}^k = F(x_t^k, u_t^k)$ ), že platí:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{Q}_1(x_t^k, u_t^k) \nearrow \sigma \quad (3.9)$$

pre  $k \rightarrow \infty$ .

Pre túto postupnosť fixujeme  $t$ , potom postupnosť  $\{(x_t^k, u_t^k)\}_{k=0}^{\infty}$  je takisto ohraňovaná a teda existuje z nej vybraná konvergentná podpostupnosť. Označme si pre každé  $t$  limitu konvergentnej podpostupnosti ako  $(x_t^*, u_t^*)$ .

Skonstruujeme konvergentnú postupnosť postupností nasledujúcim spôsobom:

Vezmime si postupnosť reálnych čísel  $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^{\infty}$  konvergujúcu k nule. Pre  $t = 0$  nájdime v postupnosti  $\{(x_0^k, u_0^k)\}_{k=0}^{\infty}$  také  $k_0$ , že  $(x_0^{k_0}, u_0^{k_0})$  je od  $(x_0^*, u_0^*)$  v príslušnej metrike vzdialené  $\varepsilon_0$  alebo menej. Opäť pre  $t = 1$  nájdime v postupnosti  $\{(x_1^k, u_1^k)\}_{k=k_0}^{\infty}$  také  $k_1 \geq k_0$ , že  $(x_1^{k_1}, u_1^{k_1})$  je od  $(x_1^*, u_1^*)$  vzdialené  $\varepsilon_1$  alebo menej a súčasne  $(x_0^{k_1}, u_0^{k_1})$  je od  $(x_0^*, u_0^*)$  vzdialené  $\varepsilon_1$  alebo menej. Vezmime postupnosť postupností  $\{(x_0^k, u_0^k)\}_{k=k_0}^{\infty}$ , kde  $k$  začína v  $k_0$ , pokračuje v  $k_1$  a ďalej všetkými  $k > k_1$ . Znovu nájdime v tejto postupnosti pre  $t = 2$  také  $k_2 \geq k_1$ , že  $(x_2^{k_2}, u_2^{k_2})$  je od  $(x_2^*, u_2^*)$  vzdialené  $\varepsilon_2$  alebo menej,  $(x_1^{k_2}, u_1^{k_2})$  je od  $(x_1^*, u_1^*)$  vzdialené  $\varepsilon_2$  alebo menej a súčasne  $(x_0^{k_2}, u_0^{k_2})$  je od  $(x_0^*, u_0^*)$  vzdialené  $\varepsilon_2$  alebo menej. A tak ďalej. Dostaneme  $\{ \{(x_t^{k_j}, u_t^{k_j})\}_{t=0}^{\infty} \}_{j=0}^{\infty}$  vybranú podpostupnosť z postupnosti postupností  $\{ \{(x_t^k, u_t^k)\}_{t=0}^{\infty} \}_{k=0}^{\infty}$ , ktorá konverguje k postupnosti  $\{(x_t^*, u_t^*)\}_{t=0}^{\infty}$  bodovo, pričom platí, že  $x_0^* = x_0$  a vďaka spojitosti funkcie  $F$  tiež  $x_{t+1}^* = F(x_t^*, u_t^*)$ .

Označme si:

$$S_n^* = \sum_{t=0}^n \mathbf{Q}_1(x_t^*, u_t^*)$$

a limitu (pokiaľ existuje) ako:

$$S_{\infty}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^*$$

Preznačme spätne indexy  $k_j$  na  $k$ , potom  $S_n^k$  značí:

$$S_n^k = \sum_{t=0}^n \mathbf{Q}_1(x_t^k, u_t^k)$$

a  $S_{\infty}^k$ :

$$S_{\infty}^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^k$$

Máme:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{\infty}^k = \sigma$$

Pretože  $\mathbf{Q}_1(x, u)$  je záporne definitná kvadratická forma, tak pre každé  $k$  je postupnosť  $\{S_n^k\}_{n=0}^{\infty}$  nerastúca, pričom platí, že  $S_n^k \leq 0$  pre každé  $n$ . Rovnako tak postupnosť  $\{S_n^*\}_{n=0}^{\infty}$  je nerastúca, pričom platí, že  $S_n^* \leq 0$  pre každé  $n$ . Ukážeme, že pre každé  $n$  platí:  $S_n^* \geq \sigma$ .

Nech to neplatí, potom existuje také  $n_0$  a  $\varepsilon > 0$ , že pre každé  $n \geq n_0$ :

$$S_n^* < \sigma - \varepsilon$$

Z toho ale vyplýva, že existuje také  $k_0$ , že pre každé  $k > k_0$  platí:

$$S_{n_0}^k < \sigma - \frac{\varepsilon}{2}$$

pretože však  $\{S_n^k\}_{n=0}^{\infty}$  je pre každé  $k$  nerastúca postupnosť, tak máme pre každé  $k > k_0$  a pre každé  $n \geq n_0$ :

$$S_n^k < \sigma - \frac{\varepsilon}{2}$$

Z toho ďalej pre každé  $k > k_0$ :

$$S_{\infty}^k < \sigma - \frac{\varepsilon}{2}$$

čo je spor s predpokladom, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{\infty}^k = \sigma$ .

Takže máme nerastúcu postupnosť  $S_n^*$ , ktorá je zdola ohraničená hodnotou  $\sigma$  a teda je konvergentná a rovnako aj  $S_{\infty}^* \geq \sigma$ . Zároveň máme  $S_{\infty}^* \leq \sigma$ , pretože  $\sigma$  je suprénum. Z toho vyplýva, že  $S_{\infty}^* = \sigma$ .  $\square$

Ďalej ukážeme, že matica  $M_1$  má všetky vlastné hodnoty ležiace mimo jednotkovej kružnice a následne toto zistenie využijeme na dôkaz, že existuje jediné optimálne riešenie systému rovníc (3.3), (3.4) a teda jediné optimálne riadenie pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $\mathbf{Q}_1(x, u)$ .

Označme si:

$$E^S = \{(x_0, \psi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | (x_t(x_0, \psi_0), \psi_t(x_0, \psi_0)) \rightarrow (0, 0) \text{ pre } t \rightarrow \infty\} \quad (3.10)$$

kde  $(x_t(x_0, \psi_0), \psi_t(x_0, \psi_0))$  je riešenie systému rovníc (3.3), (3.4) vychádzajúce z bodu  $(x_0, \psi_0)$ .

**Veta 3.4.** *Nech  $k_1 = l_1 = 0$ . Nech je splnený predpoklad Q3. Nech dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná a nech matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna. Potom spektrum matice  $M_1$  neobsahuje vlastnú hodnotu, ktorej absolútna hodnota sa rovná 1. Pre  $n$  vlastných hodnôt (vrátane násobností) platí, že  $|\lambda| < 1$  a pre zvyšných  $n$ , že  $|\lambda| > 1$ . Navyše existuje jediná matica  $L_1$  typu  $n \times n$  taká, že pre priestor  $E^S$  definovaný v (3.10) platí:*

$$E^S = \{(x, \psi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | \psi = L_1 x\} \quad (3.11)$$

*Dôkaz.* Z vety 3.3 vieme, že pre každé počiatočné  $x_0$  existuje optimálne riadenie a z vety 3.2, že toto riadenie spolu so svojou odozvou konvergujú k bodu  $(0, 0)$  pre  $t \rightarrow \infty$ . Z toho vyplýva, že pre každé  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  existuje  $\psi_0 \in \mathbb{R}^n$  také, že  $(x_t(x_0, \psi_0), \psi_t(x_0, \psi_0)) \rightarrow (0, 0)$  pre  $t \rightarrow \infty$ . A teda  $(x_0, \psi_0) \in E^S$ , čo je ekvivalentné tomu, že  $x_0 \in \Pi_x(E^S)$ , kde  $\Pi_x(x, \psi)$  značí prirodzenú projekciu priestoru  $\mathbb{R}^{2n}$  na  $\mathbb{R}^n$ . Z toho vyplýva, že  $E^S$  má rozmer aspoň  $n$ .

Pretože však matica  $M_1$  je podľa vety 3.1 symplektická a teda jej vlastné hodnoty vystupujú v recipročných pároch, tak  $E^S$  má dimenziu práve  $n$ .

V dôsledku linearít priestoru  $E^S$  potom existuje jediná matica  $L_1$  typu  $n \times n$  taká, že priestor  $E^S$  sa dá vyjadriť nasledujúco:

$$E^S = \{(x, \psi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | \psi = L_1 x\}$$

□

V nasledujúcej vete a jej dôsledku sa pozrieme na vzťahy, ktoré platia pre optimálne riadenie a jeho odozvu.

**Veta 3.5.** *Nech  $k_1 = l_1 = 0$ . Nech je splnený predpoklad Q3. Nech dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná a nech matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna. Potom optimálne riadenie  $u_t$  môžeme vyjadriť jednoznačne ako lineárnu funkciu stavu  $x_t$ .*

*Dôkaz.* Veta je dôsledkom vety 3.4.

Pretože pre  $u_t$  platí vzťah (2.28) pre  $\beta = 1$ :

$$u_t = -R_1^{-1}Q_1x_t - R_1^{-1}B^T\psi_{t+1} \quad (3.12)$$

a pretože z predchádzajúcej vety vieme, že na priestore  $E^S$  môžeme vyjadriť  $\psi_t$  jednoznačne formulou:

$$\psi_t = L_1 x_t \quad (3.13)$$

tak po dosadení (3.13) do vzťahu (3.4) máme:

$$\psi_{t+1} = [-(\mathbf{A}_1^T)^{-1} \mathbf{P}_1 + (\mathbf{A}_1^T)^{-1} L_1] x_t \quad (3.14)$$

Dosadením (3.14) do (3.12), dostaneme:

$$u_t = -[R_1^{-1} Q_1 + R_1^{-1} B^T (\mathbf{A}_1^T)^{-1} (L_1 - \mathbf{P}_1)] x_t \quad (3.15)$$

Označme:

$$Z_1 = -[R_1^{-1} Q_1 + R_1^{-1} B^T (\mathbf{A}_1^T)^{-1} (L_1 - \mathbf{P}_1)] \quad (3.16)$$

Potom máme:

$$u_t = Z_1 x_t \quad (3.17)$$

□

**Dôsledok 3.1.** *Nech  $k_1 = l_1 = 0$ . Nech je splnený predpoklad Q3. Nech dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná a nech matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna. Potom odozvy na optimálne riadenie spĺňajú diferenciálnu rovnicu:*

$$x_{t+1} = (A + BZ_1)x_t \quad (3.18)$$

kde matica  $(A + BZ_1)$  je stabilná.

*Dôkaz.* Pretože stav v nasledujúcej perióde musí spĺňať:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$

tak pre odozvu na optimálne riadenie dostávame vzťah:

$$x_{t+1} = (A + BZ_1)x_t$$

Pretože pre každé  $x_0$  optimálne riadenie a jeho odozva konvergujú k nule, tak matica  $(A + BZ_1)$  musí byť stabilná. □

Označme hodnotovú funkciu pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u)$  ako  $V_1^Q$ , teda:

$$V_1^Q(x_0) = \sup_{\omega \in \pi(x_0)} \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{Q}_1(x_t, u_t) \quad (3.19)$$

kde  $\pi(x_0)$  značí množinu prípustných riadení pre túto úlohu.

**Veta 3.6.** *Nech  $k_1 = l_1 = 0$ . Nech je splnený predpoklad Q3. Nech dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná a nech matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna. Potom hodnotová funkcia  $V_1^Q$  pre úlohu  $(U_1^Q)$  je kvadratická funkcia premennej  $x$ .*

*Dôkaz.* Z predchádzajúceho vieme, že za týchto predpokladov existuje jediné optimálne riadenie a jeho odozva, pre ktoré platia vzťahy (3.17), resp. (3.18):

$$\begin{aligned} u_t &= Z_1 x_t \\ x_{t+1} &= (A + BZ_1)x_t \end{aligned}$$

Zo vzťahu (3.18) pre optimálny stav v nasledujúcej perióde máme:

$$x_t = (A + BZ_1)^t x_0 \quad (3.20)$$

Vezmime si čiastočný súčet radu  $\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{Q}_1(x_t, u_t)$  s optimálnym stavom a riadením:

$$J_N = \sum_{t=0}^N \mathbf{Q}_1(x_t, u_t)$$

Potom:

$$J_N = \sum_{t=0}^N \frac{1}{2} [(x_t^T P_1 x_t + 2x_t^T Q_1^T u_t + u_t^T R_1 u_t)]$$

Po dosadení (3.17):

$$J_N = \sum_{t=0}^N \frac{1}{2} [(x_t^T P_1 x_t + 2x_t^T Q_1^T Z_1 x_t + x_t^T Z_1^T R_1 Z_1 x_t)]$$

Dosaďme ďalej (3.20), dostaneme:

$$\begin{aligned} J_N &= \frac{1}{2} \sum_{t=0}^N [(x_0^T (A^T + Z_1^T B^T)^t P_1 (A + BZ_1)^t x_0 + \\ &\quad + 2x_0^T (A^T + Z_1^T B^T)^t Q_1^T Z_1 (A + BZ_1)^t x_0 + \\ &\quad + (A^T + Z_1^T B^T)^t Z_1^T R_1 Z_1 (A + BZ_1)^t x_0)] \end{aligned}$$

Odtiaľ:

$$J_N = \frac{1}{2} x_0^T \left[ \sum_{t=0}^N (A^T + Z_1^T B^T)^t (P_1 + 2Q_1^T Z_1 + Z_1^T R_1 Z_1) (A + BZ_1)^t \right] x_0$$

Prejdúc k limite pre  $N \rightarrow \infty$  máme:

$$V_1^Q(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T \left[ \sum_{t=0}^{\infty} (A^T + Z_1^T B^T)^t (P_1 + 2Q_1^T Z_1 + Z_1^T R_1 Z_1) (A + BZ_1)^t \right] x_0$$

Označme:

$$W_1 = \sum_{t=0}^{\infty} (A^T + Z_1^T B^T)^t (P_1 + 2Q_1^T Z_1 + Z_1^T R_1 Z_1) (A + BZ_1)^t \quad (3.21)$$

Potom:

$$V_1^Q(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T W_1 x_0 \quad (3.22)$$

□

### 3.2 Účelová funkcia s lineárnymi členmi

V tejto sekcii sa budeme venovať úlohe  $(U_1^Q)$  s kvadratickou účelovou funkciou, v ktorej vystupujú i lineárne členy, teda aspoň jeden z vektorov  $k_1$ ,  $l_1$  je nenulový.

Na začiatok si vo vete 3.7 ukážeme, za akých predpokladov prípustné riadenie a jeho odozva konvergujú k bodu  $(0, 0)$ .

**Veta 3.7.** *Nech aspoň jeden z vektorov  $k_1$ ,  $l_1$  je nenulový. Nech je splnený predpoklad Q3. Nech matica  $I - A$  je regulárna. Nech  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^{\infty}$  je prípustné riadenie a  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^{\infty}$  jeho odozva. Nech rad  $\sum_{t=0}^{\infty} f_1^0(x_t, u_t)$  konverguje. Potom postupnosť  $\{(x_t, u_t)\}_{t=0}^{\infty}$  konverguje k bodu  $(0, 0)$  pre  $t \rightarrow \infty$ .*

*Dôkaz.* Nech  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^{\infty}$  je prípustné riadenie a  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^{\infty}$  jeho odozva. Vieme, že za predpokladu regulárnosti matice  $I - A$  platí vzťah (2.22) pre  $\beta = 1$ :

$$l_1 = -B^T(I - A^T)^{-1}k_1$$

Účelovú funkciu  $f_1^0$  v bode  $(x_t, u_t)$  môžeme potom prepísať takto:

$$f_1^0(x_t, u_t) = k_1^T [x_t - (I - A)^{-1} B u_t] + \mathbf{Q}_1(x_t, u_t)$$

Odtiaľ:

$$f_1^0(x_t, u_t) = k_1^T (I - A)^{-1} [(I - A)x_t - B u_t] + \mathbf{Q}_1(x_t, u_t)$$

Upravíme:

$$f_1^0(x_t, u_t) = k_1^T (I - A)^{-1} (x_t - x_{t+1}) + \mathbf{Q}_1(x_t, u_t)$$

Ak konverguje rad  $\sum_{t=0}^{\infty} f_1^0(x_t, u_t)$ , tak musí platiť:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_1^0(x_t, u_t) = 0$$

Vyšetříme teda rad  $\sum_{t=0}^{\infty} f_1^0(x_t, u_t)$ . Vezmime si čiastočný súčet tohto radu:

$$J_N = \sum_{t=0}^N k_1^T x_t + l_1^T u_t + \mathbf{Q}_1(x_t, u_t)$$

Upravme:

$$\begin{aligned} J_N &= \sum_{t=0}^N k_1^T (I - A)^{-1} [x_t - x_{t+1}] + \sum_{t=0}^N \mathbf{Q}_1(x_t, u_t) \\ &= k_1^T (I - A)^{-1} [x_0 - x_{N+1}] + \sum_{t=0}^N \mathbf{Q}_1(x_t, u_t) \end{aligned}$$

Chceme ukázať, že prípustné riadenie a jeho odozva konvergujú k bodu  $(0, 0)$ . Nech to neplatí. Potom existuje  $\varepsilon > 0$  také, že pre všetky  $T \geq 0$  existuje  $t > T$  také, že  $\|(x_t, u_t)\| \geq \varepsilon$ . Pretože  $\{x_t\}_{t=0}^\infty$  je prípustné a rad  $\sum_{t=0}^\infty f_1^0(x_t, u_t)$  podľa predpokladu konverguje, tak je ohraničené, z čoho vyplýva, že výraz  $k_1^T (I - A)^{-1} [x_0 - x_N]$  je pre každé  $N$  ohraničený. Pretože kvadratická forma  $\mathbf{Q}_1(x, u)$  je záporne definitná, tak pre každé  $T \geq 0$  existuje  $t > T$  a  $\eta$  také, že platí:

$$\mathbf{Q}_1(x_t, u_t) \leq \eta < 0$$

Z čoho vyplýva, že  $J_N$  diverguje, čo je spor s predpokladom.  $\square$

V nasledujúcej vete podáme dôkaz o tom, že pre každé  $x_0$  existuje jediné optimálne riadenie a jeho odozva pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = k_1^T x + l_1^T u + \mathbf{Q}_1(x, u)$ , kde aspoň jeden z vektorov  $k_1, l_1$  je nenulový. Navyše ukážeme, že optimálne riadenie a odozva sú pre túto úlohu a úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u)$  rovnaké.

