UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

SUBOPTIMALITA OKAMŽITEJ ANUITIZÁCIE V DÔCHODKOVOM SYSTÉME NA SLOVENSKU

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2021 Bc. Rudolf BUGAJ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

SUBOPTIMALITA OKAMŽITEJ ANUITIZÁCIE V DÔCHODKOVOM SYSTÉME NA SLOVENSKU

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1113 Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2021 **Bc. Rudolf BUGAJ**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Rudolf Bugaj
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Suboptimalita okamžitej anuitizácie v dôchodkovom systéme na Slovensku
Suboptimality of immediate annuization in the pension system in Slovakia

Anotácia: V nedávnej minulosti začalo vyplácanie prvých dôchodkov z druhého piliera dôchodkového systému na Slovensku. Ich výška je predmetom diskusií. Viacerí autori pokukazujú na suboptimalitu okamžitého nákupu doživotnej anuity. V práci pôjde o hľadanie alternatívnych stratégií použitia úspor z druhého piliera a ich porovnanie s klasickými doživotnými anuitami.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Dátum zadania: 17.12.2019

Dátum schválenia: 21.12.2019 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Rád by som chcel poďakovať vedúcemu tejto práce doc. Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD. za cenné rady, usmernenie a pomoc pri písaní tejto diplomovej práce. Taktiež chcem poďakovať rodine a kamarátom za podporu, ktorú mi po celý čas dodávali.

Abstrakt

BUGAJ, Rudolf: Suboptimalita okamžitej anuitizácie v dôchodkovom systéme na Slovensku [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2021, 41 str.

Táto diplomová práca sa zameriava hlavne na poukázanie neoptimálnosti okamžitého nákupu doživotnej anuity zo starobného dôchodkového poistenia v záverečnej fáze dôchodkového sporenia. Popíšeme štruktúru dôchodkového systému na Slovensku s hlavným zameraním na možnosti výplaty nasporených prostriedkov. V ďalších častiach práce aplikujeme na jednu z možností výplaty stratégie, ktoré by mohli dopomôcť k navýšeniu dôchodku jednotlivca. Cieľom našej práce je ukázať pravdepodobnosti úspešného zrealizovania jednotlivých stratégií. Pri nich zohľadňujeme rôzne faktory, ktoré majú vplyv na výšku poberaného dôchodku a môžu výrazne prispieť k úspešnosti, resp. neúspešnosti vybranej stratégie. Týmito faktormi sú úmrtnosť, investičné výnosy a úrokové miery, ktoré v sebe nesú aj náhodný prvok.

Kľúčové slová: Kľúčové slová: doživotná anuita, II. pilier, okamžitá anuitizácia, cena anuity, CIR model, CBD model, geometrický brownov pohyb, investičné výnosy, úrokové miery

Abstract

BUGAJ, Rudolf: Suboptimality of immediate annuization in the pension system in Slovakia [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2021, 41 pg.

This diploma thesis is focused mainly on pointing out the suboptimal purchase of a lifetime annuity from old-age pension system in final phase of pension savings. In the first part, we describe schema of pension system in Slovakia, with deep focus on withdrawal options of accumulated funds. In the following chapters we apply various strategies on one of the withdrawal options, which could help to increase one's lifetime annuity. Main goal of this thesis is to calculate probabilities of successful realization of those strategies. We also take different factors into consideration, that impact pension amount and could noticeably contribute to either success or failure of the particular strategy. These factors include mortality rates, investment returns and interest rates, which contain stochastic component.

Keywords: lifetime annuity, II. pilar, immediate anuization, anuity value, CIR model, CBD model, geometric brown movement, investment returns, interest rates

Obsah

Úvod **7**

1 Dôchodkový systém na Slovensku **9**

1.1 I. pilier 9

1.2 II. pilier 11

1.3 III. pilier 12

2 Formy výplaty dôchodku z II. piliera **14**

2.1 Doživotný dôchodok 14

2.2 Dočasný dôchodok 15

2.3 Programový výber 15

2.4 Výnos z investovania 16

3 Výpočet ceny anuity **17**

3.1 Pravdepodobnosť úmrtia 17

3.2 Cena jednotky anuity 22

3.3 Investičné výnosy 25

3.4 Stochastické úrokové miery 26

4 Alternatívy nákupu doživotnej anuity **29**

4.1 Odklad kúpy anuity 29

4.1.1 Príklad odkladu kúpy anuity 32

4.2 Pravdepodobnosť krachu 35

Záver **38**

Bibliografia **40**

Úvod

V nedávnej minulosti sa na Slovensku začalo vyplácanie prvých dôchodkov z druhého piliera. Ich výška je však predmetom mnohých diskusií. Jedným z hlavných dôvodov je fakt, že druhý pilier bol na Slovensku zavedený len v roku 2004. Jeho prví poberatelia doň mohli prispievať nanajvýš 17 rokov, čo nie je dostatočne dlhé obdobie, keďže sporenie do kapitálových dôchodkových schém je koncipované na celoživotné prispievanie. Ďalší z dôvodov je vysoká miera neoptimálnosti pri alokácii prostriedkov v dôchodkových fondoch mnoho ľudí má vysokú averziu voči riziku, preto svoje prostriedky zhodnocujú v garantovaných fondoch, ktoré majú vo všeobecnosti nižší výnos než negarantované fondy. V záverečnej fáze sporenia tak majú na svojom dôchodkovom účte menej prostriedkov v porovnaní s tým, koľko by mohli mať pri optimálnej alokácii svojich prostriedkov. Za tieto nasporené prostriedky si môžu kúpiť jeden z poistných produktov, ktorý im zabezpečí príjem v dôchodkovom veku. Kvôli strachu z toho, že by ostali nezabezpečení v svojom dôchodkovom veku väčšina volí nákup doživotnej anuity.

V našej práci ukážeme, akým spôsobom je vypočítaná anuita a aké faktory majú vplyv na jej výšku. Keďže cena jednotky anuity sa môže často zdať pre budúceho dôchodcu vysoká, pri jej nákupe mu nezostáva veľa možností, ako by z nej mohol vyťažiť ešte viac. Jedným z najviac diskutovaných riešení je odklad jej nákupu. Toto sa javí ako efektívne riešenie, pretože s narastajúcim vekom klesá cena doživotnej anuity, teda sporiteľ si bude môcť kúpiť doživotnú anuitu lacnejšie. Úspešnosť takéhoto odkladu však môžu ovplyvniť rôzne externé faktory na finančnom trhu, ktoré tejto stratégii pridávajú prvok neistoty. V našej práci tento prvok neistoty nahrádzame stochastickými procesmi, ktoré budú simulovať nepredvídateľnosť finančného trhu. Takáto analýza úspešnosti odkladu nákupu doživotnej anuity bude jedným z hlavných prínosov našej práce.

