UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Zvyšovanie rozlišovacej schopnosti modelov obálkovej analýzy dát

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2021 Lenka Belanová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Zvyšovanie rozlišovacej schopnosti modelov obálkovej analýzy dát

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická, finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Bratislava 2021 **Lenka Belanová**



89446223

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Lenka Belanová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Zvyšovanie rozlišovacej schopnosti modelov obálkovej analýzy dát
Increasing discriminating power in data envelopment models

Anotácia: V obálkovej analýze dát (DEA)jednotlivé modely prislúchajúce tej istej technologickej množine jednoznačne identifikujú efektívne a neefektívne útvary. Pre neefektívne útvary určia aj hodnoty ich efektivít, ktoré umožnia vytvárať rebríčky útvarov podľa ich efektivít. Problém je však v tom, že efektívnych útvarov, ktore majú maximálnu efektivitu, môže byť pomerne veľa, čo sa označuje ako slabá rozlišovacia schopnosť modelov. V DEA sa vyvíjajú rozličné postupy, ktoré umožňujú rozlišovať aj medzi samotnými efektívnymi útvarmi.

Vedúci: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Dátum zadania: 17.12.2019

Dátum schválenia: 21.12.2019 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Touto cestou by som sa chcela poďakovať mojej vedúcej diplomovej práce, Doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc., ktorá strávila množstvo času čítaním rôznych verzií tejto práce, ochotne mi zodpovedala všetky moje otázky a pripojila cenné odporúčania, odborné rady, návrhy a pripomienky. Taktiež mojej rodine za trpezlivosť a podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

BELANOVÁ, Lenka: Zvyšovanie rozlišovacej schopnosti modelov obálkovej analýzy dát [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2020, 74 s.

V rámci DEA modelov je viacero útvarov v súbore označených za efektívne a nie je možné medzi nimi rozlišovať. V tejto práci opíšeme tri metódy, ktoré umožňujú vytvoriť poradie aj medzi efektívnymi útvarmi v prípade CCR, BCC a SBM modelu. Prvou je metóda krížovej efektivity, ktorá je najčastejšie aplikovaná na CCR model, pričom v tejto práci ju rozšírime aj na BCC model a popíšeme jej vlastnosti. Budeme sa venovať odstráneniu závislosti tejto metódy od výberu optimálnych vektorov váh aplikovaním tzv. Cielenej metódy. Ukážeme aj, že v prípade variabilných výnosov z rozsahu pre niektoré dvojice útvarov nemusí byť vzájomná efektivita dobre definovaná. Druhou metódou je metóda odchýlkovej neefektivity. Ukážeme, že nevýhodou tejto metódy je opäť nejednoznačnosť, teda poradie závisí od výberu optimálnych vektorov váh a uvedieme doplňujúcu úlohu na odstránenie tohto problému. Túto metódu aplikujeme navyše aj na neradiálny SBM model. Keďže obe spomínané metódy závisia od výberu optimálnych vektorov váh, pozrieme sa aj na súvislosť optimálneho riešenia CCR, BCC a SBM modelu s opornými nadrovinami k množine produkčných možností. Treťou metódou na vytváranie poradia medzi útvarmi bude metóda superefektivity.

Všetky popisované metódy aplikujeme na príklady, analyzujeme ich vlastnosti a podrobne popíšeme nedostatky jednotlivých metód ako aj navrhneme riešenia na ich odstránenie a taktiež porovnáme tieto metódy medzi sebou. Zároveň sa budeme venovať aj geometrickej interpretácii.

Kľúčové slová: DEA modely, Metóda krížovej efektivity, Metóda neefektivity, Metóda superefektivity, poradie

Abstract

BELANOVÁ, Lenka: Increasing discriminating power in data envelopment models [Diploma thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2020, 74 s.

In DEA models, it is difficult to discriminate further among the DEA efficient units. In this paper, we describe three methods that allow you to create an order from efficient units in the case of CCR, BCC and SBM model. The first is the method of cross-efficiency, which is most often applied to the CCR model, while in this work we extend it to the BCC model and describe its properties. We will focus on removing ambiguity of the method caused by selection of optimal weight vectors by applying the so-called Targeted method. We also show that in the case of variable return of scale for some pairs of units, cross-efficiency may not be well defined. The second method is based on deviation inefficiency. We will present that the disadvantage of this method is again ambiguity, so the order depends on the choice of optimal weight vectors. In order to eliminate ambiquity, additional model is proposed in this paper. In addition, we provide extention of this method to a non-radial SBM model. Since both mentioned methods depend on the selection of optimal weight vectors, connection of the optimal solution of CCR, BCC and SBM model with supporting hyperplanes to the production possibility set, is analysed. The third method for ranking efficient units is super-efficiency method.

We analyze properties of mentioned methods, describe in detail their shortcomings as well as propose solutions to eliminate them and also compare these methods with each other. At the same time, we will focus on geometric interpretation.

Keywords: DEA models, Cross-efficiency method, Inefficiency method, Superefficiency method, Ranking

Obsah

Úvod **9**

1 Základné pojmy z DEA **11**

1.1 CCR modely 11

1.2 BCC model 14

1.3 SBM model 16

2 Súvislosť riešení modelov s opornou nadrovinou množiny produkčných možností **19**

2.1 Množina produkčných možností 19

2.2 Oporná nadrovina k množine produkčných možností 20

2.3 Interpretácia riešenia CCR-I a BCC-I modelu 20

2.4 Interpretácia riešenia SBM modelu 25

3 Metóda krížovej efektivity **27**

3.1 Metóda krížovej efektivity - CRS 27

3.2 Metóda krížovej efektivity - VRS 28

3.2.1 Riešenia nedostatkov 29

3.3 Príklad 1 31

4 Metóda odchýlkovej neefektivity **36**

4.1 Neefektivita v CCR-I modeli 36

4.2 Metóda odchýlkovej neefektivity v CCR-I modeli 38

4.3 Príklad 2 39

4.4 Metóda odchýlkovej neefektivity v BCC-I modeli 41

4.5 Odstránenie nejednoznačnosti 42

4.6 Príklad 3 44

4.7 Metóda odchýlkovej neefektivity vo výstupných modeloch 46

4.8 Metóda odchýlkovej neefektivity v SBM modeli 47

5 Metóda superefektivity **50**

5.1 Metóda superefektivity v BCC modeli 50

5.2 Metóda superefektivity v CCR modeli 51
5.3 Metóda superefektivity v SBM modeli 53

6 Porovnanie metód **56**
6.1 Teoretické porovnanie 56
6.2 Prípadové štúdie 59
6.2.1 Výsledky v Súboroch 1-5 vzhľadom na CCR-I model 60
6.2.2 Výsledky v Súboroch 6-10 vzhľadom na BCC-I model 62
6.2.3 Výsledky v Súboroch 1-10 vzhľadom na SBM model 65
6.2.4 Zhrnutie a diskusia 67

Záver **69**

Literatúra **72**

A Príloha **75**
A.1 Súbor 1 75
A.2 Súbor 2 76
A.3 Súbor 3 77
A.4 Súbor 4 78
A.5 Súbor 5 79
A.6 Súbor 6 80
A.7 Súbor 7 81
A.8 Súbor 8 82
A.9 Súbor 9 83
A.10 Súbor 10 84

Úvod

V súčastnosti sú naše rozhodnutia dosť často ovplyvňované rôznymi rebríčkami. Hľadáme najlepší film, najlepšiu knihu, najlepšiu školu, obchod, firmu, ...

DEA modely sa zaoberajú ohodnocovaním útvarov, ktoré spotrebúvajú rovnaké vstupy na vyprodukovanie určitých výstupov. Používajú sa v rôznych oblastiach ako napríklad v bankovníctve na ohodnotenie výkonu bánk [24], výber portfólia [12] atď.. Hlavnou myšlienkou je priradenie hodnoty efektivity pre každý útvar v súbore. Základné a najpoužívanejšie modely, v prípade konštantných výnosov z rozsahu je to CCR model, ktorý opísali Charnes *et al.* v článku [4], v prípade variabilných výnosov z rozsahu *BCC* model, opísaný v článku [2] autormi Banker *et al.*, priradia hodnotu efektivity každému útvaru a tým ich rozdelia na efektívne a neefektívne. Problém nastáva ak chceme z ohodnocovaných súborov vytvoriť poradie. Kým neefektívne útvary vieme usporiadať na základe hodnoty efektivity, v prípade efektívnych útvarov je táto hodnota rovnaká a nie je možné ich rozlíšiť. Tento problém je spôsobený nedostatočnou rozlišovacou schopnosťou týchto modelov.

Existuje veľa prístupov a metód, ktoré sa zaoberajú zvyšovaním rozlišovacej schopnosti daných modelov. Autori Torgersen A.M. *et al.* v článku [27] navrhujú vytváranie poradie na základe toho, ako často sa útvar nachádza v referenčnej množine neefektívnych útvarov. Existujú aj iné zložitejšie metódy na zvyšovanie rozlišovacej schopnosti DEA modelov, ktorými sú metóda krížovej efektivity, odchýlkovej neefektivity a superefektivity a práve týmito metódami sa budeme zaoberať v našej práci.

Metódu krížovej efektivity ako prví uviedli Sexton *et al.* v článku [19]. Hlavnou myšlienkou tejto metódy je získanie hodnôt vzájomných efektivít pre všetky dvojice útvarov v súbore, pomocou optimálnych vektorov váh jedného člena z dvojice. Keďže optimálne vektory váh nie sú určené jednoznačne poradie, ktoré získame pomocou tejto metódy nie je jednoznačné, čo je najväčším nedostatkom tejto metódy. Existuje veľa prác, ktoré sa zaoberajú odstránením tohto nedostatku. V článku [6] autori uvádzajú tzv. Metódu I, Metódu II. Tieto metódy sme opísali v bakalárskej práci [9], kde sme kvôli odstráneniu nejednoznačnosti metódy, zároveň uviedli aj tzv. Cielenú metódu. Väčšina prác sa venuje aplikácii metódy krížovej efektivity, ak súbor vykazuje konštantné výnosy z rozsahu, v prípade variabilných výnosov z rozsahu sme našli v literatúre len článok [15]

od autorov Lim *et al.*.

V článku [8], z roku 2019, autori Ghasemi *et al.* uvádzajú metódu, ktorú sme nazvali ako metóda odchýlkovej neefektivity. Táto metóda spočíva vo vytvorení poradia na základe určitých odchýliek ostatných útvarov od opornej nadroviny, prislúchajúcej k testovanému útvaru. Autori tvrdia, že poradie vytvorené na základe tejto metódy je jednoznačné. Avšak, rovnako ako pri predchádzajúcej metóde, výsledky závisia od výberu optimálnych vektorov váh, a preto tvrdenia obsiahnuté v článku [8] vzbudzujú pochybnosti o ich pravdivosti.

Poslednou a veľmi používanou metódou na vytvorenie poradia medzi efektívnymi útvarmi je metóda superefektivity, ktorá bola použitá v rôznych oblastiach [29, 14, 7]. Superefektivita bola prvýkrát spomenutá v článku [1] od autorov Andersen *et al.*, v súvislosti s BCC modelom. Pre niektoré útvary však táto hodnota superefektivity nebola dobre definovaná, a tak sa veľa článkov venovalo tomuto problému. Autori Seiford *et al.* popísali nutné a postačujúce podmienky pre existenciu optimálneho riešenia úlohy, pomocou ktorej sa získava táto hodnota superefektivity pre jednotlivé útvary v súbore. V článku [3], autori Cook *et al.*, modifikujú model od Andersena *et al.* tak, aby hodnota superefektivity bola dobre definovaná pre všetky útvary. Tone *et al.*, v článku [26], vyvinuli metódu superefektivity v súvislosti s SBM modelom a v článku [11] bol postup rozšírený na všetky neradiálne, neorientované modely.

Naša práca je rozdelená do šiestich častí. V prvej kapitole uvedieme základné pojmy z DEA modelov, ako aj CCR, BCC a SBM model, ktoré budeme ďalej využívať. V druhej kapitole opíšeme súvislosť medzi optimálnym riešením CCR, BCC a SBM modelu s opornou nadrovinou k množine produkčných možností. V tretej kapitole opíšeme metódu krížovej efektivity. Štvrtá kapitola bude venovaná metóde odchýlkovej neefektivity a piata kapitola metóde superefektivity. Porovnanie metód na menších príkladoch, ktoré sa dajú graficky znázorniť uvedieme v šiestej kapitole.

1 Základné pojmy z DEA

V tejto časti uvedieme informácie z DEA modelov, ktoré budeme využívať v ďalších kapitolách. Podrobné spracovanie je možné nájsť v práci [10], z ktorej sme čerpali.

Majme n útvarov v pozorovanom súbore, ktoré budeme označovať taktiež ako DMU_j, kde $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Nech každé DMU_j vytvára s výstupov z m vstupov, pričom hodnotu i-teho vstupu j-teho útvaru označíme $x_{ij}, i = 1, 2, \ldots, m$ a tvoria zložky vektora $x_j \in \mathbb{R}^m$. Hodnotu r-tého výstupu j-teho útvaru označíme $y_{rj}, r = 1, 2, \ldots, s$, pričom tvoria zložky vektora $y_j \in \mathbb{R}^s$. Vektor $v_j \in \mathbb{R}^m_+$ označuje vektor váh pre vstupy DMU_j a naopak $u_j \in \mathbb{R}^s_+$ reprezentuje vektor váh pre výstupy DMU_j. V ďalšom texte budeme predpokladať, že všetky hodnoty vstupov sú kladné pre každý útvar ako aj všetky výstupy pre každý útvar v súbore sú kladné.

1.1 CCR modely

V prvej kapitole našej práce [9] sme v Definícii 1.6 uviedli tzv. Základný model od autorov článku [4], odpovedajúci konštantným výnosom z rozsahu. Vychádzali sme pritom z ekonomickej interpretácie pojmu efektivita v danom systéme váh, ktorý bol definovaný ako produktivita testovaného útvaru v daných vektoroch váh, lomeno maximálna produktivita v celom súbore útvarov v daných vektoroch váh. Aby sa odstránila závislosť efektivity od váh, tak Základný model vyberal váhy pre testovaný útvar tak, aby maximalizoval svoju vlastnú efektivitu E_{oo} a zároveň, aby efektivita DMU_j, $j \neq o$, vzhľadom na optimálnu dvojicu vektorov váh (v_o, u_o) bola menšia alebo rovná jednej[1]. Autori článku [4] previedli Základný model na ekvivalentné modely (vstupne / výstupne orientované), ktoré sú úlohami lineárneho programovania a označujeme ich ako CCR modely. Vstupne orientovaný CCR model (ozn. CCR-I) uvádzame v nasledujúcej definícii.

Definícia 1.1 (CCR-I model)**.** *[4] Vstupne orientovaným CCR modelom pre útvar DMU_o,*

[1] Podrobné spracovanie efektivity je spracované v [9].

$o \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *rozumieme úlohu:*

$$\begin{aligned} \max_{u_{ro}, v_{io}} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{ro}, \\ s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} = 1, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{ij} \leqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ & u_{ro} \geqslant 0 \quad r = 1, 2, \ldots, s, \\ & v_{io} \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{1}$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie označíme I_o^* a optimálne riešenie, resp. optimálne vektory váh, označíme v_o^*, u_o^*.

Riešením CCR modelov získame hodnotu vlastnej efektivity pre posudzovaný útvar, na základe ktorej možno útvary rozdeliť na efektívne a neefektívne a uvádzame ju v nasledovnej definícii.

Definícia 1.2 (Vlastná efektivita vzhľadom na CCR-I model)**.** *Vlastná efektivita E_{oo} o-teho útvaru vzhľadom na CCR-I model (1) je rovná hodnote účelovej funkcie I_o^* úlohy (1). Ak $E_{oo} = 1$ hovoríme, že o-ty útvar je efektívny*[2]*, naopak ak $E_{oo} < 1$ tak o-ty útvar považujeme za neefektívny.*

K úlohe (1) CCR -I modelu je možné odvodiť duálnu úlohu, ktorá sa nazýva aj obálková forma CCR - I modelu. Podrobné odvodenie je možné nájsť v [10], v našej práci uvedieme už konkrétnu definíciu toho modelu.

Definícia 1.3 (Obálkový CCR-I model)**.** *Pod vstupne orientovaným obálkovým CCR*

[2]Efektívny útvar v zmysle tejto definície znamená, že je efektívny alebo pseudoefektívny v zmysle Definície 4 z [10]. Ekvivalentne ako je popísané v [10], je z efektívnej resp. pseudoefektívnej hranice množiny produkčných možností, resp. je Pareto efektívny ale nie nutne ostro Pareto efektívny. Podobná výhrada platí v súvislosti so všetkými orientovanými modelmi používanými v tejto práci.

modelom pre DMU_o, kde $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$, rozumieme nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned} \min_{\theta,\lambda} \quad & \theta \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geqslant y_{ro} \quad r = 1, \ldots, s, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leqslant \theta x_{io} \quad i = 1, \ldots, m, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie označíme θ^*.

Optimálna hodnota účelovej funkcie θ^*, predstavuje taktiež hodnotu vlastnej efektivity pre posudzovaný útvar DMU_o a je možné sformulovať analogickú definíciu k Definícii 1.2.

Uvedieme aj výstupný CCR model, ktorý označíme $CCR - O$ model.

Definícia 1.4 (CCR-O model)**.** *[4] Výstupne orientovaným CCR modelom pre útvar DMU_o, $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$, rozumieme úlohu:*

$$\begin{aligned} \min_{u_{ro}, v_{io}} \quad & \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io}, \\ s.t. \quad & \sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{ro} = 1, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{ij} \leqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ & u_{ro} \geqslant 0 \quad r = 1, 2, \ldots, s, \\ & v_{io} \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{3}$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie označíme O_o^* a optimálne riešenie označíme v_o^*, u_o^*.

V nasledujúcej definícii definujeme hodnotu vlastnej efektivity pre útvary vzhľadom na CCR-O model.

Definícia 1.5 (Vlastná efektivita vzhľadom na CCR-O model)**.** *Vlastná efektivita E_{oo} o-teho útvaru vzhľadom na CCR-O model (1) je rovná podielu $\frac{1}{O_o^*}$, kde O_o^* je optimálna hodnota účelovej funkcie úlohy (3). Ak $E_{oo} = 1$ hovoríme, že o-ty útvar je efektívny, naopak ak $E_{oo} < 1$ tak o-ty útvar považujeme za neefektívny.*

Obálkovú formu CCR-O modelu je možné nájsť v [10]. Poznamenajme, že v tejto práci budeme odvodzovať metódy na vstupných modeloch, ale analogicky sa dajú formulovať aj nad výstupnými modelmi.

1.2 BCC model

V prípade ak súbor vykazuje variabilné výnosy z rozsahu, tak sa na získanie hodnôt efektivity používa tzv. BCC model, ktorý skonštruovali autori Banker *et al.* v článku [2]. Podobne ako CCR model aj BCC model môže byť vstupne alebo výstupne orientovaný. V ďalšom texte, ak budeme hovoriť o BCC modeloch, máme na mysli jeho multiplikatívny tvar, prezentovaný v nasledujúcej definícii.

Definícia 1.6. *Vstupne orientovaným BCC modelom (označíme BCC-I) v multiplikatívnom tvare, aplikovaným na DMU_o, kde $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$ rozumieme úlohu:*

$$\begin{aligned}
\max_{u_{ro}, v_{io}} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{ro} - c_o, \\
s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} = 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{ij} - c_o \leqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4) \\
& u_{ro} \geqslant 0 \quad r = 1, 2, \ldots, s, \\
& v_{io} \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\
& c_o \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Optimálne riešenie úlohy (4) označíme u_o^*, v_o^*, c_o^* a optimálnu hodnotu účelovej funkcie I_o^*.

Efektivitu vzhľadom na BCC-I model (4) pre posudzované DMU_o uvedieme v nasledovnej definícii.

Definícia 1.7 (Vlastná efektivita vzhľadom na BCC-I model)**.** *Vlastná efektivita E_{oo} pre DMU_o vzhľadom na BCC-I model (4) je rovná hodnote účelovej funkcie I_o^* úlohy (4). Ak $E_{oo} = 1$ hovoríme, že DMU_o je efektívny, naopak ak $E_{oo} < 1$ tak DMU_o považujeme za neefektívny.*

Duálnu úlohu k (4) označujeme ako obálkovú formu BCC-I modelu a uvedieme ho v nasledujúcej definícii. Konkrétny postup ako odvodiť tento model je uvedený v [10].

Definícia 1.8 (Obálkový BCC-I model)**.** *Pod vstupne orientovaným obálkovým BCC modelom pre DMU_o, kde $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$, rozumieme nasledovnú úlohu:*

$$\begin{aligned} \min_{\theta,\lambda} \quad & \theta \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geqslant y_{ro} \quad r = 1, \ldots, s, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leqslant \theta x_{io} \quad i = 1, \ldots, m, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geqslant 0 \quad j = 1, \ldots n. \end{aligned} \tag{5}$$

Optimálnu hodnotu účelovej funkcie označíme θ^*.

Vidíme, že obálková forma BCC-I modelu (5) sa líši od obálkovej formy CCR-I modelu (2) pridaním ohraničenia v tvare rovnosti $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

V nasledujúcej definícii uvedieme výstupne orientovaný BCC model, ktorý budeme označovať BCC-O.

Definícia 1.9. *Výstupne orientovaným BCC modelom (označíme BCC-O) v multiplikatívnom tvare, aplikovaným na DMU_o, kde $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$ rozumieme úlohu:*

$$\begin{aligned} \min_{u_{ro}, v_{io}} \quad & \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} + c_o, \\ s.t. \quad & \sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{ro} = 1, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{ij} - c_o \leqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ & u_{ro} \geqslant 0 \quad r = 1, 2, \ldots, s, \\ & v_{io} \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ & c_o \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

Optimálne riešenie úlohy (6) označíme u_o^*, v_o^*, c_o^* a optimálnu hodnotu účelovej funkcie O_o^*.

Efektivitu vzhľadom na BCC-O model (6) pre posudzované DMU_o uvedieme v nasledovnej definícii.

Definícia 1.10 (Vlastná efektivita vzhľadom na BCC-I model)**.** *Vlastná efektivita E_{oo} pre DMU_o vzhľadom na BCC-I model (6) je rovná hodnote $\frac{1}{O_o^*}$, kde O_o^* je optimálna hodnota účelovej funkcie úlohy (6). Ak $E_{oo} = 1$ hovoríme, že DMU_o je efektívny, naopak ak $E_{oo} < 1$ tak DMU_o považujeme za neefektívny.*

Poznamenajme, že v prípade BCC modelov neplatí, že optimálna hodnota ich účelovcej funkcie má ekonomickú interpretáciu efektivity, tak ako to bolo odvodené pre CCR modely zo Základného modelu v [9]. BCC modely boli odvodené na základe analogickej geometrickej interpretácie obálkových modelov.

1.3 SBM model

Zatiaľ sme opísali CCR model a BCC model, ktoré patria do skupiny orientovaných modelov (vstupne/výstupne). Existuje však aj skupina tzv. neorientovaných modelov, do ktorej patrí aj SBM model. SBM model prvýkrát sformuloval Tone v článku [25], jeho formuláciu uvedieme v definícii. Poznamenajme, že tento model je dobre definovaný iba pre kladné dáta.

Definícia 1.11. *Pod SBM modelom pre $DMU_o, o \in \{1, 2, \ldots, n\}$ rozumieme nasledovnú úlohu:*

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda_o, s^+, s^-} \quad & \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{s_{io}^-}{x_{io}}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{s_{ro}^+}{y_{ro}}}, \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jo} y_{rj} - s_{ro}^+ = y_{ro} \quad r = 1, \ldots, s, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jo} x_{ij} + s_{io}^- = x_{io} \quad i = 1, \ldots, m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jo} = 1, \\
& s_{io}^- \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots m \\
& s_{ro}^+ \geqslant 0 \quad r = 1, \ldots s \\
& \lambda_{jo} \geqslant 0 \quad j = 1, \ldots n.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Optimálne riešenie úlohy (7) označíme $\lambda_o^*, s_o^{+*}, s_o^{-*}$ a optimálnu hodnotu účelovej funkcie označíme ρ_o^*.