**Veta 3.8.** *Nech aspoň jeden z vektorov  $k_1, l_1$  je nenulový. Nech je splnený predpoklad Q3. Nech matica  $I - A$  je regulárna. Nech dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná a nech matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna. Potom pre každé  $x_0$  existuje jediné optimálne riadenie a jeho odozva pre úlohu  $(U_1^Q)$  a sú rovnaké ako pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u)$ .*

*Dôkaz.* Nech  $x_0$  je ľubovoľné. Vieme, že za týchto predpokladov existuje jediné optimálne riadenie a jeho odozva pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u)$  vyjadrené vzťahmi (3.17) a (3.18):

$$\begin{aligned} u_t &= Z_1 x_t \\ x_{t+1} &= (A + BZ_1)x_t \end{aligned}$$

Vieme ďalej, že nutné podmienky optimality vyjadrené vzťahmi (2.23), (2.26) a (2.27) pre  $\beta = 1$  sú pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = k_1^T x + l_1^T u + \mathbf{Q}_1(x, u)$  rovnaké ako pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u)$ .

Nech  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^\infty$  je prípustné riadenie a  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^\infty$  jeho odozva pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = k_1^T x + l_1^T u + \mathbf{Q}_1(x, u)$ . Vezmime si čiastočný súčet radu  $\sum_{t=0}^\infty f_1^0(x_t, u_t)$ :

$$J_N = \sum_{t=0}^N f_1^0(x_t, u_t)$$

Z dôkazu predchádzajúcej vety vieme, že platí:

$$J_N = k_1^T (I - A)^{-1} [x_0 - x_{N+1}] + \sum_{t=0}^N \mathbf{Q}_1(x_t, u_t)$$

Vieme, že pre každú prípustnú odozvu, pre ktorú rad  $\sum_{t=0}^{\infty} f_1^0(x_t, u_t)$  konverguje, platí  $x_t \rightarrow 0$  pre  $t \rightarrow \infty$ . Z toho vyplýva, že suprénum dosiahneme len pre tie prípustné riadenia a ich odozvy, ktoré sú optimálne pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0 = \mathbf{Q}_1(x, u)$ . Keďže také riadenie a jeho odozva sú jediné, tak pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0 = k_1^T x + l_1^T u + \mathbf{Q}_1(x, u)$ , existuje jediné optimálne riadenie a jeho odozva a sú rovnaké ako optimálne riadenie a jeho odozva pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u)$ .  $\square$

Označme hodnotovú funkciu pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = k_1^T x + l_1^T u + \mathbf{Q}_1(x, u)$ , ako  $W_1^Q$ , teda:

$$W_1^Q(x_0) = \sup_{\omega \in \pi(x_0)} \sum_{t=0}^{\infty} k_1^T x_t + l_1^T u_t + \mathbf{Q}_1(x_t, u_t) \quad (3.23)$$

kde  $\pi(x_0)$  je množina prípustných riadení pre túto úlohu.

**Veta 3.9.** *Nech aspoň jeden z vektorov  $k_1, l_1$  je nenulový. Nech je splnený predpoklad Q3. Nech matica  $I - A$  je regulárna. Nech dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná a nech matica  $A_1$  je regulárna. Potom hodnotovú funkciu  $W_1^Q$  môžeme vyjadriť nasledujúcim vzťahom:*

$$W_1^Q(x_0) = k_1^T (I - A)^{-1} x_0 + V_1^Q(x_0) \quad (3.24)$$

*Dôkaz.* Nech  $x_0$  je ľubovoľné. Nech  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^{\infty}$  je optimálne riadenie a  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^{\infty}$  jeho odozva. Potom z predchádzajúcej vety vieme, že optimálne riadenie a jeho odozva sú pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = k_1^T x + l_1^T u + \mathbf{Q}_1(x, u)$ , rovnaké ako pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u)$ .

Máme:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_N = k_1^T (I - A)^{-1} x_0 + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^N \mathbf{Q}_1(x_t, u_t)$$

kde  $J_N$  značí čiastočný súčet radu  $\sum_{t=0}^{\infty} k_1^T x_t + l_1^T u_t + \mathbf{Q}_1(x_t, u_t)$ .

Pre optimálne riadenie a jeho odozvu dostávame:

$$W_1^Q(x_0) = k_1^T (I - A)^{-1} x_0 + V_1^Q(x_0)$$

$\square$

Táto veta nám vlastne hovorí , že kým kvadratická hodnotová funkcia pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u)$  je pre každé  $x \in \mathbb{R}^n$  určená formulou:

$$V_1^Q(x) = \frac{1}{2}x^T W_1 x$$

tak kvadratická hodnotová funkcia pre úlohu  $(U_1^Q)$  s účelovou funkciou  $f_1^0(x, u) = k_1^T x + l_1^T u + \mathbf{Q}_1(x, u)$ , sa od nej líši v lineárnom člene a ak si označíme:

$$z_1^T = k_1^T (I - A)^{-1} \quad (3.25)$$

tak sa pre každé  $x \in \mathbb{R}^n$  dá vyjadriť vzťahom:

$$W_1^Q(x) = z_1^T x + \frac{1}{2}x^T W_1 x$$

## Kapitola 4

# Lineárne-kvadratická úloha s diskontom

V tejto kapitole sa budeme venovať úlohám lineárne kvadratického programovania s diskontným faktorom. Ukážeme si v nej, že na dostatočne malom okolí bodu 1 má matica systému nutných podmienok pre  $\beta \neq 1$  spektrum vlastných hodnôt rovnako rozložené ako symplektická matica  $M_1$ . V ďalšom sa potom v dvoch podkapitolách budeme zaoberať lineárne-kvadratickou úlohou s účelovou funkciou bez lineárnych členov a následne lineárne-kvadratickou úlohou, v ktorej vystupuje účelová funkcia s lineárnymi členmi. Cieľom oboch podkapitol bude nájsť predpoklady, za ktorých existujú optimálne riadenie a jeho odozva, ukázať, kedy sú jediné a k čomu konvergujú a naformulovať pre ne vzťahy, ktorými sa riadia.

V ďalšom pre celú kapitolu predpokladajme, že sú splnené predpoklady Q1 a Q2. Nech  $\beta \in O$ . Uvažujme úlohu  $(U_\beta^Q)$ . Teda úlohu:

$$\begin{aligned} \sup_{\{u_t\}_{t=0}^\infty} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} f_\beta^0(x_t, u_t) \\ & x_{t+1} = F(x_t, u_t) \\ & x_t \in \mathbb{R}^n \\ & u_t \in \mathbb{R}^m \\ & x_0 - \text{dané} \end{aligned}$$

Označme si:

$$\mathbf{Q}_\beta(x, u) = \frac{1}{2}(x^T P_\beta x + x^T Q_\beta^T u + u^T Q_\beta x + u^T R_\beta u) \quad (4.1)$$

Potom môžeme funkciu  $f_\beta^0$  zapísať nasledujúcim spôsobom:

$$f_\beta^0(x, u) = k_\beta^T x + l_\beta^T u + \mathbf{Q}_\beta(x, u) \quad (4.2)$$

Z druhej kapitoly vieme, že optimálne riadenie pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  (ak existuje) musí vyhovovať systému rovníc (2.31), (2.32):

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \mathbf{A}_\beta x_t + \beta \mathbf{B}_\beta \psi_{t+1} \\ \psi_t &= \mathbf{P}_\beta x_t + \beta \mathbf{A}_\beta^T \psi_{t+1} \end{aligned}$$

Predpokladajme, že matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna. Vieme, že matice  $\mathbf{A}_\beta$  spojite závisia od parametra  $\beta$  a teda existuje okolie bodu 1, označme ho  $O'$ , také, že pre  $\beta$  z tohto okolia je matica  $\mathbf{A}_\beta$  tiež regulárna. Potom pre  $\beta$  z tohto okolia vyjadríme premennú  $\psi_{t+1}$  z druhej rovnice tohto systému:

$$\psi_{t+1} = -\frac{1}{\beta}(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1}\mathbf{P}_\beta x_t + \frac{1}{\beta}(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1}\psi_t$$

Dosadením do prvej rovnice dostávame:

$$x_{t+1} = [\mathbf{A}_\beta - \mathbf{B}_\beta(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1}\mathbf{P}_\beta]x_t + \mathbf{B}_\beta(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1}\psi_t$$

Celkovo máme:

$$x_{t+1} = [\mathbf{A}_\beta - \mathbf{B}_\beta(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1}\mathbf{P}_\beta]x_t + \mathbf{B}_\beta(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1}\psi_t \quad (4.3)$$

$$\psi_{t+1} = -\frac{1}{\beta}(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1}\mathbf{P}_\beta x_t + \frac{1}{\beta}(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1}\psi_t \quad (4.4)$$

Teda sme odvodili systém nutných podmienok pre optimálne riešenie úlohy  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = k_\beta^T x + l_\beta^T u + \mathbf{Q}_\beta(x, u)$ .

Označme maticu sústavy rovníc (4.3), (4.4) ako  $M_\beta$ , tj.:

$$M_\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_\beta - \mathbf{B}_\beta(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1}\mathbf{P}_\beta & \mathbf{B}_\beta(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \\ -\frac{1}{\beta}(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1}\mathbf{P}_\beta & \frac{1}{\beta}(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \end{pmatrix}$$

O matici  $M_1$  vieme, že je sympletická, z čoho vyplýva, že je regulárna. Vieme o nej tiež, že jej vlastné hodnoty ležia mimo jednotkovej kružnice, presnejšie polovica (teda  $n$ ) ich leží vnútri a druhá zvonka jednotkovej kružnice. Keďže matice  $M_\beta$  spojite závisia od  $\beta$ , tak pre dostatočne malé okolie bodu 1 je matica  $M_\beta$  pre  $\beta$  z tohto okolia taktiež regulárna a jej vlastné hodnoty ležia rovnako mimo jednotkovej kružnice, pričom polovica ( $n$ ) ich leží zvnútra a druhá polovica zvonka jednotkovej kružnice a navyše  $n$ -rozmerný invariantný priestor:

$$E_\beta^S = \{(x, \psi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | \psi = L_\beta x\}$$

kde matica  $L_\beta$  je typu  $n \times n$ , zodpovedajúci vlastným hodnotám matice  $M_\beta$  ležiacim vnútri jednotkovej kružnice sa rovnako ako pre  $\beta = 1$  projektuje na priestor  $\psi = 0$ . Označme toto okolie ako  $O''$ .

Nech  $\rho(M_\beta)$  označuje pre každé  $\beta \in O''$  maximálnu hodnotu z absolútnych hodnôt vlastných hodnôt matice  $M_\beta$  ležiacich vnútri jednotkovej kružnice. Nech  $\bar{\lambda}_\beta = \rho(M_\beta) + \varepsilon$ , kde  $\varepsilon$  je ľubovoľná dostatočne malá kladná konštanta, taká, že platí:

$$\frac{1}{\bar{\lambda}_\beta} > \frac{1}{\beta} > 1 \quad (4.5)$$

Množinu tých  $\beta \in O''$ , pre ktoré existuje  $\varepsilon$  také, že platí (4.5) označme  $O'''$ .

Ďalej označujme prienik  $O'$ ,  $O'''$  a  $O$  ako  $\hat{O}$ , potom všetky  $\beta$  z tohto okolia bodu 1 budú pre nás zaujímavé pre ďalšie odvodzovanie a sústredíme na ne našu pozornosť.

Poznamenajme ešte, že pre  $\beta \in \hat{O}$  je za predpokladu Q3 kvadratická forma  $\mathbf{Q}_\beta(x, u)$  záporne definitná.

## 4.1 Účelová funkcia bez lineárnych členov

Táto podkapitola sa venuje úlohám typu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $\mathbf{Q}_\beta(x, u)$ . Teda úlohám, v ktorých sú  $k_\beta$ ,  $l_\beta$  nulové. Na úvod si v nej dokážeme, že za predpokladu stabilizovateľnosti dvojice matíc  $(A, B)$  a predpokladu Q3 existuje pre túto úlohu pre každé  $x_0$  optimálne riadenie.

**Veta 4.1.** *Nech  $\beta \in \hat{O}$  je také, že  $\beta \neq 1$ . Nech  $k_\beta = l_\beta = 0$ . Nech je splnený predpoklad Q3. Nech dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná. Potom pre každé  $x_0$  existuje pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  optimálne riadenie.*

*Dôkaz.* Dôkaz je takmer identický s dôkazom pre vetu 3.3 z predchádzajúcej kapitoly.

Nech  $x_0$  je ľubovoľné. Nech  $\beta \in \hat{O}$  je ľubovoľné, také, že  $\beta \neq 1$ . Nech  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^\infty$  je prípustné riadenie a  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^\infty$  jeho odozva. Označme množinu prípustných riadení z počiatku  $x_0$  ako  $\pi(x_0)$ . Označme ďalej:

$$\sigma_\beta = \sup_{\omega \in \pi(x_0)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t)$$

Stabilizovateľnosť dvojice matíc  $(A, B)$  nám zaručuje, že  $\sigma_\beta$  je konečné číslo. Ďalej z definície suprema existuje taká postupnosť prípustných riadení spolu s ich odozvami (teda postupnosť postupností  $\{(x_t^k, u_t^k)\}_{t=0}^\infty\}_{k=0}^\infty$ , kde  $x_0^k = x_0$  a  $x_{t+1}^k = F(x_t^k, u_t^k)$ ), že platí:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mathbf{Q}_\beta(x_t^k, u_t^k) \nearrow \sigma_\beta$$

pre  $k \rightarrow \infty$ .

Pre túto postupnosť fixujme  $t$ , potom postupnosť  $\{(x_t^k, u_t^k)\}_{k=0}^\infty$  je ohraničená a teda existuje z nej vybraná konvergentná podpostupnosť. Označme si pre každé  $t$  limitu konvergentnej podpostupnosti ako  $(x_t^*, u_t^*)$ .

Skonstruujme konvergentnú postupnosť postupností rovnako ako v dôkaze vety 3.3, dostaneme  $\{\{(x_t^{k_j}, u_t^{k_j})\}_{t=0}^\infty\}_{j=0}^\infty$  vybranú podpostupnosť z postupnosti  $\{\{(x_t^k, u_t^k)\}_{t=0}^\infty\}_{k=0}^\infty$ , ktorá konverguje k postupnosti  $\{(x_t^*, u_t^*)\}_{t=0}^\infty$  bodovo, pričom platí, že  $x_0^* = x_0$  a vďaka spojitosti funkcie  $F$  tiež:  $x_{t+1}^* = F(x_t^*, u_t^*)$ .

