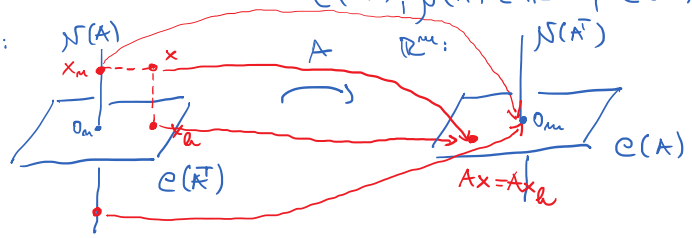
MP - 19.10.2026

pondelok 19. októbra 2026 10:52

Minule: $A: m\times n$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C}(A), \mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathcal{C}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T)$, $\dim \mathcal{C}(A) = r$, $\dim \mathcal{N}(A^T) = m-r$
: $\operatorname{rank} = r$ $\mathcal{C}(A^T), \mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}(A^T)^\perp = \mathcal{N}(A)$, $\dim \mathcal{C}(A^T) = r$, $\dim \mathcal{N}(A) = n-r$



LU rozklad: $A = LU$ ($m\times n$ = $m\times m$ $m\times n$)
$\rightarrow$ U: horná Δ : eliminácia
L: dolná Δ ; inverzné operácie v opačnom poradí na I

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
A L U

v praxi – aj pre obdĺžnikové A
– kvôli numerike / istote sa riadky A prehadzujú ← My: LU rozklad iba bez prehadzovania riadkov
↳ $\Rightarrow$ $PA = LU$, alebo $A = PLU$
↑ permutačná matica

použitie: maticový zápis na eliminácie
$Ax = b \rightarrow LUx = b$

$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \\ 10 \end{bmatrix}$

1.) $Ly = b$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \\ 10 \end{bmatrix}$

I. $y_1 = 4$
II. $4 \cdot 4 - 3y_2 = 13$
$-3y_2 = -3$
$y_2 = 1$
III. $3\cdot 4 - 2\cdot 1 + y_3 = 10$
$y_3 = 0$
$\Rightarrow y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

: dopredná substitúcia (lebo L - ~~horná~~ dolná Δ)

2.) $Ux = y$ $\rightarrow$ dopočítame x

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

III. zvolíme $x_3 = 0$
II. $x_2 - 0 = 1$
$x_2 = 1$
I. $x_1 + 2\cdot 1 + 0 = 4$
$x_1 = 2$
$\Rightarrow$ jedno rieš.: $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

: spätná substitúcia (lebo U - horná Δ)

Inverzná matica

$A: m\times n \longrightarrow$ ak $m = n$: $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $A^{-1}A = I_n = AA^{-1}$: inverzná mat.

- ľavá inv.: $L \in \mathbb{R}^{n\times m}$: $LA = I_n$ ($n\times m$ $m\times n$)
- pravá inv.: $R \in \mathbb{R}^{n\times m}$: $AR = I_m$ ($m\times n$ $n\times m$)

Fakty:

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- inv. existuje $\Leftrightarrow$ $m = n$ a $\operatorname{rank}(A) = n$: plná hodnosť (A-regulárna)
- ľavá inv. existuje $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A) = n$: plná stĺpcová hodnosť ← Pr.: $L = (A^TA)^{-1}A^T$
- pravá inv. existuje $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A) = m$: plná riadková hodnosť ← Pr.: $R = A^T(AA^T)^{-1}$

$\operatorname{rank}(A^TA) = \operatorname{rank}(A) = n$
A^TA ($n\times n$ $n\times n$) $(A^TA)^{-1}$ ex.
($n\times n$)

($AR = A\cdot A^T(AA^T)^{-1} = I$ ✓)

- inverzná matica = inverzia (stručnejšie)
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ pre A, B - reg.
- $A \in \mathcal{S}^n$, reg. $\Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{S}^n$.

$\mathcal{S}^n$ = množ. všetkých $n\times n$ sym. matíc

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ pre A, B - reg.
- $A \in \mathcal{S}^n$, reg. $\Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{S}^n$.

$\mathcal{S}^n$ = množ. všetkých $n \times n$ sym. matíc

---

viemo: $\mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A)$ $\forall B$ (z V)

→ čo sa stane pre B - reg. : chceme $\mathcal{C}(AB) = \mathcal{C}(A)$

$\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(AB)$? : z V : bude platiť ak $A = ABX$ pre nejaké X

vezmime $X = B^{-1}$ (↑): $A = ABB^{-1}$ ✓ $\overset{z V}{\Rightarrow} \mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(AB)$

$\Rightarrow$ Spolu: $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(AB)$

$\Rightarrow$ Tvrdenie: Nech $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ B - regulárna. Potom $\mathcal{C}(AB) = \mathcal{C}(A)$.