Hodnota účelovej funkcie nadobúda hodnoty na intervale $(0, 1]$ a možno ju interpretovať ako efektivitu.

Definícia 1.12. *Útvar o nazývame efektívnym*[3] *vzhľadom na SBM model (7) ak hodnota $\rho_o^* = 1$, inak nazveme DMU_o neefektívnym s efektivitou $\rho_o^* < 1$. Neefektivitou DMU_o vzhľadom na SBM model nazývame hodnotu $1 - \rho_o^*$*

Vidíme, že SBM model (7) nie je v štandardnom tvare úlohy lineárneho programovania. Avšak v článku [25] ako aj v [10] uvádzajú podrobný postup ako previesť úlohu (7) na štandardný tvar úlohy lineárneho programovania. V našej práci uvedieme tento tvar bez postupu.

Tvrdenie 1.13. *SBM model (7) prislúchajúci $DMU_o, o \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sa dá ekvivalentne zapísať v tvare úlohy lineárneho programovania:*

$$
\begin{aligned}
\min_{\Lambda_o, S^+, S^-, t} \quad & t - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{S_{io}^-}{x_{io}}, \\
s.t. \quad & t + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^{s} \frac{S_{ro}^+}{y_{ro}} = 1, \\
& \sum_{j=1}^{n} \Lambda_{jo} y_{rj} - S_{ro}^+ = t y_{ro} \quad r = 1, \ldots, s, \\
& \sum_{j=1}^{n} \Lambda_{jo} x_{ij} + S_{io}^- = t x_{io} \quad i = 1, \ldots, m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \Lambda_{jo} = t, \\
& S_{io}^- \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots m, \\
& S_{ro}^+ \geqslant 0 \quad r = 1, \ldots s, \\
& \Lambda_{jo} \geqslant 0 \quad j = 1, \ldots n.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Optimálne riešenie úlohy (8) označíme $\Lambda_o^*, S_o^{+*}, S_o^{-*}, t^*$ a optimálnu hodnotu účelovej funkcie v optimálnom riešení τ_o^*, pričom riešenie $(\lambda^*, s_o^{+*}, s_o^{-*}, \rho_o^*)$ pôvodnej úlohy (7) získame

[3] Na rozdiel od orientovaných modelov, efektívny útvar v zmysle SBM modelu je ostro Pareto efektívny bod z množiny produkčných možností, viď [10].

pomocou vzťahov:

$$\rho_o^* = \tau_o^*, \quad \lambda_o^* = \frac{\Lambda_o^*}{t_o^*}, \quad s^{+*} = \frac{S_o^{+*}}{t_o^*}, \quad s^{-*} = \frac{S_o^{-*}}{t_o^*}.$$

Dôkaz. Dôkaz tohto Tvrdenia je možné nájsť v [25], resp. [10]. □

Uvedieme taktiež duálnu úlohu k SBM modelu (8), ktorú budeme označovať ako multiplikatívny tvar SBM modelu a bude možné na úlohu v tomto tvare aplikovať metódy na rozlišovanie efektívnych útvarov, ktoré budú opísané v ďalších kapitolách.

Definícia 1.14. *Duálnou úlohou v multiplikatívnom tvare k SBM modelu pre DMU_o, $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označujeme úlohu lineárneho programovania:*

$$\begin{aligned}
\max_{u_{ro}, v_{io}, c_o} \quad & 1 + \sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{ro} - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} - c_o, \\
s.t. \quad & \sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{ij} - c_o \leqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \\
& v_{io} \geqslant \frac{1}{m x_{io}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \\
& u_{ro} \geqslant \frac{1 + \sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{ro} - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} - c_o}{s y_{ro}}, \qquad r = 1, 2, \ldots, s.
\end{aligned} \tag{9}$$

Optimálne riešenie označíme v_o^*, u_o^*, c_o^*, pričom hodnota účelovej funkcie v optimálnom riešení je rovná efektivite vzhľadom na SBM model ρ_o^*.

Poznamenajme, že takto sformulovaný SBM model odpovedá variabilným výnosom z rozsahu. V prípade konštantných výnosov z rozsahu by v modeli (7) nebolo potrebné posledné ohraničenie $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jo} = 1$, resp v modeli (8) by sa vynechalo ohraničenie $\sum_{j=1}^{n} \Lambda_{jo} = t$. Taktiež v multiplikatívnom tvare SBM modelu (9) v prípade konštantných výnosov z rozsahu sa položí voľná premenná c_o rovnú nule.

2 Súvislosť riešení modelov s opornou nadrovinou množiny produkčných možností

V tejto kapitole sa zameriame na súvislosti medzi optimálnym riešením BCC, resp. SBM modelu a opornou nadrovinou k množine produkčných možností. Najskôr sformulujeme definíciu pre množninu produkčných možností odpovedajúcu variabilným výnosom z rozsahu a k nej prislúchajúcej opornej nadroviny, ktorú využijeme pri vete o opornej nadroviny. Využijeme pojem afínnej nadroviny, ktorej definícia je uvedená v [10].

2.1 Množina produkčných možností

Označme Z $\subset$ G množninu tých dvojíc $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^{m+s}$, kde $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, ktoré reprezentujú hodnoty známych vstupov a výstupov príslušných n útvarov.

Pod množinou produkčných možností pre variabilné výnosy z rozsahu generovanou množinou Z rozumieme najmenšiu množinu, ktorá spĺňa nasledujúce podmienky:

- $Z \subset M_{VRS}$.
- $\forall(\tilde{x}, \tilde{y}), (\hat{x}, \hat{y}) \in M_{VRS}, \quad \forall\lambda \in [0, 1] \quad$ platí $\quad (\lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\hat{x}, \lambda\tilde{y} + (1-\lambda)\hat{y}) \in M_{VRS}$.
- Ak $(\hat{x}, \hat{y}) \in M_{VRS}$ a $\quad \hat{x} \leqslant x, y \leqslant \hat{y}, \quad$ tak $(x, y) \in M_{VRS}$.

Množinu M_{VRS} podľa [10] môžeme zapísať analyticky:

$$M_{VRS} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{m+s} | \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leqslant x, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geqslant y, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \lambda \geqslant 0 \right\}. \quad (10)$$

Tento zápis množiny M_{VRS} slúži ako základ k odvodeniu analógie CCR modelov pre variabilné výnosy z rozsahu.

V prípade, ak súbor vykazuje konštantné výnosy z rozsahu, množinu produkčných možností označíme M_{CRS}. M_{CRS} je potom najmenšia množina spĺňajúca rovnaké, tri vyššie uvedené, podmienky ako M_{VRS} a navyše sĺňa podmienku:

- $\forall(\hat{x}, \hat{y}) \in M_{CRS}, \quad \forall a > 0 \quad$ platí $(a\hat{x}, a\hat{y}) \in M_{CRS}$.

Podľa [10] môžeme M_{CRS} zapísať analyticky nasledovne:

$$M_{CRS} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{m+s} | \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leqslant x, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geqslant y, \quad \lambda \geqslant 0 \right\}. \quad (11)$$

2.2 Oporná nadrovina k množine produkčných možností

V tejto časti sa budeme venovať opornej nadrovine k M_{VRS}, ak však položíme v nasledujúcej definícii $c_o = 0$ získame analogickú definíciu opornej nadroviny k M_{CRS}.

Definícia 2.1. *Opornou nadrovinou ku M_{VRS} nazývame, takú affínnu nadrovinu p, pre ktorú platí, že M_{VRS} leží celá v jednom z polpriestorov definovaných nadrovinou p a majú apoň jeden spoločný bod. Inak povedané, pre opornú nadrovinu p ku M_{VRS}, existuje vektor $(v_o, u_o) \in \mathbb{R}^{m+s}$, číslo $c_o \in \mathbb{R}$ a bod $(x_o, y_o) \in M_{VRS}$, že pre všetky body $(x, y) \in M_{VRS}$ platí nasledovný vzťah:*

$$\sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_r - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_i - c_o \leqslant 0, \tag{12}$$

a navyše pre bod $(x_o, y_o) \in M_{VRS}$ platí:

$$\sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{ro} - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} - c_o = 0. \tag{13}$$

Vektor $(-v_o, u_o) \in \mathbb{R}^{m+s}$, pre ktorý existuje také c_o, že platia vzťahy (12) a (13), nazývame normálovým vektorom k množine M_{VRS} v bode (x_o, y_o). Poznamenajme, že ak $(-v_o, u_o) \in \mathbb{R}^{m+s}$ je normálovým vektorom k množine M_{VRS} v bode (x_o, y_o), tak aj $(-av_o, au_o) \in \mathbb{R}^{m+s}$, $a \in \mathbb{R}, a > 0$, je normálovým vektorom k množine M_{VRS} v bode (x_o, y_o).

2.3 Interpretácia riešenia CCR-I a BCC-I modelu

Tvrdenia v tejto časti budú sformulované pre BCC-I model, avšak ak položíme $c_o = 0$, vieme analogicky získať tvrdenia, ktoré platia pre CCR-I model.

Optimálne riešenie BCC-I modelu možno geometricky interpretovať, pričom túto interpretáciu sformulujeme do nasledujúceho tvrdenia.

Tvrdenie 2.2. *Optimálne riešenie (v_o^*, u_o^*, c_o^*) BCC modelu (4) pre dané (x_o, y_o) generuje opornú nadrovinu k M_{VRS} prechádzajúcu bodom $(I_o^* x_o, y_o)$, kde I_o^* predstavuje optimálnu hodnotu účelovej funkcie úlohy (4). Konkrétne môžeme túto nadrovinu zapísať analyticky nasledovne:*

$$\left\{ (x, y) \quad | \quad \sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_r - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_i - c_o^* = 0 \right\}, \tag{14}$$

pričom z tohto zápisu vyplýva, že dvojica vektorov $(-v_o^*,\ u_o^*)$ reprezentuje normálový vektor opornej nadroviny (14) .

Dôkaz. Optimálne riešenie $(v_o^*,\ u_o^*,\ c_o^*)$ v BCC modeli (4) spĺňa ohraničenia príslušnej úlohy. Konkrétne, pre každý útvar (x_j, y_j), $j = 1, 2, \ldots, n$ platí:

$$\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{ij} - c_o^* \leqslant 0, \tag{15}$$

čím je splnený prvý vzťah (12) z definície opornej nadroviny pre útvary generujúce množinu produkčných možností. Pre ostatné útvary (x, y) patriace do M_{VRS}, spĺňajúce vzťah (10), že existuje také $\lambda_j, j = 1, 2, \ldots, n$, že platí:

$$\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_r - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_i - c_o^* \leqslant \sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} - c_o^* = \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{ij} - c_o^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{ij} \right) - c_o^*, \tag{17}$$

využijúc nerovnosť (15) a $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$, dostávame:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{ij} \right) - c_o^* \leqslant \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(c_o^*\right) - c_o^* = \left(c_o^*\right) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j - c_o^* = c_o^* - c_o^* = 0, \tag{19}$$

čím je splnený prvý vzťah (12) z definície opornej nadroviny pre všetky body z M_{VRS}.

Následne potrebujeme ukázať, že táto oporná nadrovina, prechádza bodom $(I_o^* x_o, y_o)$. Dosaďme tento bod do predpisu opornej nadroviny (14). Dostávame:

$$\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{ro} - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* I_o^* x_{io} - c_o^* = \sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{ro} - I_o^* \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{io} - c_o^* = \tag{20}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{ro} - \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{ro} - c_o^*}{\sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{io}} \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{io} - c_o^* = \tag{21}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{ro} - (\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{ro} - c_o^*) - c_o^* = 0, \tag{22}$$

kde sme využili $I_o^* = \sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{ro} - c_o^*$ a $\sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{io} = 1$. To znamená, že oporná nadrovina prechádza bodom $(I_o^* x_o, y_o)$ a je splnený druhý vzťah (13) z definície opornej nadroviny. Tým sme ukázali, že optimálne riešenie (v_o^*, u_o^*, c_o^*) BCC modelu (4) generuje opornú nadrovinu k M_{VRS} prechádzajúcu bodom $(I_o^* x_o, y_o)$. □

Ak by súbor vykazoval konštantné výnosy z rozsahu, v Tvrdení 2.2 by sme položili c_o^* rovné nule. Z ohraničení CCR modelu pre DMU_o by sme získali platnosť (12) pre útvary generujúce M_{CRS}. Pre ostatné útvary $(x, y) \in M_{CRS}$ by sme postupovali analogicky s c_o^*, až na to, že vzťah $(\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{ij})$ môžeme ohraničiť zhora nulou a vďaka $\lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$, je vzťah (12) splnený aj pre tieto útvary. V prípade CCR modelu je $I_o^* = \sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{ro}$ a keďže $c_o^* = 0$ analogicky dokážeme, že platí druhý vzťah (13).

Analogické tvrdenia je možné sformulovať aj pre výstupne orientovaný BCC model, pričom zmena by bola v tom, že oporná nadrovina k M_{VRS}, generovaná (v_o^*, u_o^*, c_o^*), by prechádzala bodom $((x_o, O_o^* y_o))$, kde O_o^*, predstavuje optimálnu hodnotu výstupného BCC modelu v multiplikatívnom tvare. Sformulujeme aj opačné tvrdenie k Tvrdeniu 2.2.

Tvrdenie 2.3. *Ak množina:*

$$\left\{ (x, y) \quad | \quad \sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_r - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_i - c_o = 0 \right\}, \tag{23}$$

tvorí opornú nadrovinu k M_{VRS} prechádzajúcu bodom $(I_o^* x_o, y_o)$, kde I_o^* predstavuje hodnotu účelovej funkcie úlohy (4) v optimálnom riešení, $u_{ro} \geq 0$, $r = 1, 2 \ldots, s$, $v_{io} \geq 0$, $i = 1, 2 \ldots, m$ a $\sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} \neq 0$, potom existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ také, že (v_o^*, u_o^*, c_o^*) = (kv_o, ku_o, kc_o) je optimálne riešenie multiplikatívneho $BCC - I$ modelu.

Dôkaz. Z vlastností opornej nadroviny k M_{VRS} prechádzajúcej bodom $(I_o^* x_o, y_o)$ platia nasledovné vzťahy:

$$\sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{ij} - c_o \leq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{24}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{ro} - \sum_{i=1}^{m} v_{io} (I_o^* x_{io}) - c_o = 0. \tag{25}$$

Označme:

$$\sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} = a, \tag{26}$$

kde zrejme $a > 0$. Položme $k = \frac{1}{a} > 0$ a $(v_o^*,\, u_o^*,\, c_o^*) = (kv_o,\, ku_o,\, kc_o)$. Potom dostávame:

$$\sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{io} = \sum_{i=1}^{m} k v_{io} x_{io} = \frac{1}{a} a = 1, \tag{27}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{ij} - c_o^* \leq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{28}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{ro} - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* (I_o^* x_{io}) - c_o^* = 0, \tag{29}$$

pričom posledné dva vzťahy vznikli prenásobením (24) a (25) kladnou konštantou. Z (27) a (28) vyplýva, že $(v_o^*,\, u_o^*,\, c_o^*)$ je prípustným riešením $BCC - I$ modelu (4). Zostáva ukázať, že toto riešenie je aj optimálne. Z (29) dostávame:

$$\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{ro} - c_o^* = \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* (I_o^* x_{io}) = I_o^*, \tag{30}$$

a teda v tomto prípustnom riešení je hodnota účelovej funkcie rovná optimálnej hodnote, čo znamená, že je optimálne riešenie. □

Vďaka Tvrdeniu 2.2 a Tvrdeniu 2.3 môžeme vidieť súvislosť optimálneho riešenia BCC-I modelu pre DMU_o s opornou nadrovinou k M_{VRS} prechádzajúcou bodom $(I_o^* x_o, y_o)$. Z Tvrdenia 2.2 vyplýva, že optimálne riešenie BCC modelu, generuje opornú nadrovinu k M_{VRS} prechádzajúcu bodom $(I_o^* x_o, y_o)$. Naopak z Tvrdenia 2.3 dostávame, že pre každú opornú nadrovinu k M_{VRS}, prechádzajúcu bodom $(I_o^* x_o, y_o)$, danú predpisom (38), existuje kladný násobok jej normálového vektoru a konštanty c taký, že tvoria optimálne riešenie $BCC - I$ modelu pre DMU_o. Vzhľadom k vlastnostiam M_{VRS} je možné, že existuje viacero rôznych oporných nadrovín k M_{VRS} prechádzajúcich bodom $(I_o^* x_o, y_o)$. Z Tvrdenia 2.3 následne vyplýva, že pre také DMU_o nie je riešenie BCC-I modelu dané jednoznačne.

Pre CCR model možno nájsť analogické tvrdenie v [10] ako Veta o opornej nadrovine.

Tvrdenie 2.4. *Označme $DMU_o, o \in \{1, 2, \ldots, n\}$ taký útvar z množiny Z generujúcej M_{VRS}, ktorého aspoň jeden výstup $\hat{r}$ spĺňa nasledovný vzťah:*

$$y_{\hat{r}o} = \max_{j=1,2,\ldots,n} y_{\hat{r}j}, \tag{31}$$

inak povedané, tento útvar nadobúda maximálnu hodnotu výstupu $\hat{r}$ spomedzi všetkých útvarov v súbore.

Nech $v_{io} = 0, i = 1, 2, \ldots m$, *a* $u_{ro} = 0, r = 1, 2, \ldots s, r \neq \hat{r}$ *a nech* $c = u_{\hat{r}o}y_{\hat{r}o}$, *potom existuje také* $u_{\hat{r}o} > 0$, *že oporná nadrovina daná vzťahom:*

$$p = \{(x, y) | u_{\hat{r}o}y_r - u_{\hat{r}o}y_{\hat{r}o} = 0\}, \tag{32}$$

je opornou nadrovinou k M_{VRS}, *prechádzajúcou cez* DMU_o. *Je zrejme, že táto oporná nadorivna je rovnobežná so všetkými súradnicovými osami okrem súradnicovej osi prislúchajúcej* $\hat{r}$*-tej zložke vektora* u_o.

Dôkaz. Ak dosadíme do zápisu (32) hodnoty DMU_o vidíme, že je splnená rovnosť, a teda oporná nadrovina p, prechádza cez DMU_o.

Pre útvary $j = 1, 2, \ldots, n$ platí:

$$u_{\hat{r}o}y_{rj} - u_{\hat{r}o}y_{\hat{r}o} \leq 0, \tag{33}$$

pretože DMU_o nadobúda maximálnu hodnotu výtupu $\hat{r}$. Ostáva ukázať, že pre každé $(x, y) \in M_{VRS}$, platí nerovnosť $u_{\hat{r}o}y_r - u_{\hat{r}o}y_{\hat{r}o} \leq 0$.

Využijeme analytický zápis M_{VRS} (10). Dostávame:

$$u_{\hat{r}o}y_r - u_{\hat{r}o}y_{\hat{r}o} \leq u_{\hat{r}o}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{\hat{r}j} - u_{\hat{r}o}y_{\hat{r}o} \leq u_{\hat{r}o}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{\hat{r}o} - u_{\hat{r}o}y_{\hat{r}o} \tag{34}$$

$$u_{\hat{r}o}y_{\hat{r}o}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j - u_{\hat{r}o}y_{\hat{r}o} \leq u_{\hat{r}o}y_{\hat{r}o} - u_{\hat{r}o}y_{\hat{r}o} = 0, \tag{35}$$

kde sme využili (31) a $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$. To znamená, že p je opornou nadrovinou k M_{VRS} prechádzajúcou DMU_o, ktorá je zároveň rovnobežná so všetkými súradnicovými osami okrem súradnicovej osi prislúchajúcej $\hat{r}$-tej zložke vektora u_o. □

Podobné tvrdenie možno sformulovať pre DMU_o z množiny Z generujúcej M_{VRS}, ktorého aspoň jeden vstup $\hat{i}$, $i = 1, 2, \ldots m$ nadobúda minimálnu hodnotu spomedzi všetkých útvarov v súbore. V takomto prípade existuje také $v_{\hat{i}o} > 0$, že oporná nadrovina daná predpisom:

$$p = \{(x, y) | v_{\hat{i}o}x_{\hat{i}o} - v_{\hat{i}o}x_{\hat{i}} = 0\}, \tag{36}$$

je opornou nadrovinou k M_{VRS}, prechádzajúcou cez DMU_o. Dôkaz takéhoto tvrdenia by prebiehal analogicky ako dôkaz Tvrdenia 2.4.

Analogické tvrdenie nemôžeme sformulovať pre konštantné výnosy z rozsahu. Množina M_{CRS} je konvexným kuželom z čoho vyplýva, že oporná nadrovina k M_{CRS} prechádza počiatkom súradnicovej sústavy a teda nie je rovnobežná so žiadnou súradnicovou osou.

***Poznámka* 1.** *Ak v súbore existuje nejaký útvar, ktorého aspoň jeden vstup nadobúda nulovú hodnotu, tak existuje taká oporná nadrovina k množine produkčných možností, ktorá je totožná so súradnicovou osou.*

2.4 Interpretácia riešenia SBM modelu

Podobne ako sme v predošlej časti opísali súvislosť riešenia BCC modelu s opornou nadrovinou, v tejto časti sa budeme venovať optimálnemu riešeniu SBM modelu (9). Budeme vychádzať z článku [11], v ktorom je okrem iného aj vo všeobecnosti, nie len pre SBM model, popísaná súvislosť riešení neradiálnych modelov v multiplikatívnom tvare s opornou nadrovinou k množine produkčných možností.

Tvrdenie 2.5. *Nech (v_o^*, u_o^*, c_o^*) je optimálnym riešením multiplikatívneho SBM modelu (9) pre DMU_o, $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Potom:*

$$\left\{ (x, y) \quad | \quad \sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_r - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_i - c_o^* = 0 \right\}, \tag{37}$$

je opornou nadrovinou k M_{VRS} prechádzajúcou cez efektívny vzor $(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jo}^* x_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jo}^* y_j) = (x_o - s^{-*}, y_o + s_o^{+*})$ pre DMU_o, kde $(\lambda_o^*, s_o^{+*}, s_o^{-*})$ je optimálnym riešením SBM modelu v obálkovom tvare (7).

Dôkaz. Dôkaz je analogický dôkazu Tvrdenia 11 z článku [11]. □

Ak sa pozrieme na ohraničenia úlohy (9) vidíme, že prípustné riešenie (v_o, u_o, c_o) tejto úlohy, musí mať všetky prvky vektorov v_o a u_o kladné. Kvôli tejto vlastnosti nie je možné sformulovať opačné tvrdenie k predošlému tvrdeniu, ako to bolo v prípade BCC modelu. Inak povedané, ak by existovala oporná nadrovina k M_{VRS} generovaná (v_o, u_o, c_o) prechádzajúca cez efektívny útvar, ktorej normálový vektor (v_o, u_o) by mal nulový prvok, tak neexistuje taký násobok $k > 0$, aby (kv_o, ku_o, kc_o) bolo optimálnym riešením multiplikatívneho SBM modelu (9). Avšak je možné sformulovať slabšie tvrdenie. Opäť budeme vychádzať z článku [11].

Tvrdenie 2.6. *Nech množina:*

$$\left\{(x,y) \quad | \quad \sum_{r=1}^{s} u_{ro}y_r - \sum_{i=1}^{m} v_{io}x_i - c_o = 0\right\}, \tag{38}$$

tvorí opornú nadrovinu k M_{VRS} prechádzajúcu efektívnym DMU_o, $o \in \{1,2,\ldots,n\}$ a zároveň $u_{ro} > 0, r = 1,2\ldots s$, $v_{io} > 0, i = 1,2\ldots m$. Definujeme

$$\alpha = \max\left\{\frac{1}{sy_{1o}u^*_{1o}}, \ldots, \frac{1}{sy_{ro}u^*_{ro}}, \frac{1}{mx_{1o}v^*_{1o}}, \ldots, \frac{1}{mx_{mo}v^*_{mo}}\right\}, \tag{39}$$

potom (αv_o, αu_o, αc_o) je optimálnym riešením multiplikatívneho SBM modelu (9).