Označme si:

$$S_n^* = \sum_{t=0}^n \beta^t \mathbf{Q}_\beta(x_t^*, u_t^*)$$

a limitu (pokiaľ existuje) ako:

$$S_\infty^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^*$$

Preznačme spätne indexy  $k_j$  na  $k$ , potom  $S_n^k$  značí:

$$S_n^k = \sum_{t=0}^n \beta^t \mathbf{Q}_\beta(x_t^k, u_t^k)$$

a  $S_\infty^k$ :

$$S_\infty^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^k$$

Máme:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_\infty^k = \sigma_\beta$$

Pretože  $\mathbf{Q}_\beta(x, u)$  je záporne definitná kvadratická forma a  $\beta > 0$ , tak pre každé  $k$  je postupnosť  $\{S_n^k\}_{n=0}^\infty$  nerastúca, pričom platí, že  $S_n^k \leq 0$  pre každé  $n$ . Rovnako tak postupnosť  $\{S_n^*\}_{n=0}^\infty$  je nerastúca, pričom platí, že  $S_n^* \leq 0$  pre každé  $n$ . Ukážeme, že pre každé  $n$  platí:  $S_n^* \geq \sigma_\beta$ .

Nech to neplatí, potom existuje také  $n_0$  a  $\varepsilon > 0$ , že pre každé  $n \geq n_0$ :

$$S_n^* < \sigma_\beta - \varepsilon$$

Z toho ale vyplýva, že existuje také  $k_0$ , že pre každé  $k > k_0$  platí:

$$S_{n_0}^k < \sigma_\beta - \frac{\varepsilon}{2}$$

pretože však  $\{S_n^k\}_{n=0}^\infty$  je pre každé  $k$  nerastúca postupnosť, tak máme pre každé  $k > k_0$  a pre každé  $n \geq n_0$ :

$$S_n^k < \sigma_\beta - \frac{\varepsilon}{2}$$

Z toho ďalej pre každé  $k > k_0$ :

$$S_\infty^k < \sigma_\beta - \frac{\varepsilon}{2}$$

čo je spor s predpokladom, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_\infty^k = \sigma_\beta$ .

Takže máme nerastúcu postupnosť  $S_n^*$ , ktorá je zdola ohraničená hodnotou  $\sigma_\beta$  a teda je konvergentná a rovnako aj  $S_\infty^* \geq \sigma_\beta$ . Zároveň máme  $S_\infty^* \leq \sigma_\beta$ , pretože  $\sigma_\beta$  je suprénum. Z toho vyplýva, že  $S_\infty^* = \sigma$ .  $\square$

**Poznámka 4.1.** *Poznamenajme, že uvedená veta platí aj pre  $\beta$  z okolia  $O$ , čo je (v zmysle inklúzie) širšie okolie ako  $\hat{O}$ .*

V nasledujúcej vete si ukážeme, že existuje jediné optimálne riešenie systému rovníc (4.3), (4.4), ktoré konverguje k bodu  $(0, 0)$  pre  $t \rightarrow \infty$ .

**Veta 4.2.** *Nech  $\beta \in \hat{O}$  je také, že  $\beta \neq 1$ . Nech  $k_\beta = l_\beta = 0$ . Nech je splnený predpoklad Q3. Nech matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna. Nech dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná. Potom existuje jediné optimálne riešenie systému rovníc (4.3), (4.4), ktoré konverguje k bodu  $(0, 0)$  pre  $t \rightarrow \infty$ .*

*Dôkaz.* Zvoľme ľubovoľné  $\beta \in \hat{O}$  také, že  $\beta \neq 1$ . V predchádzajúcej vete sme si ukázali, že pre každé takéto  $\beta$  a pre každé  $x_0$  existuje optimálne riadenie a jeho odozva pre úlohu  $(U_\beta^Q)$ . Keďže postupnosť odoziev je optimálna, tak musí vyhovovať systému rovníc (4.3), (4.4) s maticou  $M_\beta$ . Tá má však  $n$  vlastných hodnôt ležiacich vnútri jednotkovej kružnice a  $n$  vlastných hodnôt ležiacich zvonka jednotkovej kružnice, z čoho vyplýva, že riešenie tohto systému musí konvergovať k bodu  $(0, 0)$ . V opačnom prípade by existovala konštanta  $c > 0$  taká, že pre každé  $t$  by platilo:

$$\|(x_t, \psi_t)\| \geq \frac{c}{\lambda_\beta^t} \|(x_0, \psi_0)\|$$

Pretože na  $\hat{O}$  platí (4.5), tak by bol rad  $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t)$  divergentný, čo je spor.

Zároveň dostávame, že pre priestor  $E_\beta^S$  definovaný v predošlom platí:

$$E_\beta^S = \{(x_0, \psi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | (x_t(x_0, \psi_0), \psi_t(x_0, \psi_0)) \rightarrow (0, 0) \text{ pre } t \rightarrow \infty\}$$

kde  $(x_t(x_0, \psi_0), \psi_t(x_0, \psi_0))$  je riešenie systému rovníc (4.3), (4.4) vychádzajúce z bodu  $(x_0, \psi_0)$ .

Takže pre každé  $x_t$  je  $\psi_t$  určené jednoznačne vzťahom  $\psi_t = L_\beta x_t$  a teda existuje jediné optimálne riešenie systému rovníc (4.3), (4.4), ktoré konverguje k bodu  $(0, 0)$ .  $\square$

V ďalšom odvodíme vzťahy pre optimálne riadenie a jeho odozvu.

**Veta 4.3.** *Nech  $\beta \in \widehat{O}$  je také, že  $\beta \neq 1$ . Nech  $k_\beta = l_\beta = 0$ . Nech je splnený predpoklad Q3. Nech matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna. Nech dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná. Potom optimálne riadenie  $u_t$  môžeme vyjadriť jednoznačne ako lineárnu funkciu stavu  $x_t$ .*

*Dôkaz.* Veta vyplýva z predchádzajúceho tvrdenia.

Pretože pre  $u_t$  platí vzťah (2.28):

$$u_t = -R_\beta^{-1}Q_\beta x_t - \beta R_\beta^{-1}B^T \psi_{t+1} \quad (4.6)$$

a pretože z predchádzajúcej vety vieme, že na priestore  $E_\beta^S$  môžeme vyjadriť  $\psi_t$  jednoznačne formulou:

$$\psi_t = L_\beta x_t \quad (4.7)$$

tak po dosadení (4.7) do vzťahu (4.4) máme:

$$\psi_{t+1} = \frac{1}{\beta} [-(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \mathbf{P}_\beta + (\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} L_\beta] x_t \quad (4.8)$$

Dosadením (4.8) do (4.6), dostaneme:

$$u_t = -[R_\beta^{-1}Q_\beta + R_\beta^{-1}B^T(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1}(L_\beta - \mathbf{P}_\beta)]x_t \quad (4.9)$$

Označme:

$$Z_\beta = -[R_\beta^{-1}Q_\beta + R_\beta^{-1}B^T(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1}(L_\beta - \mathbf{P}_\beta)] \quad (4.10)$$

Potom máme:

$$u_t = Z_\beta x_t \quad (4.11)$$

□

**Dôsledok 4.1.** *Nech  $\beta \in \widehat{O}$  je také, že  $\beta \neq 1$ . Nech  $k_\beta = l_\beta = 0$ . Nech je splnený predpoklad Q3. Nech matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna. Nech dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná. Potom odozvy na optimálne riadenie spĺňajú diferenčnú rovnicu:*

$$x_{t+1} = (A + BZ_\beta)x_t \quad (4.12)$$

kde  $(A + BZ_\beta)$  je stabilná matica.

*Dôkaz.* Pretože stav v nasledujúcej perióde musí spĺňať:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$

tak pre odozvu na optimálne riadenie dostávame vzťah:

$$x_{t+1} = (A + BZ_\beta)x_t$$

Pretože pre každé  $x_0$  optimálne riadenie a jeho odozva konvergujú k nule, tak matica  $(A + BZ_\beta)$  musí byť stabilná. □

Označme hodnotovú funkciu pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = \mathbf{Q}_\beta(x, u)$  ako  $V_\beta^Q$ , teda:

$$V_\beta^Q(x_0) = \sup_{\omega \in \pi(x_0)} \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t) \quad (4.13)$$

kde  $\pi(x_0)$  značí množinu prípustných riadení pre túto úlohu. Opäť môžeme ukázať, že hodnotová funkcia  $V_\beta^Q$  je kvadratická.

**Veta 4.4.** *Nech  $\beta \in \widehat{O}$  je také, že  $\beta \neq 1$ . Nech  $k_\beta = l_\beta = 0$ . Nech je splnený predpoklad Q3. Nech matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna. Nech dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná. Potom hodnotová funkcia  $V_\beta^Q$  pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  je kvadratická funkcia premennej  $x$ .*

*Dôkaz.* Z predchádzajúceho vieme, že za týchto predpokladov existuje jediné optimálne riadenie a jeho odozva, pre ktoré platia vzťahy (4.11), resp. (4.12):

$$\begin{aligned} u_t &= Z_\beta x_t \\ x_{t+1} &= (A + BZ_\beta)x_t \end{aligned}$$

Zo vzťahu (4.12) pre optimálny stav v nasledujúcej perióde máme:

$$x_t = (A + BZ_\beta)^t x_0 \quad (4.14)$$

Vezmime si čiastočný súčet radu  $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t)$  s optimálnym stavom a riadením:

$$J_N = \sum_{t=0}^N \beta^t \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t)$$

Potom:

$$J_N = \sum_{t=0}^N \frac{1}{2} \beta^t [(x_t^T P_\beta x_t + 2x_t^T Q_\beta^T u_t + u_t^T R_\beta u_t)]$$

Po dosadení (4.11):

$$J_N = \sum_{t=0}^N \frac{1}{2} \beta^t [(x_t^T P_\beta x_t + 2x_t^T Q_\beta^T Z_\beta x_t + x_t^T Z_\beta^T R_\beta Z_\beta x_t)]$$

Dosaďme ďalej (4.14), dostaneme:

$$\begin{aligned} J_N &= \frac{1}{2} \sum_{t=0}^N \beta^t [(x_0^T (A^T + Z_\beta^T B^T)^t P_\beta (A + BZ_\beta)^t x_0 + \\ &\quad + 2x_0^T (A^T + Z_\beta^T B^T)^t Q_\beta^T Z_\beta (A + BZ_\beta)^t x_0 + \\ &\quad + (A^T + Z_\beta^T B^T)^t Z_\beta^T R_\beta Z_\beta (A + BZ_\beta)^t x_0)] \end{aligned}$$

Odtiaľ:

$$J_N = \frac{1}{2} x_0^T \left[ \sum_{t=0}^N \beta^t (A^T + Z_\beta^T B^T)^t (P_\beta + 2Q_\beta^T Z_\beta + Z_\beta^T R_\beta Z_\beta) (A + BZ_\beta)^t \right] x_0$$

prejdúc k limite pre  $N \rightarrow \infty$  máme:

$$V_\beta^Q(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (A^T + Z_\beta^T B^T)^t (P_\beta + 2Q_\beta^T Z_\beta + Z_\beta^T R_\beta Z_\beta) (A + BZ_\beta)^t \right] x_0$$

Označme:

$$W_\beta = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (A^T + Z_\beta^T B^T)^t (P_\beta + 2Q_\beta^T Z_\beta + Z_\beta^T R_\beta Z_\beta) (A + BZ_\beta)^t \quad (4.15)$$

Potom:

$$V_\beta^Q(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T W_\beta x_0 \quad (4.16)$$

□

## 4.2 Účelová funkcia s lineárnymi členmi

V tejto sekcii sa budeme venovať úlohe  $(U_\beta^Q)$  s kvadratickou účelovou funkciou, v ktorej vystupujú lineárne členy. V rovnako nazvanej sekcii v predchádzajúcej kapitole sme pri dokazovaní existencie a jednoznačnosti využívali predpoklad regulárnosti matice  $I - A$ . Tento predpoklad bude potrebný aj tu, pričom ho rozšírime i na matice  $I - \beta A$  pre vhodné  $\beta$ .

Platí, že ak matica  $I - A$  je regulárna potom existuje okolie bodu 1 také, že pre  $\beta$  z tohto okolia je matica  $I - \beta A$  regulárna. Označme prienik tohto okolia s  $\hat{O}$  ako  $\underline{Q}$ .

V prvej vete tejto časti pre  $\beta \in \underline{Q}$  dokážeme, že pre každé  $x_0$  existuje jediné optimálne riadenie a jeho odozva pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = k_\beta^T x + l_\beta^T u + \mathbf{Q}_\beta(x, u)$ . Navyše ukážeme, že optimálne riadenie a odozva sú pre túto úlohu a pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = \mathbf{Q}_\beta(x, u)$  rovnaké.

**Veta 4.5.** *Nech  $\beta \in \underline{Q}$ . Nech  $\beta \in \underline{Q}$  je také, že  $\beta \neq 1$ . Nech aspoň jeden z vektorov  $k_\beta$ ,  $l_\beta$  je nenulový. Nech je splnený predpoklad Q3. Nech matica  $I - A$  je regulárna. Nech dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná a nech matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna. Potom pre každé  $x_0$  existuje jediné optimálne riadenie a jeho odozva pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  a sú rovnaké ako pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = \mathbf{Q}_\beta(x, u)$ .*

*Dôkaz.* Nech  $x_0$  je ľubovoľné. Vieme, že za týchto predpokladov existuje jediné optimálne riadenie a jeho odozva pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = \mathbf{Q}_\beta(x, u)$  vyjadrené

vzťahmi (4.11) a (4.12):

$$\begin{aligned} u_t &= Z_\beta x_t \\ x_{t+1} &= (A + BZ_\beta)x_t \end{aligned}$$

Ďalej vieme, že nutné podmienky optimality vyjadrené vzťahmi (2.23), (2.26) a (2.27) sú pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = k_\beta^T x + l_\beta^T u + \mathbf{Q}_\beta(x, u)$  rovnaké ako pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = \mathbf{Q}_\beta(x, u)$ . Navyše za predpokladu  $\beta \in \underline{Q}$  je matica  $I - \beta A$  regulárna a teda platí vzťah (2.22) medzi  $k_\beta$  a  $l_\beta$ :

$$l_\beta = -\beta B^T (I - \beta A^T)^{-1} k_\beta$$

Nech  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^\infty$  je prípustné riadenie a  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^\infty$  jeho odozva pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = k_\beta^T x + l_\beta^T u + \mathbf{Q}_\beta(x, u)$ . Vezmime si čiastočný súčet radu  $\sum_{t=0}^\infty \beta^t [k_\beta^T x_t + l_\beta^T u_t + \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t)]$ :

$$J_N = \sum_{t=0}^N \beta^t [k_\beta^T x_t + l_\beta^T u_t + \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t)]$$

Dosaďme za  $l_\beta$  vzťah (2.22), potom máme:

$$\begin{aligned} J_N &= \sum_{t=0}^N \beta^t k_\beta^T [x_t - \beta(I - \beta A)^{-1} B u_t] + \sum_{t=0}^N \beta^t \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t) \\ J_N &= \sum_{t=0}^N \beta^t k_\beta^T (I - \beta A)^{-1} [(I - \beta A)x_t - \beta B u_t] + \sum_{t=0}^N \beta^t \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t) \\ J_N &= \sum_{t=0}^N \beta^t k_\beta^T (I - \beta A)^{-1} [x_t - \beta x_{t+1}] + \sum_{t=0}^N \beta^t \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t) \\ &= k_\beta^T (I - \beta A)^{-1} [x_0 - \beta^{N+1} x_{N+1}] + \sum_{t=0}^N \beta^t \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t) \end{aligned}$$

Aby mohla byť postupnosť  $\{x_t\}_{t=0}^\infty$  prípustnou odozvou, pre ktorú rad  $\sum_{t=0}^\infty \beta^t f_\beta^0(x_t, u_t)$  konverguje, musí byť ohraničená a teda  $\beta^N x_N \rightarrow 0$  pre  $N \rightarrow \infty$ . Z toho vyplýva, že suprénum dosiahneme len pre tie prípustné riadenia a ich odozvy, ktoré sú optimálne pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = \mathbf{Q}_\beta(x, u)$ , keďže také riadenie a jeho odozva sú jediné, tak pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = k_\beta^T x + l_\beta^T u + \mathbf{Q}_\beta(x, u)$  existuje jediné optimálne riadenie a jeho odozva a sú rovnaké ako optimálne riadenie a jeho odozva pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = \mathbf{Q}_\beta(x, u)$ .  $\square$

Označme hodnotovú funkciu pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = k_\beta^T x + l_\beta^T u + \mathbf{Q}_\beta(x, u)$  ako  $W_\beta^Q$ , teda:

$$W_\beta^Q(x_0) = \sup_{\omega \in \pi(x_0)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [k_\beta^T x_t + l_\beta^T u_t + \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t)] \quad (4.17)$$

kde  $\pi(x_0)$  je množina prípustných riadení pre túto úlohu.