V úvodnej kapitole podrobne opíšeme trojpilierový dôchodkový systém, ktorý máme na Slovensku. Zameriame sa na starobné dôchodkové poistenie (II. pilier) a v ňom na výplatnú fázu. V ďalších kapitolách následne podrobne opíšeme výpočet, ktorým sa z nasporených prostriedov na osobnom dôchodkovom účte stane pravidelná mesačná dávka. Predstavíme faktory ktoré ovplyvňujú výšku anuity a spolu s nimi ukážeme modely, ktoré budeme využívať na ich odhad. Konrétne medzi tieto faktory patrí úmrtnosť, úrokové miery a investičné výnosy dôchodkových fondov. Vďaka ich odhadu budeme môcť spočítať

pravdepodobnosť úspešného odkladu anuity a tzv. pravdepodobnosť krachu - t.j. s akou pravdepodobnosťou sa za určitý čas pri jednej zo stratégii vyčerpajú jednotlivcovi všetky prostriedky na financovanie jeho dôchodku.

1 Dôchodkový systém na Slovensku

Na začiatok si predstavíme štruktúru dôchodkového systému na Slovensku. Informácie v tejto kapitole sme čerpali z [2] a [11]. Slovenský dôchodkový systém sa od veľkej dôchodkovej reformy v roku 2005 skladá z troch pilierov:

- Prvý pilier (povinné dôchodkové poistenie) – priebežný, dávkovo definovaný systém spravovaný Sociálnou poisťovňou
- Druhý pilier (starobné dôchodkové poistenie) – kapitálový, príspevkovo definovaný systém spravovaný dôchodkovými správcovskými spoločnosťami
- Tretí pilier (doplnkové dôchodkové poistenie) – kapitálový, príspevkovo definovaný systém spravovaný doplnkovými dôchodkovými spoločnosťami

Cieľom rozdelenia pôvodného jedno-pilierového systému na troj-pilierový systém, bolo odstrániť nedostatky predchádzajúceho systému, ktorý bol z dlhodobého hľadiska neudržateľný, hlavne z dôvodu nepriaznivého demografického vývoja obyvateľstva na Slovensku.

1.1 I. pilier

Prvý pilier je povinné dôchodkové poistenie a účasť na tomto sporení vzniká jednotlivcovi priamo zo zákona. Je to dávkovo definovaný pay-as-you-go systém, ktorý spravuje Sociálna poisťovňa. Využíva bodový systém, ktorého charakteristickou črtou je značná miera zásluhovosti – výška dôchodku sa odvíja od výšky príjmov v období sporenia. Príspevky do I. piliera sú povinné pre všetkých ekonomicky aktívnych ľudí, a sú vo výške 18% z vymeriavacieho základu, pokiaľ jednotlivec nie je zaradený do II. piliera. Ak je jednotlivec zaradený v II. pilieri, v tom prípade ide 12,75% do I. piliera a zvyšok (5,25%) do II. piliera. Sadzba príspevkov do II. piliera sa od roku 2016 z pôvodných 4% každoročne zvyšuje o 0,25%, pričom v roku 2024 dosiahne svoje maximum na úrovni 6%. I. pilier tvoria dva podsystémy:

- Starobné poistenie – zabezpečenie príjmu v starobe a pre prípad úmrtia
- Invalidné poistenie – zabezpečenie príjmu v prípade zníženej schopnosti vykonávať zárobkovú činnosť a pre prípad úmrtia (nebudeme sa ním v práci ďalej zaoberať)

Starobné poistenie tvorí momentálne najväčšiu časť príjmu jednotlivca v penzii. Na poberanie tohto dôchodku musí jednotlivec dosiahnuť dôchodkový vek. Aktuálny dôchodkový vek na Slovensku je 62 rokov a 10 mesiacov pre mužov a ženy. Za každé dieťa sa jednotlivcovi ešte znižuje dôchodkový vek o pol roka, maximálne však o 1,5 roka. Dôchodkový vek každoročne narastá v závislosti od rastu očakávanej dĺžky života. Momentálne je to na úrovni približne 2 mesiace za rok, a tento rast sa zastaví keď dôchodkový vek dosiahne hranicu 64 rokov. Výpočet starobného dôchodku zo starobného poistenia je nasledovný [11]:

$$SD = POMB \times ODP \times ADH$$

kde POMB je priemerný osobný mzdový bod, ODP je dĺžka obdobia dôchodkového poistenia, a ADH je aktuálna dôchodková hodnota. Jednotlivé veličiny sa dajú vysvetliť nasledovne:

- POMB – podiel súčtu osobných mzdových bodov nazbieraných za celé obdobie sporenia a počtu rokov, kedy bol jednotlivec ekonomicky aktívny
- Osobný mzdový bod – podiel osobného vymeriavacieho základu jednotlivca v príslušnom kalendárnom roku a všeobecného vymeriavacieho základu za príslušný rok
- Obdobie dôchodkového poistenia – obdobie, kedy bol jednotlivec ekonomicky aktívny
- Aktuálna dôchodková hodnota – hodnota jedného osobného mzdového bodu, upravuje sa každoročne indexom rastu priemernej mzdy

Kvôli pridaniu prvku solidarity sa POMB upravuje nasledujúcim spôsobom:

- ak $POMB < 1$, pripočíta sa k nemu $0{,}2 \times (1 - POMB)$
- ak $POMB \in \langle 1, 1.25)$, zachová sa pôvodná hodnota
- ak $POMB \in \langle 1, 1.25)$, nová hodnota bude $0{,}68 \times POMB$
- ak $POMB \geq 3$, nová hodnota bude max. 3

1.2 II. pilier

Druhý pilier je dôchodkové poistenie, ktoré je príspevkovo definované – výška dôchodku priamo závisí od zaplatených príspevkov a ich zhodnotenia. Je to dobrovoľný kapitalizačný pilier a po vstupe sa stáva povinným. Výška príspevkov je momentálne na úrovni 5,25% z vymeriavacieho základu a bude sa navyšovať, kým nedosiahne hodnotu 6%. Tieto prostriedky sa akumulujú na osobnom dôchodkovom účte jednotlivca v Dôchodkovej správcovskej spoločnosti (ďalej len DSS), ktorá spravuje jeho prostriedky a priebežne ich zhodnocuje v dôchodkových fondoch. Jednotlivec si DSS môže vybrať podľa vlastného uváženia spolu s konkrétnym fondom, v ktorom sa mu budú jeho prostriedky zhodnocovať. Každá dôchodková správcovská spoločnosť má na výber viacero dôchodkových fondov, z ktorých povinne jeden musí byť dlhopisový garantovaný dôchodkový fond, a jeden akciový negarantovaný dôchodkový fond. Negarantované dôchodkové fondy majú vyššie výnosy oproti garantovaným fondom, no ich nevýhodou je spravidla vyššie riziko straty. Okrem týchto dvoch fondov môžu ponúkať a spravovať aj ďalšie dôchodkové fondy (zmiešané, indexové, atď.). Momentálne na Slovensku pôsobia tieto dôchodkové správcovské spoločnosti:

- Allianz - Slovenská dôchodková správcovská spoločnosť, a.s.
- DSS Poštovej banky d.s.s., a.s.
- NN dôchodková správcovská spoločnosť, a.s.
- UNIQA d.s.s., a.s.
- VÚB Generali d.s.s., a.s

Každá z nich je pod prísnym dohľadom Národnej banky Slovenska a bezpečnosť úspor je definovaná legislatívnym rámcom podľa zákona č. 43/2004 Z. z.