Dôkaz. Dôkaz tohto tvrdenia je analogický dôkazu Tvrdenia 12 z [11]. □

V článku [11] sa taktiež nachádza aj príklad, na ktorom je tento problém ilustrovaný.

3 Metóda krížovej efektivity

Metóda krížovej efektivity bola prvýkrát spomenutá autormi Sexton *et al.* v článku [19] a bola podrobnejšie analyzovaná autormi Doyle a Green v článku [6], kde zároveň navrhli aj riešenia na odstránenie problému nejednoznačnosti metódy. V našej práci [9] sme aplikovali a podrobne opísali metódu krížovej efektivity na modely vykazujúce konštantné výnosy z rozsahu. V tejto časti uvedieme len základné princípy metódy krížovej efektivity aplikovanej na konštantné výnosy z rozsahu. Zároveň analyzujeme túto metódu aplikovanú na variabilné výnosy z rozsahu.

3.1 Metóda krížovej efektivity - CRS

Metóda krížovej efektivity spočíva v získaní tzv. vzájomných krížových efektivít E_{oj}. Táto hodnota reprezentuje hodnotu efektivity j-teho útvaru vzhľadom na optimálne vektory váh o-teho útvaru[4]. Hodnotu E_{oj} získame pomocou vzťahu:

$$E_{oj} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{ij}}, \qquad o, j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{40}$$

Získané hodnoty vzájomných efektívit pre všetky dvojice v súbore sa obvykle zapisujú do tzv. matice krížových efektivít, ktorej tvar je uvedený v [9][str. 25]. Poradie medzi súbormi následne vytvárame pomocou hodnôt $ECOL_o$, ktoré pre DMU_o získame pomocou vzťahu:

$$ECOL_o = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E_{jo} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rj}^* y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ij}^* x_{io}}, \qquad o \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{41}$$

Problém však nastáva, kvôli nejednoznačnosti riešenia úlohy (1), a tak výsledné poradie je ovplyvnené výberom optimálnych vektorov váh v úlohe (1). V práci [9] sme uviedli spôsoby ako odstrániť problém nejednoznačnosti, pomocou metód od autorov článku [6] ako aj tzv. Cielenej metódy.

[4]Skutočnosť, že hodnote E_{oj} predstavuje ekonomicky interpretovateľnú efektivitu v daných váhach, ako pomer produktivity a maximálnej produktivity, bol v prípade konštantných výnosov z rozsahu odvodeny v [9]. Poznamenajme však, že táto interpretácia už neplatí v prípade variabilných výnosov z rozsahu. Napriek tomu nazývame hodnotu E_{oj} efektivitou a ukážeme, že má rovnakú geometrickú interpretáciu ako v prípade konštantných výnosov z rozsahu

3.2 Metóda krížovej efektivity - VRS

Riešením BCC-I modelu pre DMU_o získame optimálnu dvojicu vektorov váh (v_o^*, u_o^*), a zároveň hodnotu c_o^*, charakterizujúcu výnosy z rozsahu pre útvar $o, \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Vzťah pre vzájomnú efektivitu $j - teho$ útvaru vzhľadom na optimálne vektory váh $o-$teho útvaru, uvádzajú autori článku [15] ako:

$$E_{oj} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} - c_o^*}{\sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{ij}}, \qquad o, j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{42}$$

Ak vo vzťahu (42) zvolíme $j = o$, získame rovnakú vlastnú hodnotu efektivity pre DMU_o ako riešením príslušného BCC-I modelu.

Pomocou hodnôt vzájomných efektivít E_{oj} vieme analogicky ako pri konštantných výnosoch z rozsahu, vytvoriť maticu krížových efektivít rozmeru nxn.

Priemery hodnôt v stĺpcoch matice krížových efektivít označíme ako $ECOL$, pričom hodnotu $ECOL_o$ pre DMU_o získame pomocou vzťahu:

$$ECOL_o = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E_{jo} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rj}^* y_{ro} - c_j^*}{\sum_{i=1}^{m} v_{ij}^* x_{io}}, \qquad o, j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{43}$$

Poradie medzi útvarmi vytvárame následne na základe získaných hodnôt $ECOL_j, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pričom i-ty útvar s vyššou hodnotou $ECOL_i$ dosiahne lepšie umiestnenie ako $j - ty$ útvar s nižšou hodnotou $ECOL_j$.

Poznamenajme, že optimálne riešenie BCC-I modelu nemusí byť v prípade efektívnych útvarov jednoznačné, a teda hodnota vzájomnej efektivity je závislá od výberu optimálneho riešenia, čo má za následok nejednoznačnosť metódy krížovej efefektivity.

Taktiež aplikovaním metódy krížovej efektivity na súbor vykazujúci variabilné výnosy z rozsahu narazíme na problém záporných hodnôt vzájomných efektivít. Ak sa pozrieme na vzťah (42), tak čitateľ zlomku môže nadobudnúť zápornú hodnotu v prípade kladnej hodnoty c_o^* takej, že $c_o^* > \sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj}$. Poznamenajme, že tento problém nenastáva vo výstupne orientovaných modeloch, čo ukážeme v ďalšom texte.

Existenciu záporných vzájomných efektivít ilustrujeme neskôr na Obr. 3. Najskôr však v nasledujúcom tvrdení geometricky interpretujeme hodnotu vzájomnej efektivity E_{oj}.

Tvrdenie 3.1. *Hodnota vzájomnej efektivity E_{oj} pre vstupný(/výstupný) BCC model predstavuje koeficient radiálneho skracovania (predlžovania) vstupov x_j(výstupov y_j) pre*

DMU_j na opornú nadrovinu p_o danú vzťahom :

$$p_o(x,y) = \left\{ (x,y) | \quad \sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_r - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_i - c_o^* = 0 \right\}, \tag{44}$$

kde vektory v_o^*, u_o^* a konštanta c_o^* sú riešením úlohy (4) (resp. výstupne orientovaného BCC modelu) pre DMU_o.

Dôkaz. Platnosť Tvrdenia 3.1 ukážeme dosadením bodu $(E_{oj}x_j, y_j)$ do rovnice pre $p_o(x,y)$, tzn.:

$$\begin{aligned} p_o(E_{oj}x_j, y_j) &= \sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* E_{oj} x_{ij} - c_o^* = \\ \sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} &- E_{oj} \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{ij} - c_o^*, \end{aligned} \tag{45}$$

kde E_{oj} je konštanta, nezávislá od indexu i a mohli sme ju vyňať pred súčet. Následne do (45) za E_{oj} dosadíme vzťah z (42) a preusporiadaním členov dostávame:

$$\begin{aligned} p_o(E_{oj}x_j, y_j) &= \sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} - \left(\frac{\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} - c_o^*}{\sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{ij}} \right) \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{ij} - c_o^* = \\ \sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} &- \left(\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} - c_o^* \right) - c_o^* = 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Zo vzťahu (46) vyplýva, že bod $(E_{oj}x_j, y_j)$ leží na opornej nadrovine p_o, a teda vzájomná efektivita E_{oj} predstavuje hodnotu skracovania vstupov $j-teho$ útvaru (x_j, y_j) na opornú nadrovinu p_o. □

3.2.1 Riešenia nedostatkov

V prípade konštantných výnosov z rozsahu sme v práci [9] opísali metódy, ktorých hlavnou úlohou je odstrániť závislosť hodnôt vzájomných efektivít E_{oj} od výberu optimálneho riešenia úlohy (1). Konkrétne sme sformulovali tzv. Cielenú metódu, v ktorej riešime pre každú dvojicu útvarov $o, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ doplňujúcu úlohu lineárneho programovania, v ktorej maximalizujeme (benevolentný prístup) resp. minimalizujeme (agresívny prístup) hodnotu vzájomnej efektivity E_{oj}.

Analogicky môžeme sformulovať Cielenú metódu aj v prípade variabilných výnosov z rozsahu.

Definícia 3.2 (Cielená metóda)**.** *Nech E_{oo} je hodnota vlastnej efektivity pre útvar $o \in \{1,2,\ldots,n\}, o \neq j$ získaná z (4). Potom pre útvar $o \in \{1,2,\ldots,n\}, o \neq j$ rozumieme pod úlohou Cielenej metódy, v rámci benevolentného (agresívneho) prístupu, úlohu:*

$$\begin{aligned}
\max_{u_{ro},v_{io}} \quad \left(\min_{u_{ro},v_{io}}\right) \quad & \sum_{r=1}^{s} u_{ro}y_{rj} - c_o, \\
s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} v_{io}x_{ij} = 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_{ro}y_{rk} - \sum_{i=1}^{m} v_{io}x_{ik} - c_o \leqslant 0, \quad k = 1,2,\ldots,n, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_{ro}y_{ro} - E_{oo}\sum_{i=1}^{m} v_{io}x_{io} - c_o = 0, \\
& c_o \in \mathbb{R}, \\
& u_{ro} \geqslant 0 \quad r = 1,2,\ldots,s, \\
& v_{io} \geqslant 0 \quad i = 1,2,\ldots,m.
\end{aligned} \tag{47}$$

Optimálne riešenie označíme $(v_o^{(j)*}, u_o^{(j)*}, c_o^{(j)*})$.

Ohraničenia úlohy (47) v tvare nerovností sú totožné s ohraničeniami úlohy (4) a dotatočné ohraničenie v tvare rovnosti zabezpečuje zachovanie maximálnej hodnoty vlastnej efektivity E_{oo} pre DMU_o. Účelová funkcia v optimálnom riešení predstavuje najväčšiu (v rámci benevolentného prístupu) resp. najnižšiu (v rámci agresívneho prístupu) hodnotu vzájomnej efektivity E_{oj}.

V prípade konštantných výnosov z rozsahu pre úlohu Cielenej metódy existovalo optimálne riešenie pre každú dvojicu útvarov $o, j \in \{1,2,\ldots,n\}$. V prípade variabilných výnosov z rozsahu a vstupne orientovaného modelu môže existovať útvar $o \in \{1,2,\ldots,n\}$ a iný útvar $j \in \{1,2,\ldots,n\}, j \neq o$, pre ktorý je minimalizačná úloha (47) neohraničená. Sformulujeme nasledovnú hypotézu:

Hypotéza 3.3. *Označme $DMU_o, o \in \{1,2,\ldots,n\}$ taký efektívny útvar vzhľadom na BCC-I model, ktorého aspoň jeden výstup $\hat{r}$ spĺňa nasledovný vzťah:*

$$y_{\hat{r}o} > \max_{j=1,2,\ldots,n,j\neq o} y_{\hat{r}j}, \tag{48}$$

inak povedané, tento útvar nadobúda maximálnu hodnotu niektorého výstupu spomedzi všetkých útvarov v súbore. Potom pre každé $j, \in \{1,2,\ldots,n\}, j \neq o$ je minimalizačná úloha

(47) neohraničená. Inak povedané, pre tento útvar v prípade využitia Cielenej metódy v rámci agresívneho prístupu nie sú hodnoty vzájomných efektivít E_{oj} všetkých ostatných útvarov $j, \in \{1, 2, \ldots, n\}, j \neq o$ dobre definované.

Z tejto hypotézy vyplýva, že v matici krížových efektivít nebudú dobre definované hodnoty v riadku prislúchajúcom takémuto DMU_o (až na diagonálny prvok, ktorý predstavuje vlastnú efektivitu E_{oo}) a narazíme na problém pri vytváraní hodnôt $ECOL_j$, $j, \in \{1, 2, \ldots, n\}, j \neq o$, a teda nebudeme môcť vytvoriť výsledné poradie. Analogicky môžeme sformulovať aj hypotézu pre výstupný BCC-O model a útvar, ktorý nadobúda minimálnu hodnotu niektorého vstupu spomedzi všetkých útvarov v súbore.

V prípade výstupne orientovaného BCC modelu sme hodnotu vzájomnej efektivity E_{oj} získali pomocou vzťahu (42). Na druhej strane, ak by sme mali výstupne orientovaný BCC model, hodnotu vzájomnej efektivity E_{oj} by sme získali zo vzťahu:

$$E_{oj} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{ij} + c_o^*}, \qquad o, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{49}$$

pričom z ohraničení BCC-O modelu vyplýva, že E_{oj} zo vzťahu (49) je nezáporná.

V prípade konštantných výnosov z rozsahu sme bezohľadu na orientáciu CCR modelu získali hodnotu vzájomnej efektivity zo vzťahu (40). Niečo podobné by sme chceli docieliť aj v prípade variabilných výnosov z rozsahu.

Podľa vzoru z [10] môžeme hodnotu voľnej premennej c_o v BCC modeli napísať ako rozdiel dvoch nezáporných premenných, tzn. $c_o = a - b, a \geq 0, b \geq 0$. a následne hodnotu vzájomnej efektivity E_{oj} pre DMU_j vzhľadom na optimálne riešenie BCC modelu pre DMU_o definujeme vzťahom:

$$E_{oj} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} + b}{\sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{ij} + a}, \qquad o, j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{50}$$

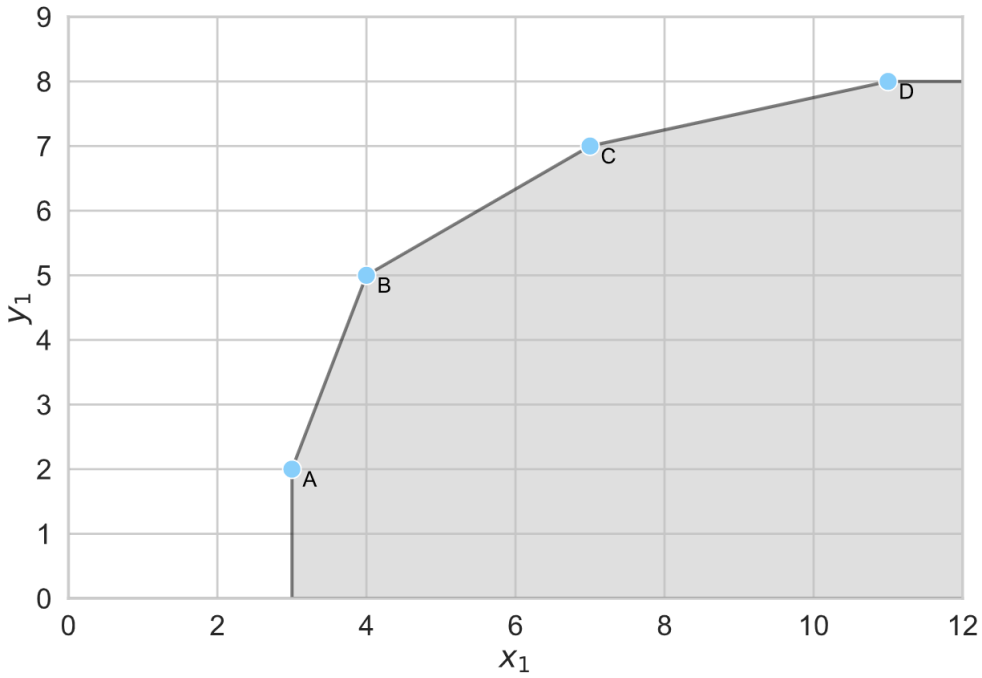
Kvôli predpokladu nezápornosti konštánt a, b je hodnota E_{oj} definovaná vzťahom (50) nezáporná, čím sa odstráni problém záporných vzájomných hodnôt opísaný v predošlých častiach. Otvorenou otázkou zostáva ako je vhodné definovať hodnoty a, b.

3.3 Príklad 1

Geometrickú interpretáciu ilustrujeme na nasledujúcom príklade so štyrmi útvarmi, ktoré spotrebúvajú jeden vstup na výrobu jedného výstupu. Konkrétne hodnoty sú uvedené v

Tabuľke 1, a zároveň sú tieto útvary zobrazené spolu s množinou produkčných možností odpovedajúcou variabilným výnosom z rozsahu na Obr. č. 1. Vidíme, že všetky útvary sa

Obr. 1: Množina produkčných možností M_{VRS} v Príklade 1



nachádzajú na hranici M_{VRS} a sú efektívne s vlastnou efektivitou rovnou 1.

Tabuľka 1: Hodnoty vstupov a výstupu v Príklade 1

DMU	x_1	y_1
A	3	2
B	4	5
C	7	7
D	11	8

Najskôr sa pozrieme na útvar B, pre ktorý existuje viac ako jedno optimálne riešenie BBC-I modelu[5]. Konkrétne sme vybrali dva optimálne riešenia BCC-I modelu pre útvar B, ktoré sú zapísané spolu s optimálnymi riešeniami BCC-I modelu pre všetky útvary v Tabuľke 2. Výberom dvoch rôznych optimálnych vektorov pre útvar B získavame dve

[5]Poznamenajme, že v tomto príklade pre všetky útvary existuje viac ako jedno riešenie úlohy (4)

Tabuľka 2: Optimálne vektory váh v_o^*, u_o^*, hodnoty c_o^* a efektivity E_o v Príklade 1

DMU	A	B		C	D
Riešenie	(1)	(1)	(2)	(1)	(1)
v_{1o}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{11}$
u_{1o}	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{11}$
c_o	$-\frac{7}{9}$	$\frac{7}{8}$	$-\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{21}{11}$
E_o	1	1		1	1

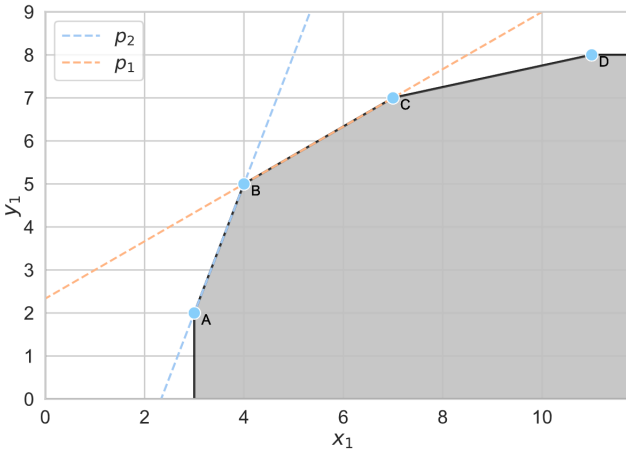
oporné nadroviny k množine produkčných možností, dané vzťahmi:

$$\frac{3}{8}y - \frac{1}{4}x - \frac{7}{8} = 0 \tag{51}$$

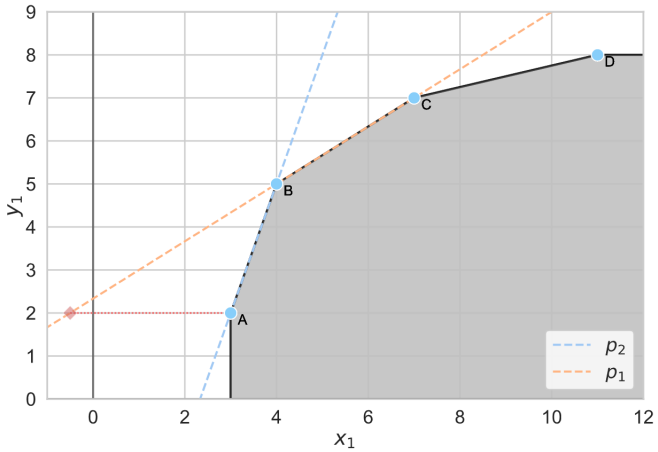
$$\frac{1}{12}y - \frac{1}{4}x + \frac{7}{12} = 0, \tag{52}$$

kde opornú nadrovinu danú vzťahom (51) označíme p_1 a opornú nadrovinu danú vzťahom (52) označíme p_2. Na Obrázku č. 2 sú zobrazené spomínané oporné nadroviny.

Obr. 2: Oporné nadroviny k M_{VRS} prechádzajúce DMU_B v Príklade 1



Obr. 3: Projekcia útvaru A na opornú nadrovinu $p1$ v Príklade 1



Následne aplikujeme metódu krížovej efektivity a pozrieme sa na vzájomné efektivity ostatných útvarov vzhľadom na optimálne riešenie úlohy (4) pre útvar B. Vzájomnú efektivitu E_{BA} môžeme chápať ako koeficient skracovania vstupov útvaru A na opornú nadrovinu generovanú optimálnym riešením (4) pre útvar B. V prípade, že zvolíme riešenie

generujúce opornú nadrovinu p_2 je vzájomná efektivita $E_{BA}^{(2)}$ rovná jednej, pretože táto nadrovina prechádza útvarom A, a teda útvar A sa projektuje sám na seba. Ak však zvolíme pre útvar B riešenie generujúce opornú nadrovinu p_1, hodnota vzájomnej efektivity $E_{BA}^{(1)}$ bude rovná $-\frac{1}{6}$ a projekcia A' útvaru A na opornú nadrovinu p_1 je zobrazená na Obrázku 3 červenou farbou. V prípade ak zvolíme pre útvar B riešenie generujúce p_1 matica krížových efektivít je zobrazená v Tabuľke 3 a ak zvolíme riešenie generujúce opornú nadrovinu p_2, príslušná matica krížových efektivít je zobrazená v Tabuľke 4. V týchto maticiach je zobrazené aj výsledné poradie. Vidíme, že poradie nezostalo zachované pri rôznom výbere vektorov váh pre útvar B.

Vidíme, že výberom optimálneho riešenia pre útvar B sme mohli získať kladnú hodnotu vzájomnej efektivity $E_{BA}^{(2)}$ a taktiež, iným výberom optimálneho riešenia, zápornú hodnotu $E_{BA}^{(1)}$. Ak by sme sa podrobnejšie pozreli na vzájomnú efektivitu útvaru A vzhľadom na optimálne riešenia (4) pre útvar D zistili by sme, že pre každé optimálne riešenie (4) pre útvar D bude hodnota E_{DA} záporná.

Tabuľka 3: Matica krížových efektivít (1) vzhľadom na $p1$ z Obr.2

DMU	A	B	C	D
A	1.0	1.0	0.66667	0.45455
B	-0.16667	1.0	1.0	0.77273
C	-0.16667	1.0	1.0	0.77273
D	-4.33333	-0.25	1.0	1.0
ECOL	-0.91667	0.6875	0.91667	0.75
Poradie	4	3	1	2

Tabuľka 4: Matica krížových efektivít (2) na $p2$ z Obr.2

DMU	A	B	C	D
A	1.0	1.0	0.66667	0.45455
B	1	1.0	0.66667	0.45454
C	-0.16667	1.0	1.0	0.77273
D	-4.33333	-0.25	1.0	1.0
ECOL	-0.625	0.6875	0.8333	0.6705
Poradie	4	2	1	3

Na tomto príklade môžeme ukázať aj ďalší problém metódy krížovej efektivity, ktorým je neohraničenosť úlohy (47) v prípade ak minimalizujeme hodnotu vzájomnej efektivity jednotlivých útvarov vzhľadom na útvar D. Aplikovaním Cielenej metódy na tento príklad získame matice krížových efektivít, ktoré sú uvedené v Tabuľke 5 pre benevolentný prístup a v Tabuľke 6 pre agresívny prístup.

V Tabuľke 6 vidíme, že hodnoty vzájomných efektivít vzhľadom na útvar D sú označené ako $-inf$. Je to z toho dôvodu, že úloha (47) v týchto prípadoch bola neohraničená. Tu vidíme už spomínaný nedostatok metódy krížovej efektivity v prípade variabilných výnosov z rozsahu, a to neohraničenosť úlohy (47), a teda sa potvrdila Hypotéza 3.3, keďže

Tabuľka 5: Matica krížových efektivít - Cielená metóda benevolentný prístup (max)

DMU	A	B	C	D
A	1.0	1.0	0.66667	0.45455
B	1.0	1.0	1.0	0.77273
C	-0.16667	1.0	1.0	1.0
D	-4.33333	-0.25	1.0	1.0
ECOL	-0.625	0.6875	0.91667	0.80682
Poradie	4	3	1	2

Tabuľka 6: Matica krížových efektivít - Cielená metóda agresívny prístup (min)

DMU	A	B	C	D
A	1.0	0.75	0.42857	0.27273
B	-0.16667	1.0	0.66667	0.45455
C	-4.33333	-0.25	1.0	0.77273
D	-inf	-inf	-inf	1.0
ECOL	-inf	-inf	-inf	0.625
Poradie	-	-	-	-

útvar D nadobúda maximálnu hodnotu výstupu spomedzi všetkých ostatných útvarov.