**Veta 4.6.** *Nech  $\beta \in \underline{Q}$  je také, že  $\beta \neq 1$ . Nech aspoň jeden z vektorov  $k_\beta, l_\beta$  je nenulový. Nech je splnený predpoklad Q3. Nech matica  $I - A$  je regulárna. Nech dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná a nech matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna. Potom hodnotovú funkciu  $W_\beta^Q$  môžeme vyjadriť nasledujúcim vzťahom:*

$$W_\beta^Q(x_0) = k_\beta^T (I - \beta A)^{-1} x_0 + V_\beta^Q(x_0) \quad (4.18)$$

*Dôkaz.* Nech  $x_0$  je ľubovoľné, také, že  $\beta \neq 1$ . Nech  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^\infty$  je optimálne riadenie a  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^\infty$  jeho odozva. Potom z predchádzajúcej vety vieme, že optimálne riadenie a jeho odozva sú pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = k_\beta^T x + l_\beta^T u + \mathbf{Q}_\beta(x, u)$  rovnaké ako pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = \mathbf{Q}_\beta(x, u)$ .

Máme:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_N = k_\beta^T (I - \beta A)^{-1} x_0 + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^N \beta^t \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t)$$

kde  $J_N$  značí čiastočný súčet radu  $\sum_{t=0}^\infty \beta^t [k_\beta^T x_t + l_\beta^T u_t + \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t)]$ .

Pre optimálne riadenie a jeho odozvu dostávame:

$$W_\beta^Q(x_0) = k_\beta^T (I - \beta A)^{-1} x_0 + V_\beta^Q(x_0)$$

□

Táto veta nám vlastne hovorí, že kým kvadratická hodnotová funkcia pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = \mathbf{Q}_\beta(x, u)$  je pre každé  $x \in \mathbb{R}^n$  určená formulou:

$$V_\beta^Q(x) = \frac{1}{2} x^T W_\beta x$$

tak kvadratická hodnotová funkcia pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = k_\beta^T x + l_\beta^T u + \mathbf{Q}_\beta(x, u)$  sa od nej líši v lineárnom člene a ak si označíme:

$$z_\beta^T = k_\beta^T (I - \beta A)^{-1} \quad (4.19)$$

tak sa pre každé  $x \in \mathbb{R}^n$  dá vyjadriť vzťahom:

$$W_\beta^Q(x) = z_\beta^T x + \frac{1}{2} x^T W_\beta x$$

## Kapitola 5

# Extremálne riešenia pre pôvodnú úlohu

V tejto kapitole sa budeme zaoberať extrémnymi riešeniami pre úlohu  $(U_\beta)$ , tj. riešeniami, ktoré vyhovujú nutným podmienkam optimality, ale nemusia byť optimálnymi. Budeme uvažovať  $\beta$  ľubovoľné z okolia  $\underline{Q}$  vrátane bodu 1.

V ďalšom pre celú kapitolu predpokladajme, že sú splnené predpoklady Q1 a Q2. Nech  $\beta \in \underline{Q}$ . Uvažujme teda systém úloh  $(U_\beta)$  pre  $\beta$  z tohto okolia:

$$\begin{aligned} \sup_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mathbf{f}_\beta(x_t, u_t) \\ & x_{t+1} = F(x_t, u_t) \\ & x_t \in \mathbb{R}^n \\ & u_t \in \mathbb{R}^m \\ & x_0 - \text{dané} \end{aligned}$$

kde ako v predošlom  $\mathbf{f}_\beta$  je  $C^r$  funkcia, pričom  $r \geq 3$ .

V kapitole 2 sme si ukázali, že pre  $\beta \in O$  a teda aj pre  $\beta \in \underline{Q}$  existuje také okolie bodu  $(0, 0, 0)$ , že od systému nutných podmienok (2.34) môžeme prejsť k zredukovanému systému (2.37), (2.38):

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \mathbf{A}_\beta x_t + \beta \mathbf{B}_\beta \psi_{t+1} + \text{č. v. r.} \\ \psi_t &= \mathbf{P}_\beta x_t + \beta \mathbf{A}_\beta^T \psi_{t+1} + \text{č. v. r.} \end{aligned}$$

Riešenia, ktoré vyhovujú systému podmienok (2.34), resp. systému (2.37), (2.38) budeme nazývať extrémnymi. Pretože uvedené systémy sú len nutnými podmienkami optimality, ne-

znamená to, že extrémálne riešenia sú aj optimálnymi. Za predpokladu, že optimálne riešenie existuje, tak extrémálne riešenie je aj optimálnym.

Predpokladajme, že matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna, potom aj matice  $\mathbf{A}_\beta$  sú pre  $\beta \in \underline{Q}$  regulárne. Platí nasledujúca veta.

**Veta 5.1.** *Nech  $\beta$  je z  $\underline{Q}$ . Nech matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna. Uvažujme rovnicu (2.38) zo systému nutných podmienok optimality:*

$$\psi_t = \mathbf{P}_\beta x_t + \beta \mathbf{A}_\beta^T \psi_{t+1} + \text{č. v. r.} \quad (5.1)$$

Potom existujú také  $\varepsilon_1 > 0$  a  $\varepsilon_2 > 0$ , že pre každé  $\beta \in \underline{Q}$  rovnica (5.1) určuje jediné  $C^{r-1}$  zobrazenie  $\psi_{t+1} : B[(0, 0), \varepsilon_1] \rightarrow B[0, \varepsilon_2]$  také, že  $\psi_{t+1}(0, 0) = 0$ , pričom platí:

$$\psi_{t+1}(x_t, \psi_t) = -\frac{1}{\beta}(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \mathbf{P}_\beta x_t + \frac{1}{\beta}(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \psi_t + \text{č. v. r.} \quad (5.2)$$

*Dôkaz.* Nech  $\beta \in \underline{Q}$  je ľubovoľné. Označme:

$$\Phi(x_t, \psi_t, \psi_{t+1}) = -\psi_t + \mathbf{P}_\beta x_t + \beta \mathbf{A}_\beta^T \psi_{t+1} + \text{č. v. r.}$$

Potom platí:

$$\Phi(0, 0, 0) = 0$$

Funkcia  $\Phi(x_t, \psi_t, \psi_{t+1})$  je spojitá aj spojite diferencovateľná. Ďalej platí:

$$\frac{\partial \Phi(0, 0, 0)}{\partial \psi_{t+1}} = \beta \mathbf{A}_\beta^T$$

čo je podľa predpokladov regulárna matica. Takže sú splnené všetky podmienky vety o implicitnej funkcii, čo dokazuje tvrdenie.  $\square$

Z predchádzajúcej vety vyplýva, že lokálne v okolí bodu  $(0, 0, 0)$  môžeme  $\psi_{t+1}$  vyjadriť jednoznačne ako spojitú funkciu premenných  $(x_t, \psi_t)$ . Dosaďme toto vyjadrenie (5.2) do rovnice (2.37), dostaneme:

$$x_{t+1} = [\mathbf{A}_\beta - \mathbf{B}_\beta(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \mathbf{P}_\beta] x_t + \mathbf{B}_\beta(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \psi_t + \text{č. v. r.} \quad (5.3)$$

$$\psi_{t+1} = -\frac{1}{\beta}(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \mathbf{P}_\beta x_t + \frac{1}{\beta}(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \psi_t + \text{č. v. r.} \quad (5.4)$$

Označme  $y_t = (x_t, \psi_t)$  a funkciu na pravej strane predchádzajúceho systému ako  $G_\beta$ , potom môžeme písať:

$$y_{t+1} = G_\beta(y_t) \quad (5.5)$$

Alebo tiež:

$$y_{t+1} = M_\beta y_t + \text{č. v. r.} \quad (5.6)$$

Predpokladajme, že sú splnené nasledujúce predpoklady: predpoklad Q3, matica  $I - A$  je regulárna, matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna a dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná. Potom pre každé  $\beta$  z  $\underline{Q}$  o matici  $M_\beta$  platí, že je regulárna a teda invertovateľná a jej vlastné hodnoty ležia rovnako ako pri matici  $M_1$  mimo jednotkovej kružnice, pričom polovica ( $n$ ) ich leží zvnútra a druhá polovica zvonka jednotkovej kružnice. Navyše  $n$ -rozmerný invariantný priestor  $E_\beta^S$  zodpovedajúci vlastným hodnotám matice  $M_\beta$  ležiacim vnútri jednotkovej kružnice sa rovnako ako pre  $\beta = 1$  projektuje na priestor  $\psi = 0$ .

Označme si:

$$W_\beta^S(0) = \{y \in \Omega | G^t(y) \rightarrow 0 \text{ pre } t \rightarrow \infty \text{ a } G^t(y) \in \Omega \text{ pre každé } t \geq 0\} \quad (5.7)$$

kde  $G^t(y)$  je zložené zobrazenie pozostávajúce z  $t$ -krát aplikovaného zobrazenia  $G$  na  $y$  a  $\Omega$  je okolie bodu 0. V tomto prípade predstavuje bod 0 nulový vektor z priestoru  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Podľa vety 1.4.2 z [15] pre  $\Omega$  dostatočne malé  $W_\beta^S(0)$  je  $C^{r-1}$  varietou, ktorá sa nazýva lokálna stabilná varieta bodu 0 a platí, že dotykový priestor k  $W_\beta^S(0)$  v bode 0 je  $E_\beta^S$  a trajektórie všetkých bodov neležiacich na  $W_\beta^S(0)$  opustia  $\Omega$ . Ďalej platí nasledujúce tvrdenie:

**Veta 5.2.** *Nech  $\beta$  je z  $\underline{Q}$ . Nech sú ďalej splnené nasledujúce predpoklady: predpoklad Q3, matica  $I - A$  je regulárna, matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna a dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná. Potom  $W_\beta^S(0)$  môžeme vyjadriť nasledujúcim spôsobom:*

$$W_\beta^S(0) = \{y = (x, \psi) \in \Omega | \psi = h_\beta(x)\} \quad (5.8)$$

kde  $h_\beta(x) = L_\beta x + \text{č. v. r.}$ .

*Dôkaz.* Nech  $\beta \in \underline{Q}$  je ľubovoľné. Vieme, že priestor  $E_\beta^S$  môžeme vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

$$E_\beta^S = \{y = (x, \psi) | \psi = L_\beta x\}$$

Urobme transformáciu premenných  $(x_t, \psi_t)$ :

$$\begin{pmatrix} x_t \\ \psi_t \end{pmatrix} = C_\beta \begin{pmatrix} \zeta_t \\ \xi_t \end{pmatrix}$$

takú, že platí:

$$\begin{pmatrix} \zeta_{t+1} \\ \xi_{t+1} \end{pmatrix} = C_\beta^{-1} M_\beta C_\beta \begin{pmatrix} \zeta_t \\ \xi_t \end{pmatrix} = \Lambda_\beta \begin{pmatrix} \zeta_t \\ \xi_t \end{pmatrix}$$

kde pre maticu  $\Lambda_\beta$  platí:

$$\Lambda_\beta = \begin{pmatrix} M_\beta^S & 0 \\ 0 & M_\beta^U \end{pmatrix}$$

a matice  $M_\beta^S, M_\beta^U$  sú Jordanove kánonické formy prislúchajúce k vlastným hodnotám matice  $M_\beta$  s  $|\lambda| < 1$ , resp.  $|\lambda| > 1$ .

Ak  $\psi = L_\beta x$ , tak dostaneme:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ L_\beta x_t \end{pmatrix} = C_\beta \begin{pmatrix} \zeta_t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Označme:

$$C_\beta = \begin{pmatrix} C_\beta^{11} & C_\beta^{12} \\ C_\beta^{21} & C_\beta^{22} \end{pmatrix}$$

Potom máme:

$$x_t = C_\beta^{11} \zeta_t \quad (5.9)$$

a:

$$L_\beta x_t = C_\beta^{21} \zeta_t \quad (5.10)$$

Keďže pre každé  $\zeta$  existuje jediné  $x$ , tak z (5.9) vyplýva, že matica  $C_\beta^{11}$  je regulárna, a teda dostávame:

$$\zeta_t = [C_\beta^{11}]^{-1} x_t \quad (5.11)$$

Dosadením (5.11) do (5.10) máme:

$$L_\beta = C_\beta^{21} [C_\beta^{11}]^{-1} \quad (5.12)$$

Vieme, že za predpokladov vety existuje lokálna stabilná varieta  $W_\beta^S(0)$ . Na stabilnej variete platí, že  $\xi = g_\beta(\zeta)$ , kde funkcia  $g_\beta$  je taká, že  $\frac{g_\beta(\zeta)}{\|\zeta\|} \rightarrow 0$ ,  $\frac{\partial g_\beta(\zeta)}{\partial \zeta} \rightarrow 0$  pre  $\zeta \rightarrow 0$ , z čoho vyplýva, že:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ \psi_t \end{pmatrix} = C_\beta \begin{pmatrix} \zeta_t \\ g_\beta(\zeta_t) \end{pmatrix}$$

A teda:

$$x_t = C_\beta^{11} \zeta_t + C_\beta^{12} g_\beta(\zeta_t) \quad (5.13)$$

$$\psi_t = C_\beta^{21} \zeta_t + C_\beta^{22} g_\beta(\zeta_t) \quad (5.14)$$

Následne môžeme potom podľa vety o implicitnej funkcii z rovnice (5.13) vyjadriť  $\zeta_t$  jednoznačne ako funkciu  $x_t$ :

$$\zeta_t = [C_\beta^{11}]^{-1} x_t + \text{č. v. r.} \quad (5.15)$$

Dosadením (5.15) do (5.14) dostávame:

$$\psi_t = C_\beta^{21} [C_\beta^{11}]^{-1} x_t + \text{č. v. r.} \quad (5.16)$$

Pretože platí (5.12), tak  $W_\beta^S(0)$  môžeme vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

$$W_\beta^S(0) = \{y = (x, \psi) \in \Omega \mid \psi = h_\beta(x)\}$$

kde  $h_\beta(x) = L_\beta x + \text{č. v. r.}$  □

Predchádzajúca veta hovorí, že ak  $(x_0, \psi_0)$ , kde  $\psi_0 = h_\beta(x_0)$ , leží v  $W_\beta^S(0)$ , potom celá trajektória  $(x_t(x_0, \psi_0), \psi_t(x_0, \psi_0))$  leží v  $W_\beta^S(0)$  a konverguje do bodu  $(0, 0)$ . Teraz si povieme niečo o vzťahu pre extrémálne riadenie a jeho odozvu.

**Veta 5.3.** *Nech  $\beta$  je z  $\underline{Q}$ . Nech sú ďalej splnené nasledujúce predpoklady: predpoklad Q3, matica  $I - A$  je regulárna, matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna a dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná. Nech  $(x_0, \psi_0) \in \Omega$ , potom extrémálne riadenie môžeme vyjadriť jednoznačne ako funkciu stavovej premennej  $x_t$  vzťahom:*

$$u_t = Z_\beta x_t + \text{č. v. r.} \quad (5.17)$$

*Dôkaz.* Pretože pre  $u_t$  platí vzťah (2.36):

$$u_t = -R_\beta^{-1} Q_\beta x_t - \beta R_\beta^{-1} B^T \psi_{t+1} + \text{č. v. r.} \quad (5.18)$$

a pretože z predchádzajúcej vety vieme, že na priestore  $W_\beta^S$  môžeme vyjadriť  $\psi_t$  jednoznačne formulou:

$$\psi_t = L_\beta x_t + \text{č. v. r.} \quad (5.19)$$

tak po dosadení (5.19) do vzťahu (5.4) máme:

$$\psi_{t+1} = \frac{1}{\beta} [-(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \mathbf{P}_\beta + (\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} L_\beta] x_t + \text{č. v. r.} \quad (5.20)$$

Dosadením (5.20) do (5.18), dostaneme:

$$u_t = Z_\beta x_t + \text{č. v. r.}$$

□

**Dôsledok 5.1.** *Nech  $\beta$  je z  $\underline{Q}$ . Nech sú ďalej splnené nasledujúce predpoklady: predpoklad Q3, matica  $I - A$  je regulárna, matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna a dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná. Nech  $(x_0, \psi_0) \in \Omega$ , potom odozvy na extrémálne riadenie spĺňajú diferenčnú rovnicu:*

$$x_{t+1} = (A + BZ_\beta) x_t + \text{č. v. r.} \quad (5.21)$$

kde  $(A + BZ_\beta)$  je stabilná matica.