Druhý pilier pozostáva z dvoch fáz:

- Sporiaca fáza – v tejto fáze sporiteľ počas ekonomicky aktívneho života prispieva na svoj osobný dôchodkový účet, ktorý mu spravuje DSS a zároveň mu zhodnocuje prostriedky vo vybranom dôchodkovom fonde

- Výplatná fáza – v tejto fáze sa po dosiahnutí dôchodkového veku vyplácajú nasporené prostriedky späť do rúk jednotlivca vo forme, ktorú si vybral jednotlivec z ponukového listu. Podrobnejšie sa jej venujeme v ďalšej kapitole, keďže skúmanie alternatív výplaty prostriedkov vo výplatnej fáze je hlavný cieľ našej práce

Výška dôchodkovej dávky vo výplatnej fáze bude závisieť hlavne od:

- hodnoty príspevkov, ktoré v priebehu života jednotlivec odvádzal na svoj osobný dôchodkový účet
- výkonnosti dôchodkového fondu v ktorom mal tieto príspevky zhodnocované
- dĺžky sporenia
- veku odchodu do dôchodku
- výberu spôsobu vyplácania týchto prostriedkov

1.3 III. pilier

Tretí pilier je dobrovoľné doplnkové dôchodkové sporenie, založené na kapitálovom, príspevkovo definovanom systéme. Príspevky jednotlivcov sú spravované doplnkovými dôchodcovskými spoločnosťami, ktoré platí buď zamestnávateľ alebo jednotlivec. V súčasnosti na Slovensku pôsobia doplnkové dôchodkové spoločnosti:

- AXA d.d.s., a.s.
- NN Tatry-Sympatia, d.d.s., a.s.
- Stabilita, d.d.s., a.s.
- Doplnková dôchodková spoločnosť Tatra banky, a.s.

Každá z nich je povinná spravovať jeden výplatný doplnkový dôchodkový fond a aspoň jeden príspevkový doplnkový fond. V týchto fondoch sa jednotlivcom zhodnocujú naakumulované prostriedky v jednom alebo vo viacerých príspevkových fondoch. Aj keď je tento pilier pre sporiteľov dobrovoľný, pre jednotlivcov ktorí vykonávajú rizikovú prácu sa automaticky stáva povinným. V tom prípade musí jednotlivec, prípadne zamestnávateľ za

svojho zamestnanca odvádzať povinný príspevok. Vo výplatnej fáze si môže nechať vyplatiť nasporené prostriedky vo forme doživotného alebo dočasného doplnkového starobného dôchodku, jednorázového vyrovnania alebo predčasného výberu.

2 Formy výplaty dôchodku z II. piliera

Zo starobného dôchodkového sporenia v II. pilieri sa vypláca dôchodok v týchto formách:

- Doživotný dôchodok
- Dočasný dôchodok
- Programový výber

2.1 Doživotný dôchodok

Doživotný dôchodok sa na základe zmluvy jednotlivca so životnou poisťovňou vypláca do konca jeho života. Dá sa zakúpiť v životnej poisťovni za prostriedky, ktoré si jednotlivec nasporil počas sporiacej fázy na svojom súkromnom dôchodkovom účte v DSS. Doživotný dôchodok vyplácajú životné poisťovne, ktorým NBS udelila licenciu na výplatu dôchodkov z II.piliera. Životné poisťovne nemôžu pri jeho výpočte zohľadňovať zdravotný stav, ani pohlavie jednotlivca, ktorý má o ich poistný produkt záujem. Doživotný dôchodok má viacero foriem výplaty:

- Doživotný dôchodok
- Doživotný dôchodok s pozostalostným krytím
- Doživotný dôchodok s navyšovaním
- Doživotný dôchodok s navyšovaním a pozostalostným krytím

Doživotný dôchodok je základnou, a momentálne najpopulárnejšou možnosťou výberu prostriedkov z II. piliera. Poisťovňa garantuje jeho výplatu v dohodnutej sume po dobu minimálne 7 rokov. Pokiaľ by jednotlivec pred uplynutím tejto garančnej doby zomrel, zostatok sumy, ktorá mala byť vyplatená počas týchto 7 rokov je predmetom dedičstva. Po uplynutí garančnej doby a po smrti jednotlivca pozostalí nemajú nárok na výplatu ďalších prostriedkov. Pozostalostné krytie je doplnok základného doživotného dôchodku, ktorý zabezpečuje výplatu prostriedkov pozostalým ešte jeden alebo dva roky po smrti jednotlivca - v z8vislosti od zmluvy. Výška takto vyplatených prostriedkov pozostalým

je spravidla rovnaká, ako bola výška prostriedkov v čase úmrtia jednotlivca. Doživotný dôchodok so zvyšovaním zabezpečuje každoročný nárast vyplácaného dôchodku o vopred určené percento. Suma vyplácaného dôchodku je v porovnaní so základným doživotným dôchodkom na začiatku nižšia, no v priebehu času narastá. Tento poistný produkt má zabezpečiť udržanie rovnakého životného štandardu jednotlivca napriek budúcemu rastu cien tovarov a služieb - inflácii. Doživotný dôchodok s navyšovaním a pozostalostným krytím je spomedzi ponúkaných produktov doživotného dôchodku najdrahší a je to kombinácia všetkých troch predchádzajúcich poistných produktov. Je zabezpečený voči inflácii a v prípade úmrtia sa vypláca pozostalým dôchodok v rovnakej sume, ako mal jednotlivec v čase smrti. Na možnosť poberania dočasného dôchodku a programového výberu musí byť súčet súm doživotných dôchodkov z obidvoch pilierov vyšší ako referenčná suma. Referenčná suma je každoročne určovaná a prehodnocovaná Sociálnou poisťovňou a predstavuje priemerný mesačný starobný dôchodok.

2.2 Dočasný dôchodok

Dočasný dôchodok vypláca jednotlivcovi životná poisťovňa vo vopred dohodnutom období, ktoré v súčasnosti môže byť dlhé 5, 7 alebo 10 rokov. Po splnení podmienok sa vypláca mesačne vo vopred dohodnutej výške a v prípade smrti jednotlivca nevyplatené prostriedky už nie sú predmetom dedičstva.

