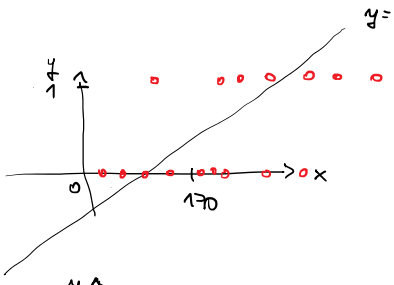
PDV - 13.11.2026

piatok 13. novembra 2026 11:19

Minule: k-NN
Dnesny: DÚ
: p's.
: náhr. hodnota

Logistická regresia

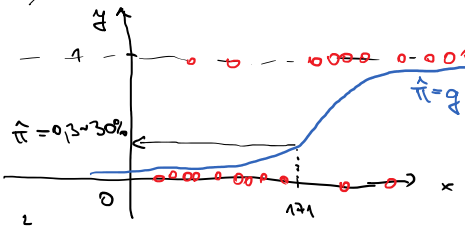
$x_i \in \mathbb{R}^r$, $y_i \in \{0,1\}$



$y = \beta_0 + \beta_1 x$: lin. reg.

0: žena
1: muž
x: výška

Logistická regresia →



← reálna priamka

$y = g(\beta_0 + \beta_1 x)$

$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1 = ?$

$J(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}} \right)^2 \to \min_{\beta}$; toto sa nepoužíva

$g(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$

- $g(t) \in (0,1)\ \forall t$
- $\lim_{t\to\infty} g(t) = 1$
  $\lim_{t\to-\infty} g(t) = 0$

- pravdepodobnostný prístup: $y_i \sim Alt(\pi_i)$

$X \sim Alt(\pi)$: $X = \begin{cases} 0, & \text{pp. } 1-\pi \\ 1, & \text{pp. } \pi \end{cases}$

π_i: pp., že i-tý objekt je z triedy 1
$\pi_i \in (0,1)$

→ Ako modelujeme π : $\pi_i = g(\beta_0 + \beta_1 x_i) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_i}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_i}}$

Spolu: Logist. reg.:
1.) $y_i \sim Alt(\pi_i)\ \forall i = 1,\dots,n$; nez.
2.) $\pi_i = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_i}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_i}}$ ← ako modelujeme pp. (čo je zároveň $E(y_i|\cdot)$)

LR: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ↓ $y_i = x_i^T\beta + \varepsilon_i$

Pre viacero x-ov:
Logist. reg.:
1.) $y_i \sim Alt(\pi_i)\ \forall i$, nez. → $y_1,\dots,y_n$
2.) $\pi_i = g(x_i^T\beta) = \frac{e^{x_i^T\beta}}{1+e^{x_i^T\beta}}$

$\hat{\beta}$: Met. max. vier. MMV
MLE: Maximum Likelihood Estimator

$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = y_i) \to \max_{\beta}$; $y_i \in \{0,1\}$: namerané hodnoty

$Y \sim Alt(\pi) \overset{\text{tiež}}{\Rightarrow} P(Y=y) = \pi^y(1-\pi)^{1-y} \overset{\text{overme}}{=}$
$\pi^1(1-\pi)^0 = \pi$, $y=1$ ✓
$\pi^0(1-\pi)^1 = 1-\pi$, $y=0$

fcia vierohodnosti
$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \pi_i^{y_i}(1-\pi_i)^{1-y_i} \to \max_{\beta}$

$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{x_i^T\beta}}{1+e^{x_i^T\beta}}\right)^{y_i} \left(1 - \frac{e^{x_i^T\beta}}{1+e^{x_i^T\beta}}\right)^{1-y_i} \to \max_{\beta}$

typicky:
$l(\beta) = \ln L(\beta) \to \max_{\beta} \Leftrightarrow L(\beta) \to \max_{\beta}$
$\uparrow = \sum_{\dots} 0. \{\ \}$ ← Keby sa ničím nelíšia, je "nepohodlnejší" – napr. kvôli derivácii