*Dôkaz.* Pretože stav v nasledujúcej perióde musí spĺňať:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$

tak dosadením vzťahu (5.17) za  $u_t$  pre odozvu na optimálne riadenie dostávame vzťah (5.21). Pretože pre každé  $x_0$  optimálne riadenie a jeho odozva konvergujú k nule, tak matica  $(A + BZ_\beta)$  musí byť stabilná.  $\square$

Doteraz sme hovorili len o extrémálnych riešeniach, pretože ukázať existenciu optimálneho riešenia pre úlohu  $(U_\beta)$  je veľmi ťažké. Neskôr ukážeme, za akých predpokladov optimálne riešenie pre úlohu  $(U_\beta)$  existuje. Pre účely nasledujúcej vety však môžeme predpokladať, že existuje a teda extrémálne riešenie je súčasne aj optimálnym. Keďže na variete  $W_\beta^S(0)$  je jediné, tak aj optimálne riešenie je jediné. V nasledujúcej vete si odvodíme vzťah pre hodnotovú funkciu úlohy  $(U_\beta)$ .

Označme hodnotovú funkciu pre úlohu  $(U_\beta)$  s účelovou funkciou  $\mathbf{f}_\beta(x, u)$  ako  $W_\beta^P$ , teda:

$$W_\beta^P(x_0) = \sup_{\omega \in \pi(x_0)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mathbf{f}_\beta(x_t, u_t) \quad (5.22)$$

kde  $\pi(x_0)$  značí množinu prípustných riadení pre túto úlohu.

**Veta 5.4.** *Nech  $\beta$  je z  $\underline{Q}$ . Nech sú ďalej splnené nasledujúce predpoklady: predpoklad Q3, matica  $I - A$  je regulárna, matica  $A_1$  je regulárna a dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná. Nech  $(x_0, \psi_0) \in \Omega$  a nech pre úlohu  $(U_\beta)$  existuje optimálne riadenie, potom môžeme  $W_\beta^P(x_0)$  vyjadriť vzťahom:*

$$W_\beta^P(x_0) = W_\beta^Q(x_0) + \text{č. v. r.} \quad (5.23)$$

*Dôkaz.* Z predchádzajúceho vieme, že za týchto predpokladov existuje na variete  $W_\beta^S(0)$  jediné extrémálne riešenie dávajúce jediné extrémálne riadenie, pre ktoré platia vzťahy (5.17), resp. (5.21):

$$\begin{aligned} u_t &= Z_\beta x_t + \text{č. v. r.} \\ x_{t+1} &= (A + BZ_\beta)x_t + \text{č. v. r.} \end{aligned}$$

Keďže predpokladáme existenciu optimálneho riešenia, tak extrémálne riešenie je optimálnym. Zo vzťahu (5.21) pre optimálny stav v nasledujúcej perióde máme:

$$x_t = (A + BZ_\beta)^t x_0 + \text{č. v. r.} \quad (5.24)$$

Vezmime si čiastočný súčet radu  $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mathbf{f}_\beta(x_t, u_t)$  s optimálnym stavom a riadením:

$$J_N = \sum_{t=0}^N \beta^t \mathbf{f}_\beta(x_t, u_t)$$

Potom:

$$J_N = \sum_{t=0}^N \beta^t [k_\beta^T x_t + l_\beta^T u_t + \frac{1}{2}(x_t^T P_\beta x_t + 2x_t^T Q_\beta^T u_t + u_t^T R_\beta u_t) + \text{č. v. r.}]$$

Po úprave:

$$J_N = k_\beta^T (I - \beta A)^{-1} [x_0 - \beta^{N+1} x_{N+1}] + \sum_{t=0}^N \beta^t [\mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t) + \text{č. v. r.}]$$

Venujme sa teraz funkcii  $\mathbf{Q}_\beta(x, u) + \text{č. v. r.}$ . Označme ju  $K(x, u)$ . Dosadíme za  $u_t$  vzťah (5.17), dostaneme:

$$K(x_t, u_t) = x_t^T (P_\beta + 2Q_\beta^T Z_\beta + Z_\beta^T R_\beta Z_\beta) x_t + \text{č. v. r.}$$

Pretože pre  $x_t$  platí (5.24), máme:

$$K(x_t, u_t) = x_0^T [(A^T + Z_\beta^T B^T)^t (P_\beta + 2Q_\beta^T Z_\beta + Z_\beta^T R_\beta Z_\beta) (A + B Z_\beta)^t] x_0 + \text{č. v. r.}$$

Prejdúc potom k limite pre  $N \rightarrow \infty$  pre  $J_N$  a použijúc označenie (4.15), dostávame:

$$W_\beta^P(x_0) = k_\beta^T (I - \beta A)^{-1} x_0 + x_0^T W_\beta x_0 + \text{č. v. r.}$$

A teda máme:

$$W_\beta^P(x_0) = W_\beta^Q(x_0) + \text{č. v. r.}$$

□

Z predchádzajúceho vidíme, že ak by existovalo optimálne riadenie a jeho odozva a teda aj optimálne riešenie systému rovníc (5.3), (5.4), tak by sa vzťah pre toto riadenie líšil od vzťahu pre optimálne riadenie úloh  $(U_\beta^Q)$  len v členoch vyššieho ako prvého rádu a rovnako to platí aj pre vzťah (5.21) pre optimálnu odozvu. Zároveň hodnotová funkcia by sa líšila od hodnotovej funkcie pre úlohu  $(U_\beta^Q)$  s účelovou funkciou  $k_\beta^T x + l_\beta^T u + \mathbf{Q}_\beta(x, u)$  len v členoch vyššieho ako druhého rádu.

Spomínali sme však, že ukázať existenciu optimálneho riadenia je pre úlohu  $(U_\beta)$  veľmi náročná úloha. Nasledujúce dve kapitoly by čiastočne mohli uspokojiť našu zvedavosť v tomto smere.

## Kapitola 6

# Rovnica dynamického programovania a jej riešenie metódou postupných aproximácií

### 6.1 Rovnica dynamického programovania

Táto kapitola predstavuje zhrnutie práce [7] a poslúži ako odrazový mostík pre ďalšie odvodzovanie v nasledujúcej kapitole.

Uvažujme autonómnú úlohu optimálneho programovania na nekonečnom časovom horizonte s diskretným časom. Označujme túto úlohu ako  $(P_\beta)$ :

$$\sup_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t) \quad (6.1)$$

$$x_{t+1} = F(x_t, u_t) \quad (6.2)$$

$$x_t \in X \subseteq \mathbb{R}^n \quad (6.3)$$

$$u_t \in U \subseteq \mathbb{R}^m \quad (6.4)$$

$$x_0 \in X$$

kde  $\beta \in (0, 1)$ ,  $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  sú dané funkcie a  $x_0$  je daný počiatočný stav.

Prípustné riadenie  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^{\infty}$  pre túto úlohu a jeho odozva  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^{\infty}$  musia spĺňať podmienky (6.2), resp. (6.3).

Pre každé  $x \in X$  označme:

$$\Gamma(x) = \{u \in U \mid F(x, u) \in X\} \quad (6.5)$$

potom je zrejmé, že podmienky (6.2) a (6.3) sa dajú ekvivalentne prepísať ako:  $u_t \in \Gamma(x_t)$  pre všetky  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Teda môžeme povedať, že  $\omega$  je prípustné riadenie pre úlohu  $(P_\beta)$  práve vtedy, keď so svojou odozvou  $\chi$  pre všetky  $t = 0, 1, 2, \dots$  spĺňa:

$$u_t \in \Gamma(x_t)$$

Pre daný počiatočný stav  $x_0 \in X$  môžeme tiež definovať  $\pi(x_0)$  ako množinu riadení prípustných zo stavu  $x_0$ , tj.:

$$\pi(x_0) = \{\{u_t\}_{t=0}^\infty | u_t \in \Gamma(x_t), x_{t+1} = F(x_t, u_t); t = 0, 1, 2, \dots\}$$

Teraz zavedieme predpoklad, ktorý nám zabezpečí, aby  $\pi(x_0) \neq \emptyset$  pre každé  $x_0 \in X$ :

**Predpoklad P1:**  $\Gamma(x) \neq \emptyset$  pre každé  $x \in X$

Budeme ešte vyžadovať, aby aj limita v účelovej funkcii skutočne existovala. Zavedieme ďalší predpoklad:

**Predpoklad P2:** Pre každé  $x_0 \in X$  a pre každé  $\omega \in \pi(x_0)$  existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^n \beta^t f^0(x_t, u_t)$$

Poznamenajme, že predpoklad P2 sa dá zabezpečiť napríklad podmienkou ohraničenosti funkcie  $f^0$  a požiadavkou, aby  $\beta \in (0, 1)$  (tá je však splnená, lebo vystupuje už v zadaní úlohy).

Pre každé  $k = 0, 1, 2, \dots$  definujme funkciu  $J_k : X \times \pi(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  ako:

$$J_k(x_0, \omega) = \sum_{t=0}^k \beta^t f^0(x_t, u_t)$$

S využitím predpokladu P2 môžeme tiež definovať funkciu  $J : X \times \pi(x_0) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  nasledovne:

$$J(x_0, \omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} J_k(x_0, \omega)$$

Napokon definujme hodnotovú funkciu  $V^* : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ako:

$$V^*(x_0) = \sup_{\omega \in \pi(x_0)} J(x_0, \omega)$$

Uvažujme ďalej funkcionálnu rovnicu v nasledujúcom tvare:

$$V(x) = \sup_{u \in \Gamma(x)} \{f^0(x, u) + \beta V[F(x, u)]\} \quad (6.6)$$

Potom podľa [7] platia tieto tvrdenia:

**Veta 6.1.** *Nech sú splnené predpoklady P1 a P2, potom hodnotová funkcia  $V^*$  spĺňa (6.6).*

**Veta 6.2.** *Nech sú splnené predpoklady P1 a P2. Ak  $V$  je riešením (6.6) a spĺňa pre každé  $x_0 \in X$  a pre každé  $\omega \in \pi(x_0)$ :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t V(x_t) = 0 \quad (6.7)$$

*potom  $V = V^*$ , tj.  $V$  je hodnotovou funkciou.*

**Veta 6.3.** *Nech sú splnené predpoklady P1 a P2. Nech  $\omega^* \in \pi(x_0)$  je optimálne riadenie pre počiatočný stav  $x_0$ . Potom pre  $t = 0, 1, 2, \dots$  platí:*

$$V^*(x_t^*) = f^0(x_t^*, u_t^*) + \beta V^*[F(x_t^*, u_t^*)] \quad (6.8)$$

**Veta 6.4.** *Nech sú splnené predpoklady P1 a P2. Nech  $\omega^* \in \pi(x_0)$  je prípustné riadenie z počiatočného stavu  $x_0$  spĺňajúce vzťah (6.8) a podmienku:*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \beta^t V^*(x_t^*) \leq 0 \quad (6.9)$$

*Potom  $\omega^*$  je optimálne riadenie pre úlohu  $(P_\beta)$ .*

V predchádzajúcom sme definovali  $\Gamma(x) = \{u \in U | F(x, u) \in X\}$  pre každé  $x \in X$ , ďalej môžeme definovať ešte i  $\Gamma^*(x) \subseteq \Gamma(x)$  ako:

$$\Gamma^*(x) = \{u \in \Gamma(x) | V^*(x) = f^0(x, u) + \beta V^*[F(x, u)]\} \quad (6.10)$$

Potom veta (6.3) hovorí, že pre každé optimálne riadenie platí, že  $u_t \in \Gamma^*(x_t)$  pre každé  $t = 0, 1, 2, \dots$  a veta (6.4) vraví, že pokiaľ ľubovoľné riadenie pre každé  $t = 0, 1, 2, \dots$  spĺňa  $u_t \in \Gamma^*(x_t)$  a podmienku (6.9), potom je optimálne.

## 6.2 Metóda postupných aproximácií

V tejto časti sa pozrieme na to, ako riešiť rovnicu dynamického programovania (6.6) pre úlohu  $(P_\beta)$ . Rovnica (6.6) je funkcionálna rovnica, v ktorej ako neznáma vystupuje funkcia  $V$ . Preto sa budeme zaoberať predpokladmi, ktoré nám zabezpečia existenciu a jednoznačnosť hodnotovej funkcie ako riešenia tejto rovnice.

Klasický prístup k tomuto problému je metóda postupných aproximácií. Začneme tak, že si vezmeme počiatočnú voľbu, nejakú funkciu  $V_0$ . Potom definujeme novú funkciu  $V_1$  danú formulou:

$$V_1(x) = \sup_{u \in \Gamma(x)} \{f^0(x, u) + \beta V_0[F(x, u)]\}$$

Pokiaľ  $V_1(x) = V_0(x)$  pre každé  $x \in X$ , potom  $V_0$  je riešením (6.6).

Predpokladajme, že  $V_1(x) \neq V_0(x)$ , potom použijeme  $V_1$  ako novú voľbu a zdefinujeme ďalšiu funkciu  $V_2$  danú:

$$V_2(x) = \sup_{u \in \Gamma(x)} \{f^0(x, u) + \beta V_1[F(x, u)]\}$$

Takto môžeme definovať postupnosť funkcií  $\{V_k\}_{k=0}^\infty$  rekurentne danú vzťahom:

$$V_{k+1}(x) = \sup_{u \in \Gamma(x)} \{f^0(x, u) + \beta V_k[F(x, u)]\} \quad (6.11)$$

pre  $k = 0, 1, 2, \dots$ . A môžeme dúfať, že konverguje k funkcii  $V$  vyhovujúcej (6.6). Ak by sme navyše ukázali, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k$  je rovnaká pre všetky počiatočné  $V_0$ , bola by jedinou funkciou spĺňajúcou (6.6).

Definujme teda pre každú funkciu  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  novú funkciu  $TV : X \rightarrow \mathbb{R}$  ako:

$$TV(x) = \sup_{u \in \Gamma(x)} \{f^0(x, u) + \beta V[F(x, u)]\} \quad (6.12)$$

Potom rekurentný vzťah môžeme prepísať do tvaru:

$$V_{k+1}(x) = TV_k(x)$$

Keď to máme takto zapísané, vidíme, že je potrebné nájsť takú množinu funkcií  $C$ , ktorú operátor  $T$  zobrazuje do seba, a že nájdenie pevného bodu zobrazenia  $T$ , tj. funkcie  $V \in C$  takej, že  $V = TV$ , je ekvivalentné nájdeniu riešenia (6.6). Metóda postupných aproximácií je spôsob ako konštruovať tento pevný bod.

Teraz si zavedieme niekoľko definícií:

**Definícia 6.1.** Množinová funkcia  $\Gamma : X \rightarrow U$  sa nazýva *polospojité zdola* v bode  $x \in X$ , ak  $\Gamma(x)$  je neprázdna a ak pre každé  $u \in \Gamma(x)$  a každú postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  bodov z  $X$  s limitným bodom  $x \in X$  existuje prirodzené číslo  $N \geq 1$  a postupnosť  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  taká, že  $u_n \in \Gamma(x_n)$  pre každé  $n \geq N$  a  $u_n \rightarrow u$ . (Ak  $\Gamma(z)$  je neprázdna pre každé  $z \in X$ , potom je vždy možné vziať  $N = 1$ .)

**Definícia 6.2.** Množinová funkcia  $\Gamma : X \rightarrow U$  sa nazýva *polospojité zhora* v  $x \in X$ , ak  $\Gamma(x)$  je neprázdna a pre každú postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  bodov z  $X$  s limitným bodom  $x \in X$  a každú postupnosť  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  takú, že  $u_n \in \Gamma(x_n)$  pre každé  $n$  existuje konvergentná podpostupnosť postupnosti  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ , ktorej limita  $u$  je z  $\Gamma(x)$ .

**Definícia 6.3.** Množinová funkcia  $\Gamma : X \rightarrow U$  sa nazýva *spojitá* v  $x \in X$ , ak je v  $x$  polospojité zhora i zdola.  $\Gamma : X \rightarrow U$  sa nazýva *spojitá na  $X$* , ak je spojité v každom  $x \in X$ .

$\Gamma$  definované v (6.5) je množinová funkcia na  $X$ . Rovnako tak  $\Gamma^*$  definované v (6.10). My budeme  $\Gamma$  nazývať korešpondencia a  $\Gamma^*$  optimálna korešpondencia.

Definíciu spojitosti množinovej funkcie využijeme v nasledujúcich predpokladoch:

**Predpoklad P3:** Množina  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je konvexná a  $\Gamma : X \rightarrow U$  je spojitá na  $X$  a pre každé  $x \in X$  neprázdna a kompaktná.