2.3 Programový výber

Programový výber sa neradí do kategórie poistných produktov, pretože ho nevyplácajú životné poisťovne, ale samotné dôchodkové správcovské spoločnosti. Nasporené prostriedky po sporiacej fáze ostávajú v DSS (nie nutne v tej, kde si jednotlivec sporil), kde sú investované do dôchodkových fondov a na základe zmluvy medzi jednotlivcom a DSS sa mu vypláca mesačná suma v dohodnutej výške, resp. v dohodnutom časovom horizonte. Tým, že nasporené prostriedky ostávajú v dôchodkových fondoch DSS, nie je možné garantovať výšku dôchodku a zároveň aj dĺžku jeho výplaty. Tento dôchodok je vyplácaný dovtedy, kým sa neminú všetky nasporené prostriedky na osobnom dôchodkovom účte. Momentálne sa môže programový výber vyplácať len z dlhopisového garantovaného dôchodkového fondu, z dôvodu rizika náhlej straty prostriedkov. Zmena výšky dôchodku,

ako aj dĺžky obdobia výplaty je možná kedykoľvek po dohode s DSS. V prípade smrti jednotlivca pred vyčerpaním všetkých prostriedkov je zostatok predmetom dedenia.

2.4 Výnos z investovania

Výnos z investovania sa rovnako ako programový výber neradí do kategórie poistných produktov, ani medzi formy dôchodkov z II. piliera. Úspory ktoré jednotlivec nadobudol počas sporiacej fázy ostávajú na jeho súkromnom dôchodkovom účte v DSS, kde sa následne zhodnocujú, a takto nadobudnutý výnos sa priebežne vypláca vo forme ročného dôchodku. Keďže výkonnosť fondu nie je garantovaná, výška výnosu môže kolísať. Ak by boli v danom roku záporné výnosy, nebude v ten rok vyplatený žiaden výnos z investovania. V prípade úmrtia sú prostriedky na osobnom dôchodkovom účte predmetom dedenia. Vyplácanie výnosu z investovania je možné kedykoľvek ukončiť a využiť ďalšie zo spôsobov vypácania dôchodku z II. piliera.

3 Výpočet ceny anuity

Pri výpočte doživotnej anuity (doživotného dôchodku) nás budú zaujímať tri parametre. Prvým z nich je miera úmrtnosti. Tá zohráva rolu pri výpočte ceny jednotky anuity. Čím vyššia je pravdepodobnosť úmrtia, tým lacnejšia je jednotka anuity. Ďalším z parametrov je výška nasporených prostriedkov na dôchodkovom účte. Za ňu si v čase odchodu do dôchodku jednotlivec môže zakúpiť jeden z poistných produktov, ktoré mu ponúknu životné poisťovne alebo produkty ktoré ponúkajú Dôchodkové správcovské spoločnosti. Posledným parametrom, no veľmi dôležitým, je cena jednotky anuity. Cena jednotky anuity je pre jednotlivca jeden z rozhodujúcich faktorov, podľa ktorých sa rozhoduje pri výbere konkrétnej životnej poisťovne na nákup doživotnej anuity. Čím je nižšia, tým je pre jednotlivca nákup doživotnej anuity výhodnejší. V tejto časti práce preto podrobnejšie rozoberieme ako vyzerá výpočet doživotnej anuity z aktuárskeho hľadiska a podrobne rozoberieme parametre, ktoré si výpočet anuity vyžaduje.

3.1 Pravdepodobnosť úmrtia

Pravdepodobnosť úmrtia vstupuje do výpočtov ceny jednotky anuity ako jeden z parametrov. V matematickej demografii ju označujeme q_x a vyjadruje pravdepodobnosť, že človek vo veku x zomrie v priebehu najbližšieho roka. Pomocou nej sa dá odvodiť pravdepodobnosť dožitia v tvare:

$$p_x = 1 - q_x \tag{3.1}$$

teda pravdepodobnosť, že človek vo veku x sa dožije veku $x + 1$. Vo všeobecnosti ${}_kp_x$ vyjadruje pravdepodobnosť, že človek vo veku x bude žiť ešte k rokov. Pre pravdepodobnosť ${}_kp_x$ platí [9]:

$${}_kp_x = p_x p_{x+1} \dots p_{x+k-1} = \prod_{i=0}^{k-1} p_{x+i} = \prod_{i=0}^{k-1} (1 - q_{x+i}), \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{3.2}$$

Jednotlivé jednoročné pravdepodobnosti sú vyjadrené v úmrtnostných tabuľkách, ktoré využívajú životné poisťovne. Nie sú tvorené individuálne pre jednotlivca, ale rátajú sa pre populáciu ako celok. Vo všeobecnosti je úmrtnosť u žien nižšia ako u mužov. Životné poisťovne však nemôžu rozlišovať jednotlivca v závislosti od pohlavia. Pri odhade úmrtnosti sa nachádza faktor neistoty, keďže sa nedá s určitosťou povedať, akými úmrtnostnými

tabuľkami sa budú poisťovne pri nákupe anuity riadiť o 5, 10 alebo 20 rokov. Zmeny v týchto tabuľkách môžu vzniknúť kvôli rôznym náhlym šokom (napr. medicínsky pokrok, ktorý môže dopomôcť predĺženiu priemerného veku dožitia, alebo pandémia, kvôli ktorej narastie úmrtnosť vo vyšších vekoch) čo môže spôsobiť signifikantnú odchýlku od očakávaného trendu.

V tejto práci odhadujeme úmrtnosť pomocou stochastických demografických modelov. Na základe publikácie [1] sme sa rozhodli použiť prvé zovšeobecnenie Cairns-Blake-Dowd (CBD) modelu, inak označovaného aj M6. CBD model je jeden z najpoužívanejších variantov stochastických modelov úmrtnosti z triedy GACP (Generalized age-cohort-period). Zakladá sa na linearite logitu jednoročných úmrtností vo vyšších vekoch. Tento model bol v publikácii z ktorej sme čerpali vybratý na základe Bayesovho informačného kritéria (BIC), ktoré ukázalo, že práve tento model z triedy GACP, ktorý obsahuje aj kohortný efekt $\gamma_{t-x}^{(i)}$, je pre modelovanie úmrtnosti slovenskej populácie pre vyššie ročníky bez ohľadu na pohlavie najvhodnejší. Kohortný efekt vyjadruje vplyv okolností na úmrtnosť danej kohorty. Vybraný model M6 je podľa publikácie [3] vyjadrený ako:

$$\operatorname{logit} q(t,x) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)} \tag{3.3}$$

kde $\kappa_t^{(i)}$ vyjadrujú časové parametre, $\bar{x}$ označuje priemerný vek v dátach, $\operatorname{logit} q(t,x) = \ln\left(\frac{q(t,x)}{1-q(t,x)}\right)$, a hraničné podmienky pre parametre sú:

$$\sum_{x\in\chi, t\in\tau} \gamma_{t-x}^{(3)} = 0$$

$$\sum_{x\in\chi, t\in\tau} (t-x)\gamma_{t-x}^{(3)} = 0$$

kde $\gamma_{t-x}^{(3)}$ je kohortný efekt, x je vek jednotlivca, t je kalendárny rok, $x \in \chi$ kde χ je ľubovoľná množina vekov a $t \in \tau$, kde τ je množina skúmaných rokov.