4 Metóda odchýlkovej neefektivity

Ďalší spôsob ako rozlišovať medzi útvarmi a usporiadať ich do poradia navrhujú autori Ghasemi *et. al* v článku [8]. Tento spôsob vychádza z modelu, ktorý je opísaný v článku [13] autormi Li a Reeves a jeho základom je minimalizovať odchýlkovú neefektivitu posudzovaného útvaru. Popri tom daný útvar získa hodnoty odchýliek ostatných útvarov od opornej nadroviny generovanej daným útvarom, ktoré sa využijú na ďalšiu analýzu. Z toho dôvodu túto metódu nazývame odchýlkovou neefektivitou, pričom v texte budeme používať len skrátený názov, a to metóda neefektivity.

4.1 Neefektivita v CCR-I modeli

V práci [13] autori tvrdia (bez dôkazu), že CCR model môžeme ekvivaletne zapísať pomocou doplnkových premenných v tvare, ktorý je uvedený v nasledujúcej definícii.

Definícia 4.1. *Pod vstupne orientovaným modelom neefektivity, aplikovaným na DMU_o, $o \in \{1, 2 \ldots, n\}$ odpovedajúcim konštantným výnosom z rozsahu, rozumieme úlohu:*

$$\begin{aligned} \min_{u_{ro}, v_{io}, d_j} \quad & d_{oo}, \\ s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} = 1, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{ij} + d_{oj} = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ & u_{ro} \geqslant 0 \quad r = 1, 2, \ldots, s, \\ & v_{io} \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ & d_{oj} \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{53}$$

Optimálne riešenie úlohy (53) označíme v_o^*, u_o^* a d_o^*, pričom d_o^* označuje vektor odchýliek, prisluchajúci k DMU_o. Zároveň o-ta zložka vektora d_o^* predstavuje optimálnu hodnotu účelovej funkcie úlohy (53), ktorú budeme nazývať aj vlastnou neefektivitou.

Ekvivaletnosť CCR modelu a Modelu neefektivity (53) ako aj súvis vlastnej efektivity E_{oo} s hodnotou d_{oo}^* sformulujeme v tejto práci ako tvrdenie, ktoré dokážeme.

Tvrdenie 4.2. *Model neefektivity (53) je ekvivaletný zápis CCR-I modelu (1). Hodnota vlastnej efektivity E_{oo} pre DMU_o je rovná $1 - d_{oo}^*$.*

Dôkaz. CCR-I model (1) predstavuje úlohu lineárneho programovania, v ktorej vystupujú ohraničenia v tvare nerovnosti. Vieme, že zavedením nezáporných doplnkových premenných, v našom prípade $d_{oj} \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n$, môžeme tieto nerovnosti previesť na rovnosti. Týmto získavame rovnaké ohraničenia ako v modeli neefektivity (53). Ďalším krokom je previesť účelovú funkciu CCR-I modelu z maximalizácie výrazu $\sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{ro}$ na minimalizáciu d_{oo}. K tomu poslúžia ohraničenia:

$$\sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} = 1,$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{ro} - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} + d_{oo} = 0,$$

pričom dosadiac prvú z rovností do druhej získavame:

$$\sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{ro} = 1 - d_{oo}. \tag{54}$$

Z tohto zápisu vidíme, že účelová funkcia CCR-I modelu je ekvivaletná maximalizácii výrazu $1 - d_{oo}$, čo je ekvivaletné minimalizácii hodnoty d_{oo}. Tým sme ukázali, že CCR model môžeme ekvivaletne zapísať ako Model neefektivity. Opačná implikácia by sa dokazovala analogicky.

Druhú časť tvrdenie o hodnote vlastnej efektivity pre DMU_o je ľahké vidieť zo vzťahu (54). □

Jednotlivé zložky vektora d_o^* možno interpretovať aj geometricky. Konkrétnu interpretáciu uvedieme v nasledujúcom tvrdení.

Tvrdenie 4.3. *Nech v_o^*, u_o^* a d_o^* je optimálne riešenie úlohy (53) pre DMU_o. Potom zložka $d_{oj}^*, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vektora odchýliek d_o^* predstavuje vzdialenosť DMU_j, od opornej nadroviny, danej predpisom $\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_r - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_i = 0$, vynásobenú dĺžkou normálového vektora uvedenej opornej nadroviny.*

Dôkaz. Nech p predstavuje opornú nadrovinu:

$$p = \left\{ (x, y) \quad | \quad \sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_r - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_i = 0 \right\}. \tag{55}$$

Potom podľa [17] vzdialenosť DMU_j od p možno vypočítať pomocou vzťahu:

$$dist(DMU_j, p) = \frac{|\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{ij}|}{\sqrt{(\sum_{r=1}^{s} (u_{ro}^*)^2 + \sum_{i=1}^{m} (v_{io}^*)^2}}. \tag{56}$$

Vektory v_o^* a u_o^* sú optimálnym riešením úlohy (53), a teda spĺňajú jej ohraničenia, konkrétne platí:

$$\sum_{r=1}^{s} u_{ro}^* y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io}^* x_{ij} + d_{oj}^* = 0.$$

Z toho vzťahu vyplýva, že čitateľ v (56) možno nahradiť hodnotou d_j^* a dostávame:

$$d_{oj}^* = dist(DMU_j, p)\sqrt{(\sum_{r=1}^{s}(u_{ro}^*)^2 + \sum_{i=1}^{m}(v_{io}^*)^2}. \tag{57}$$

□

4.2 Metóda odchýlkovej neefektivity v CCR-I modeli

V roku 2019 autori M. Ghasemi *et. al* publikovali článok [8], v ktorom pomocou modelu neefektivity (53) opisujú spôsob ako rozlíšiť útvary v posudzovanom súbore. Tento spôsob analyzujeme v nasledujúcej časti.

Riešením modelu (53) pre DMU_o získame optimálny vektor odchýliek d_o^*. Následne vypočítaním priemeru zo zložiek vektora d_o^* získame hodnotu, ktorú autori [8] opisujú ako celkovú mieru neefektivity príslušnú k útvaru DMU_o, na základe ktorej je možné vytvoriť poradie medzi efektívnymi útvarmi. V našej práci túto hodnotu označíme ako N_o^*, tzn. hodnotu N_o^* môžeme vypočítať ako:

$$N_o^* = \frac{\sum_{j=1}^{n} d_{oj}^*}{n}, \tag{58}$$

kde n vyjadruje celkový počet útvarov. Poznamenajme, že celková miera neefektivity N_o^* môže nadobúdať len kladné hodnoty a ak využijeme interpretáciu hodnôt d_{oj}^* z Tvrdenia 4.1 tak celková miera neefektivity predstavuje priemer vzdialeností útvarov v súbore od opornej nadroviny, generovanej optimálnymi vektormi váh v_o^*, u_o^*, vynásobený dĺžkou vektora $(-v_o^*, u_o^*)$.

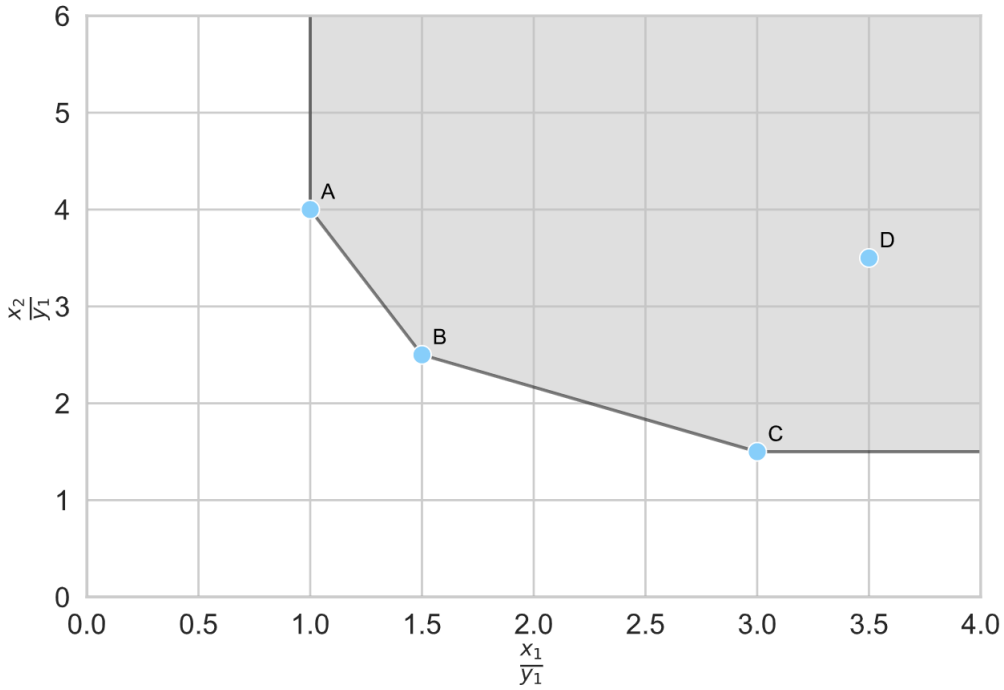
Keďže každý útvar sa snaží získať čo najväčšiu efektivitu, a teda čo najmenšiu neefektivitu, tak podľa autorov práce [8], j-ty útvar s menšou hodnotou N_j^* dosiahne lepšie umiestnenie ako i-ty útvar s väčšou celkovou mierou neefektivity N_i^*.

V článku [8] sa autori taktiež vyjadrujú, že poradie získané opísaným spôsobom je jednoznačné na rozdiel od poradia získaného metódou krížovej efektivity. Aplikovaním spomínanej metódy na príklad z časti geometrickej interpretácie našej práce [9] však zistíme, že jednoznačnosť metódy nie je splnená.

4.3 Príklad 2

Metódu opísanú autormi M. Ghasemi *et. al* ilustrujeme na nasledovnom príklade z našej práce [9], kde vystupujú štyri útvary s dvoma vstupmi a jedným výstupom. Konkrétne hodnoty sú uvedené v Tabuľke 7 a množina produkčných možností je zobrazená na Obr.4.

Obr. 4: Množina produkčných možností M_{CRS} v Príklade 2



Tabuľka 7: Hodnoty vstupov, výstupu v Príklade 2

DMU	x_1	x_2	y_1
A	1	4	1
B	1.5	2.5	1
C	3	1.5	1
D	3.5	3.5	1

Model neefektivity pre útvar B má v tomto prípade tvar:

$$\min_{u_{1B},v_{1B},v_{2B},d_j} d_{BB}, \tag{59}$$

$$1.5v_{1B} + 2.5v_{2B} = 1, \tag{60}$$

$$u_{1B} - 1v_{1B} - 4v_{2B} + d_{BA} = 0, \tag{61}$$

$$u_{1B} - 1.5v_{1B} - 2.5v_{2B} + d_{BB} = 0, \tag{62}$$

$$u_{1B} - 3v_{1B} - 1.5v_{2B} + d_{BC} = 0, \tag{63}$$

$$u_{1B} - 3.5v_{1B} - 3.5v_{2B} + d_{BD} = 0, \tag{64}$$

$$u_{1B} \geq 0, \tag{65}$$

$$v_{iB} \geq 0, \qquad i = 1, 2, \tag{66}$$

$$d_{Bj} \geq 0, \qquad j \in \{A, B, C, D\}. \tag{67}$$

Z našej práce [9] a na Obr.4 je vidieť, že útvary A, B, C ležia na hranici M_{CRS}, a teda sú efektívne. Z Tvrdenia 4.2 následne vyplýva, že hodnota d^*_{BB} v úlohe (59) je rovná nule. Z ohraničenia (60) vyjadríme hodnotu $v_{2B} = 0.4 - 0.6v_{1B}$. Dosadením d^*_{BB} a v_{2B} do (62) získame optimálnu hodnotu $u_{1B} = 1$. Ak dosadíme do ohraničení (61)-(67) už známe premenné získame nasledovné vzťahy:

$$d_{BA} = 0.6 - 1.4v_{1B} \geq 0, \tag{68}$$

$$d_{BC} = -0.4 + 2.1v_{1B} \geq 0, \tag{69}$$

$$d_{BD} = 0.4 + 1.4v_{1B} \geq 0, \tag{70}$$

$$v_{1B} \geq 0. \tag{71}$$

Z týchto vzťahov vyplýva podmienka pre v_{1B}:

$$\frac{4}{21} \leq v_{1B} \leq \frac{3}{7}.$$

Optimálne riešenie pre vstupne orientovaný model neefektivity útvaru B možno zapísať:

$$\begin{aligned}\{(v_B, u_B, d_B)| \quad v_{1B} \in \left[\frac{4}{21}; \frac{3}{7}\right], v_{2B} = 0.4 - 0.6v_{1B}, u_{1B} = 1,\\ d_{BA} = 0.6 - 1.4v_{1B}, d_{BB} = 0, d_{BC} = -0.4 + 2.1v_{1B}, d_{BD} = 0.4 + 1.4v_{1B}\}.\end{aligned} \tag{72}$$

Následne pre útvar B vypočítame hodnotu N^*_B, ktorá je rovná priemeru zložiek optimálneho vektora d_B, tzn.:

$$N^*_B = \frac{d_{BA} + d_{BB} + d_{BC} + d_{BD}}{4} = \frac{0.6 + 2.1v_{1B}}{4}, \quad v_{1B} \in \left[\frac{4}{21}; \frac{3}{7}\right]$$

Vidíme, že hodnota N_B^* záleží od parametra v_{1B}, a to už je v spore s tým, že metóda rozlišovania efektívnych útvarov na základe celkovej miery neefektivity N_j^* je jednoznačná.

Podobne ako sme získali hodnotu N_B^* možno analyticky vypočítať aj hodnoty $N_j^*, j \in \{A, B, C, D\}$. V našom prípade sa tieto hodnoty rovnajú:

$$N_A^* = \frac{-1.125 + 6.125 v_{1A}}{4}, \quad v_{1A} \in \left[\frac{3}{7}; 1\right],$$

$$N_C^* = \frac{\frac{11}{3} - 14 v_{1C}}{4} \quad v_{1C} \in \left[0; \frac{4}{21}\right],$$

$$N_D^* = \frac{3}{20}.$$

4.4 Metóda odchýlkovej neefektivity v BCC-I modeli

Aj napriek tomu, že sme ukázali v predchádzajúcej časti, že spôsob vytvárania poradia na základe modelu neefektivity nie je jednoznačný, dá sa uplatniť aj na súbory, ktoré vykazujú variabilné výnosy z rozsahu. Model neefektivity odpovedajúci variabilným výnosom z rozsahu, ktorý sme prevzali z článku [8] uvedieme v nasledujúcom tvrdení.

Tvrdenie 4.4. *BCC-I model sa dá ekvivalente zapísať ako:*

$$\begin{aligned}
\min_{u_{ro}, v_{io}, d_{oj}, c_o} \quad & d_o, \\
s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} = 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{ij} - c_o + d_{oj} = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\
& u_{ro} \geqslant 0 \quad r = 1, 2, \ldots, s, \\
& v_{io} \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\
& d_{oj} \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\
& c_o \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{73}$$

Zápis (73) predstavuje vstupne orientovaný model neefektivity odpovedajúci variabilným výnosom z rozsahu a hodnota vlastnej efektivity E_{oo} je rovná $1 - d_{oo}^*$, kde d_{oo}^* je optimálna hodnota účelovej funkcie (73).

Dôkaz. Dôkaz tohto Tvrdenia je analogický dôkazu Tvrdenia 4.2. □

Poznamenajme, že ak položíme v modeli (73) hodnotu c_o rovnú nule, získame zápis modelu (53).

Ak označíme d_o^* vektor, ktorého zložky tvoria optimálne riešenia úlohy (73), môžeme rovnako ako v prípade konštantných výnosov z rozsahu vytvoriť poradie medzi posudzovanými súbormi na základe celkovej miery neefektivity N_o^*, ktorú podľa [8] získame ako priemer zložiek vektora d_o^*, čo je ekvivalentné vzťahu (58). Vidíme, že aj v prípade variabilných výnosov z rozsahu, celková miera neefektivity N_j^* pre jednotlivé útvary bude nadobúdať kladné hodnoty. To znamená, že výsledné poradie útvarov je vytvárané len z kladných hodnôt, takže nezaznamenávame problém so zápornými hodnotami, ktorý bol pozorovaný pri metóde krížovej efektivity aplikovanej na BCC-I model. Zároveň v prípade variabilných výnosov z rozsahu platí analogická interpretácia hodnôt d_{oj}^* ako v Tvrdení 4.1 a ako dôsledok, aj v tomto prípade, hodnota N_j^* predstavuje priemer vzdialeností útvarov od opornej nadroviny generovanej optimálnym riešením BCC-I modelu (4) vynásobený dĺžkou normáloveho vektora spomínanej nadroviny.

4.5 Odstránenie nejednoznačnosti

Metóda neefektivity je aplikovateľná aj na súbory vykazujúce variabilné výnosy z rozsahu a určuje poradie medzi útvarmi na základe kladných hodnôt N_j^*. Je však potrebné odstrániť nedostatok tejto metódy, ktorou je nejednoznačnosť.

Podobne ako v metóde krížovej efektivity budeme riešiť doplňujúcu úlohu lineárneho programovania. Vyriešním úlohy (53) resp. (73) pre DMU_o, kde $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$ získame optimálne vektory váh v_o^*, u_o^* (v prípade variabilných výnosov z rozsahu aj c_o^*), vlastnú neefektivitu o-teho útvaru d_{oo}^* a taktiež vektor d_o^*, z ktorého získame hodnotu N_o^*. Pre DMU_o je optimálne minimalizovať hodnotu N_o^*, pričom hodnota vlastnej neefektivity d_{oo}^*

by zostala zachovaná. Táto úvaha vedie k riešeniu nasledovnej úlohy:

$$
\begin{aligned}
\min_{u_{ro},v_{io},d_{oj},c_o} \quad & \frac{d^*_{oo} + \sum_{j=1,j\neq o}^{n} d_{oj}}{n}, \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} v_{io}x_{io} = 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_{ro}y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io}x_{ij} - c_o + d_{oj} = 0 \quad j = 1,2,\ldots,n, \quad j \neq o \\
& \sum_{r=1}^{s} u_{ro}y_{ro} - \sum_{i=1}^{m} v_{io}x_{io} - c_o + d^*_{oo} = 0, \\
& u_{ro} \geqslant 0 \quad r = 1,2,\ldots,s, \\
& v_{io} \geqslant 0 \quad i = 1,2,\ldots,m, \\
& d_{oj} \geqslant 0 \quad j = 1,2,\ldots,n \quad j \neq o, \\
& c_o \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{74}
$$

Posledné ohraničenie úlohy (74) zabezpečuje pre o-ty útvar zachovanie hodnoty neefektivity d^*_{oo} získanej z (53) resp. (73). Ostatné ohraničenia sú totožné ohraničeniam z úlohy (53) resp. (73) a účelová funkcia predstavuje celkovú mieru neefektivity N^*_o. Vyriešením úlohy (74) získame optimálne vektory váh (v^*_o,u^*_o) spolu s vektorom neefektivít d^*_o, ktoré sú optimálnym riešením aj pre úlohu (53) resp. v prípade variabilných výnosov z rozsahu, pre úlohu(73).

Tvrdenie 4.5. *Úloha lineárneho programovania (74) má optimálne riešenie pre ľubovoľný útvar $o \in \{1,2,\ldots,n\}$ a súbor útvarov s kladnými vstupmi a kladnými výstupmi.*

Dôkaz. Úloha (74) je v tvare minimalizačnej úlohy lineárneho programovania. V tomto prípade ak účelová funkcia je zdola ohraničená a existuje prípustné riešenie, tak existuje aj optimálne riešenie. Najskôr sa pozrime na prípustnosť úlohy (74). Nech vektory $(\hat{v_o},\hat{u_o},\hat{d_o})$ a konštanta $\hat{c_o}$ sú optimálnym a zároveň prípustným riešením úlohy (73). Ak položíme $d^*_{oo} = \hat{d_{oo}}$, tak toto riešenie zároveň spĺňa ohraničenia úlohy (74) a je teda prípustným riešením aj pre úlohu (74).

Ohraničenie účelovej funkcie zdola zabezpečuje podmienka $d_{oj} \geqslant 0, \quad j = 1,2,\ldots,n, \quad j \neq o$, čím je tvrdenie dokázané.

Poznamenajme, že sme v dôkaze využili existenciu riešenia pre (73) pre pre ľubovoľný útvar $o \in \{1,2,\ldots,n\}$ a súbor útvarov s kladnými vstupmi a kladnými výstupmi. Podľa

[10] pre BCC-I model existuje v takomto prípade optimálne riešenie a vďaka Tvrdeniu 4.4 potom existuje aj optimálne riešenie pre úlohu (73). □

Úloha (74) je formulovaná ako úloha minimalizačná. Poznamenajme, že je možné sformulovať túto úlohu, v ktorej sa celková miera neefektivity N_o^* bude maximalizovať. V prípade minimalizácie budeme hovoriť o agresívnom prístupe (ozn. (a)) a v prípade maximalizácie o benevolentnom (ozn. (b)) prístupe. V prípade maximalizácie však úloha lineárneho programovania môže byť neohraničená.

4.6 Príklad 3

V článku [8] autori aplikujú metódu neefektivity na súbor siedmich útvarov, ktorí spracovávajú tri vstupy na výrobu troch výstupov. Konkrétne hodnoty sú uvedené v Tabuľke 8. Na získanie efektivity jednotlivých útvarov použili CCR model ako aj BCC model,

Tabuľka 8: Hodnoty vstupov a výstupov pre DMU pre Priklad 3

DMU	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1	12	400	20	60	35	17
2	19	750	70	139	41	40
3	42	1500	70	225	68	75
4	15	600	100	90	12	17
5	45	2000	250	253	145	130
6	19	730	50	132	45	45
7	41	2350	600	305	159	97

pričom následne použili na vytvorenie poradia medzi útvarmi metódu neefektivity. Ich výsledky sú uvedené v Tabuľke 9.

V našom prípade sme na tento súbor aplikovali navyše doplňujúce úlohy tvaru (74) v agresívnom aj benevolentnom prístupe a získali sme poradie útvarov, na základe celkovej miery neefektivity, uvedené v Tabuľke 10, pričom označením (a) máme na mysli agresívny prístup a pod (b) benevolentný prístup.

Pozrime sa najskôr na CCR-I model. Ak porovnáme naše výsledky s výsledkami uvedenými v článku [8] vidíme, že v prípade agresívneho prístupu celková miera neefektivity

Tabuľka 9: Efektivita, celková miera neefektivity a poradie z článku [8] pre Priklad 3

DMU	CCR-I			BCC-I		
	Efektivita	N_o^*	Poradie	Efektivita	N_o^*	Poradie
1	1	0.218	5	1	0.218	6
2	1	0.145	4	1	0.145	5
3	1	0.805	6	1	0.056	3
4	0.820	-	7	0.977	-	7
5	1	0.049	2	1	0.041	2
6	1	0.126	3	1	0.126	4
7	1	0.045	1	1	0.034	1

sa zmenšila iba pre tretí útvar a ostatné hodnoty zostali zachované. Poradie v tomto prípade zostalo zhodné s poradím z článku [8]. Ak sa však pozrieme na benevolentný prístup vidíme nie len nárast hodnôt N_j^*, pre každé $j, \in \{1, 2, \ldots, 7\}, j \neq 4$, ale žiadny efektívny útvar nezískal rovnaké poradie ako v agresívnom prístupe, čo potvrdzuje nejednoznačnosť metódy neefektivity. V prípade BCC-I modelu a agresívneho prístupu, sme opäť získali pre všetky efektívne útvary, s výnimkou tretieho útvaru, menšie hodnoty celkovej miery neefektivity ako v článku [8], čo spôsobilo aj zmenu v konečnom poradí. Ak sa pozrieme na benevolentný prístup, kde sme maximalizovali N_j^* vidíme, že pre piaty a siedmy útvar bola maximalizačná úloha (74) neohraničená, a preto sme pri vytváraní poradia tieto útvary vynechali.