**Predpoklad P4:** Funkcia  $f^0$  je ohraničená a spojitá.

**Predpoklad P5:** Funkcia  $F$  je spojitá.

Za platnosti predpokladov P3 a P4 platia i predpoklady P1 a P2. Vieme, že za predpokladov P1 a P2 platia vety (6.1), (6.2), (6.3) a (6.4) z prvej časti. A podľa [7] platí toto tvrdenie:

**Veta 6.5.** *Nech sú splnené predpoklady P3, P4 a P5 a nech  $C(X)$  je priestor spojitých ohraničených funkcií  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  so supremovou normou, označujeme ju  $\|\cdot\|$ . Potom operátor  $T$  zobrazuje priestor  $C(X)$  do seba, tj.  $T : C(X) \rightarrow C(X)$ ,  $T$  má jediný pevný bod  $V \in C(X)$  a pre každé  $V_0 \in C(X)$  platí:*

$$\|T^k V_0 - V\| \leq \beta^k \|V_0 - V\| \quad (6.13)$$

pre  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Navyiac pri danom  $V$  je  $\Gamma^* : X \rightarrow U$  polospojité zhora na  $X$  a pre každé  $x \in X$  kompaktná.

**Dôsledok 6.1.** *Nech platia predpoklady P3, P4 a P5, potom jediné riešenie Bellmanovej rovnice (6.6) v priestore  $C(X)$  je hodnotová funkcia pre úlohu  $(P_\beta)$ .*

*Dôkaz.* Vieme, že za týchto predpokladov existuje jediné riešenie funkcionálnej rovnice (6.6) v priestore  $C(X)$ . Pretože platí predpoklad P4, tak je splnený i predpoklad P2. Treba ešte ukázať, že  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t V(x_t) = 0$  pre každé  $x_0 \in X$  a pre každé  $\omega \in \pi(x_0)$ . Ale to platí, pretože funkcia  $V \in C(X)$  a  $\beta \in (0, 1)$ .  $\square$

**Dôsledok 6.2.** *Nech platia predpoklady P3, P4 a P5, potom každé prípustné riadenie z počiatočného stavu  $x_0$  spĺňajúce vzťah (6.8) je optimálne.*

*Dôkaz.* Uvedené tvrdenie je priamym dôsledkom predchádzajúceho dôsledku.

Za platnosti predpokladov P3, P4 platia predpoklady P1 a P2. Treba ešte splniť podmienku (6.9):

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \beta^t V(x_t^*) \leq 0$$

kde  $V$  je hodnotová funkcia pre úlohu  $(P_\beta)$ . Z predchádzajúceho dôsledku však vieme, že to je splnené.  $\square$

Vidíme, že keď sú splnené predpoklady P3, P4 a P5, tak funkcionálna rovnica (6.6) má v priestore  $C(X)$  jediné riešenie a toto riešenie je zároveň hodnotovou funkciou pre úlohu  $(P_\beta)$ . A teda existuje optimálne riadenie  $\{u_t^*\}_{t=0}^\infty$  pre túto úlohu, ktoré spolu so svojou odozvou  $\{x_t^*\}_{t=0}^\infty$  spĺňajú:

$$u_t^* \in \Gamma^*(x_t^*)$$

V ďalšom sa teraz pozrieme na niektoré vlastnosti hodnotovej funkcie a optimálnej korešpondencie, ak platia nejaké ďalšie predpoklady. Zavedme preto tieto tri nasledujúce predpoklady:

**Predpoklad P6:** Množina  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  je konvexná a  $f^0$  je rýdzokonkávna, tj. pre každé  $(x, u), (x', u') \in X \times U$  a pre každé  $\theta \in (0, 1)$  platí:

$$f^0[\theta(x, u) + (1 - \theta)(x', u')] > \theta f^0(x, u) + (1 - \theta)f^0(x', u')$$

**Predpoklad P7:**  $\Gamma$  je konvexná v zmysle, že pre každé  $\theta \in [0, 1]$  a pre každé  $x, x' \in X$  platí:

$$\text{Ak } u \in \Gamma(x) \text{ a } u' \in \Gamma(x'), \text{ potom } [\theta u + (1 - \theta)u'] \in \Gamma[\theta x + (1 - \theta)x']$$

**Predpoklad P8:**  $F$  je lineárne zobrazenie a teda pre každé  $(x, u), (x', u') \in X \times U$  a pre každé  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  platí:

$$F[\alpha(x, u) + \beta(x', u')] = \alpha F(x, u) + \beta F(x', u')$$

Potom, opäť podľa [7], platí toto tvrdenie:

**Veta 6.6.** *Nech sú splnené predpoklady P3 až P8. Nech  $V$  spĺňa (6.6) a  $\Gamma^*$  spĺňa (6.10). Potom  $V$  je rýdzokonkávna a  $\Gamma^*$  je spojitá jedno-hodnotová funkcia.*

Teda sme si ukázali, že ak navyše platia predpoklady P6, P7 a P8, tak optimálna korešpondencia  $\Gamma^*$  je vlastne obyčajnou (jedno-hodnotovou) funkciou, ktorú budeme v ďalšom pre rozlíšenie označovať  $\gamma^*$ . Ide o tzv. riadiacu funkciu alebo sa tiež nazýva optimálna spätná väzba.

Poznamenajme, že ak predpoklad P8 zmeníme v tom, že budeme požadovať miesto lineárneho zobrazenia lineárnu nehomogénnu funkciu:

$$F(x, u) = Ax + Bu + c$$

kde  $A, B$  sú dané reálne matice príslušných typov a  $c$  vektor konštant, tak veta (6.6) ostane v platnosti.

Nasledujúce tvrdenie ako i všetky ďalšie tvrdenia v tejto časti sú dokázané v [7].

**Veta 6.7.** *Nech sú splnené predpoklady P3 až P8. Nech  $V$  spĺňa (6.6) a  $\gamma^*$  spĺňa (6.10). Nech  $C'(X)$  je množina ohraničených, spojitých, konkávných funkcií  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  a nech  $V_0 \in C'(X)$ . Nech  $V_k$  a  $\gamma_k$  sú pre  $k = 0, 1, 2, \dots$  definované vzťahmi:*

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= TV_k \\ \gamma_k(x) &= \operatorname{argmax}_{u \in \Gamma(x)} \{f^0(x, u) + \beta V_k[F(x, u)]\} \end{aligned}$$

*Potom  $\gamma_k \rightarrow \gamma^*$  bodovo. Ak  $X$  je kompaktná, tak  $\gamma_k \rightarrow \gamma^*$  rovnomerne.*

Ešte sa pozrieme na to, ako zabezpečiť kompaktnosť a spojitosť korešpondencie  $\Gamma$  v predpoklade P3, teda na to, čo musí platiť pre množiny  $X$  a  $U$ , resp. pre graf korešpondencie, aby boli spomínané vlastnosti splnené.

**Veta 6.8.** *Nech  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je uzavretá množina, nech  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  je kompaktná množina. Nech sú splnené predpoklady P1 a P5. Potom  $\Gamma(x)$  je pre všetky  $x \in X$  kompaktná.*

Poznamenajme, že táto veta platí aj bez predpokladu P1, pretože i prázdna množina je kompaktná.

V ďalšom sa budeme zaoberať spojitou korešpondenciou  $\Gamma$ . Bude nás zaujímať, za akých predpokladov je  $\Gamma$  polospojité zhora a zdola. Na to využijeme nejaké vlastnosti jej grafu, teda množiny:

$$G = \{(x, u) \in X \times U \mid u \in \Gamma(x)\}$$

**Veta 6.9.** *Nech platí predpoklad P1 a nech  $G$  je graf korešpondencie  $\Gamma$ . Nech  $G$  je uzavretá množina a nech pre ľubovoľnú ohraničenú množinu  $\hat{X} \subset X$  je množina  $\Gamma(\hat{X})$  tiež ohraničená. Potom korešpondencia  $\Gamma$  je polospojité zhora a pre každé  $x \in X$  je množina  $\Gamma(x)$  kompaktná.*

**Veta 6.10.** *Nech platí predpoklad P1 a nech  $G$  je graf korešpondencie  $\Gamma$ . Nech  $G$  je konvexná množina, nech pre ľubovoľnú ohraničenú množinu  $\hat{X} \subseteq X$  existuje ohraničená množina  $\hat{U} \subseteq U$  taká, že pre všetky  $x \in \hat{X}$  platí:  $\Gamma(x) \cap \hat{U} \neq \emptyset$  a nech pre každé  $x \in X$  existuje  $\varepsilon > 0$  také, že množina  $B[x, \varepsilon] \cap X$  je uzavretá a konvexná. Potom je korešpondencia  $\Gamma$  polospojité zdola.*

## Kapitola 7

# Existencia hodnotovej funkcie a optimálneho riadenia

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať úlohou  $(U_\beta)$  naformulovanou na začiatku kapitoly 2. Ukážeme, že za platnosti určitých predpokladov má táto úloha jedinú hodnotovú funkciu a že optimálna korešpondencia je spojitou jedno-hodnotovou funkciou stavu.

Uvažujme teda úlohu  $(U_\beta)$ :

$$\begin{aligned} \max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t) \\ & x_{t+1} = F(x_t, u_t) \\ & x_t \in X \subseteq \mathbb{R}^n \\ & u_t \in U \subseteq \mathbb{R}^m \\ & x_0 \in X \end{aligned}$$

kde  $\beta$  je tentokrát z  $(0, 1)$ .

Ide vlastne o úlohu  $(P_\beta)$  s lineárnou funkciou  $F$  a s podmienkou, že účelová funkcia  $f^0$  je rýdzokonkávna (rýdzu konkávnosť účelovej funkcie predpokladáme navyše oproti predchádzajúcemu) a trikrát spojite diferencovateľná. Len poznamenajme, že pre tvrdenia dokázané v tejto kapitole si vystačíme so spojitou rýdzokonkávnou funkciou  $f^0$ .

Nech  $V_\beta$  značí hodnotovú funkciu pre túto úlohu a príslušné  $\beta$ . Urobme predpoklad:

**Predpoklad P10:** Množiny  $X$  a  $U$  sú konvexné a kompaktné.

Potom pre takto definované funkcie  $f^0$  a  $F$  budú platiť nasledujúce dve vety. Najprv si však dokážeme lemu, ktorá nám pomôže pri dokazovaní ich platnosti.

**Lema 7.1.** *Nech platí predpoklad P1 a P10. Nech  $f^0$  je spojitá rýdzokonkávna funkcia a nech  $F$  je lineárna v oboch argumentoch. Potom  $\Gamma(x)$  definovaná v (6.5) je spojitá a pre každé  $x \in X$  kompaktná a konvexná.*

*Dôkaz.* Na dôkaz kompaktnosti a spojitosti potrebujeme, aby boli splnené predpoklady viet (6.8), resp. (6.9) a (6.10). Konvexnosť ukážeme priamo.

Pretože množiny  $X$  a  $U$  sú kompaktné a funkcia  $F$  je lineárna a teda aj spojitá, sú splnené predpoklady vety (6.8) a teda pre každé  $x \in X$  je  $\Gamma(x)$  kompaktná. Z toho tiež vyplýva, že graf korešpondencie  $G$  je uzavretá množina. Ukážeme, prečo:

Pretože  $X$  a  $U$  sú kompaktné, tak sú uzavreté a ohraničené. Nech postupnosť  $\{(x_k, u_k)\}_{k=1}^{\infty}$  z  $G$  je konvergentná s limitným bodom  $(x, u)$ . Pre každé  $k = 1, 2, \dots$  platí, že  $u_k \in \Gamma(x_k)$ , tj.  $u_k \in U$  je také, že  $F(x_k, u_k) \in X$ . Pretože funkcia  $F$  je spojitá, platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k, u_k) = F(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k, \lim_{k \rightarrow \infty} u_k) = F(x, u)$$

Keďže  $X$  je uzavretá, tak  $F(x, u) \in X$ . Pretože  $U$  je uzavretá, tak  $u \in U$ . Z toho vyplýva, že  $u \in \Gamma(x)$  a teda  $(x, u)$  je z  $G$ . Graf  $G$  je teda uzavretá množina.

Navyše pre ľubovoľnú ohraničenú množinu  $\hat{X} \subset X$  je množina  $\Gamma(\hat{X})$  taktiež ohraničená, lebo je podmnožinou množiny  $U$ , ktorá je ohraničená. Sú teda splnené i predpoklady vety (6.9).

Ukážeme ďalej, že sú splnené predpoklady vety (6.10). Najprv ukážeme, že  $\Gamma$  je konvexná. Z toho potom bude vyplývať, že i jej graf  $G$  je konvexná množina.

$\Gamma$  je pre lineárnu funkciu  $F$  definovaná ako  $\Gamma(x) = \{u \in U \mid [Ax + Bu + c] \in X\}$ . Pre ľubovoľné  $\theta \in [0, 1]$  a pre každé  $x, x' \in X$  ak  $u \in \Gamma(x)$  a  $u' \in \Gamma(x')$ , tak  $[Ax + Bu + c] \in X$  a  $[Ax' + Bu' + c] \in X$ . Chceme ukázať, že  $[\theta u + (1 - \theta)u']$  leží v  $\Gamma[\theta x + (1 - \theta)x']$ . Platí:

$$A[\theta x + (1 - \theta)x'] + B[\theta u + (1 - \theta)u'] + c = \theta[Ax + Bu + c] + (1 - \theta)[Ax' + Bu' + c]$$

Pretože množina  $X$  je konvexná, tak:

$$\{\theta[Ax + Bu + c] + (1 - \theta)[Ax' + Bu' + c]\} \in X$$

A teda  $[\theta u + (1 - \theta)u'] \in \Gamma[\theta x + (1 - \theta)x']$ .

Ďalej platí, že pre ľubovoľnú ohraničenú množinu  $\hat{X} \subseteq X$  existuje ohraničená množina  $\hat{U} \subseteq U$  taká, že pre všetky  $x \in \hat{X}$  platí:  $\Gamma(x) \cap \hat{U} \neq \emptyset$ , a totiž samotné  $U$ .

Posledný predpoklad vety (6.10), že pre každé  $x \in X$  existuje  $\varepsilon > 0$  také, že množina  $B(x, \varepsilon) \cap X$  je uzavretá a konvexná, je splnený vďaka kompaktnosti a konvexnosti množiny  $X$ .

Takže  $\Gamma$  je kompaktná a polospojité zhora i zdola a teda je spojitá.  $\square$

**Veta 7.1.** *Nech platí predpoklad P1 a P10. Nech  $f^0$  je spojitá rýdzokonkávna funkcia a nech  $F$  je lineárna v oboch argumentoch. Potom operátor  $T$  definovaný v (6.12) zobrazuje priestor  $C(X)$  do seba, tj.  $T : C(X) \rightarrow C(X)$ ,  $T$  má jediný pevný bod  $V_\beta \in C(X)$  a pre každé  $V_0 \in C(X)$  platí:*

$$\|T^k V_0 - V_\beta\| \leq \beta^k \|V_0 - V_\beta\|$$

*pre  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Navyiac pri danom  $V_\beta$  je optimálna korešpondencia  $\Gamma^*$ , definovaná v (6.10), kompaktná a polospojité zhora.*

*Dôkaz.* Ukážeme, že sú splnené predpoklady vety (6.5).

Predpoklad P3 požaduje, aby bola množina  $X$  konvexná, to je splnené, pretože sme spravili predpoklad P10. Ďalej požaduje, aby  $\Gamma$  bola spojitá a pre každé  $x \in X$  kompaktná. To vyplýva z predchádzajúcej lemy (7.1). Pretože platí predpoklad P1, tak  $\Gamma$  je pre každé  $x \in X$  neprázdna.

Predpoklad P4 požaduje, aby bola funkcia  $f^0$  spojitá a ohraničená. Pretože o funkcii  $f^0$  predpokladáme, že je spojitou rýdzokonkávnu funkciou navyše definovanou na kompakte  $X \times U$ , tak sú obe podmienky splnené.

A rovnako je splnený aj predpoklad P5, pretože funkcia  $F$  je lineárna a teda i spojitá.

Takže sú splnené všetky predpoklady vety (6.5), čo dokazuje tvrdenie.  $\square$

Z predchádzajúcej podkapitoly z dôsledku (6.1) vieme, že jediné riešenie rovnice (6.6) je hodnotová funkcia pre úlohu  $(P_\beta)$  a teda je ňou aj pre úlohu  $(U_\beta)$ . A z dôsledku (6.2), že každé prípustné riadenie také, že  $u_t \in \Gamma^*(x_t)$ , je optimálne pre túto úlohu.