Časové parametre $\kappa_t^{(i)}$ sú definované vzťahom [16]:

$$\kappa_t = \delta + \kappa_{t-1} + \xi_t^{\kappa}, \quad \kappa_t = \begin{pmatrix} \kappa_t^{(1)} \\ \vdots \\ \kappa_t^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \xi_t^{\kappa} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma) \tag{3.4}$$

kde δ je vektor driftových parametrov s rozmerom $N, 0$ je nulový N-rozmerný vektor a Σ je variančná matica viacrozmerného bieleho šumu ξ_t^{κ} s rozmerom $N \times N$.

Na simulovanie stochastickej úmrtnosti budeme pre zjednodušenie výpočtov podľa (Renshaw and Haberman 2006; Cairns et al. 2011; Lovasz 2011) predpokladať, že kohortný efekt je jednorozmerný ARIMA proces, ktorý je nezávislý od časových parametrov $\kappa_t^{(i)}$. Predpokladajme, že $\gamma_c \equiv \gamma_{t-x}$ je ARIMA(p,q,d) s driftom. Kohortný efekt je následne definovaný vzťahom [16]:

$$\Delta^d \gamma_c = \delta_0 + \phi_1 \Delta^d \gamma_{c-1} + \cdots + \phi_p \Delta^d \gamma_{c-p} + \epsilon_c + \delta_1 \epsilon_{c-1} + \cdots + \delta_q \epsilon_{c-q} \tag{3.5}$$

kde ϵ_c je Gaussovský biely šum s disperziou σ_ϵ, Δ^d je diferencia d-teho rádu, δ_0 je driftový parameter, $\delta_1, \ldots, \delta_p$ sú koeficienty kĺzavých priemerov, $\phi_1, \ldots, \phi_p$ sú autoregresné koeficienty s podmienkami $\phi_p \neq 0$ a $\delta_q \neq 0$.

Na modelovanie v prostredí R sme použili knižnicu StMoMo (Villegas et al. 2017), ktorá sa používa na stochastické modelovanie úmrtnosti. Dáta úmrtnosti slovenskej populácie sme prevzali z databázy Human Mortality Database, ktorá je integrovaná priamo v knižnici demography (Hyndman et al. 2014). Pre čo najvyššiu presnosť v našom modelovaní sme skúmali iba veky v intervale [62, 100] rokov, keďže to je cieľový interval, ktorý pri modelovaní využívame. Tieto parametre sme odhadovali pomocou funkcie $forecast()$, vďaka ktorej sme následne uskutočnili náhodnú realizáciu stochastickej úmrtnosti na Slovensku. Realizáciu predikcie parametrov pre prvé zovšeobecnenie CBD modelu je možné vidieť na Obr. 1. Následnú predikciu úmrtnosti pre kohortu 1959 je možné vidieť na Obr. 2. Predikcie sme realizovali pre kohortu 1959 s predpokladom, že dôchodkový vek na Slovensku je 62 rokov[1]. Práve táto kohorta by v prípade jednotného dôchodkového veku (62 rokov) dosiahla v roku 2021 dôchodkový vek. Krivka čiernej farby pred zelenými predikčnými intervalmi na Obr. 1 znázorňuje skutočné hodnoty parametrov z historických dát. Zelenou farbou sú vyznačené 90%-né predikčné intervaly odhadnutých hodnôt parametrov $\kappa_t^{(i)}$ a $\gamma_{t-x}^{(3)}$ a odhadnutými hodnotami parametrov, znázornenými čiernou krivkou v predikčných intervaloch. Po odhade parametrov $\kappa_t^{(i)}$ a $\gamma_{t-x}^{(3)}$ vieme modelovať krivku úmrtnosti danej kohorty.

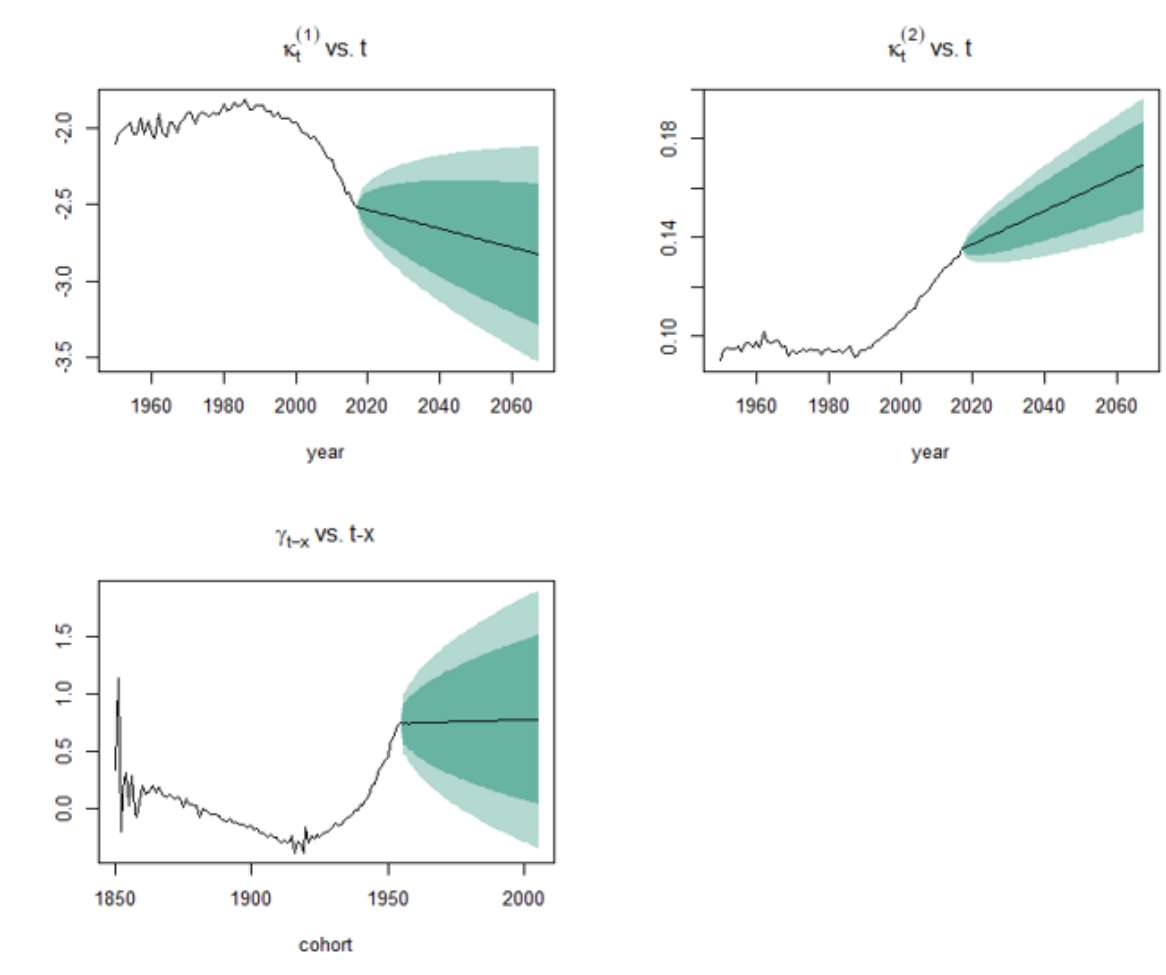
Následne túto úmrtnosť prevedieme na tzv. Gompertz-Makehamov zákon úmrtnosti, ktorého vstupné parametre b a m využívame pri výpočte ceny jednotky anuity. Pravde-