$\ell(\beta) = \ln L(\beta) \to \max_\beta \iff L(\beta) \to \max_\beta$

$= \sum_{i=1}^{n} \ln\{\dots\}$ ← lebo súčin pp. je "nepohodlný" – analyticky (derivácie)
– numericky (súčin malých čísel)

log-likelihood

$\ell(\beta) \to \max$: typicky grad./Newt. met.

interpretácie $\hat\beta$:

$\pi_i = \dfrac{e^{x_i^T\beta}}{1+e^{x_i^T\beta}} \iff \dfrac{\pi_i}{1-\pi_i} = e^{x_i^T\beta}$ (□)

$\pi_i(1+e) = e$

$\pi_i + \pi_i e = e$

$\pi_i = e - \pi_i e$

$\dfrac{\pi_i}{1-\pi_i} = e$

$x_i^T\beta = \beta_0 + \beta_1 \text{výška}_i + \beta_2 \text{váha}_i$

$\Downarrow$

$\underbrace{\dfrac{\hat\pi_i}{1-\hat\pi_i}}_{\text{šance (odds)}} = e^{\hat\beta_0 + \hat\beta_1 vy_i + \hat\beta_2 va_i}$

kocka ... pp., že padne 3 je $1/6$

... šance padnutia 3 sú $1:5 = \dfrac{1/6}{5/6} = \dfrac{\pi_i}{1-\pi_i}$

$vý \mapsto vý+1 \Rightarrow \text{šance}_{\text{nové}} = e^{\hat\beta_0 + \hat\beta_1 vy + \hat\beta_1 + \hat\beta_2 va} = e^{\hat\beta_1} \cdot \underbrace{e^{\hat\beta_0 + \hat\beta_1 vy + \hat\beta_2 va}}_{\text{šance}_{\text{staré}}}$

↳ ⇒ odhadnuté šance sa zmenia na $e^{\hat\beta_1}$-násobok

Pytlou: $e^{\hat\beta_1} = 1{,}28$: šance sa zvýšia na 1,3-násobok (o 28 %)

$e^{\hat\beta_2} = 0{,}995$: šance, že je človek muž, sa pri váhe vyššej o 1 kg (a zachovanej výške) znížia na 0,995-násobok (teda o 0,5 %)

0,995-násobok = 99,5 % z pôv. hod.

predikcie:

dáto $x \Rightarrow \hat y$? $\hat\pi = \dfrac{e^{x^T\beta}}{1+e^{x^T\beta}}$: pp. triedy 1

$\Rightarrow \hat y = \begin{cases} 1 & \text{ak } \hat\pi > c \\ 0 & \text{ak } \hat\pi \le c \end{cases}$ ← threshold (napr. 0,5)

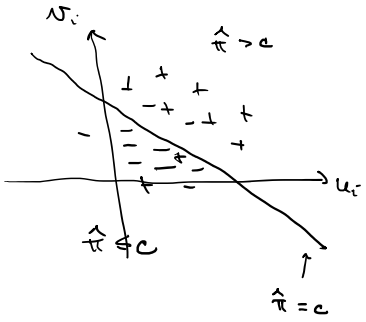
0 : –
1 : +

– aj $\hat\pi$ samé osebe môže byť cieľom

rozhodovacia hranica: pre $x_i = \begin{pmatrix} 1 \\ u_i \\ v_i \end{pmatrix}$ $\hat\pi_i = g(\hat\beta_0 + \hat\beta_1 u_i + \hat\beta_2 v_i)$

$\hat\pi_i = \dfrac{e^{\hat\beta_0 + \hat\beta_1 u_i + \hat\beta_2 v_i}}{1+e^{(\ )}}$

$\hat\pi_i \ge c \Rightarrow \hat y = 1$
$< c \Rightarrow \hat y = 0$ ⇒ tlom: $\hat\pi_i = c$