Tabuľka 10: Celková miera neefektivity pomocou úlohy (74) v agresívnom (a) a benevolentnom (b) prístupe v Príklade 3

DMU	CCR-I					BCC-I				
	E_{oo}	N_o^* (a)	Poradie	N_o^* (b)	Poradie	E_{oo}	N_o^* (a)	Poradie	N_o^* (b)	Poradie
1	1	0.218	5	6.224	6	1	0.2079	6	7.28571	4
2	1	0.145	4	0.421	3	1	0.10442	4	0.43367	1
3	1	0.72	6	1.603	5	1	0.05607	3	6.23469	3
4	0.820	-	7	-	7	0.977	-	7	-	-
5	1	0.049	2	0.167	1	1	0.03897	2	neohraničenosť úlohy (74)	-
6	1	0.126	3	1.385	4	1	0.10769	5	1.59111	2
7	1	0.045	1	0.219	2	1	0.03251	1	neohraničenosť úlohy (74)	-

4.7 Metóda odchýlkovej neefektivity vo výstupných modeloch

Analogicky možno aplikovať metódu neefektivity na výstupne orientované modely CCR-O (3), BCC-O (6). Opäť budeme vychádzať z ekvivalentného zápisu týchto modelov.

Tvrdenie 4.6. *BCC-O model (6) sa dá ekvivalente zapísať ako:*

$$\begin{aligned} \min_{u_{ro},v_{io},d_{oj},c_o} \quad & d_o, \\ s.t. \quad & \sum_{r=1}^{s} u_{ro}y_{ro} = 1, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_{ro}y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io}x_{ij} - c_o + d_{oj} = 0 \quad j = 1,2,\ldots,n, \\ & u_{ro} \geqslant 0 \quad r = 1,2,\ldots,s, \\ & v_{io} \geqslant 0 \quad i = 1,2,\ldots,m, \\ & d_{oj} \geqslant 0 \quad j = 1,2,\ldots,n, \\ & c_o \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{75}$$

Optimálne riešenie úlohy (75) označíme v_o^*, u_o^*, c_o^* a d_o^*, pričom d_o^* nazveme vektorom neefektivít, prisluchajúci k DMU_o. Zároveň o-ta zložka vektora d_o^* predstavuje optimálnu hodnotu účelovej funkcie úlohy (75).

Dôkaz. Ďokaz tohto tvrdenia je analogický dôkazu Tvrdenia 4.2. □

V prípade vstupného modelu sme hodnotu d_{oo}^* interpretovali ako vlastnú neefektivitu a platil vzťah medzi touto hodnotou a vlastnou efektivitou $E_{oo} = 1 - d_{oo}^*$. V prípade výstupne orientovaného modelu tento vzťah neplatí pre neefektívne útvary[6].

Na základe vektora d_o^* analogicky ako v prípade vstupne orientovaných modelov získame hodnotu celkovej miery neefektivity N_o^* pre každé DMU_o, zo vzťahu (58). Na základe tejto hodnoty následne vytvoríme poradie medzi útvarmi. Podľa vzoru z článku [8], DMU_o s menšou hodnotou N_o^* získa lepšie umiestnenie ako DMU_j s väčšou hodnotou N_j^*.

[6]Ak by sme chceli hodnotu vlastnej efektivity E_{oo} vzhľadom na BCC-O model, kde E_{oo} predstavuje prevrátenú hodnotu optimálnej hodnoty účelovej funkcie tohto modelu, vyjadriť pomocou optimálnej hodnoty účelovej funkcie (75) d_{oo}^*, platí vzťah: $E_{oo} = \frac{1}{1+d_{oo}^*}$. Potom neefektivita je rovná $1 - E_{oo} = 1 - \frac{1}{1+d_{oo}^*} = \frac{d_{oo}^*}{1+d_{oo}^*}$

Opäť je potrebné poznamenať, že riešenie úlohy (75) nie je jednoznačné a je potrebné túto nejednoznačnosť odstrániť napr. ako v prípade vstupného modelu zavedením doplňujúcej úlohy (74).

Ak položíme v úlohe (75) $c_o = 0$, získame ekvivaletný zápis CCR-O modelu. Platia preň analogické vlastnosti ako sme opísali v tejto časti o výstupne orientovanom BCC-O modeli a možnosť zostrojiť poradie na základe hodnôt celkovej miery neefektivity N_o^*. Tú získame, pre každé DMU_o z vektora d_o^*, ktorý je riešením modifikovanej úlohy (75), pomocou vzťahu (58).

4.8 Metóda odchýlkovej neefektivity v SBM modeli

V tejto časti aplikujeme metódu neefektivity na SBM model (7), pričom budeme vychádzať z SBM modelu v tvare úlohy lineárneho programovania (9).

Tvrdenie 4.7. *SBM model (9) možno ekvivalentne zapísať v tvare:*

$$\min_{u_{ro}, v_{io}, d_{oj}} \quad d_{oo}, \tag{76}$$

$$s.t. \quad \sum_{r=1}^{s} u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{ij} - c_o + d_{oj} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{77}$$

$$\frac{1}{m x_{io}} \leqslant v_{io}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{78}$$

$$\frac{1 - d_{oo}}{s y_{ro}} \leqslant u_{ro}, \qquad r = 1, 2, \ldots, s, \tag{79}$$

$$0 \leqslant d_{oj}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{80}$$

$$d_{oo} \leqslant 1. \tag{81}$$

Hodnotu účelovej funkcie označíme d_{oo}^*. Táto hodnota predstavuje neefektivitu o-teho útvaru a optimálne riešenie označíme $v_o^*, u_o^*, c_o^*, d_o^*$, kde zložky vektora d_o^* sú $d_{oj}^*, j = 1, 2, \ldots, n$. Nech hodnota E_{oo} predstavuje efektivitu o-teho útvaru vzhľadom na SBM model (7), potom platí nasledovný vzťah:

$$E_{oo} = 1 - d_{oo}^*. \tag{82}$$

Dôkaz. Dôkaz tohto tvrdenia je analogický ako dôkaz Tvrdenia 4.2. □

Podľa [10] úloha (7) má riešenie pre akýkoľvek súbor útvarov s kladnými vstupmi a

výstupmi a v spojení s Tvrdením 4.7 vyplýva, že úloha (76) má taktiež optimálne riešenie pre akýkoľvek súbor útvarov s kladnými vstupmi a výstupmi.

Celkovú mieru neefektivity N_o^* pre DMU_o vzhľadom na SBM model získame ako priemer zložiek vektora d_o^*, ktorý predstavuje optimálne riešenie (76).

Úloha (76) je sformulovaná pre súbor vykazujúci variabilné výnosy z rozsahu. V prípade konštantných výnosov z rozsahu položíme $c_o = 0$.

Aj v prípade SBM modelu, rozlišovanie útvarov na základe metódy neefektivity nie je jednoznačné, keďže optimálne riešenie úlohy (76) nie je jednoznačné, čo ukážeme v nasledovnom tvrdení.

Tvrdenie 4.8. *Ak $DMU_o, o \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je vnútorným bodom množiny M_{VRS}, potom je množina optimálnych riešení $(v_o^*, u_o^*, c_o^*, d_o^*)$ úlohy (76) pre tento útvar ohraničená. Ak $DMU_o, o \in \{1, 2, \ldots, n\}$ leží na hranici množiny M_{VRS}, tak množina optimálnych riešení $(v_o^*, u_o^*, c_o^*, d_o^*)$ je neohraničená. Navyše ak je DMU_o efektívny útvar, potom pre ľubovoľné optimálne riešenie $(v_o^*, u_o^*, c_o^*, d_o^*)$ úlohy (76) platí, že aj $(\alpha v_o^*, \alpha u_o^*, \alpha c_o^*, \alpha d_o^*)$ je optimálnym riešením, pre ľubovoľnú hodnotu α:*

$$\alpha \geq \max\left\{\frac{1}{sy_{1o}u_{1o}^*}, \ldots, \frac{1}{sy_{ro}u_{ro}^*}, \frac{1}{mx_{1o}v_{1o}^*}, \ldots, \frac{1}{mx_{mo}v_{mo}^*}\right\}.$$

Dôkaz. Toto tvrdenie je dôsledkom [11, Theorem 8]. Prvá časť tvrdenia týkajúca sa vnútorného bodu množiny M_{VRS} je priamym dôsledkom. V druhej časti týkajúcej sa efektívneho útvaru sme konktretizovali spodné ohraničenie pre hodnotu α z toho dôvodu túto časť dokážeme.

Pre efektívne DMU_o, ležiace na hranici M_{VRS} s hodnotou vlastnej efektivity $E_{oo} = 1$, je hodnota vlastnej neefektivity $d_{oo}^* = 0$. Nech $(v_o^*, u_o^*, c_o^*, d_o^*)$ je optimálne riešenie úlohy (76) pre tento útvar. Dosadiac do ohraničení úlohy (9) pre DMU_o vektor $(\alpha v_o^*, \alpha u_o^*, \alpha c_o^*, \alpha d_o^*)$, kde $\alpha > 0$ vidíme, že ohraničenia v tvare rovnosti sú splnené. Ohraničenia v tvare nerovnosti nadobúdajú tvar:

$$\frac{1}{mx_{io}} \leqslant \alpha v_{io}^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{83}$$

$$\frac{1 - \alpha d_{oo}^*}{sy_{ro}} \leqslant \alpha u_{ro}^*, \qquad r = 1, 2, \ldots, s, \tag{84}$$

kde $d_{oo}^* = 0$. Aby bol vektor $(\alpha v_o^*, \alpha u_o^*, \alpha c_o^*, \alpha d_o^*)$ prípustným riešením, tak z nerovností (83) a (84) dostávame vzťah: $\alpha \geq \max\left\{\frac{1}{sy_{1o}u_{1o}^*}, \ldots, \frac{1}{sy_{ro}u_{ro}^*}, \frac{1}{mx_{1o}v_{1o}^*}, \ldots, \frac{1}{mx_{mo}v_{mo}^*}\right\}$. Hod-

nota účelovej funkcie v tomto prípustnom riešení zostane rovná nule, a tak tieto prípustné riešenia sú aj optimálnymi riešeniami pre (76), v prípade efektívneho DMU_o.

□

Odstránenie závislosti metódy neefektivity od výberu optimálneho riešenia úlohy (76) môžeme docieliť aplikovaním doplňujúcej úlohy, tak ako v prípade orientovaných modelov. V tejto doplňujúcej úlohe budeme optimalizovať hodnotu celkovej miery neefektivity N_o^* pri zachovanej hodnote vlastnej neefektivity d_{oo}^*. V tomto prípade, bude vhodné definovať doplňujúcu úlohu ako minimalizačnú (agresívny prístup). Z Tvrdenia 4.8 totiž vyplýva, že úloha, v ktorej by sme maximalizovali celkovú mieru neefektivity N_o^* pri zachovanej hodnote vlastnej neefektivity d_{oo}^* pre efektívne útvary, by N_o^* bola vždy neohraničená.

5 Metóda superefektivity

Ďalšou možnosťou na vytváranie poradia a rozlišovania medzi efetívnymi útvarmi v súbore je využiť hodnotu superefektivity. Princíp spočíva v tom, že DMU_o posudzujeme vzhľadom na množinu produkčných možností, z ktorej je posudzovaný útvar vylúčený. Takto modifikovanú množinu produkčných možností budeme označovať M^o_{VRS} v prípade variabilných výnosov z rozsahu a M^o_{CRS} v prípade konštantných výnosov z rozsahu[7]. V tejto časti postupne uvedieme superefektivitu vzhľadom na BCC, CCR a SBM modely.

5.1 Metóda superefektivity v BCC modeli

Superefektivita v rámci BCC modelu bola popísaná autormi Andersen P. a Petersen N. C. v článku [1]. Uvádzajú, že neefektivitu DMU_o možno interpretovať ako radiálnu vzdialenosť od množiny produkčných možností a túto myšlienku aplikovali aj na efektívne útvary. Konkrétne v tomto prípade, superefektivita predstavuje radiálnu vzdialenosť posudzovaného útvaru DMU_o od M^o_{VRS}. V nasledujúcej definícii uvedieme model, v našej práci ho označíme S-BCC-I ktorého optimálna hodnota účelovej funkcie predstavuje superefektivitu DMU_o, vzhľadom na BCC-I model.

Definícia 5.1. *Hodnotu superefektivity (ozn. SE_o) pre DMU_o, $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vzhľadom na BCC-I model získame ako optimálnu hodnotu účelovej funkcie nasledovnej úlohy:*

$$\begin{aligned} \min_{\theta,\lambda} \quad & \theta \\ s.t. \quad & \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_j y_{rj} \geqslant y_{ro} \quad r = 1, \ldots, s, \\ & \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_j x_{ij} \leqslant \theta x_{io} \quad i = 1, \ldots, m, \\ & \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geqslant 0 \quad j = 1, \ldots n, \quad j \neq o. \end{aligned} \tag{85}$$

Úlohu (85) budeme v ďalšom texte označovať ako S-BCC-I.

[7] Poznamenajme, že vylúčením neefektívneho DMU_o z M_{VRS} sa množina nezmení, a preto $M_{VRS} = M^o_{VRS}$

Všimnime si, že úloha (85) sa líši od obálkového BCC-I modelu (5) tým, že sa vynechal útvar DMU_o v súčtoch v ohraničení úlohy a to práve z toho dôvodu, že DMU_o posudzujeme vzhľadom na M^o_{VRS}, pričom táto množina neobsahuje DMU_o.

Autori v článku [1] uvádzajú aj nasledujúcu interpretáciu hodnoty SE_o vo vstupnom modeli. V prípade efektívneho DMU_o, táto hodnota predstavuje minimálny násobok $\theta \geq 1$, ktorým DMU_o môže predĺžiť svoje vstupy a dostať sa na hranicu M^o_{VRS}. Analogicky možno interpretovať hodnotu superefektivity vzhľadom na BCC-O model ako maximálny násobok $\psi \leq 1$, ktorým DMU_o môže skrátiť svoje výstupy a dostať sa na hranicu M^o_{VRS}..

V prípade variabilných výnosov z rozsahu, superefektivita vzhľadom na BCC modely nemusí byť pre každé DMU_o, $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dobre definovaná. Inak povedané, úloha (85) nemusí byť riešiteľná pre všetky DMU_o, $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$. V prípade, že pre niektoré DMU_o zo súboru superefektivita nie je dobre definovaná, nastáva problém ako vytvoriť poradie na základe superefektivity v tomto súbore. Ako prvý na tento problém poukázal Thrall R. M. v článku [23]. Existuje veľa prác, ktoré sa zaoberajú odstránením tohto problému. V článku [20] sa autori venujú popísaniu nutných a postačujúcich podmienok neriešiteľnosti úlohy (85). V článku [28] sa autori zaoberajú vytváraním poradia na základe superefektivity, ak sa v súbore nachádzajú útvary, pre ktoré je úloha (85) neriešiteľná.

5.2 Metóda superefektivity v CCR modeli

Hodnota superefektivity pre DMU_o, v prípade CCR modelu, predstavuje posudzovanie daného útvaru vzhľadom na M^o_{CRS}. Úloha, ktorej optimálna hodnota účelovej funkcie je rovná superefektivite SE_o vzhľadom na CCR-I model pre DMU_o, sa líši od úlohy (85) vynechaním ohraničenia $\sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_j = 1$. Túto úlohu budeme označovať ako a S-CCR-I. Výhodou superefektivity v prípade CCR modelov je, že superefektivita SE_o je dobre definovaná pre každé DMU_o, $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$. V prípade vstupne orientovaného modelu tento fakt sformulujeme do nasledujúceho tvrdenia, pričom sformulovanie dôkazu tohto tvrdenia bolo v [10] uvedené ako Úloha 9.9.

Tvrdenie 5.2. *Predpokladajme, že všetky vstupy a výstupy pre každé DMU_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sú kladné, potom hodnota superefektivity SE_o vzhľadom na CCR-I model je pre každé*

efektívne DMU_o, $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dobre definovaná. Navyše platí:

$$SE_o \geq 1. \tag{86}$$

Dôkaz. Dôkaz prvej časti tohto tvrdenia je ekvivalentný dôkazu, že úloha:

$$\begin{aligned} \min_{\theta,\lambda} \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1,j\neq o}^{n} \lambda_j y_{rj} \geqslant y_{ro} \quad r = 1, \ldots, s, \\ & \sum_{j=1,j\neq o}^{n} \lambda_j x_{ij} \leqslant \theta x_{io} \quad i = 1, \ldots, m, \\ & \lambda_j \geqslant 0 \quad j = 1, \ldots n, \quad j \neq o, \end{aligned} \tag{87}$$

má optimálne riešenie. Táto úloha je minimalizačnou úlohou lineárneho programovania v takom prípade, platí, že ak úloha má prípustné riešenie a účelová funkcia je zdola ohraničená, tak existuje optimálne riešenie pre túto úlohu.

Ak sa pozrieme na ohraničenia úlohy (87) je zjavné, že účelová funkcia je zdola ohraničená. Zabezpečuje to podmienka $\lambda_j \geqslant 0 \quad j = 1, \ldots n, \quad j \neq o$. Ak by sme zvolili $\lambda_j = 0 \quad j = 1, \ldots n, \quad j \neq o$ a dosadili do ohraničení, kde vystupuje θ, získali by sme podmienku $0 \leq \theta$.

Následne musíme nájsť prípustné riešenie. Zvoľme:

$$\lambda_j = \max_{k=1,2,\ldots,s} \frac{y_{ko}}{y_{kj}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad j \neq o, \tag{88}$$

pre ktoré platí $\lambda_j \geqslant 0 \quad j = 1, \ldots n, \quad j \neq o$.

Dosaďme postupne (88) do ohraničení úlohy (87). Dostávame:

$$\sum_{j=1,j\neq o}^{n} \max_{k\in\{1,2,\ldots,s\}} \frac{y_{ko}}{y_{kj}} y_{rj} \geqslant \max_{j\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{o\}} \left\{ \max_{k\in\{1,2,\ldots,s\}} \frac{y_{ko}}{y_{kj}} y_{rj} \right\} = \tag{89}$$

$$\max_{j\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{o\}} \left\{ y_{rj} \max_{k\in\{1,2,\ldots,s\}} \frac{y_{ko}}{y_{kj}} \right\} \geqslant \max_{j\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{o\}} \left\{ y_{rj} \frac{y_{ro}}{y_{rj}} \right\} = \tag{90}$$

$$\max_{j\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{o\}} \{y_{ro}\} = y_{ro}, \qquad r = 1, \ldots, s. \tag{91}$$

Vidíme, že riešenie (88) spĺňa, prvých s ohraničení úlohy (87). Pri úprave sme postupne využili nerovnosti:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1,j\neq o}^{n} y_{rj} \geqslant \max_{j\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{o\}} y_{rj}, \\ & \max_{k\in\{1,2,\ldots,s\}} \frac{y_{ko}}{y_{kj}} \geqslant \frac{y_{ro}}{y_{rj}}, \qquad r \in \{1, 2, \ldots, s\}. \end{aligned} \tag{92}$$

Dosadíme (88) do zostávajúcich ohraničení úlohy (87):

$$\sum_{j=1,j\neq o}^{n} \max_{k\in\{1,2,\ldots,s\}} \frac{y_{ko}}{y_{kj}} x_{ij} \leqslant \theta x_{io} \quad i = 1,\ldots,m. \tag{93}$$

$$\tag{94}$$

Tieto ohraničenia sú pre dostatočne veľké θ splnené, napr. ak zvolíme:

$$\theta = \max_{i\in\{1,2,\ldots,m\}} \left\{ \sum_{j=1,j\neq o}^{n} \max_{k\in\{1,2,\ldots,s\}} \frac{y_{ko}}{y_{kj}} \frac{x_{ij}}{x_{io}} \right\} \tag{95}$$

Týmto je prvá časť tvrdenia dokázaná.

Pre efektívne DMU_o platí, že optimálna hodnota účelovej funkcie θ^* obálkového CCR-I modelu [10, str. 21], v optimálnom riešení $\lambda^* \in \mathbb{R}^n$, je rovná 1. Ďalej vidíme, že ak $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{o-1}, \lambda_{o+1}, \ldots, \lambda_n, \theta)$ je prípustným riešením úlohy (87), potom prípustným riešením obálkového CCR-I modelu je $(\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{o-1},\ 0,\ \lambda_{o+1},\ \ldots,\ \lambda_n,\ \theta\ )$. Označme $\hat{P}$ množinu prípustných riešení úlohy (87) a množinu prípustných riešení obálkového CCR-I modelu P. Potom platí:

$$1 = \min_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{o-1},\lambda_o,\lambda_{o+1},\ldots,\lambda_n,\theta)\in P} \theta \leq \min_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{o-1},0,\lambda_{o+1},\ldots,\lambda_n,\theta)\in P} \theta = \tag{96}$$

$$\min_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{o-1},\lambda_{o+1},\ldots,\lambda_n,\theta)\in \hat{P}} \theta = SE, \tag{97}$$

čím dostávame požadovaný vzťah $SE \geq 1$ a tvrdenie je dokázané. □

Vďaka tomuto tvrdeniu môžeme bez problémov vytvoriť poradie v súbore vykazujúcom konštantné výnosy z rozsahu. V článku [30] autor ukazuje, že v špeciálnom prípade, ak je v dátach prítomná určitá kombinácia nulových vstupov a nulových výstupov úloha S-CCR-I môže byť neriešiteľná pre DMU_o. Konkrétne ak DMU_o má niektoré vstupy nulové, pričom ostatné útvary majú tieto vstupy kladné alebo DMU_o má kladné vstupy, ktoré sú nulové pre všetky ostatné útvary v súbore. Avšak, aj samotný autor článku uvádza, že taký prípad je nerealistický.

5.3 Metóda superefektivity v SBM modeli

Tretí model, ktorým sa v našej práci zaoberáme je SBM model. Ako získať hodnotu superefektivity vzhľadom na SBM model, pre efektívne DMU_o, popísal Tone, K. v článku [26].

V tomto článku autor predstavil model, pomocou ktorého získame hodnotu superefektivity pre DMU_o vzhľadom na SBM model odpovedajúci variabilným výnosom z rozsahu. V našej práci uvedieme ekvivalentný zápis tohto modelu, ktorý bol uvedený v článku [11].

Definícia 5.3. *Hodnotu superefektivity (ozn. SE_o) pre DMU_o, $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vzhľadom na SBM-VRS model získame ako optimálnu hodnotu účelovej funkcie nasledovnej úlohy:*

$$\begin{aligned}
\min_{\lambda_o, s^+, s^-} \quad & \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{s_{io}^-}{x_{io}}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{s_{ro}^+}{y_{ro}}}, \\
s.t. \quad & \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_{jo} y_{rj} - s_{ro}^+ \geq y_{ro} \quad r = 1, \ldots, s, \\
& \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_{jo} x_{ij} + s_{io}^- \leq x_{io} \quad i = 1, \ldots, m, \\
& \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_{jo} = 1, \\
& s_{io}^- \leqslant 0 \quad i = 1, \ldots m \\
& s_{ro}^+ \leqslant 0 \quad r = 1, \ldots s \\
& \lambda_{jo} \geqslant 0 \quad j = 1, \ldots n.
\end{aligned} \tag{98}$$

Úlohu (98) budeme v ďalšom texte označovať ako S-SBM-VRS.

Tvrdenie 5.4. *Nech všetky útvary v posudzovanom súbore majú všetky hodnoty vstupov a výstupov kladné. Potom pre každé DMU_o, $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existuje optimálne riešenie úlohy (5.3). Navyše, pre optimálnu hodnotu účelovej funkcie SE_o platí, že $SE_o \geq 1$. SE_o nadobúda hodnotu 1 pre také DMU_o, pre ktoré platí, že vylúčením tohto útvaru zo súboru sa množina produkčných možností nezmení.*

Dôkaz. Tvrdenie 5.4 je špeciálnym prípadom Tvrdenia 4 z [11]. □

Z Tvrdenia 5.4 vyplýva, že hodnota superefektivity SE_o je dobre definovaná pre každý efektívny útvar. Narozdiel od modelov S-BCC, S-CCR, ktoré ak aplikujeme na neefektívne útvary, získame hodnotu ich vlastnej efektivity E_{oo}, v prípade S-SBM modelu získame pre všetky neefektívne útvary totožnú hodnotu 1.