[1]Kvôli zjednodušeniu výpočtov sme dôchodkový vek zovšeobecnili. Na Slovensku sa líši v závislosti od pohlavia a počtu detí.

podobnosť dožitia je podľa tohto zákona definovaná vzťahom podľa publikácie [10]

$$ {}_tp_x = \frac{\exp\left(e^{-\frac{m}{b}}\left(1 - e^{\left(\frac{x+t}{b}\right)}\right)\right)}{\exp\left(e^{-\frac{m}{b}}\left(1 - e^{\left(\frac{x}{b}\right)}\right)\right)} \tag{3.6} $$

kde b predstavuje mieru variability zostávajúcej doby života a m vyjadruje modalitu rozdelenia podmienenej pravdepodobnosti. Odhady hodnôt týchto dvoch parametrov dostaneme Gauss-Newtonovou metódou z namodelovanej krivky úmrtnosti pomocou modelu M6 z (3.3). Výsledné hodnoty sú zobrazené v Tab. 1 pre rozličné kohorty. V ďalších výpočtoch využívame hodnoty kohorty 1959.



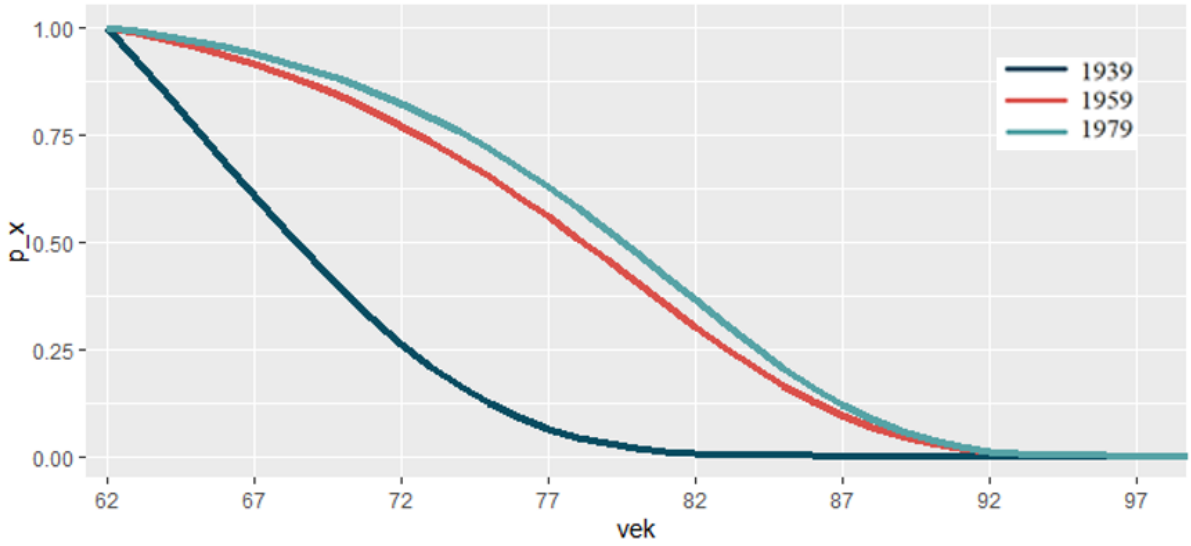
Obr. 1: Predikcia časových parametrov $\kappa_t^{(i)}$ a kohortneho efektu $\gamma_{t-x}^{(3)}$ modelu M6 pre Slovenskú populáciu bez ohľadu na pohlavie

(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

Na Obr. 2 sú znázornené krivky Gompertzovho-Makehamovho zákona úmrtnosti pre

Parameter/Kohorta	1939	1959	1979
m	64,99	79,95	81,49
b	9,62	7,85	7,03

Tabuľka 1: *(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)*



Obr. 2: Gompertzova-Makehamova krivka pre rozličné kohorty pre populáciu na Slovensku vo veku 62 rokov (kohorta 1959)
(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

slovenskú populáciu a rôzne kohorty, s použitím odhadnutých parametrov v Tab. 1 Pravdepodobnosť dožitia s narastajúcim vekom pre rozličné kohorty klesá rozdielnou rýchlosťou. Na Obr. 2 je tiež zaujímavé sledovať, aký posun v predikciách úmrtnosti nastal medzi kohortami 1939 a 1959. Kým človek narodený v roku 1939 má podľa našich simulácií vo veku 62 rokov len 7% šancu dožitia sa 77 rokov, človek narodený v roku 1959 má v 62 rokoch šancu že sa dožije 77 rokov až 57%. Model následne pre ďalšie generácie neočakáva výraznú zmenu v pravdepodobnosti dožitia, čo je vidieť na malom posune krivky znázorňujúcej kohortu 1979 oproti kohortnej krivke 1959.