**Veta 7.2.** *Nech platí predpoklad P1 a P10. Nech  $f^0$  je spojitá rýdzokonkávna funkcia a nech  $F$  je lineárna v oboch argumentoch. Nech  $V_\beta$  splňa (6.6) a  $\Gamma^*$  splňa (6.10). Potom  $V_\beta$  je rýdzokonkávna a  $\Gamma^*$  je spojitá jedno-hodnotová funkcia.*

*Dôkaz.* Ukážeme, že sú splnené predpoklady vety (6.6).

Z dôkazu predchádzajúcej vety (7.1) vieme, že sú splnené predpoklady P3, P4, P5. Treba teda ukázať, že sú splnené i predpoklady P6, P7, P8. Pretože  $U$  je konvexná a funkcia  $f^0$  rýdzokonkávna, tak je splnený predpoklad P6. Z lemy (7.1) máme, že  $\Gamma$  je konvexná a teda je splnený i predpoklad P7. A z poznámky za vetou (6.6) vyplýva, že veta (6.6) platí aj pre lineárnu nehomogénnu funkciu  $F$ . Všetky predpoklady vety (6.6) sú splnené, čo dokazuje tvrdenie.  $\square$

Z predchádzajúcich dvoch viet vidno, že pokiaľ riešime úlohu  $(U_\beta)$  na konvexných a kompaktných množinách, nielenže sa metódou postupných aproximácií (za predpokladu, že šartovacia funkcia  $V_0 \in C'(X)$ ) dopracujeme k hľadanej hodnotovej funkcii, ktorá je taktiež

rýdzokonkávna, ale súčasne získame aj optimálnu korešpondenciu  $\Gamma^*$ , ktorá je spojitou hodnotovou funkciou stavu.

V kapitole 2 sme spomínali, že množiny  $X$ ,  $U$  sú položené ako celé  $\mathbb{R}^n$ , resp.  $\mathbb{R}^m$ , tj.  $X = \mathbb{R}^n$  a  $U = \mathbb{R}^m$ . Pretože však túto úlohu riešime lokálne v okolí rovnovážneho  $(\bar{x}_\beta, \bar{u}_\beta)$ , za istých ďalších predpokladov môžeme tieto množiny zúžiť na kompaktné a konvexné okolia rovnovážneho  $\bar{x}_\beta$ , resp.  $\bar{u}_\beta$ .

Predpokladajme, že sú splnené predpoklady Q1 a Q2. Zvoľme  $\beta$  z  $O$ . Predpokladajme ďalej, že dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná, potom existuje matica  $Z_\beta$  taká, že matica  $A + BZ_\beta$  je stabilná. Označme si  $H_\beta = A + BZ_\beta$ . Potom teda  $H_\beta$  je stabilná. Nech ďalej  $\bar{\lambda} = \max_i |\lambda_i|$  označuje maximum spomedzi absolútnych hodnôt vlastných hodnôt matice  $H_\beta$ . Potom existuje  $\alpha > 0$  také, že  $\bar{\lambda} \leq \alpha < 1$ .

Skonstruujme novú normu v  $\mathbb{R}^n$  ako:

$$\|x\|_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i} \|H_\beta^i x\| \quad (7.1)$$

kde  $\|\cdot\|$  je ľubovoľná norma v  $\mathbb{R}^n$ . Dá sa ukázať, že norma definovaná v (7.1) spĺňa všetky vlastnosti normy. Navyše máme:

$$\begin{aligned} \|H_\beta x\|_n &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i} \|H_\beta^{i+1} x\| \\ &= \alpha \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{i+1}} \|H_\beta^{i+1} x\| \right) \\ &= \alpha \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i} \|H_\beta^i x\| \right) \\ &\leq \alpha \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i} \|H_\beta^i x\| \right) \\ &= \alpha \|x\|_n \end{aligned}$$

Nech  $\gamma_0 = K_0 \|x_0 - \bar{x}_\beta\|_n$ , kde  $K_0 \geq 1$  je ľubovoľná dostatočne veľká konštanta. Pre daný počiatočný stav  $x_0$  definujme množinu  $X$  nasledujúcim spôsobom:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \bar{x}_\beta\|_n \leq \gamma_0\} \quad (7.2)$$

Nech  $\sigma_0 = \sup_{x \in X} \{K_1 \|Z_\beta(x - \bar{x}_\beta)\|\}$ , kde  $K_1 \geq 1$  je ľubovoľná dostatočne veľká konštanta. Pre daný počiatočný stav  $x_0$  definujme tiež množinu  $U$  ako:

$$U = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|u - \bar{u}_\beta\| \leq \sigma_0\} \quad (7.3)$$

Získali sme kompaktné a konvexné množiny. Navyše si v nasledujúcej vete ukážeme, že pre takto definované množiny je splnený predpoklad P1.

**Veta 7.3.** *Nech množiny  $X$  a  $U$  sú definované vzťahmi (7.2), resp. (7.3). Potom je splnený predpoklad P1.*

*Dôkaz.* Predpoklad P1 je splnený vtedy, keď pre každé  $x \in X$  volíme  $u \in U$  tak, aby platilo:

$$\|A(x - \bar{x}_\beta) + B(u - \bar{u}_\beta)\|_n \leq \gamma_0$$

Ukážeme, že to je splnené. Nech  $x$  je ľubovoľné ležiace v  $X$ . Zvoľme si  $u$ , tak, že  $u - \bar{u}_\beta = Z_\beta(x - \bar{x}_\beta)$ . Potom  $u$  leží v  $U$ .

Máme:

$$A(x - \bar{x}_\beta) + B(u - \bar{u}_\beta) = A(x - \bar{x}_\beta) + BZ_\beta(x - \bar{x}_\beta) = H_\beta(x - \bar{x}_\beta)$$

Ďalej dostávame:

$$\|H_\beta(x - \bar{x}_\beta)\|_n \leq \alpha\|x - \bar{x}_\beta\|_n \leq \alpha\gamma_0 < \gamma_0$$

čo dokazuje tvrdenie. □

Množiny  $X$  a  $U$  definované v (7.2), resp. (7.3) spĺňajú predpoklady P1 a P10, tj. predpoklady viet 7.1 a 7.2 a teda pre ne existuje jediná rýdzokonkávna hodnotová funkcia riešiaci (6.6) a optimálna korešpondencia, ktorá je jedno-hodnotovou funkciou stavu. Inými slovami existuje pre ne optimálne riadenie ako funkcia stavovej premennej.

Dá sa ukázať (viď. veta [6]), že hodnotová funkcia je pre úlohu  $(U_\beta)$  za predpokladov spojitosti diferencovateľnosti účelovej funkcie  $f^0$  a plnej hodnosti matice  $B$  diferencovateľná a jej prvá derivácia sa rovná prvej derivácii funkcie  $f^0$  v každom bode zvnútra  $X$ . Kolektív autorov [6] však pracuje s úlohou  $(U_\beta)$  ako s úlohou hľadania suprema na množine nekonečných postupností, kde sa riadiacou premennou stáva stav v nasledujúcej perióde generovaný z príslušnej korešpondencie. Tým sa samozrejme zužuje trieda úloh, s ktorou chceme pracovať.

Preto pre účely práce predpokladajme, že hodnotová funkcia  $V_\beta$  je diferencovateľná. Potom rovnica dynamického programovania pre túto funkciu vyzerá nasledovne:

$$V_\beta(x) = \sup_{u \in \Gamma(x)} \{f^0(x, u) + \beta V_\beta[F(x, u)]\}$$

Poznamenajme, že súčet funkcií  $f^0(x, u) + \beta V_\beta[F(x, u)]$  je spojitá funkcia a keďže  $\Gamma(x)$  je pre každé  $x \in X$  kompaktná, tak maximum sa dosahuje a teda vlastne hľadáme maximum tejto funkcie.

Nech maximalizujúce  $u$  leží vo vnútri množiny  $\Gamma(x)$ , potom derivácia pravej strany podľa  $u$  sa musí rovnať 0:

$$0^T = \frac{\partial f^0(x, u)}{\partial u} + \beta \frac{\partial V_\beta[F(x, u)]}{\partial x} \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \quad (7.4)$$

Pokiaľ potom derivujeme rovnicu dynamického programovania podľa premennej  $x$ , tak dostávame:

$$\frac{\partial V_\beta(x)}{\partial x} = \frac{\partial f^0(x, u)}{\partial x} + \beta \frac{\partial V_\beta[F(x, u)]}{\partial x} \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} \quad (7.5)$$

Tu však narážame na ešte väčšiu ťažkosť. Hodnotová funkcia je definovaná pre každé  $x \in X$ , vo všeobecnosti je však ťažké zabezpečiť predpoklad, aby maximalizujúce  $u$  ležalo vo vnútri množiny  $\Gamma(x)$ .

Tento predpoklad je nevyhnutný na zabezpečenie splnenia nutných podmienok optimality, bez neho nutné podmienky optimality neplatia, resp. nie je možné ich odvodiť (viď. [3]).

Na stránkach nasledujúcej kapitoly sa pozrieme nato, či možno ukázať existenciu optimálneho riadenia iným spôsobom než je prístup z tejto kapitoly.

## Kapitola 8

# Existencia optimálneho riadenia pre pôvodnú úlohu

Uvažujme teda systém úloh  $(U_\beta)$ , kde  $\beta \in \underline{Q}$  (vrátane 1). V ďalšom pre celú kapitolu predpokladajme, že sú splnené predpoklady Q1 a Q2. Účelovú funkciu  $\mathbf{f}_\beta$  môžeme rozpísať nasledujúcim spôsobom:

$$\mathbf{f}_\beta(x, u) = k_\beta^T x + l_\beta^T u + \mathbf{Q}_\beta(x, u) + \text{č. v. r.}$$

Označme:

$$\Omega = \{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq \eta, \|u\| \leq \eta\} \quad (8.1)$$

Uvažujme najprv  $\beta = 1$  a označme úlohu  $(U_1)$ , ktorú riešime na okolí  $\Omega$  bodu  $(0, 0)$  ako  $U_1(x_0, \eta)$ , kde  $x_0$  je daný počiatočný stav tejto úlohy.

**Veta 8.1.** *Nech  $\beta = 1$ . Nech  $k_1 = l_1 = 0$ . Nech sú ďalej splnené nasledujúce predpoklady: predpoklad Q3, matica  $I - A$  je regulárna, matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna a dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná. Potom existuje  $\eta_1 > 0$  a  $\varepsilon > 0$  také, že pre každé  $\|x_0\| < \varepsilon$  existuje optimálne riadenie pre úlohu  $U_1(x_0, \eta_1)$  a je rovné jedinému extrémálnemu riadeniu z bodu  $x_0$ .*

*Dôkaz.* Nech je splnený predpoklad Q3, potom existuje  $\eta_1 > 0$  také, že na okolí  $\Omega$  definovaného v (8.1) s  $\eta = \eta_1$  je funkcia  $\mathbf{f}_1(x, u)$  rýdzokonkávna a platí:  $\mathbf{f}_1(x, u) \leq 0$  pre každé  $(x, u)$  z  $\Omega$ . Pri dokazovaní existencie optimálneho riadenia sa obmedzíme na postupnosti prípustných riadení a ich odoziev z tohto okolia, z čoho vyplýva, že každá takáto postupnosť  $\{(x_t, u_t)\}_{t=0}^\infty$  je ohraničená. Z toho ale vyplýva, že rovnakým spôsobom ako v dôkaze vety 3.3 možno skonštruovať optimálne riadenie a teda optimálne riadenie na množine  $\Omega$  existuje. Ešte musíme ukázať, že sa rovná jedinému extrémálnemu riadeniu z bodu  $x_0$ .

Zvoľme  $\eta_2 < \eta_1$ . Potom existuje  $\gamma < 0$  také, že  $\mathbf{f}_1(x, u) \leq \gamma$ , ak  $\eta_1 \geq \|x\| \geq \eta_2$  alebo  $\eta_1 \geq \|u\| \geq \eta_2$ .

Označme množinu prípustných riadení z počiatku  $x_0$  ako  $\pi(x_0)$ .

Pretože dvojica matíc je stabilizovateľná, tak existuje matica  $Z$  taká, že  $A + BZ$  je stabilná matica. A teda pre  $x_0$  dostatočne malé existuje v  $\pi(x_0)$  stabilizujúce prípustné riadenie  $u_t = Zx_t$  a jeho odozva. Označme:

$$\gamma(x_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{f}_1(x_t, Zx_t)$$

Ďalej existuje také  $\varepsilon > 0$ , kde  $\varepsilon < \eta_2$ , že pre stabilizujúce riadenie a jeho odozvu platí:

$$\gamma_0 > \gamma$$

pre  $\|x_0\| < \varepsilon$ .

Z toho vyplýva, že pre optimálne riadenie a jeho odozvu  $\{(x_t^*, u_t^*)\}_{t=0}^{\infty}$  pre úlohu  $U_1(x_0, \Omega)$  musí pre každé  $t$  platiť:

$$\|x_t^*\| < \eta_2, \|u_t^*\| < \eta_2$$

Takže hodnoty optimálneho riadenia sú vnútornými bodmi množiny  $\|u\| \leq \eta_1$  a preto musia spĺňať nutné podmienky optimality vyjadrené v (2.34) pre  $\beta = 1$ .

Navyše z vety (5.2) vyplýva, že ak  $\varepsilon$  je dostatočne malé, potom existuje jediné extrémálne riadenie a jeho odozva, pre ktoré platí:

$$\|x_t\| < \eta_2, \|u_t\| < \eta_2$$

čo bolo treba dokázať.

□

V nasledujúcich dvoch vetách teraz ukážeme, za akých predpokladov konverguje prípustné riadenie pre úlohu  $U_1(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou  $\mathbf{f}_1(x, u) = k_1^T x + l_1^T u + \mathbf{Q}_1(x, u) + \text{č. v. r.}$  do 0 a kedy existuje optimálne riadenie pre túto úlohu a čomu sa rovná.

**Veta 8.2.** *Nech  $\beta = 1$ . Nech aspoň jeden z vektorov  $k_1, l_1$  je nenulový. Nech sú ďalej splnené nasledujúce predpoklady: predpoklad Q3, matica  $I - A$  je regulárna, matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna a dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná. Nech  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^{\infty}$  je prípustné riadenie a  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^{\infty}$  jeho odozva pre úlohu  $U_1(x_0, \eta_1)$ . Nech rad  $\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{f}_1(x_t, u_t)$  konverguje. Potom postupnosť  $\{(x_t, u_t)\}_{t=0}^{\infty}$  konverguje k bodu  $(0, 0)$  pre  $t \rightarrow \infty$ .*

*Dôkaz.* Nech  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^{\infty}$  je prípustné riadenie a  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^{\infty}$  jeho odozva pre úlohu  $U_1(x_0, \eta_1)$ . Vieme, že za predpokladu regulárnosti matice  $I - A$  platí vzťah (2.22) pre  $\beta = 1$ :

$$l_1 = -B^T(I - A^T)^{-1}k_1$$

A teda účelovú funkciu môžeme upraviť do podoby:

$$\mathbf{f}_1(x_t, u_t) = k_1^T(I - A)^{-1}(x_t - x_{t+1}) + \mathbf{Q}_1(x_t, u_t) + \text{č. v. r.}$$

Vezmime si čiastočný súčet radu  $\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{f}_1(x_t, u_t)$ :

$$J_N = \sum_{t=0}^N [k_1^T(I - A)^{-1}(x_t - x_{t+1}) + \mathbf{Q}_1(x_t, u_t) + \text{č. v. r.}]$$

Upravme:

$$\begin{aligned} J_N &= \sum_{t=0}^N k_1^T(I - A)^{-1}[x_t - x_{t+1}] + \sum_{t=0}^N [\mathbf{Q}_1(x_t, u_t) + \text{č. v. r.}] \\ &= k_1^T(I - A)^{-1}[x_0 - x_{N+1}] + \sum_{t=0}^N [\mathbf{Q}_1(x_t, u_t) + \text{č. v. r.}] \end{aligned}$$

Chceme ukázať, že prípustné riadenie a jeho odozva konvergujú k bodu  $(0, 0)$ . Nech to neplatí. Potom existuje  $\varepsilon' > 0$  také, že pre všetky  $T \geq 0$  existuje  $t > T$  také, že  $\|(x_t, u_t)\| \geq \varepsilon'$ . Pretože  $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$  je ohraničené, tak výraz  $k_1^T(I - A)^{-1}[x_0 - x_N]$  je pre každé  $N$  ohraničený. Pretože funkcia  $\mathbf{Q}_1(x, u) + \text{č. v. r.}$  je na  $\Omega$  rýdzokonkávna s maximom v bode  $(0, 0)$  rovným 0, tak pre každé  $T \geq 0$  existuje  $t > T$  a  $K < 0$  také, že platí:

$$[\mathbf{Q}_1(x_t, u_t) + \text{č. v. r.}] \leq K < 0$$

Z čoho vyplýva, že  $J_N$  diverguje, čo je spor s predpokladom.  $\square$

**Veta 8.3.** *Nech  $\beta = 1$ . Nech aspoň jeden z vektorov  $k_1, l_1$  je nenulový. Nech sú ďalej splnené nasledujúce predpoklady: predpoklad Q3, matica  $I - A$  je regulárna, matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna a dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná. Potom existuje  $\varepsilon > 0$  také, že pre každé  $\|x_0\| < \varepsilon$  existuje pre úlohu  $U_1(x_0, \eta_1)$  jediné optimálne riadenie a jeho odozva a sú rovnaké ako pre úlohu  $U_1(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou  $\mathbf{Q}_1(x, u) + \text{č. v. r.}$*

*Dôkaz.* Z vety (8.1) vieme, že za týchto predpokladov existuje  $\varepsilon > 0$  také, že pre každé  $\|x_0\| < \varepsilon$  existuje pre úlohu  $U_1(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou  $\mathbf{f}_1(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u) + \text{č. v. r.}$  jediné optimálne riadenie rovné extrémálnemu riadeniu pre túto úlohu. Vieme tiež, že extrémálne riadenia a ich odozvy sú pre úlohu  $U_1(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou  $\mathbf{f}_1(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u) + \text{č. v. r.}$  a pre úlohu  $U_1(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou  $\mathbf{f}_1(x, u) = k_1^T x + l_1^T u + \mathbf{Q}_1(x, u) + \text{č. v. r.}$ , kde aspoň jeden z vektorov  $k_1, l_1$  je nenulový, rovnaké.