Ako je uvedené aj v [11], na základe hodnoty SE_o získanej z S-SBM-VRS modelu, vieme zistiť či DMU_o patrí do M_{VRS}^o. Následne, ak je hodnota $SE_o - 1$ nulová, znamená to, že útvar patrí do M_{VRS}^o.

Poznamenajme, že v prípade konštantných výnosov z rozsahu by sa v úlohe (98) vynechalo ohraničenie $\sum_{j=1,j\neq o}^{n} \lambda_{jo} = 1$. Túto úlohu označíme ako S-SBM-CRS. K tejto úlohe je možné sformulovať analogické tvrdenie ako Tvrdenie 5.4, ktoré sme sformulovali pre variabilné výnosy z rozsahu. Taktiež platí, že na základe hodnoty $SE_o^{SBM-CRS}$ vieme zistiť či DMU_o patrí do M_{CRS}^o.

6 Porovnanie metód

V tejto časti sa zameriame na porovnanie metód medzi sebou. V prvej časti tejto kapitoly sa pozrieme na teoretické porovnanie opisovaných metód. Odvodíme vzťahy medzi hodnotou vzájomnej efektivity E_{oj} z metódy krížovej efektivity a hodnoty d^*_{oj} z metódy neefektivity. Porovnáme výpočtové náročnosti. V druhej časti tejto kapitoly sa budeme venovať prípadovým štúdiam, kde metódy na rozlišovanie efektívnych útvarov aplikujeme na jednotlivé modely v rôznych menších dátových súboroch, ktoré sa dajú graficky zobraziť.

6.1 Teoretické porovnanie

Autori článku [8], v ktorom bola uvedená metóda neefektivity uvádzajú, že metóda neefektivity by sa nemala zamieňať s metódou krížovej efektivity. Naša analýza však ukazuje, že medzi metódami je presne špecifikovaný vzťah, ktorý hovorí, že krížova neefektivita, t.j. $1 - E_{oo}$ je rovná určitým spôsobom normalizovanej odchýlkovej neefektivite d^*_{oo}. Nasledovné tvrdenie dá do súvislosti hodnotu d^*_{oj} s hodnotou vzájomnej efektivity E_{oj}.

Tvrdenie 6.1. *Nech ($v_o{}^*$,$u_o{}^*, d_o{}^*$) a konštanta c^*_o sú optimálnym riešením doplňujúcej úlohy (74) pre DMU_o. Potom pre DMU_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, hodnota vzájomnej efektivity E_{oj} tohto útvaru vzhľadom na optimálne vektory váh $v_o{}^*$, $u_o{}^*$ pre DMU_o platí vzťah:*

$$1 - E_{oj} = \frac{d^*_{oj}}{\sum_{i=1}^{m} v^*_{io} x_{ij}} \tag{99}$$

$$resp. \qquad d^*_{oj} = (1 - E_{oj}) \sum_{i=1}^{m} v^*_{io} x_{ij}. \tag{100}$$

Dôkaz. Keďže ($v_o{}^*$,$u_o{}^*, d_o{}^*$) a konštanta c^*_o sú optimálnym riešením doplňujúcej úlohy (74) pre DMU_o, spĺňajú ohraničenia tejto úlohy. Z druhej podmienky úlohy (73) a vzťahu (42) pre hodnotu vzájomnej efektivity E_{oj} potom platí:

$$\sum_{r=1}^{s} u^*_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v^*_{io} x_{ij} - c^*_o + d^*_{oj} = \sum_{i=1}^{s} u^*_{ro} y_{rj} - c^*_o - E_{oj} \sum_{i=1}^{m} v^*_{io} x_{ij}, \tag{101}$$

$$-\sum_{i=1}^{m} v^*_{io} x_{ij} + d^*_{oj} = -E_{oj} \sum_{i=1}^{m} v^*_{io} x_{ij}, \tag{102}$$

$$\frac{d^*_{oj}}{\sum_{i=1}^{m} v^*_{io} x_{ij}} = 1 - E_{oj}, \tag{103}$$

a po úprave získavame aj vzťah:

$$d^*_{oj} = (1 - E_{oj}) \sum_{i=1}^{m} v^*_{io} x_{ij}, \tag{104}$$

čím je tvrdenie dokázané. □

Jedným z rozdielov medzi metódou neefektivity a metódou krížovej efektivity je to, že pri metóde neefektivity pre každý útvar DMU_o vypočítame celkovú mieru neefektivity, na základe ktorej sa potom vytvára poradie, len pomocou jednej dvojice vektorov váh (v_o*,u_o*), to znamená, že len vzhľadom na jednu opornú nadrovnu. Na druhej strane v metóde krížovej efektivite, pri výpočte hodnoty $ECOL_o$ pre daný útvar, využívam $(n-1)$ optimálnych vektorov váh (v_j*,u_j*) $j = 1, 2, \ldots, n, j \neq 0$ ostatných útvarov, to znamená pozerám sa na vzťah DMU_o vzhľadom na $(n-1)$ oporných nadrovín generovaných ostatnými útvarmi. Inak povedané, v prípade metódy neefektivit pre daný útvar získame hodnotu, podľa ktorej sa následne vytvára poradie, len na základe jeho optimálneho riešenia úlohy (74), táto hodnota je získaná vzhľadom na jednu opornú nadrovinu generovanú optimálnymi vektormi váh tohto útvaru. Pri metóde krížovej efektivity je však hodnota $ECOL$ pre daný útvar, získaná vzhľadom na optimálne riešenia ostatných útvarov, teda berú sa pre daný útvar rôzne oporné nadroviny generované ostatnými útvarmi. Aj z tohto dôvodu je považované za výhodu metódy krížovej efektivity to, že útvar je ohodnocovaný vzhľadom na váhy ostatných útvarov.

Jednou z možností ako zachovať konzistentnosť metód je metódu krížovej efektivity modifikovať pomocou tzv. hodnoty $EROW$[8], kde by hodnoty vzájomných efektivít boli počítané vzhľadom na jednu opornú nadrovinu generovanú optimálnymi vektormi váh pre daný útvar. Zároveň treba podotknúť, že úloha v ktorej by sme hľadali vektory váh pre DMU_j, ktoré by maximalizovali, alebo minimalizovali hodnotu $EROW_o$ vedú na úlohy, ktoré sa nedajú riešiť pomocou lineárneho programovania. Naopak, je možnosť modifikovať metódu neefektivity, kde by sme celkovú mieru neefektivity N_o pre DMU_o spočítali ako priemer hodnôt $d^*_{oj}, j = 1, 2, \ldots, n$, čo sa môže stať predmetom ďalšieho štúdia.

Výhodou metódy neefektivity narozdiel od metódy krížovej efektivity, ako sme už

[8]Hodnota $EROW_o$ pre DMU_o by sa získala pomocou vzťahu: $EROW_o = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E_{jo} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\sum_{r=1}^{s} u^*_{ro} y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v^*_{io} x_{ij}}$, $o \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Podrobnejšie je táto hodnota popísaná v [9].

spomínali je, že v prípade BCC modelu vieme vytvoriť poradie, pre všetky efektívne útvary. V metóde krížovej efektivity, ak použijeme agresívny prístup, nie sú pre niektoré útvary vzájomné efektivity dobre definované a nie je možné vytvoriť poradie na základe hodnoty $ECOL$. Ak na BCC model aplikujeme metódu superefektivity, taktiež môže nastať situácia, že superefektivita nebude dobre definovaná. Sformulujeme nasledovnú hypotézu:

Hypotéza 6.2. *V prípade variabilných výnosov z rozsahu a BCC modelu, ak pre efektívne DMU_o superefektivita SE_o nie je dobre definovaná, tak pre tento útvar je úloha (47) cielenej metódy v rámci agresívneho prístupu pre každé $j = 1, 2, \ldots, n$, $j \neq o$ neohraničená a vzájomné efektivity E_{oj} $j = 1, 2, \ldots, n$, $j \neq o$ vzhľadom na optimálne vektory váh tohto útvaru nie sú dobre definované.*

Poznamenajme, že táto hypotéza je sformulovaná ako implikácia, pričom opačná implikácia nemusí platiť.

V prípade variabilných výnosov a SBM modelu, v metóde superefektivity je hodnota superefektivity dobre definovaná pre všetky útvary a v prípade metódy neefektivity, ak odstránime nejednoznačnosť metódy doplňujúcou metódou má zmysel len minimalizačná úloha, ktorá je dobre definovaná pre všetky útvary. V prípade konštatntných výnosov z rozsahu sa tieto problémy nevyskytujú a pomocou všetkých troch metód získame výsledné poradie.

Je vhodné porovnať aj výpočtovú náročnosť jednotlivých metód. V metóde krížovej efektivity, ak využijeme cielenú metódu, je potrebné vyriešiť n^2 úloh lineárneho programovania, z čoho n úloh je potrebných na získanie vlastnej hodnoty efektivity. Pri metóde neefektivity je potrebné vyriešiť celkovo (n + *počet efektívnych útvarov*) úloh lineárneho programovania, n na získanie hodnôt neefektivity a v závislosti na počte efektívnych je potrebné riešiť doplňujúcu úlohu na odstránenie nejednoznačnosti pre tieto efektívne útvary. V prípade metódy superefektivity závisí počet úloh od konkrétneho modelu, kým v prípade CCR a BCC modelu je potrebné vyriešiť n úloh lineárneho programovania, v prípade SBM modelu je potrebné vyriešiť n úloh na získanie hodnoty efektivity a následne pre každý efektívny útvar vyriešiť úlohu lineárneho programovania na získanie hodnoty superefektivity. Z predošlého vyplýva, že v metóde krížovej efektivity je potrebné vyriešiť najviac úloh lineárneho programovania spomedzi ostatných opísaných metód.

6.2 Prípadové štúdie

V tejto časti sa budeme venovať aplikácii metód na dátové súbory. Rozdelili sme ich na dve skupiny na základe toho aké výnosy z rozsahu vykazujú. Prvá skupina obsahuje 5 súborov, ktoré pomenujeme Súbor 1 až Súbor 5. Tieto súbory vykazujú konštantné výnosy z rozsahu a jednotlivé útvary používajú dva vstupy na produkciu jedného výstupu. Druhá skupina vykazuje variabilné výnosy z rozsahu a taktiež pozostáva z piatich súborov, pomenovaných Súbor 6 až Súbor 10. V druhej skupine útvary používajú jeden vstup na produkciu jedného výstupu.

Na tieto súbory aplikujeme popísané metódy na vytvorenie poradia medzi efektívnymi útvarmi a budeme porovnávať poradia vytvorené pomocou jednotlivých metód pri zvolenom modeli. Konkrétne, na prvú skupinu (Súbor 1 - Súbor 5) aplikujeme CCR-I model a SBM model odpovedajúci konštantným výnosom z rozsahu, na druhú skupinu (Súbor 6 - Súbor 10) BCC-I model a SBM model odpovedajúci variabilným výnosom z rozsahu.

V Prílohe A, je možné nájsť pre každý súbor znázornenú príslušnú množinu produkčných možností a dve tabuľky s výsledkami metód vzhľadom na príslušné modely. Pre Súbory 1-5 je na grafoch zobrazený prierez množiny produkčných možností na úrovni $y = 1$. V prvej tabuľke sa pre Súbor 1 až Súbor 5 nachádzajú výsledky metód krížovej efektivity, superefektivity a neefektivity pre CCR-I model a pre Súbor 6 až Súbor 10 pre BCC-I model. Štruktúra tabuliek je nasledovná: v prvom stĺpci je hodnota superefektivity, pre každý útvar, taktiež poradie vzhľadom na metódu superefektivity. Nasleduje hodnota celkovej miery neefektivity. Kvôli eliminácii nejednoznačnosti sme použili minimalizačnú doplňujúcu úlohu (74), v prípade konštantných výnosov z rozsahu sme túto úlohu príslušne upravili. V poslednom stĺpci sa nachádzajú hodnoty $ECOL$ pre metódu krížovej efektivity, pričom sme použili na odstránenie nejednoznačnosti Cielenú metódu v agresívnom prístupe (min) ako aj v benevolentnom prístupe (max).

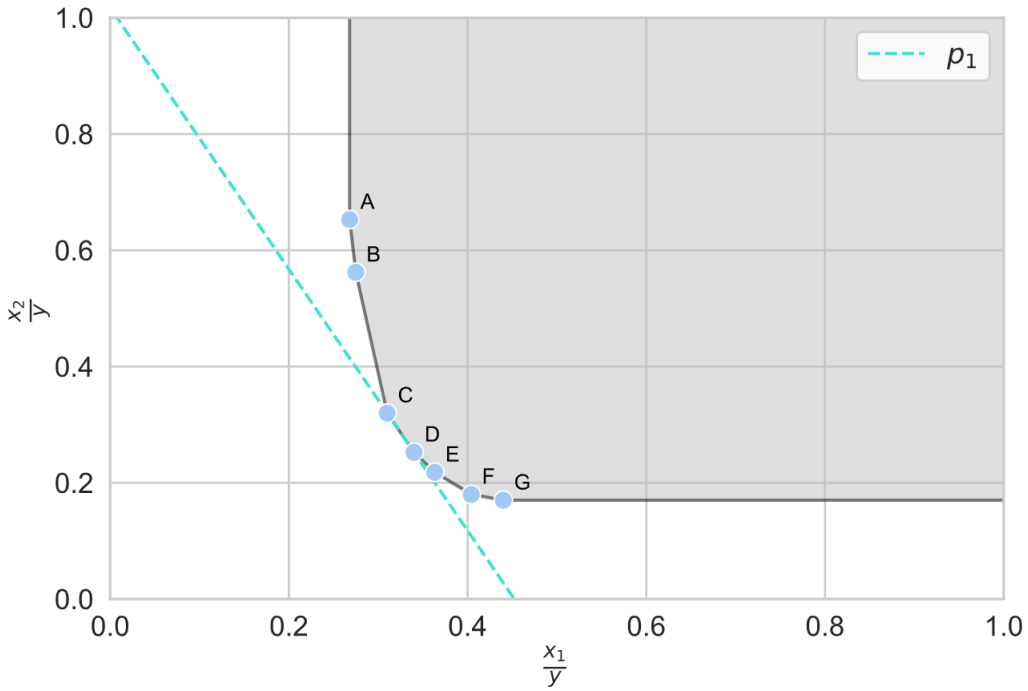
V prípade každého súboru sa v druhej tabuľke nachádzajú výsledky metód aplikovaných na SBM model odpovedajúci príslušným výnosom z rozsahu. Tabuľka má rovnakú štruktúru ako predošlá s výnimkou metódy krížovej efektivity, ktorú sme na SBM model v našej práci neaplikovali.

6.2.1 Výsledky v Súboroch 1-5 vzhľadom na CCR-I model

Aplikujeme CCR-I model na Súbory 1-5, avšak keďže v každom súbore všetky útvary ležia na hranici množiny produkčných možností, pomocou CCR-I modelu získame hodnotu vlastnej efektivity rovnú jednej pre všetky útvary.

Ak sa pozrieme na výsledné poradie vidíme, že pre jednotlivé súbory poradia získané pomocou metód nie sú totožné. Pozrime sa na poradie získané pomocou metódy neefektivity. Vidíme, že najmenšiu hodnotu neefektivity, získali tie efektívne útvary, cez ktoré neprechádza oporná nadrovina[9] rovnobežná s niektorou z x-ových súradnicových osí. Zároveň vidíme, že v každom súbore sa nachádzajú dva efektívne útvary, ktoré získali rovnakú hodnotu celkovej neefektivity N. Podľa našich výsledkov, tieto dva útvary majú rovnaké optimálne riešenie úlohy (74), kde $c_o = 0$, a teda optimálne vektory váh (v_j^*, u_j^*) pre tieto útvary, generujú rovnakú opornú nadrovinu, ktorá prechádza oboma útvarmi. V prípade Súboru 4 je táto oporná nadrovina zobrazená na Obr. 5. Vidíme, že prechádza cez útvary B a C.

Obr. 5: Oporná nadrovina, generovaná optimálnymi vektormi váh $(v_{1j}^*, v_{2j}^*, u_{1j}^*) = (2.211, 0.983, 1), j \in \{C, D\}$ v Súbore 4



[9]V Súboroch 1-5, keď v ďalšom texte hovoríme o oporných nadrovinách a kreslíme grafy, tak máme na mysli rez príslušných množín a nadrovín na úrovni $y = 1$.

Označíme efektívne útvary, cez ktoré prechádza oporná nadrovina rovnobežná s niektorou súradnicovou osou, za okrajové a naopak útvary, cez ktoré takáto oporná nadrovina neprechádza za centrálne. Potom metóda neefektivity vo všetkých súboroch, až na Súbor 2 rozlíšila okrajové útvary a umiestnila ich na nižšiu pozíciu ako centrálne útvary.

Ďalšou použitou metódou, na Súbor 1-5, bola metóda krížovej efektivity. Tak, ako sme už spomínali v našej práci [9], za silnú stránku metódy krížovej efektivity sa považuje aj to, že pri vytváraní poradia sa DMU_o posudzuje aj vzhľadom na ostatné útvary v súbore. Táto vlastnosť je kvôli tomu, že hodnota $ECOL_o$ je priemerom vzájomných efektivít DMU_o vzhľadom na optimálne váhy ostatných útvarov. Ak sa pozrieme na poradie vytvorené pomocou hodnoty $ECOL_o$ vidíme, že medzi agresívnym a benevolentným prístupom nedochádza k výraznému rozdielu pri menšom počte efektívnych útvarov v súbore, viď napr. Tabuľka 11 v Prílohe A. Opäť vidíme, že v každom zo Súborov 1 až 5 sa na poslednom mieste umiestnil nejaký okrajový útvar. V prípade metódy neefektivity to bol útvar, cez ktorý prechádzala oporná nadrovina rovnobežná s osou x_1, no v tomto prípade sa na poslednom mieste umiestnil aj útvar, cez ktorý prechádza oporná nadrovina rovnobežná s osou x_2.

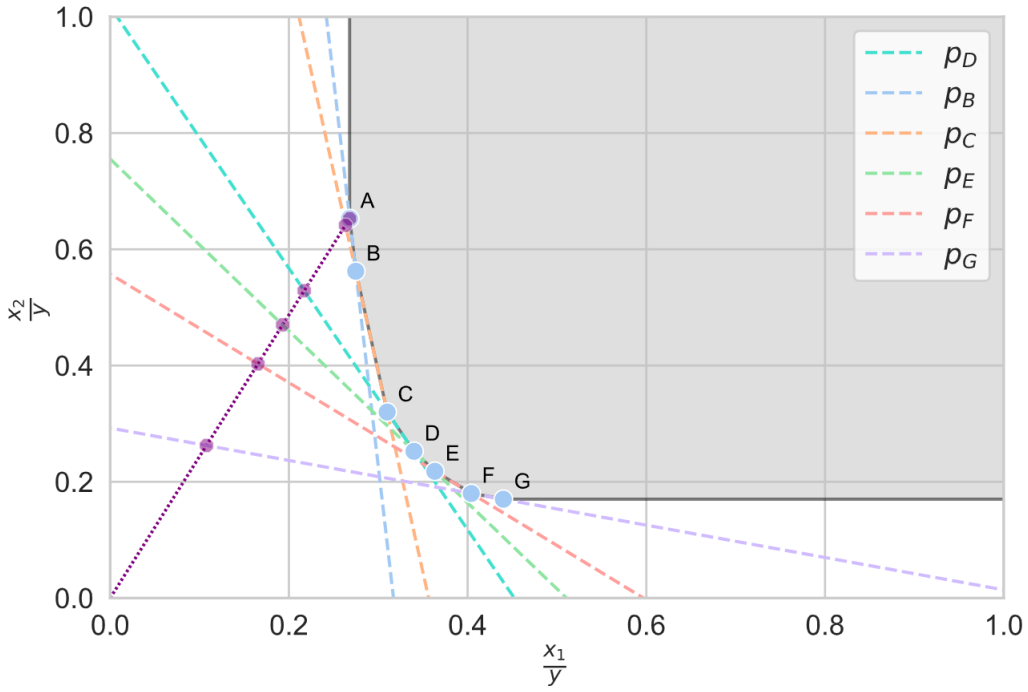
Pre ilustráciu je na Obr.6 zobrazená projekcia útvaru A na oporné nadroviny, generované ostatnými útvarmi, pri benevolentnom prístupe cielenej metódy. Index v názve opornej nadroviny označuje útvar, pomocou ktorého optimálnych vektorov váh bola daná oporná nadorvina vygenerovaná. Fialové kruhy označujú jednotlivé projekcie útvaru A v Súbore 4.

Z týchto prípadov sa možno domnievať, že metóda neefektivity ako aj metóda krížovej efektivity vytvárajú poradie, kde okrajové útvary získajú nižšie umiestnenie oproti centrálnym útvarom.

Poslednou využitou metódou, aplikovanou na Súbor 1 až Súbor 5, je metóda superefektivity. Ako už vidieť na týchto súboroch, metóda superefektivity nerozlišuje medzi centrálnymi resp. okrajovými útvarmi. Ako sme už spomínali, v prípade CCR modelov sa hodnota superefektivity interpretuje ako radiálna vzdialenosť DMU_o od M^o_{CRS}. Inak môžeme povedať, že berie do úvahy ako "veľmi dôležité"je DMU_o pre konštrukciu M_{CRS}, resp. pri rozširovaní efektívnej hranice M_{CRS}, čo uvádzajú aj autori v článku [21].

Poradie získané pomocou metódy superefektivity sa líši vo väčšine súborov od poradia

Obr. 6: Projekcie útvaru A na oporné nadroviny generované ostatnými útvarmi v Súbore 4 (benevolentný prístup Cielenej metódy)



získaného metódou neefektivity a krížovej efektivity. Najväčší rozdiel v poradí vidíme v Súbore 4, kde sa ani jeden útvar neumiestnil na rovnakej pozícii ako v prípade využitia ostatných dvoch metód.

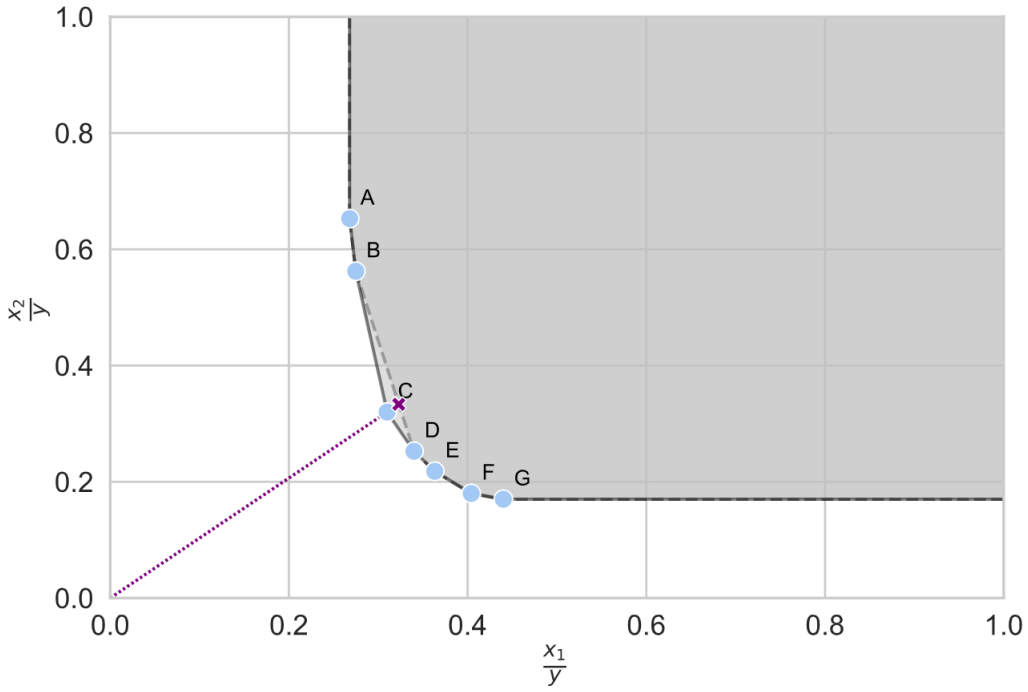
Na Obr.7 je zobrazená upravená množina produkčných možností M^C_{CRS}, z ktorej je vyňatý útvar C. Zmena hranice oproti pôvodnej M_{CRS} je naznačená prerušovanou čiarou. Taktiež je fialovým krížikom naznačená projekcia útvaru C na hranicu M^C_{CRS}.