3.2 Cena jednotky anuity

Vďaka cene jednej jednotky anuity je možné vypočítať výšku doživotnej anuity. Predstavuje hodnotu, za ktorú si budúci dôchodca môže zakúpiť doživotný príjem, ktorý bude vyplácaný až do jeho smrti, bez ohľadu na riziko dlhovekosti. V aktuárstve sa označuje $\ddot{a}_x$, kde x predstavuje aktuálny vek jednotlivca. V deterministickom prípade ju vieme vyjadriť podľa [9] ako:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tp_x (1+r)^{-t}, \tag{3.7}$$

kde r predstavuje ročnú technickú úrokovú mieru. V našej práci však budeme modelovať cenu anuity spojitým prístupom. Platí pre ňu vzťah z [10]:

$$\ddot{a}_x = (1+L_x) \int_0^{\infty} e^{-rt} {}_tp_x dt, \tag{3.8}$$

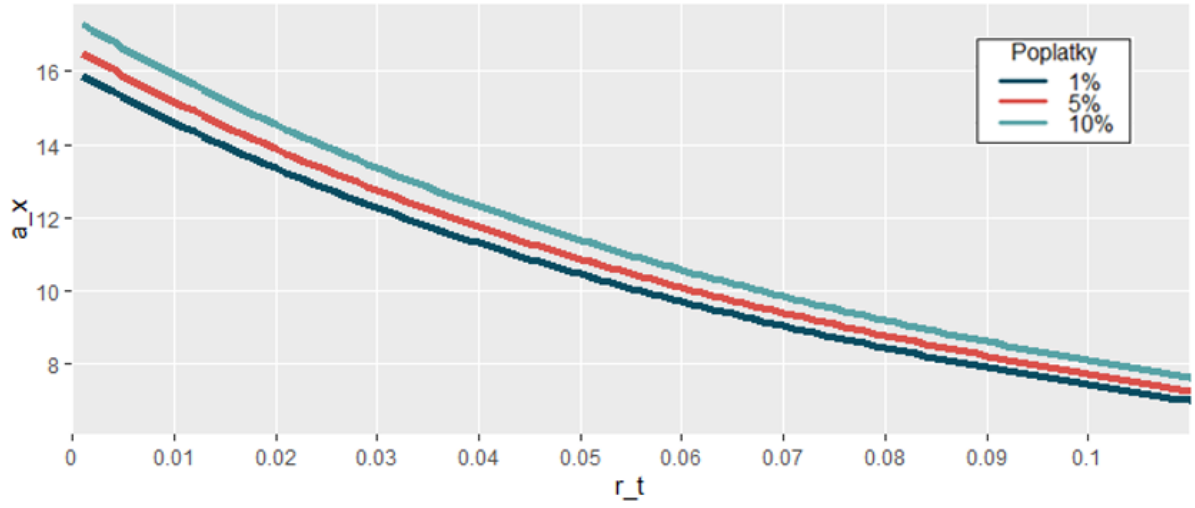
kde L_x predstavuje poplatky poisťovni vo veku x, r je aktuálna ročná technická úroková miera, a ${}_tp_x$ je pravdepodobnosť, že jednotlivec vo veku x bude žiť ešte t rokov. Riešením integrálu v rovnici (3.8) po dosadení pravdepodopnosti dožitia ${}_tp_x$ z rovnice (3.6) podľa [10] dostávame:

$$\ddot{a}_x = (1+L_x)\, b e^{(x-m)r} \exp\left(e^{(x-m)/b}\right) \Gamma\left(-br, e^{(x-m)/b}\right) \tag{3.9}$$

kde $\Gamma(.,.)$ predstavuje neúplnú Gamma funkciu $\Gamma(x,y) = \int_y^{\infty} e^{-t} t^{(x-1)} dt$.
S narastajúcim t bude pravdepodobnosť dožitia ${}_tp_x$ klesať a zo vzťahu (3.8) je vidieť, že napokon aj $\ddot{a}_x$. To je znázornené na Obr. 4. V ďalších výpočtoch ukážeme, že čím vyššie budú poplatky poisťovni, tým drahšia bude cena jednotky anuity. Taktiež ukážeme, že s rastúcou úrokovou mierou bude táto cena klesať. Ako príklad uvedieme jednotlivca zo Slovenska[2] patriaceho do kohorty 1959, s rôznym vekom nákupu anuity x, pri rôznych poplatkoch poisťovni L_x a pri rôznej úrokovej miere r. Výsledky týchto výpočtov môžme vidieť v Tab. 2, 3 a 4.

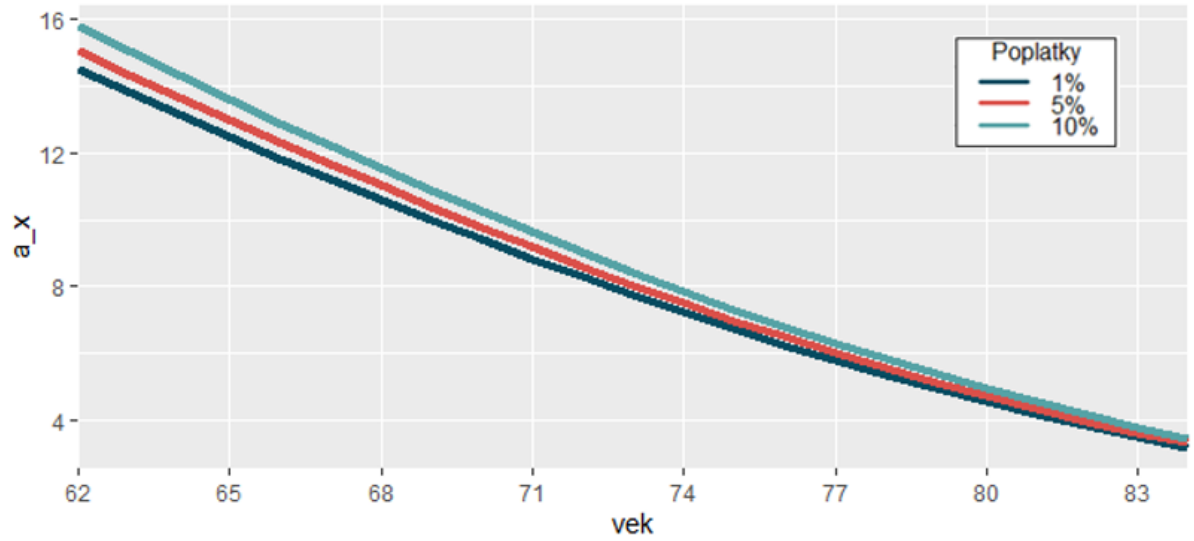
Pre lepšiu predstavu pohybu ceny jednotky anuity je na Obr. 3 vykreslená závislosť ceny jednotky anuity $\ddot{a}_{62}$ od úrokovej miery r, s rôznou výškou poplatkov poisťovni L_{62}, pre jednotlivca patriaceho do kohorty 1959 vo veku nákupu anuity 62 rokov. S rastúcou úrokovou mierou je to klesajúca funkcia a s rastúcimi poplatkami má táto krivka vertikálny posun nahor po osi y. Štandardne si jednotlivec vo veku x s naakumulovanými prostriedkami na svojom dôchodcovskom účte $Y_0 = y$ môže kúpiť doživotnú anuitu c_x^y

[2]Vo výpočte pravdepodobnosti dožitia ${}_tp_x$ použijeme parametre z Tab. 1



Obr. 3: Cena jednotky anuity $\ddot{a}_x$ v závislosti od úrokovej miery r

(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)