Hodnosť a inv. blokových 2×2 matíc

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} t & u \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \ (\leftarrow 1+1) & w \neq 0 \\ 1 \ (\Leftarrow 1+0) & w = 0 \end{cases} \Big\} = \operatorname{rank}(t) + \operatorname{rank}(w) = 1 + \operatorname{rank}(w)$$

(1 ... len čísla; pre $t \neq 0$; $1 \ (1, 0)$)

zovšeobecnenie: lema: $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - reg., $U \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $W \in \mathbb{R}^{m \times q}$ $\Rightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} T & U \\ 0_{m \times n} & W \end{pmatrix} = n + \operatorname{rank}(W)$

$= \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(W)$.

(Bez dôkazu)

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} T & U \\ V & W \end{pmatrix} = ?$, predp.: T: $n \times n$, reg.

→ blokova' eliminácia → násobit' riadky reg. maticami

→ pripočítavat' lúb. maticový' násobok riadkov k iným

→ riadky $\Rightarrow$ zľava

$$\begin{pmatrix} T & U \\ V & W \end{pmatrix} \overset{-VT^{-1}\ (\text{zľava})}{\sim} \begin{pmatrix} T & U \\ V - VT^{-1}T & W - VT^{-1}U \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} T & U \\ 0 & W - VT^{-1}U \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} T & U \\ V & W \end{pmatrix}$

$V - VT^{-1}T = 0$

x (1. riadok) pripočítam

$V + XT = 0$

$V = -XT \quad / \cdot T^{-1}$ p

$VT^{-1} = -X$

$X = -VT^{-1}$ ✓

označ. $S = W - VT^{-1}U$: Schurov doplnok / SCHUROV

$\Rightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} T & U \\ V & W \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} T & U \\ 0 & S \end{pmatrix} \overset{\text{lema}}{=} \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(S) = n + \operatorname{rank}(S)$ (k)

---

invertná'? A - štvorcová': $A = \begin{bmatrix} T & U \\ V & W \end{bmatrix}$ (n, m)

T: $n \times n$, reg.

U: $n \times m$

V: $m \times n$

W: $m \times m$

1.) kedy je A reg.? A: $(n+m) \times (n+m)$ $\Rightarrow$ chceme rank $= n+m$

$\operatorname{rank}(A) = \underset{(k)}{n} + \operatorname{rank}(S) \overset{\text{chceme}}{=} n + m$

$\Rightarrow$: A - reg. $\Leftrightarrow$ S - reg.

$\operatorname{rank}(S) = m$

$S = W - VT^{-1}U$: $m \times m$

($m \times m$ = $m \times n$ $n \times n$ $n \times m$; $m \times n$; $m \times m$)

2.) ak T - reg. predpokladajme aj: S - reg.

$m \times n$

$n \times m$

2.) Keď T-reg. predpokladajme aj: S-reg.

inv. $\Rightarrow$ blokovú elim.

$$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\left[\begin{array}{cc|cc} T & U & I_n & 0 \\ V & W & 0 & I_m \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} T & U & I_n & 0 \\ V - VT^{-1}T & W - VT^{-1}U & 0 - VT^{-1}I_n & I_m - VT^{-1}0 \end{array}\right] \sim$$

$V - VT^{-1}T = 0$, $W - VT^{-1}U = S$, $0 - VT^{-1}I_n = -VT^{-1}$, $I_m - VT^{-1}0 = I_m$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} T & U & I_n & 0 \\ 0 & S & -VT^{-1} & I_m \end{array}\right] \quad / \cdot S^{-1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} T & U & I_n & 0 \\ 0 & I_m & -S^{-1}VT^{-1} & S^{-1} \end{array}\right] \quad / \cdot T^{-1}$$

$-VT^{-1}$, $-U$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} T & U & I_n & 0 \\ 0 & I_m & -S^{-1}VT^{-1} & S^{-1} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} T & 0 & I_n + US^{-1}VT^{-1} & 0 - US^{-1} \\ 0 & I_m & -S^{-1}VT^{-1} & S^{-1} \end{array}\right] \sim$$

$U - U = 0$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} I_n & 0 & T^{-1} + T^{-1}US^{-1}VT^{-1} & -US^{-1} \\ 0 & I_m & -S^{-1}VT^{-1} & S^{-1} \end{array}\right] \quad (*) = A^{-1}$$

Zhrnutie:

Veta $A = \begin{pmatrix} T & U \\ V & W \end{pmatrix}$, T-reg.