Nech  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^{\infty}$  je prípustné riadenie a  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^{\infty}$  jeho odozva pre úlohu  $U_1(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou  $\mathbf{f}_1(x, u) = k_1^T x + l_1^T u + \mathbf{Q}_1(x, u) + \text{č. v. r.}$ . Vezmime si čiastočný súčet radu

$\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{f}_1(x_t, u_t)$ :

$$J_N = \sum_{t=0}^N \mathbf{f}_1(x_t, u_t)$$

Z dôkazu predchádzajúcej vety vieme, že platí:

$$J_N = k_1^T (I - A)^{-1} [x_0 - x_{N+1}] + \sum_{t=0}^N [\mathbf{Q}_1(x_t, u_t) + \text{č. v. r.}]$$

Pretože  $x_N \rightarrow 0$  pre  $N \rightarrow \infty$ , tak platí, že suprénum dosiahneme len pre tie prípustné riadenia a ich odozvy, ktoré sú optimálne pre úlohu  $U_1(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou  $\mathbf{f}_1(x, u) = \mathbf{Q}_1(x, u) + \text{č. v. r.}$ , keďže také riadenie a jeho odozva sú jediné a rovnajú sa extrémálnemu riadeniu a odozve, tak dostávame tvrdenie.  $\square$

Uvažujme teraz  $\beta \in \underline{Q}$  rôzne od 1. Potom platí nasledujúca veta [16] o existencii optimálneho riadenia pre úlohu  $(U_\beta)$ :

**Veta 8.4.** *Nech  $\beta \in \underline{Q}$  rôzne od 1. Nech  $k_\beta = l_\beta = 0$ . Nech  $Z = X \times U$  je konvexná a kompaktná množina v  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  a nech funkcia  $\mathbf{f}_\beta$  je rýdzokonkávna na  $Z$ . Nech  $\hat{w} = \{\hat{u}_t\}_{t=0}^\infty$  je extrémálne riadenie a  $\hat{\chi} = \{\hat{x}_t\}_{t=0}^\infty$  jeho odozva pre úlohu s počiatočným bodom  $x_0 \in X$  také, že  $(\hat{x}_t, \hat{u}_t)$  leží v  $Z$  pre každé  $t$ . Potom  $\hat{w}, \hat{\chi}$  je optimálne riadenie a jeho odozva pre úlohu  $(U_\beta)$  zúženú na  $Z$ .*

Z predchádzajúceho vieme, že za predpokladu Q3 existuje také  $\eta_1$ , že na okolí  $\Omega$  definovaného v (8.1) s  $\eta = \eta_1$  je funkcia  $\mathbf{f}_\beta(x, u)$  rýdzokonkávna a teda veta (8.4) nám hovorí, že pre úlohu  $(U_\beta)$  zúženú na  $\Omega$  existuje optimálne riadenie a jeho odozva s počiatočným  $x_0$  takým, že  $\|x_0\| \leq \eta_1$ . Ďalej vieme, že za splnenia predpokladov Q3, regulárnosti matice  $I - A$ , matice  $\mathbf{A}_1$  a stabilizovateľnosti dvojice matíc  $(A, B)$  existuje pre úlohu  $(U_\beta)$  a dostatočne malé  $\eta_1$  jediné extrémálne riadenie a teda toto riadenie je zároveň optimálnym.

Nech  $\beta \in \underline{Q}$  rôzne od 1. Označujme úlohu  $(U_\beta)$  zúženú na  $\Omega$  s  $\eta = \eta_1$  ako  $U_\beta(x_0, \eta_1)$ . V ďalšej vete ukážeme, že pre úlohu  $U_\beta(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou, v ktorej je aspoň jeden z vektorov  $k_\beta, l_\beta$  nenulový, existuje jediné optimálne riadenie a jeho odozva a rovnajú sa optimálnemu riadeniu a jeho odozve pre úlohu  $U_\beta(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou, v ktorej  $k_\beta = l_\beta = 0$ .

**Veta 8.5.** *Nech  $\beta \in \underline{Q}$  rôzne od 1. Nech aspoň jeden z vektorov  $k_\beta, l_\beta$  je nenulový. Nech sú ďalej splnené nasledujúce predpoklady: predpoklad Q3, matica  $I - A$  je regulárna, matica  $\mathbf{A}_1$  je regulárna a dvojica matíc  $(A, B)$  je stabilizovateľná. Potom existuje  $\eta_1 > 0$  také, že pre každé  $\|x_0\| < \eta_1$  existuje pre úlohu  $U_\beta(x_0, \eta_1)$  jediné optimálne riadenie a jeho odozva a sú rovnaké ako pre úlohu  $U_\beta(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou  $\mathbf{Q}_\beta(x, u) + \text{č. v. r.}$*

*Dôkaz.* Z vety (8.4) vieme, že za týchto predpokladov existuje  $\eta_1 > 0$  také, že pre každé  $\|x_0\| < \eta_1$  existuje pre úlohu  $U_\beta(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou  $\mathbf{f}_\beta(x, u) = \mathbf{Q}_\beta(x, u) + \text{č. v. r.}$  jediné optimálne riadenie rovné extrémálnemu riadeniu pre túto úlohu. Vieme tiež, že extrémálne riadenia a ich odozvy sú pre úlohu  $U_\beta(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou  $\mathbf{f}_\beta(x, u) = \mathbf{Q}_\beta(x, u) + \text{č. v. r.}$  a pre úlohu  $U_\beta(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou  $\mathbf{f}_\beta(x, u) = k_\beta^T x + l_\beta^T u + \mathbf{Q}_\beta(x, u) + \text{č. v. r.}$ , kde aspoň jeden z vektorov  $k_\beta, l_\beta$  je nenulový, rovnaké. Navyše za predpokladu  $\beta \in \underline{Q}$  je matica  $I - \beta A$  regulárna a teda platí vzťah (2.22) medzi  $k_\beta$  a  $l_\beta$ :

$$l_\beta = -\beta B^T (I - \beta A^T)^{-1} k_\beta$$

Nech  $\omega = \{u_t\}_{t=0}^\infty$  je prípustné riadenie a  $\chi = \{x_t\}_{t=0}^\infty$  jeho odozva pre úlohu  $U_\beta(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = k_\beta^T x + l_\beta^T u + \mathbf{Q}_\beta(x, u) + \text{č. v. r.}$  Vezmime si čiastočný súčet radu  $\sum_{t=0}^\infty \beta^t [k_\beta^T x_t + l_\beta^T u_t + \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t) + \text{č. v. r.}]$ :

$$J_N = \sum_{t=0}^N \beta^t [k_\beta^T x_t + l_\beta^T u_t + \mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t) + \text{č. v. r.}]$$

Dosaďme za  $l_\beta$  vzťah (2.22), potom máme:

$$\begin{aligned} J_N &= \sum_{t=0}^N \beta^t k_\beta^T [x_t - \beta(I - \beta A)^{-1} B u_t] + \sum_{t=0}^N \beta^t [\mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t) + \text{č. v. r.}] \\ &= k_\beta^T (I - \beta A)^{-1} [x_0 - \beta^{N+1} x_{N+1}] + \sum_{t=0}^N \beta^t [\mathbf{Q}_\beta(x_t, u_t) + \text{č. v. r.}] \end{aligned}$$

Každá postupnosť  $\{x_t\}_{t=0}^\infty$  prípustných stavov je ohraničená a teda  $\beta^N x_N \rightarrow 0$  pre  $N \rightarrow \infty$ . Z toho vyplýva, že suprénum dosiahneme len pre tie prípustné riadenia a ich odozvy, ktoré sú optimálne pre úlohu  $U_\beta(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = \mathbf{Q}_\beta(x, u) + \text{č. v. r.}$ , keďže také riadenie a jeho odozva sú jediné, tak pre úlohu  $U_\beta(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = k_\beta^T x + l_\beta^T u + \mathbf{Q}_\beta(x, u) + \text{č. v. r.}$  existuje jediné optimálne riadenie a jeho odozva a sú rovnaké ako optimálne riadenie a jeho odozva pre úlohu  $U_\beta(x_0, \eta_1)$  s účelovou funkciou  $f_\beta^0(x, u) = \mathbf{Q}_\beta(x, u) + \text{č. v. r.}$   $\square$

# Záver

Motiváciou práce boli makroekonomické RBC modely a ich lineárne-kvadratická aproximácia, ktorá je ako úloha optimálneho programovania metódou postupných aproximácií numericky ľahko riešiteľná. Vychádzali sme pritom z práce [14] od dvojice autorov Blanchard, Kahn. V týchto modeloch sa rieši úloha maximalizácie celoživotného úžitku domácností za istých podmienok na stav a na vlastnosti účelovej a produkčnej funkcie. My sme uvažovali ako funkciu pre stav v nasledujúcej perióde lineárnu funkciu a pre účelovú funkciu sme predpokladali, že je trikrát spojitely diferencovateľná a jej Hessova matica je v rovnovážnom bode záporne definitná. Za týchto predpokladov je možné spraviť Taylorov rozvoj do druhého rádu a teda riešiť lineárne-kvadratickú úlohu miesto pôvodnej úlohy a navyše je účelová funkcia na dostatočne malom okolí rovnovážneho bodu rýdzokonkávna. Predpoklad rýdzej konkávnosti je štandardný predpoklad kladený na účelovú funkciu. Ako druhý predpoklad sa kladie podmienka dvakrát spojitely diferencovateľnosti, väčšinou však býva splnený aj silnejší predpoklad trikrát spojitely diferencovateľnosti. Na začiatku práce sme sa venovali príkladu makroekonomického modelu, v ktorom sa využíva lineárne-kvadratická aproximácia, a urobili rozšírenie pre viacrozmerné premenné. V ďalšom sme potom podali matematické spracovanie uvedenej problematiky. Uviedli sme definíciu rovnovážnej trojice a rozpísali nutné podmienky optimality pre lineárne-kvadratickú aj pôvodnú úlohu. Podrobne sme spracovali lineárne-kvadratickú úlohu s diskontom i bez diskontu, uviedli vety o existencii optimálneho riadenia, o vzťahu pre toto optimálne riadenie a jeho odozvu ako i hodnotovú funkciu a ich dôkazy. Následne sme prešli k úlohám s pôvodnou účelovou funkciou s diskotným faktorom a bez neho. Venovali sme sa postupne extrémalnemu riadeniu a jeho odozve a potom jeho vzťahu k optimálnemu riadeniu a jeho odozve. Ukázali sme existenciu optimálneho riadenia, ktoré sa rovná extrémalnemu a je jediné. Tiež sme využili niektoré poznatky z práce [7] na dôkaz existencie a jednoznačnosti hodnotovej funkcie pre úlohu s rýdzokonkávnu účelovou funkciou a lineárnou funkciou pre stav v nasledujúcej perióde.

Cieľom práce bolo ukázať, že použitie lineárne-kvadratickej aproximácie v makroekonomických RBC modeloch je lokálne dostatočne presné a teda oprávnené. Pre deterministický

prípád sme ukázali, že za istých podmienok existuje pre úlohu s pôvodnou účelovou funkciou zúženú na okolie rovnovážneho bodu jediné optimálne riadenie a jeho odozva, rovné extrémnemu riadeniu a jeho odozve a vzťah preň sa líši od optimálneho riadenia pre lineárne-kvadratickú úlohu len v členoch vyššieho ako prvého rádu. Súčasne sme ukázali, že hodnotové funkcie sa opäť líšia len v členoch vyššieho rádu, konkrétne druhého rádu. Navyše obe optimálne riadenia a ich odozvy konvergujú k rovnovážnemu bodu, ktorý je pre obidve úlohy rovnaký. Prínosom práce je spracovanie problematiky lineárnych členov vystupujúcich v účelovej funkcii a dôkaz toho, že optimálne riadenie je za istých predpokladov rovnaké pre úlohy s účelovou funkciou, v ktorej nevystupujú, resp. sú nulové, ako i pre úlohy s účelovou funkciou, v ktorej sú nenulové. V práci sme našli vzťah pre koeficienty vystupujúce pri lineárnych členoch v hodnotovej funkcii či už pre úlohu s diskontom, či bez neho.

Celkovo sa nám podarilo splniť stanovené ciele a ukázať oprávnenosť použitia lineárne-kvadratickej aproximácie v RBC modeloch ako i konvergenciu optimálneho riadenia a jeho odozvy pre túto úlohu k rovnovážnemu bodu. Navyše sme ukázali, že za ľahko splniteľných predpokladov lineárne členy vystupujúce v účelovej funkcii nemajú vplyv na optimálne riadenie a vzťah pre optimálne riadenie pre úlohu s účelovou funkciou, v ktorej vystupujú, je rovnaký ako pre optimálne riadenie pre úlohu s účelovou funkciou, v ktorej nevystupujú.

# Literatúra

- [1] KUČERA, V. : The Discrete Riccati Equation of Optimal Control, *Kybernetika* **8/5** (1972)
- [2] KUČERA, V. : A Review of the Matrix Riccati Equation, *Kybernetika* **9/1** (1973)
- [3] HALICKÁ, M., BRUNOVSKÝ, P., JURČA, P. : Optimálne riadenie (Viacetapové rozhodovacie procesy v ekonómii a financiách), *EPOS, Bratislava* (2009)
- [4] HALICKÁ, M. : Optimálne riadenie I, (Učebné texty), *ÚAM MFF UK v Bratislave, Bratislava* (1999)
- [5] BLOT, J., CHEBBI, H. : Discrete Time Pontryagin Principles with Infinite Horizon, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **246**, 265-279 (2000)
- [6] STOKEY, N. L., LUCAS, R. E., PRESCOTT, E. C. : Recursive Methods in Economics Dynamics, *Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England* (1989)
- [7] ZÁKOPČAN, M. : Rovnica dynamického programovania a jej riešenie metódou postupných aproximácií, *Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava* (2005)
- [8] ZÁMEČNÍK, M. : Nonlinear Theory of Rational Expectations, *Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava* (2005)
- [9] MARIMON, R., SCOTT, A. : Computational Methods for the Study of Dynamic Economies, *Oxford University Press, New York* (1999)
- [10] LJUNGQVIST, L., SARGENT, T. J. : Recursive Macroeconomic Theory, *The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England* (2000)
- [11] COOLEY, T. F. : Frontiers of Business Cycle Research, *Princeton University Press, New Jersey* (1995)

- [12] SUTHERLAND, W. R. S., WOLKOWICZ, H., ZEIDAN, V. : An Explicit Linear Solution for the Quadratic Dynamic Programming Problem, *Journal of Optimization Theory and Applications* **58/2**, 319-330 (1988)
- [13] ABRAHAM, R., MARSDEN, J., E. : Foundations of Mechanics, *W. A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam* (1967)
- [14] BLANCHARD, O., J., KAHN, C., M. : The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations, *Econometrica* **48/5**, 1305-1311 (1980)
- [15] GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P. : Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, *Springer-Verlag New York Inc.* (1983)
- [16] BRUNOVSKÝ, P., osobná komunikácia