6.2.2 Výsledky v Súboroch 6-10 vzhľadom na BCC-I model

V tejto časti aplikujeme metódy na BCC-I model, kde súbory budú pozostávajú z jedného vstupu a jedného výstupu pre všetky útvary. Budeme sa zaoberať Súborom 6 až Súborom 10.

Ako si môžeme všimnúť v každom zo Súborov 6 až 10, pri metóde superefektivity má jeden útvar hodnotu superefektivity rovnú inf čo znamená, že pre tento útvar bola úloha (85) neohraničená. Pre ten istý útvar neboli dobre definované ani vzájomné efektivity všetkých ostatných útvarov vzhľadom na optimálne váhy tohto útvaru v rámci agresívneho prístupu cielenej metódy. Ako riešenie sme zvolili, že sme definovali tieto hodnoty nulové

Obr. 7: Projekcie útvaru C na množinu produkčných možností M_{CRS}^{C}, z ktorej je tento útvar vyňatý v Súbore 4



a výsledné poradie je taktiež zobrazené v príslušných tabuľkách.

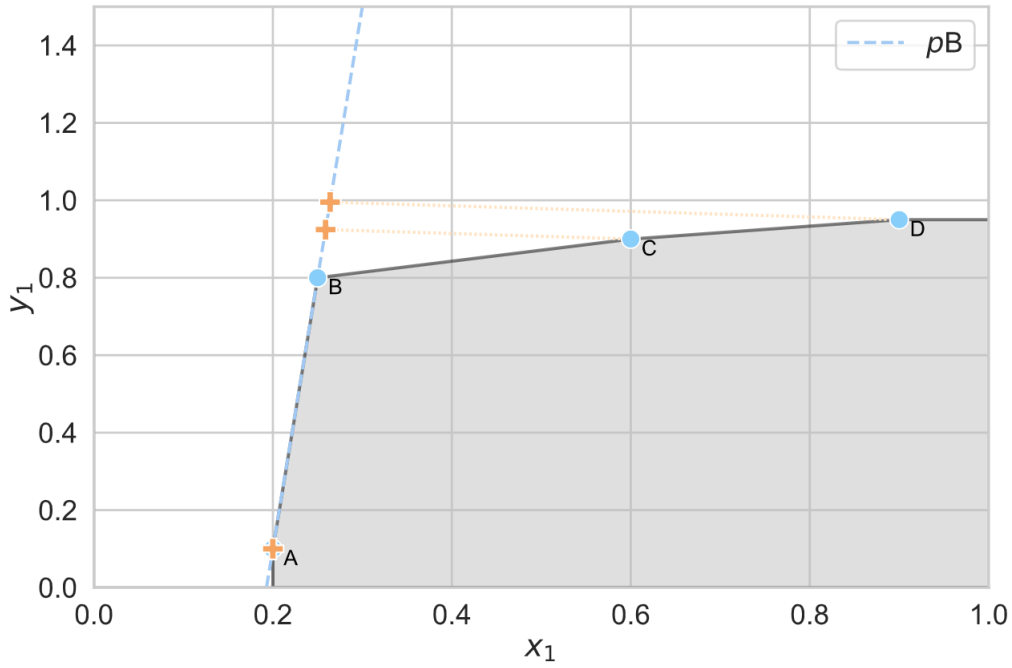
Metóda neefektivity takmer vo všetkých súboroch položila na posledné miesto útvar, cez ktorý prechádzala oporná nadrovina s x-ovou súradnicovou osou. Výnimka nastala pre Súbor 8, kde útvar D sa výraznejšie odlišuje od ostatných útvarov v súbore, pretože nadobúda vyššiu hodnotu výstupu. Práve tento útvar sa umiestnil v rámci metódy neefektivity na prvom mieste.

Keďže máme súbory, v ktorých útvary produkujú len jeden výstup z jedného vstupu, metódu neefektivity vieme znázorniť aj graficky. Konkrétne vieme naznačiť hodnoty d_{oj}^{*}, ktoré predstavujú vzdialenosť ostatných útvarov od opornej nadroviny, generovanej DMU_o. Pre Súbor 9, útvar B, sú hodnoty $d_{Bj}^{*}, j \in \{A, C, D\}$ zobrazené oranžovou prerušovanou čiarou na Obr. 8.

Oporná nadrovina, ktorá je generovaná útvarom B, je označená ako p_B. Vidíme, že útvar A leží na tejto nadrovine, a tak hodnota d_{BA}^{*} je nulová. Pripomeňme, že na získanie celkovej miery neefektivity N_B^{*} je potrebné priemer vzdialeností, prenásobiť normou normálového vektora danej nadroviny. To má za následok, že aj keď optimálne riešenia pre dva rôzne útvary generujú rovnakú opornú nadrovinu, a teda vzdialeností

ostatných útvarov od tejto nadroviny sú rovnaké, celková hodnota efektivity, kvôli norme normáloveho vektora pre tieto útvary, nie je rovnaká, a teda aj umiestnenie útvarov môže byť veľmi odlišné.

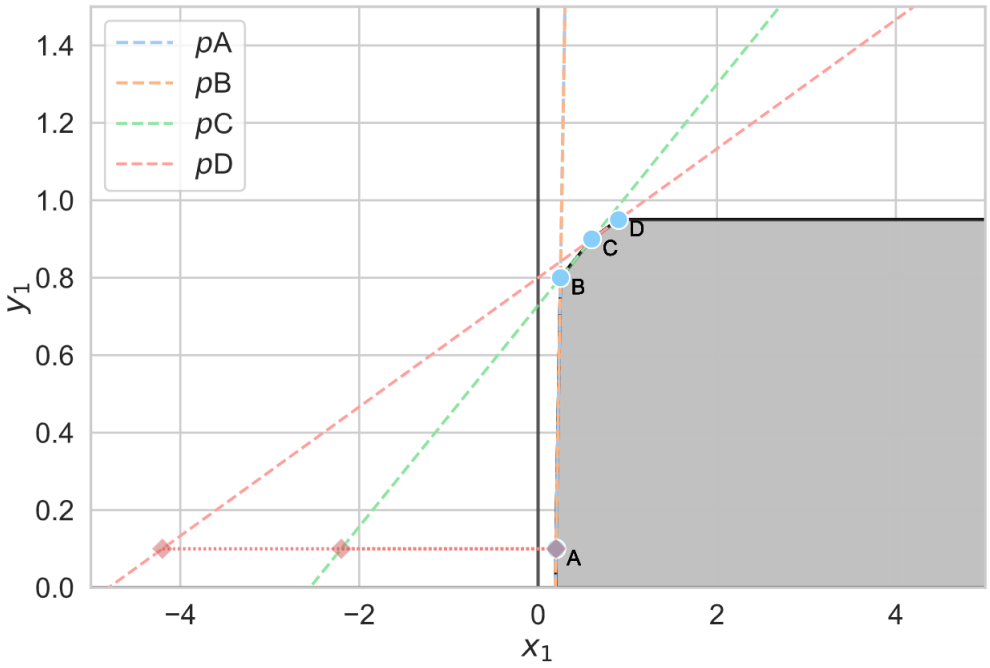
Obr. 8: Metóda neefektivity pre Súbor 9



Ďalšou metódou bola metóda krížovej efektivity. Pri benevolentnom prístupe cielenej metódy boli všetky hodnoty vzájomných efektivít dobre definované. Pri agresívnom prístupe, vzájomne efektivity ostatných útvarov vzhľadom na útvar s maximálnou hodnotou výstupu neboli dobre definované. Ako sme v Tvrdení 3.1 ukázali, hodnoty vzájomných efektivít E_{oj} predstavujú koeficienty radiálneho skracovania DMU_j na opornú nadrovinu generovanú DMU_o. Na Obr. 9 sú graficky zobrazené projekcie útvaru A zo Súboru 9 na oporné nadroviny generované ostatnými útvarmi. Vidíme, že jeden koeficient je rovný jednej, pretože A leží na opornej nadrovine p_B a zvyšené koeficienty sú záporné a vďaka nim je aj celková hodnota $ECOL_A$ záporná.

Využili sme aj metódu superefektivity. V každom súbore sa našiel útvar, pre ktorý nebola hodnota superefektivity dobre definovaná. Takýto útvar dosahoval maximálnu hodnotu výstupu spomedzi ostatných útvarov. Rozhodli sme sa tieto útvary nezahrúť do vytvárania poradia. Výsledné poradia pomocou tejto metódy sa odlišujú od metódy neefektivity aj metódy krížovej efektivity. Na vyšších pozíciach sa umiestnili útvary, ktoré

Obr. 9: Metóda krížovej efektivity - benevolentný prístup pre Súbor 9



najviac ovplyvňujú tvar množiny produkčných možností.

Na Obr. 10 môžeme vidieť ako by sa zmenila množina produkčných možností M_{VRS}, ak by sme v Súbore 9 vynechali útvar B. Množina M^B_{VRS} je naznačená prerušovanou čiarou. Fialovou farbou je naznačená radiálna vzdialenosť útvaru B od M^B_{VRS}.

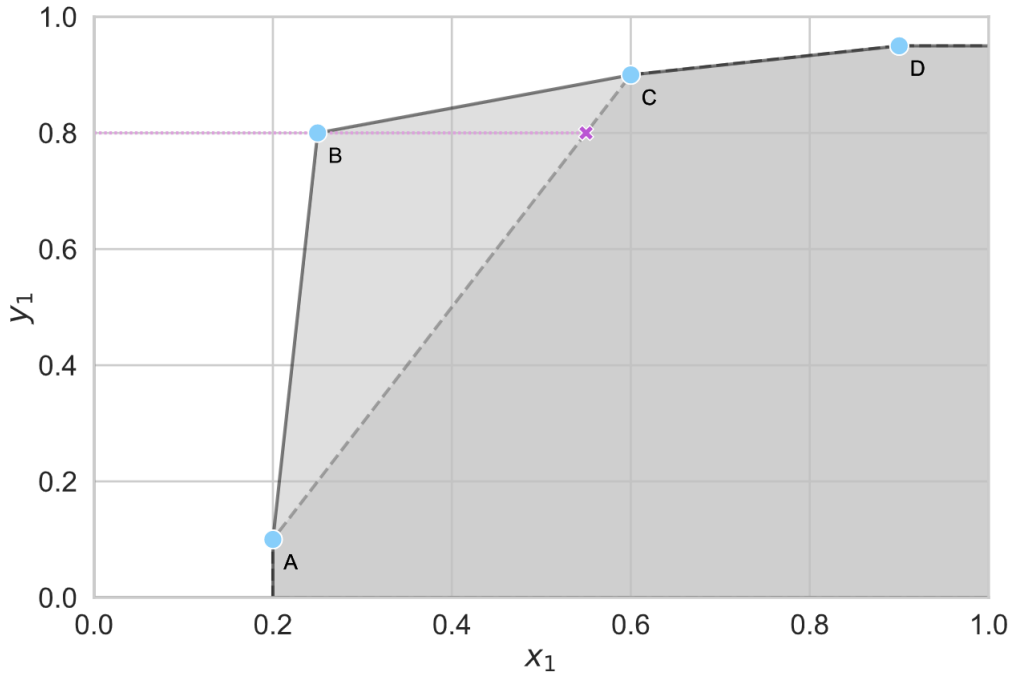
6.2.3 Výsledky v Súboroch 1-10 vzhľadom na SBM model

V tejto časti aplikujeme SBM model odpovedajúci konštantným výnosom z rozsahu na Súbory 1-5 a SBM model odpovedajúci variabilným výnosom z rozsahu na Súbory 6-10. Na získanie poradia aplikujeme metódu odchýlkovej neefektivity a metódu superefektivity.

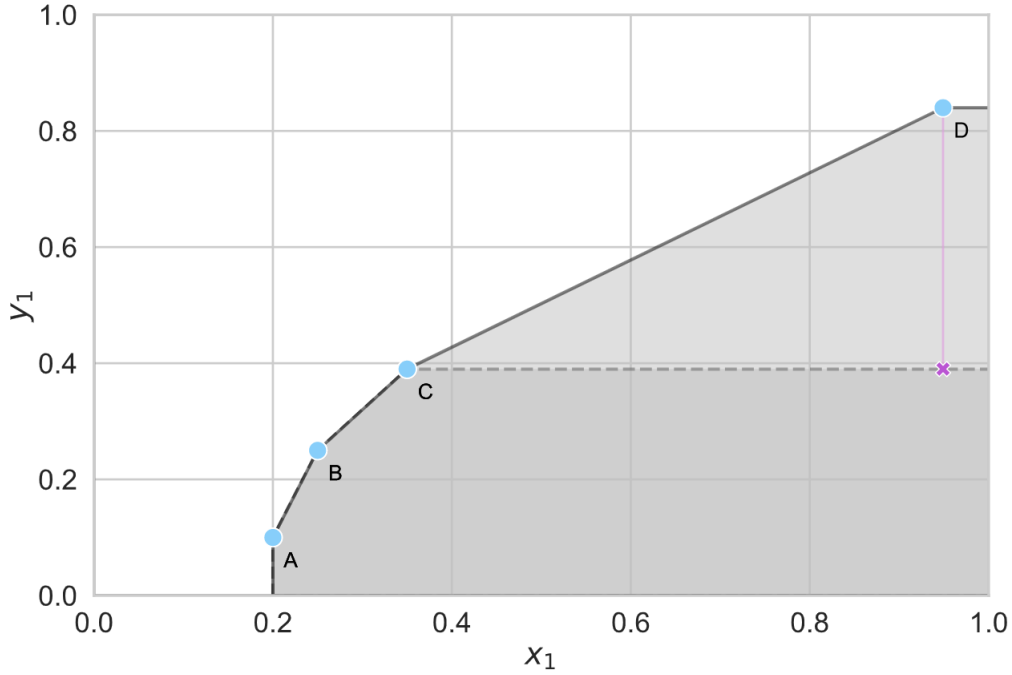
Pri aplikácii metódy superefektivity sme získali dobre definovanú hodnotu superefektivity pre všetky efektívne útvary v každom súbore, aj pre tie útvary, pre ktoré nebola dobre definovaná superefektivita pri BCC modeli. Hodnoty superefektivít pre jednotlivé útvary sú menšie nanajvýš rovné príslušným hodnotám superefektivít pre CCR model resp. BCC model. Na Obr. 11 je znázornená metóda superefektivity pre útvar D, pre ktorý nebola dobre definovaná hodnota superefektivity v rámci BCC modelu, konkrétne jeho projektovanie na M^D_{VRS}.

Naopak ak sa pozrieme na hodnoty neefektivity pre jednotlivé útvary, tie sú v prípade

Obr. 10: Metóda superefektivity - benevolentný prístup pre Súbor 9



Obr. 11: Metóda neefektivity pre Súbor 9 - SBM model



SBM modelu väčšie nanajvýš rovné ako hodnoty neefektivity v prípade CCR-I resp. BCC-I modelu. V Súbore 9 pre útvar A vidíme, že celková miera odchýlkovej neefektivity v SBM modeli je výrazne väčšia ako v BCC modeli. Riešenie úlohy (74) a úlohy, v ktorej minimalizujeme celkovú mieru neefektivity pre daný útvar A, generujú tú istú opornú

nadrovinu, čiže vzdialenosti ostatných útvarov sú v oboch prípadoch rovnaké. Rozdiel spočíva v norme normáloveho vektora, ktorá je v prípade SBM modelu výrazne vyššia, čím je spôsobený taký výrazný rozdiel v celkovej miere neefektivity v rámci SBM a BCC modelu. Z tohto môžeme vidieť ako norma vektora môže ovplyvňovať metódu neefektivity.

6.2.4 Zhrnutie a diskusia

V predošlých častiach sme tri predstavené metódy na zvyšovanie rozlišovacej schopnosti v prípade použitia CCR, BCC a SBM modelu aplikovali na rôzne súbory. V prípade CCR modelu sme všetkými metódami získali poradie pre každý efektívny útvar. Aby sme získali poradie pre všetky efektívne útvary v BCC modeli, bolo potrebné ošetriť, pre niektoré útvary, neohraničenosť minimalizačnej úlohy (47) v metóde krížovej efektivity. Taktiež v metóde superefektivity, hodnota superefektivity nebola dobre definovaná pre niektoré útvary. V prípade SBM modelu metóda neefektivity ako aj metóda superefektivity vytvorili poradie medzi všetkými efektívnymi útvarmi.

Vidíme však, že poradia sa pri pevne zvolenom modeli v jednotlivých metódach odlišujú a v závislosti od zvolenej metódy môžeme získať výrazne odlišné poradia. Rozhodnutie, akú metódu na vytvorenie poradia zvoliť, môžeme založiť na našich preferenciách. Ak chceme posúdiť aj vzťahy medzi útvarmi a útvary sa navzájom ovplyvňujú, konkurujú si, je vhodné použiť metódu krížovej efektivity, ktorá berie do úvahy aj vzťahy medzi efektívnymi útvarmi, keďže ohodnotenie jednotlivých útvarov je ovplyvnené výberom optimálnych vektorov váh ostatných útvarov v súbore. Nevýhodou je nejednoznačnosť tejto metódy a následne aj výpočtová náročnosť.

Metóda neefektivity menej odráža vzájomné ohodnocovanie sa útvarov v súbore, pretože v tomto prípade hodnota, na základe ktorej je útvar ohodnocovaný, závisí od výberu vektorov váh daného útvaru, nie ostatných útvarov. V tejto metóde je výpočtovo jednoduchšie odstrániť nejednoznačnosť.

Metóda superefektivity je odlišná od predošlých dvoch. Môžeme povedať, že poradie pre útvar závisí od toho, ako veľmi je útvar dôležitý vzhľadom na "potláčanie"hranice množiny produkčných možností.

Ako sme už spomínali, na základe našich numerických výsledkov sa zdá, že metóda krížovej efektivity a metóda odchýlkovej neefektivity uprednostňujú na vyšších pozíciach v

poradí útvary, ktoré sme označili za centrálne. Naopak na nižších pozíciach sa umiestnili okrajové útvary. Táto vlastnosť by mohla zohrávať dôležitú úlohu pri rozhodovaní sa, ktorú metódu je vhodné použiť, avšak na potvrdenie tejto vlastnosti je potrebné ďalšie skúmanie.

Záver

V našej práci sme sa venovali metódam, ktoré zvyšujú rozlišovaciu schopnosť DEA modelov. V prvej kapitole sme spísali základné pojmy, ktoré sme ďalej v práci využívali. V druhej kapitole sme sa venovali popísaniu súvislostí medzi optimálnym riešením CCR, BCC modelu a SBM modelu s opornou nadrovinou k množine produkčných možností. Sformulovali sme Tvrdenie 2.2 a Tvrdenie 2.3, ktoré hovorí, že existuje násobok normáloveho vektora opornej nadroviny, prechádzajúcej cez DMU_o taký, že tento prenásobený vektor je riešením CCR/BCC modelu pre dané DMU_o. Na druhej strane, riešenie CCR/BCC modelu pre DMU_o, predstavuje normálový vektor opornej nadroviny k množine produkčných možností. Tieto Tvrdenie sme taktiež dokázali. Slabšie Tvrdenie 2.5 a Tvrdenie 2.6 sme sformulovali aj pre SBM model.

V tretej kapitole sme sa venovali metóde krížovej efektivity. V prípade konštantných výnosov z rozsahu sme nadviazali na vlastnosti popísané v našej predošlej práci [9]. Rozšírili sme aplikáciu tejto metódy aj na variabilné výnosy z rozsahu. V Tvrdení 3.1 sme ukázali, že v prípade vstupného BCC modelu, hodnotu vzájomnej efektivity E_{oj}, možno interpretovať ako koeficient skracovania vstupov DMU_j na opornú nadrovinu generovanú optimálnym riešením BCC modelu pre DMU_o. V Definícii 3.2 sme uviedli tzv. Cielenú metódu, ktorá umožní eliminovať problém nejednoznačnosti metódy krížovej efektivity. V Príklade 1 sme ukázali, že pre niektoré dvojice útvarov úloha Cielenej metódy (47) je neohraničená, a teda vzájomná efektivita v týchto prípadoch nie je dobre definovaná. Sformulovali sme Hypotézu 3.3, že v prípade BCC modelu a využitia Cielenej metódy v rámci agresívneho prístupu, vzájomné efektivity pre všetky ostatné útvary vzhľadom na útvar, ktorý dosahuje maximálnu hodnotu niektorého výstupu spomedzi všetkých ostatných útvarov, nie sú dobre definované. Ďalším problémom boli v niektorých prípadoch záporné hodnoty vzájomných efektivít, pričom sme uviedli alternatívny vzťah (50) na výpočet nezápornej hodnoty vzájomnej efektivity. Otvorenou otázkou však zostáva, ako vhodne definovať konštanty a a b v tomto vzťahu.

V nasledujúcej kapitole sme analyzovali metódu odchýlkovej neefektivity. Najskôr sme dokázali v Tvrdení 4.2, že model neefektivity (53) je ekvivalentný k CCR modelu. V Tvrdení 4.3 sme interpretovali hodnotu neefektivity na základe čoho sme mohli tvrdiť, že celková miera neefektivity N_o pre DMU_o, predstavuje priemer vzdialeností útvarov

od opornej nadroviny, generovanej optimálnymi vektormi váh pre DMU_o, vynásobený normou tohto optimálneho vektora váh. V Príklade 2 sme ukázali, že táto metóda nie je jednoznačná napriek tomu, že jednoznačnosť tvrdili autori článku [8]. Z toho dôvodu sme sformulovali doplňujúcu úlohu (74), ktorá zabezpečuje získanie minimálnej hodnoty celkovej miery neefektivity, pre každý útvar v súbore, a tak sa eliminuje nejednoznačnosť metódy. Zároveň v Tvrdení 4.5 sme ukázali, že doplňujúca úloha (74) má optimálne riešenie pre každý útvar v súbore. Aplikáciu tejto metódy sme rozšírili ako na BCC model tak aj na SBM model. V prípade SBM modelu, sme sformulovali a dokázali Tvrdenie 4.8, v ktorom sa hovorí, že pre efektívny útvar je množina optimálnych riešení úlohy (76) neohraničená, a preto by maximalizačná doplňujúca úloha, na elimináciu nejednoznačnosti v prípade SBM modelu, bola neohraničená pre všetky efektívne útvary v súbore. Pri dokončovaní našej práce sme narazili na nedávny preprint článku [16], v ktorom štyria autori analyzujú metódu odchýlkovej neefektivity a prichádzajú s podobnými výsledkami ako my v tejto práci.

V piatej kapitole sme sa venovali opísaniu metódy superefektivity. Sformulovali a dokázali sme Tvrdenie 5.2, ktoré hovorí o tom, že v prípade konštantných výnosov z rozsahu je superefektivita dobre definovaná pre všetky útvary v súbore. Metódu superefektivity sme taktiež popísali v prípade BCC modelu, kde pre niektoré útvary nemusí byť superefektivita dobre definovaná, ako aj v prípade SBM modelu, kde sme uviedli Tvrdenie 5.4, ktoré hovorí, že v prípade nezápornosti všetkých vstupov a výstupov pre všetky útvary v súbore je hodnota superefektivity dobre definovaná pre všetky útvary.

V poslednej kapitole sme sa venovali teoretickému a praktickému porovnaniu opísaných metód. V teoretickej časti sme odvodili vzťah medzi hodnotou vzájomnej efektivity E_{oj} z metódy krížovej efektivity a hodnoty d^*_{oj} z metódy odchýlkovej neefektivity a sformulovali sme ho do Tvrdenia 6.1. Z tohto vzťahu sme usúdili, že krížova neefektivita, t.j. $1 - E_{oo}$ je určitým spôsobom rovná normalizovanej odchýlkovej neefektivite d^*_{oo}. V praktickej časti sme aplikovali metódy na rôzne dátové súbory a porovnávali výsledné poradia získané pomocou jednotlivých metód. Výsledné poradia sa líšili v závislosti od použitej metódy. Poradie z metódy superefektivity sa najviac líšilo od poradí v prípade použitia ostatných dvoch metód. Všimli sme si, že metóda krížovej efektivity a odchýlkovej efektivity položili tzv. okrajové útvary na nižšie pozície ako tzv. centrálne, avšak je potrebné

ďalšie preskúmanie. Naše postrehy z praktickej časti sme zhrnuli v časti 6.2.4.