(i) $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(S)$, $S = W - VT^{-1}U$

(ii) ak A-štvorcová, potom: A-reg. $\Leftrightarrow$ S-reg.

(iii) ak A-reg., potom $A^{-1} = (*)$

Ortogonálne matice

- $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$: $q_2 \perp q_1$: $q_1^T q_2 = 0$
- $q_1, \dots, q_k$ – navzájom ortogonálne : $q_i^T q_j = 0 \quad \forall i \neq j$
  - ak navyše $\|q_i\| = 1 \ \forall i$ $\Rightarrow$ ortonormálne
  - $\Updownarrow$ $q_i^T q_i = 1 \ \forall i$

$$Q = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{array}\right]}_{\text{ortog. stĺpce}}{}_{n \times 3} \Rightarrow Q^T Q = \left[\begin{array}{ccc} - & q_1^T & - \\ - & q_2^T & - \\ - & q_3^T & - \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} q_1^T q_1 & q_1^T q_2 & q_1^T q_3 \\ q_2^T q_1 & q_2^T q_2 & q_2^T q_3 \\ q_3^T q_1 & q_3^T q_2 & q_3^T q_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \|q_1\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|q_2\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|q_3\|^2 \end{array}\right]$$

$q_i^T q_j = 0$ pre $i \neq j$; $\|q_i\| = 1$

$$= \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = I_3$$, ak sú ortonormálne

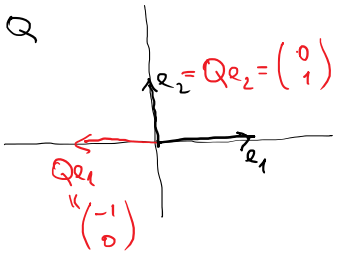
- $Q \in \mathbb{R}^{n \times k}$ má ortonormálne stĺpce $\Leftrightarrow$ $Q^T Q = I_k$
- ak Q je štvorcová a má ortonormálne stĺpce, tak ju voláme ortogonálna
  - $\hookrightarrow$ spĺňa: $Q: n \times n$ a $Q^T Q = I_n$
- Q - ortog.: $Q^T Q = I_n \Rightarrow Q^{-1} = Q^T \Rightarrow QQ^{-1} = I_n$: aj $QQ^T = I_n$
- $QQ^T = I_n$: Q má ortonormálne riadky : Dú: $Q = \left[\begin{array}{c} - \tilde{q}_1^T - \\ - q_i^T - \end{array}\right] \Rightarrow QQ^T = \dots$

- $QQ^T = I_n$: Q má ortonormálne riadky ; Dú: $Q = \begin{bmatrix} -\tilde{q}_1^T- \\ -\tilde{q}_2^T- \\ -\tilde{q}_3^T- \end{bmatrix} \Rightarrow QQ^T = \dots$ (overte)

$\Rightarrow$ ortog. mat. má ortonormálne stĺpce aj riadky

Príklady ortog. matíc:

- I_n
- $Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$: rotácia o uhol θ v smere $\circlearrowleft$
- osová symetria podľa y-ovej : Q



$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Všeob. : ortog. mat. : matice rotácií a osových symetrií

Pozorovanie :

- Q - ortog. $\Rightarrow Q^T$ - ortog.
- $(Q_1Q_2)^T(Q_1Q_2) = Q_2^T \underbrace{Q_1^T \cdot Q_1}_{I} Q_2 = \underbrace{Q_2^T Q_2}_{I} = I$

  $\rightarrow Q_1, \dots, Q_k$ - ortog. $\Rightarrow Q_1 \cdot \dots \cdot Q_k$ - ortog.

Lema :

Nech Q - ortog. Potom $\|Qx\| = \|x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Dôkaz: $\|Qx\| = \sqrt{(Qx)^T Qx} = \sqrt{x^T \underbrace{Q^T Q}_{I} x} = \sqrt{x^T x} = \|x\|$ ✓

$\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^T Qy = x^T \underbrace{Q^T Q}_{I} y = x^T y = \langle x, y \rangle$ ✓ ▨