$\Rightarrow \dfrac{e^{(\ )}}{1+e^{(\ )}} = c \overset{(□)}{\iff} e^{(\ )} = \dfrac{c}{1-c}$ / ln

$\hat\beta_0 + \hat\beta_1 u_i + \hat\beta_2 v_i = \underbrace{\ln \dfrac{c}{1-c}}_{\text{konštanta}}$ ← priamka ⇒ decision boundary = priamka (rovina, nadrovina)

– lineárna

Áno:

Dá sa aj zakrivená? Transformáciou dát, napr.: $x_i = \begin{pmatrix} 1 \\ u_i \\ v_i \\ u_i^2 \\ v_i^2 \\ u_i v_i \end{pmatrix}$

Problém: predikcia bankrotu, y_i: $\begin{cases} 99\% : y_i = 0 \text{ (nebankrot)} \\ 1\% : y_i = 1 \end{cases}$ ⇒ $\hat\pi \doteq 0$ vždy

Problém: predikcia bankrotu, y_i: 99% : $y_i = 0$ (nebankrot), 1% : $y_i = 1$ (bankrot) $\Rightarrow$ $\hat{\pi} \doteq 0$ vždy

→ Riešenie – subsampling: vybrať iba časť dát (aby triedy boli ~ vyrovnané)

– váhy pozorovaniam: $\mathcal{I}(\beta) = \sum_{i=1}^{n} w_i \ln(\ldots)$ ↑ väčšia váha bankrotom

– zmena thresholdu ($\hat{y} = 1$ už pri $\hat{\pi} > 0{,}1$)

výber thresholdu, premenných – (kros)validácia

– už asi nie HSE

→ accuracy (presnosť) = $\frac{\#\text{správnych predikcií}}{\#\text{predikcií}}$ → max.

TPR (true positive rate) (recall, sentitivita) = $\frac{\#\text{správne pred. 1}}{\#\text{jednotiek}} = \frac{\#(y_i = 1 \wedge \hat{y}_i = 1)}{\#(y_i = 1)}$ → max.

} všetky: na val. vzorke

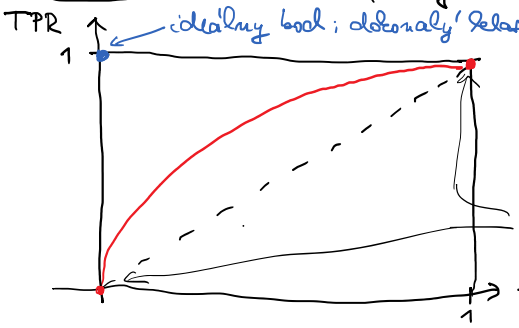
TNR (true negative rate) (špecificita) = $\frac{\#(y_i = 0 \wedge \hat{y}_i = 0)}{\#(y_i = 0)}$ → max.

celkový pohľad: confusion matrix:

pred. \ skut.	$y_i = 0$	$y_i = 1$	Σ
$\hat{y}_i = 0$	433	93	526
$\hat{y}_i = 1$	91	379	470
Σ	524	472	996

→ accuracy

ROC krivka (Receiver operating characteristic – hist. názov)



$\text{FPR} = \frac{\#(y_i = 0 \wedge \hat{y}_i = 1)}{\#(y_i = 0)}$ ← falošné jednotky (false positive rate) → min.

– vyznačíme (FPR, TPR) pre každý threshold

– váhy prechádza týmito bodmi

pre $c = 0 \Rightarrow \hat{y}_i = 1 \; \forall i \Rightarrow \text{FPR} = 1, \text{TPR} = 1$ ($\hat{y} = 1 : \hat{\pi} > c$)

pre $c = 1 \Rightarrow \hat{y}_i = 0 \Rightarrow \text{FPR} = 0, \text{TPR} = 0$