Literatúra

[1] Andersen, P., Petersen, N. C.: *A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis*, Management science 39(10) (1993), 1261-1264

[2] Banker R.D., Thral R.M.: *Estimation of returns to scale using Data Envelopment Analysis*, European Journal of Operational Research 62 (1992), 74-84

[3] Cook, W. D., Liang, L., Zha, Y., Zhu, J.: *A modified super-efficiency DEA model for infeasibility*, Journal of the Operational Research Society 60(2) (2009), 276-281

[4] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E.: *Measuring the Efficiency of Decision-making Units*, European Journal of Operational Research 2(6) (1978), 429-444

[5] Charnes, A., Cooper, W. W., Thrall, R. M.: *Classifying and characterizing efficiencies and inefficiencies in data development analysis* , Operations Research Letters 5(3) (1986), 105-110

[6] Doyle, J., Green R.,: *Efficiency and Cross-Efficiency in DEA: Derivations, Meaning and Uses*, Journal of Operational Research Society 45(5) (1994), 567-578

[7] Du, J., Wang, J., Chen, Y., Chou, S. Y., Zhu, J.: *Incorporating health outcomes in Pennsylvania hospital efficiency: an additive super-efficiency DEA approach*, Annals of Operations Research 221(1) (2014), 161-172

[8] Ghasemi, M. R., Ignatius, J., Rezaee, B.: *Improving discriminating power in data envelopment models based on deviation variables framework*, European Journal of Operational Research 278(2) (2019), 442-447

[9] Grižáková, L.: *Metóda krížovej efektivity v obálkovej analýze dát*, [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2020, 53 s

[10] Halická, M.: *DEA modely*, učebné texty, FMFI UK, Bratislava, 2015, dostupné na internete (08.05.2019): http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/teach/DEAskripta.pdf

[11] Halická, M., Trnovská, M.: *A unified approach to non-radial graph models in data envelopment analysis: common features, geometry, and duality*, European Journal of Operational Research (2020)

[12] Ismail M. K. A., Abd Rahman N. M. N., Salamudin N., Kamaruddin B. H.: *DEA portfolio selection in Malaysian stock market*, International Conference on Innovation Management and Technology Research (2012), 739-743

[13] Li, X. B., Reeves, G. R.: *A multiple criteria approach to data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research 115(3) (1999), 507-517

[14] Lin, R., Li, Z.: *Directional distance based diversification super-efficiency DEA models for mutual funds*, Omega 97 (2020)

[15] Lim, S., Zhu, J.: *DEA cross-efficiency evaluation under variable returns to scale*, Journal of the Operational Research Society 66(3) (2015), 476-487

[16] Mahdiloo, M., Lim, S., Duong, T. T., Harvie, C.: *Some comments on improving discriminating power in data envelopment models based on deviation variables framework*, European Journal of Operational Research (2021)

[17] Nykamp DQ.: *Distance from point to plane* From Math Insight. http://mathinsight.org/distance_point_plane

[18] Seiford, L. M., Zhu, J.: *Infeasibility of super-efficiency data envelopment analysis models* , INFOR: Information Systems and Operational Research 37(2) (1999), 174-187

[19] Sexton, T. R., Silkman, R.H., and Hogan, A. J.: *Data Envelopment Analysis: Critique and Extensions*, New Direction for Program Evaluation 32 (1986), 73-105

[20] Seiford, L. M., Zhu, J.: *Infeasibility of super-efficiency data envelopment analysis models*, INFOR: Information Systems and Operational Research 37(2) (1999), 174-187

[21] Staat, M., Hammerschmidt, M.: *A Super Efficiency Model for Product Evaluation*, EconWPA, Microeconomics (2003)

[22] Sueyoshi, T., Sekitani, K.: *Computational strategy for Russell measure in DEA: Second-order cone programming*, European Journal of Operational Research 180(1) (2007), 459-471

[23] Thrall, R. M.: *Duality, classification and slacks in DEA*, Annals of Operations Research 66 (1996), 109–138

[24] Titko, J., Stankeviciene, J., Lace, N.: *Measuring Bank Efficiency: DEA Application*, Technological and Economic Development of Economy (2014)

[25] Tone, K.: *A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis* European journal of operational research 130(3) (2001), 498-509

[26] Tone, K.: *A slacks-based measure of super-efficiency in data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research 143 (2002), 32–41

[27] Torgersen, A.M., Førsund, F.R., Kittelsen, S.A.C.: *Slack-adjusted efficiency measures and ranking of efficient units*, J Prod Anal 7 (1996), 379–398

[28] Xue, M., Harker, P. T.: *Note: Ranking DMUs with infeasible super-efficiency DEA models*, Management Science 48(5) (2002), 705-710

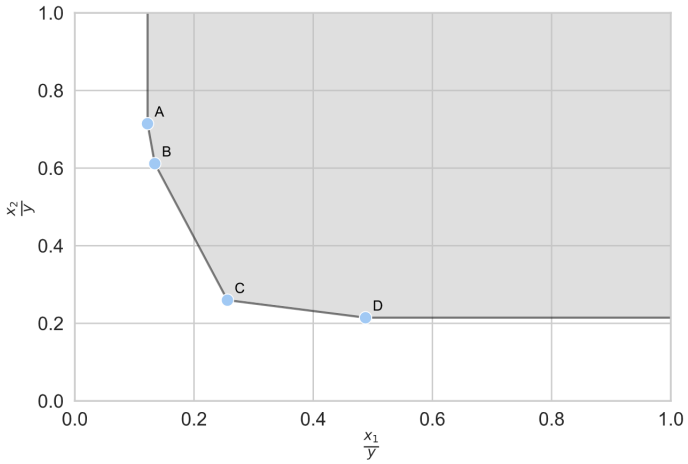
[29] Yung-Ho Ch., Chyanlong J., Da-Bai S., Pen-Chun W.:*Efficiency and capital adequacy in Taiwan banking: BCC and super-DEA estimation*, The Service Industries Journal 28:4 (2008), 479-49

[30] Zhu, J.: *Robustness of the efficient DMUs in data envelopment analysis*, European Journal of operational research 90(3) (1996), 451-460

A Príloha

A.1 Súbor 1

Obr. 12: Množina produkčných možností, generovaná Súborom 1



Tabuľka 11: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 1 pre CCR-I model

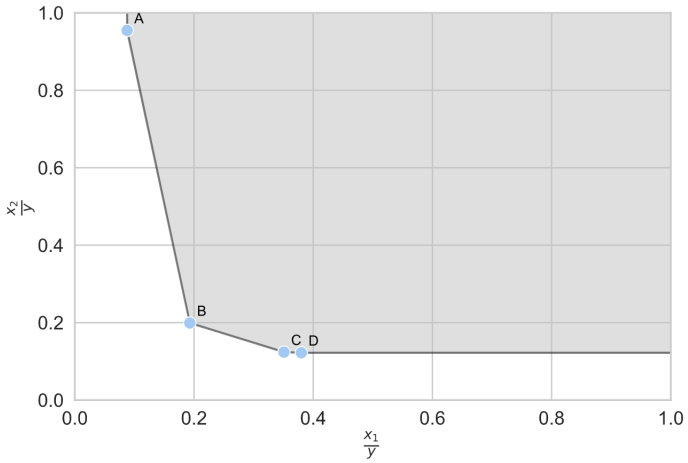
	SE	Poradie	N	Poradie	ECOL (max)	Poradie	ECOL (min)	Poradie
A	1.100	3	0.468	3	0.839	3	0.664	3
B	1.058	4	0.173	1	0.871	2	0.686	2
C	1.393	1	0.173	1	0.930	1	0.756	1
D	1.211	2	0.611	4	0.755	4	0.567	4

Tabuľka 12: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 1 pre SBM model

	SE	Poradie	N	Poradie
A	1.0500	4	0.571	3
B	1.0503	3	0.223	1
C	1.3737	1	0.333	2
D	1.1056	2	0.992	4

A.2 Súbor 2

Obr. 13: Množina produkčných možností, generovaná Súborom 2



Tabuľka 13: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 2 pre CCR-I model

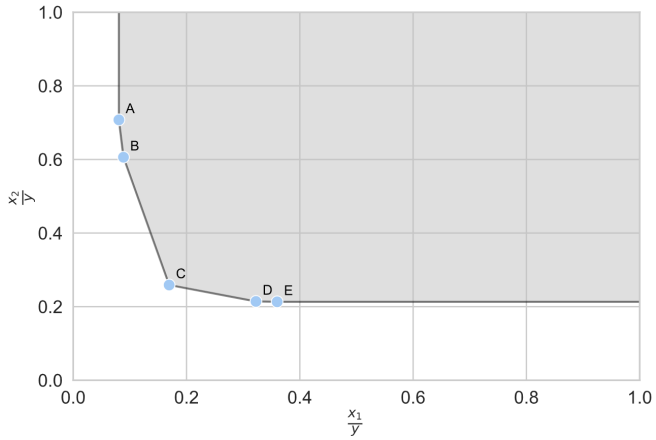
	SE	Poradie	N	Poradie	ECOL (max)	Poradie	ECOL (min)	Poradie
A	2.2	1	0.367	1	0.611	4	0.393	4
B	1.524	2	0.367	1	0.922	1	0.689	2
C	1.038	3	0.616	3	0.900	2	0.709	1
D	1.014	4	1.524	4	0.879	3	0.687	3

Tabuľka 14: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 2 pre SBM model

	SE	Poradie	N	Poradie
A	1.600	1	0.461	1
B	1.347	2	0.534	2
C	1.036	3	0.724	3
D	1.007	4	4.939	4

A.3 Súbor 3

Obr. 14: Množina produkčných možností, generovaná Súborom 3



Tabuľka 15: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 3 pre CCR-I model

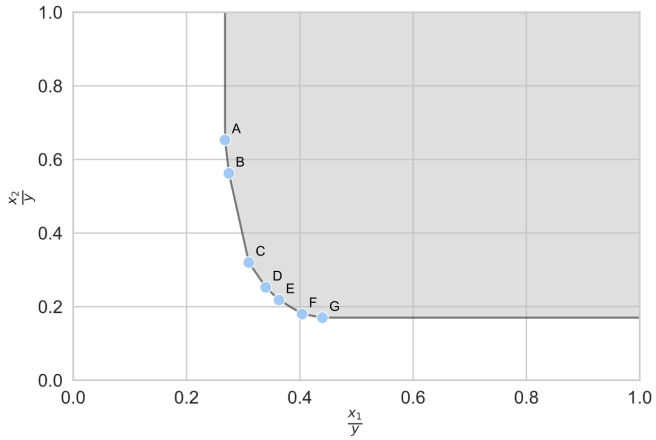
	SE	Poradie	N	Poradie	ECOL (max)	Poradie	ECOL (min)	Poradie
A	1.100	2	0.725	4	0.734	5	0.595	5
B	1.058	3	0.295	1	0.771	4	0.623	4
C	1.391	1	0.295	1	0.913	1	0.773	1
D	1.027	4	0.491	3	0.804	2	0.653	2
E	1.005	5	0.819	5	0.778	3	0.623	3

Tabuľka 16: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 3 pre SBM model

	SE	Poradie	N	Poradie
A	1.0500	3	0.882	4
B	1.0501	2	0.381	2
C	1.3737	1	0.376	1
D	1.0186	4	0.804	3
E	1.0024	5	9.346	5

A.4 Súbor 4

Obr. 15: Množina produkčných možností, generovaná Súborom 4



Tabuľka 17: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 4 pre CCR-I model

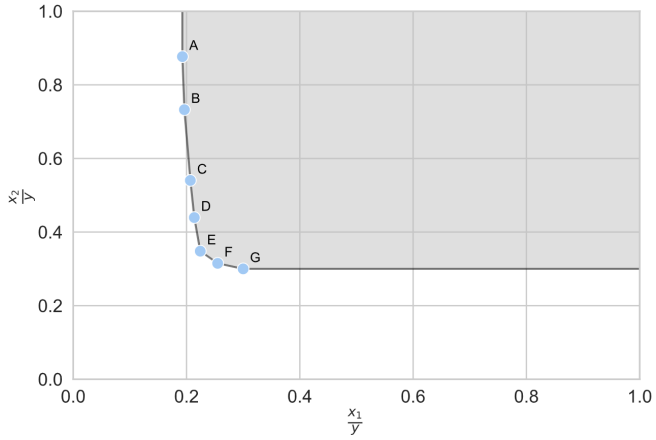
	SE	Poradie	N	Poradie	ECOL (max)	Poradie	ECOL (min)	Poradie
A	1.025	4	0.161	5	0.790	7	0.685	7
B	1.013	5	0.099	3	0.826	6	0.723	6
C	1.042	2	0.089	1	0.936	3	0.850	4
D	1.011	7	0.089	1	0.950	1	0.873	2
E	1.013	6	0.117	4	0.948	2	0.879	1
F	1.029	3	0.178	6	0.928	4	0.872	3
G	1.059	1	0.477	7	0.889	5	0.833	5

Tabuľka 18: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 4 pre SBM model

	SE	Poradie	N	Poradie
A	1.0127	4	0.521	6
B	1.0084	6	0.216	4
C	1.0255	2	0.141	1
D	1.0078	7	0.175	2
E	1.0098	5	0.202	3
F	1.0247	3	0.276	5
G	1.0294	1	0.569	7

A.5 Súbor 5

Obr. 16: Množina produkčných možností, generovaná Súborom 5



Tabuľka 19: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 5 pre CCR-I model

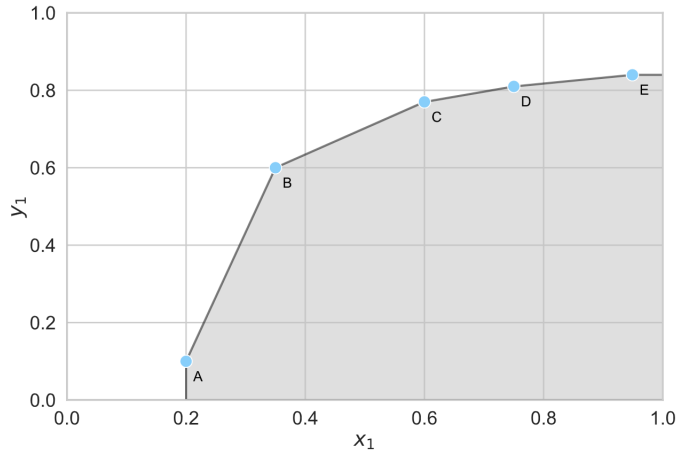
	SE	Poradie	N	Poradie	ECOL (max)	Poradie	ECOL (min)	Poradie
A	1.018	4	0.118	5	0.831	7	0.737	7
B	1.011	5	0.078	3	0.865	5	0.778	6
C	1.004	7	0.073	1	0.912	4	0.839	4
D	1.009	6	0.073	1	0.944	2	0.885	2
E	1.058	1	0.080	4	0.974	1	0.934	1
F	1.028	3	0.275	6	0.925	3	0.883	3
G	1.050	2	0.458	7	0.849	6	0.798	5

Tabuľka 20: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 5 pre SBM model

	SE	Poradie	N	Poradie
A	1.0091	4	0.592	6
B	1.0064	5	0.230	2
C	1.0024	7	0.239	4
D	1.0051	6	0.208	1
E	1.0440	1	0.235	3
F	1.0215	3	0.295	5
G	1.0250	2	0.915	7

A.6 Súbor 6

Obr. 17: Množina produkčných možností - M_{VRS}, generovaná Súborom 6



Tabuľka 21: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 6 pre BCC-I model

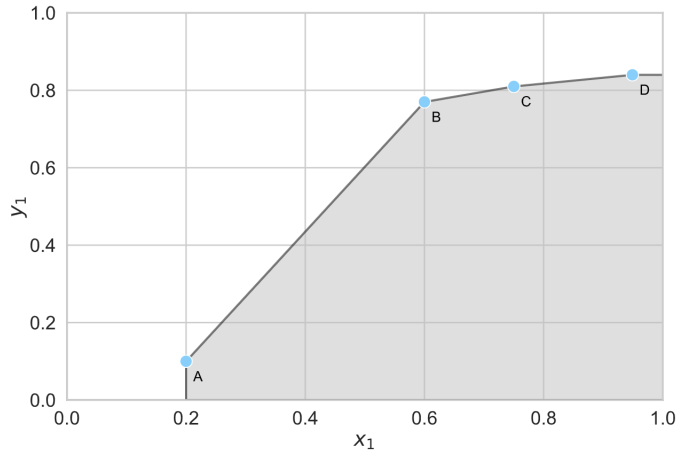
	SE	Poradie	N	Poradie	ECOL (max)	Poradie	ECOL (min)	Poradie
A	1.75	1	1.063	4	-5.857461	5	-7.571826	5
B	1.42	2	0.527	2	0.211143	4	-0.093214	4
C	1.12	3	0.308	1	0.895222	1	0.702361	1
D	1.07	4	0.690	3	0.885820	2	0.673941	2
E	inf	-	1.110	5	0.818850	3	0.660999	3

Tabuľka 22: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 6 pre SBM model

	SE	Poradie	N	Poradie
A	1.7500	1	7.087	5
B	1.4243	2	0.527	2
C	1.0530	3	0.308	1
D	1.0124	5	0.690	3
E	1.0370	4	1.110	4

A.7 Súbor 7

Obr. 18: Množina produkčných možností - M_{VRS}, generovaná Súborom 7



Tabuľka 23: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 7 pre BCC-I model

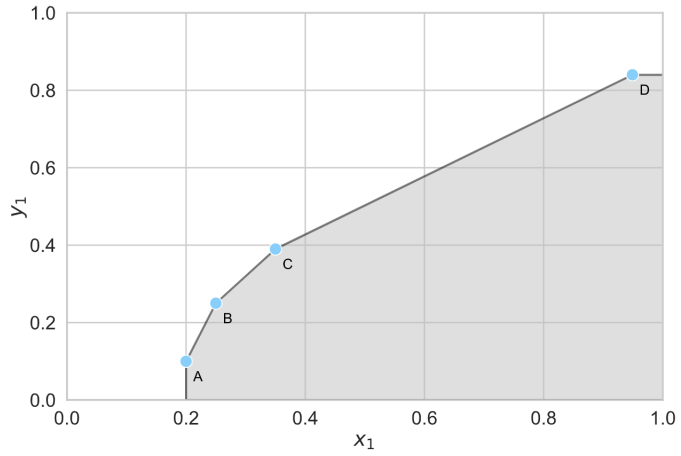
	SE	Poradie	N	Poradie	ECOL (max)	Poradie	ECOL (min)	Poradie
A	3	1	0.542	2	-6.840	4	-9.454	4
B	1.2	2	0.181	1	0.952	2	0.714	1
C	1.07	3	0.733	3	0.958	1	0.700	2
D	inf	-	1.126	4	0.896	3	0.699	3

Tabuľka 24: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 7 pre SBM model

	SE	Poradie	N	Poradie
A	3.0000	1	1.815	4
B	1.1984	2	0.223	1
C	1.0124	4	0.733	2
D	1.0370	3	1.126	3

A.8 Súbor 8

Obr. 19: Množina produkčných možností - M_{VRS}, generovaná Súborom 8



Tabuľka 25: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 8 pre BCC-I model

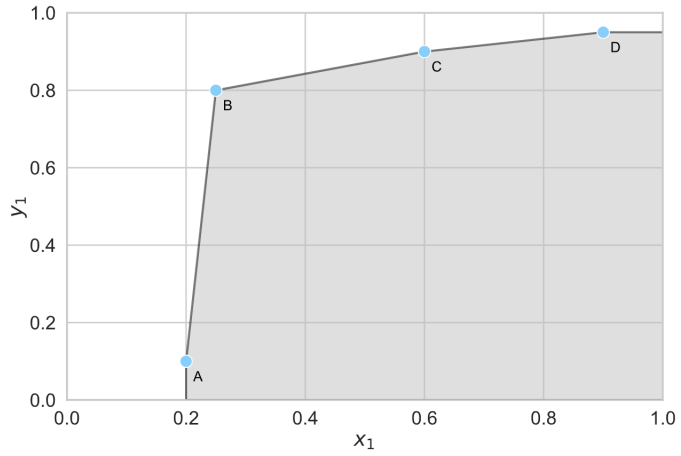
	SE	Poradie	N	Poradie	ECOL (max)	Poradie	ECOL (min)	Poradie
A	1.25	1	0.695	4	0.634	4	0.511	4
B	1.11	3	0.335	3	0.914	2	0.818	1
C	1.19	2	0.230	2	0.962	1	0.806	2
D	inf	-	0.085	1	0.795	3	0.597	3

Tabuľka 26: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 8 pre SBM model

	SE	Poradie	N	Poradie
A	1.2500	2	4.167	4
B	1.1103	4	0.469	3
C	1.1662	3	0.230	2
D	2.1538	1	0.085	1

A.9 Súbor 9

Obr. 20: Množina produkčných možností - M_{VRS}, generovaná Súborom 9



Tabuľka 27: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 9 pre BCC-I model

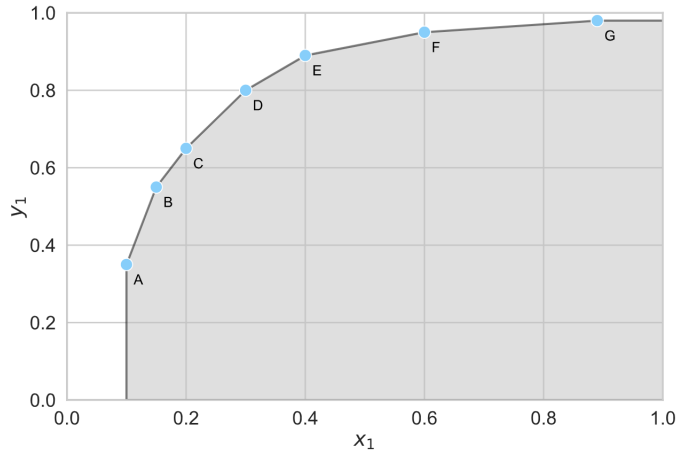
	SE	Poradie	N	Poradie	ECOL (max)	Poradie	ECOL (min)	Poradie
A	1.25	2	1.228	3	-7.500	4	-10.333	4
B	2.2	1	0.982	1	0.750	3	0.600	1
C	1.14	3	1.052	2	0.857	1	0.587	3
D	inf	-	1.292	4	0.788	2	0.593	2

Tabuľka 28: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 9 pre SBM model

	SE	Poradie	N	Poradie
A	1.2500	2	34.375	4
B	2.2000	1	1.091	2
C	1.0218	4	1.052	1
D	1.0556	3	1.292	3

A.10 Súbor 10

Obr. 21: Množina produkčných možností - M_{VRS}, generovaná Súborom 10



Tabuľka 29: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 10 pre BCC-I model

	SE	Poradie	N	Poradie	ECOL (max)	Poradie	ECOL (min)	Poradie
A	1.5	1	1.800	6	-9.357	7	-11.083	7
B	1.11	4	0.886	5	-3.233	6	-3.994	6
C	1.05	6	0.590	3	-1.280	5	-1.743	5
D	1.08	5	0.394	2	0.304	4	0.076	4
E	1.2	3	0.363	1	0.763	2	0.598	2
F	1.211	2	0.803	4	0.778	1	0.602	1
G	inf	-	2.046	7	0.646	3	0.519	3

Tabuľka 30: Výsledok metód aplikovaných na Súbor 10 pre SBM model

	SE	Poradie	N	Poradie
A	1.5000	1	2.057	7
B	1.1000	2	0.886	5
C	1.0263	6	0.590	3
D	1.0390	4	0.394	2
E	1.0471	3	0.363	1
F	1.0251	7	0.803	4
G	1.0316	5	2.046	6