Obr. 4: Cena jednotky anuity $\ddot{a}_x$ v závislosti od veku

(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

za cenu jednotky doživotnej anuity $\ddot{a}_x$, ktorú mu ponúkli životné poisťovne. Sporiteľ vymieňa svoje úspory y za pravidelný ročný príjem c_x^y ktorý bude poberať doživotne. Vzťah na výpočet doživotnej ročnej anuity je podľa [10] nasledovný:

$$c_x^y = \frac{y}{\ddot{a}_x} \tag{3.10}$$

Ako príklad výpočtu anuity môžeme použiť 62 ročného jednotlivca, ktorý dovŕšil dôchodkový vek a má na svojom dôchodkovom účte nasporených $y = 10000$ EUR. Aktuálna

Vek/r	0	0,01	0,02	0,03	0,04
62	15,87	15,72	15,57	15,43	15,28
67	12,06	11,97	11,88	11,79	11,70
72	8,75	8,70	8,65	8,60	8,55
77	6,03	6,01	5,98	5,96	5,93

Tabuľka 2: Cena jednej jednotky anuity $\ddot{a}_x$ v závislosti od veku sporiteľa x, úrokovej miery r a pri poplatkoch poisťovni $L_x = 0,01$
(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

Vek/r	0	0,01	0,02	0,03	0,04
62	15,87	15,72	15,57	15,43	15,28
67	12,06	11,97	11,88	11,79	11,70
72	8,75	8,70	8,65	8,60	8,55
77	6,03	6,01	5,98	5,96	5,93

Tabuľka 3: Cena jednej jednotky anuity $\ddot{a}_x$ v závislosti od veku sporiteľa x, úrokovej miery r a pri poplatkoch poisťovni $L_x = 0,05$
(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

Vek/r	0	0,01	0,02	0,03	0,04
62	17,29	17,12	16,96	16,8	16,64
67	13,13	13,04	12,94	12,84	12,75
72	9,53	9,48	9,42	8,37	9,32
77	6,57	6,54	6,51	6,49	6,46

Tabuľka 4: Cena jednej jednotky anuity $\ddot{a}_x$ v závislosti od veku sporiteľa x, úrokovej miery r a pri poplatkoch poisťovni $L_x = 0,1$
(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

cena anuity sa pri úrokovej miere $r = 0$ a pri poplatkoch poisťovni $L_{62} = 0,01$ pohybuje podľa Tab. 2 na úrovni $\ddot{a}_{62} = 15,87$ EUR. Ročnú anuitu c_x^y následne vypočítame ako:

$$c_x^y = \frac{y}{\ddot{a}_x} = \frac{10000}{15,87} = 530,12\text{EUR}.$$

V predchádzajúcich výpočtoch sme cenu jednotky anuity počítali s fixnou úrokovou mierou. Tento prístup je nepresný, pretože cena jednotky anuity sa v čase mení. Z toho dôvodu nevieme určiť jej presnú hodnotu v budúcnosti. Kvôli výpočtu anuity nás budú zaujímať tiež investičné výnosy portfólia, v ktorom bude mať jednotlivec investované svoje prostriedky. Pri nich, rovnako ako pri úrokových mierach, nevieme určiť ich budúcu hodnotu. Pri modelovaní anuít teda vstupujú do výpočtu dva náhodné faktory:

- investičné výnosy
- úrokové miery

3.3 Investičné výnosy

Investičný výnos je to, čo zaujíma každého sporiteľa. Keďže sa na finančnom trhu vyskytujú pomerne časté fluktácie, a tiež menej časté, no výrazné šoky (napr. pokles na finančnom trhu v Q1 2020), nedá sa presne určiť aká bude budúca hodnota portfólia. To je dôvod, prečo sporiteľ nevie, či si v budúcnosti bude môcť dovoliť kúpiť tú istú anuitu, ktorú by si mohol dovoliť kúpiť teraz. Keďže pohyby na finančnom trhu sú nepredvídateľné, jedným zo spôsobov ako modelovať túto náhodnosť je pomocou Geometrického Brownovho pohybu. Na začiatok definujeme počiatočnú hodnotu portfólia $Y_t = y$ v čase t. Pohyb investičných výnosov sa dá vyjadriť pomocou Stochastickej Diferenciálnej rovnice (SDR) [10]:

$$dY_t = \mu Y_t dt + \sigma Y_t dW_t^{(k)} \quad t \geq 0, Y_0 = y \tag{3.11}$$

kde μ je miera rastu investičného portfólia, σ je volatilita a $W_t^{(k)}$ je Geometrický Brownov pohyb (inak nazývaný aj biely šum), ktorý v tomto modeli predstavuje fluktácie a nepredvídateľnosť budúcich výnosov. V prípade, že by volatilita bola nulová, a teda člen Brownovho pohybu z rovnice vypadne, dá sa na rovnicu (3.11) pozerať ako na Obyčajnú Diferenciálnu Rovnicu 1. rádu. Z definície Brownovho pohybu vieme, že $W_t^{(k)} - W_0^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, t)$. Riešenie tejto SDR by vyzeralo nasledovne [10]:

$$Y_t = Y_0 * e^{\left((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t^{(k)}\right)} \tag{3.12}$$

Podľa toho ako je nastavené portfólio – konzervatívne alebo rizikovo – budú závisieť parametre μ a σ. Pri modelovaní ich budeme kalibrovať podľa historických dát dlhopisových a indexových fondov zo slovenských DSS, čo bude v našom prípade predstavovať konzervatívne resp. rizikové portfólio.

3.4 Stochastické úrokové miery

Úrokové miery nás zaujímajú hlavne z dôvodu, že sú používané životnými poisťovňami pri výpočte ceny doživotnej anuity. V našej práci stochastické úrokové miery modelujeme pomocou Cox-Ingersoll-Ross (CIR) modelu pre krátkodobé úrokové miery. Je to model na simulovanie pohybu úrokových mier. Hlavným rozdielom medzi CIR a Vašíčkovým modelom je schopnosť rátať aj so zápornými úrokovými mierami. Kým CIR model umožňuje iba kladné úrokové miery kvôli členu pod odmocninou, Vašíčkov rieši aj záporné. CIR model v tvare stochastickej diferenciálnej rovnice je v [7] definovaný ako:

$$dr_t = \kappa\left(\theta - r_t\right)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{(l)} \quad t \geq 0 \tag{3.13}$$

kde r_t je krátkodobá úroková miera, θ je dlhodobý priemer úrokových mier, κ predstavuje rýchlosť akou sa úrokové miery približujú k dlhodobému priemeru, ω je volatilita úrokovej miery, $W_t^{(l)}$ je Geometrický Brownov pohyb, pričom $W_t^{(k)}$ a $W_t^{(l)}$ sú navzájom nezávislé a $2\kappa\theta > \omega^2$. Stochastickú diferenciálnu rovnicu (3.13) je možné riešiť aj explicitne. Náhodná premenná r_t má podľa [7] definovanú hustotu ako:

$$f\left(t, r_t \mid r_0\right) = ce^{-u-v}\left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q\left(2(uv)^{1/2}\right) \tag{3.14}$$

kde r_0 je krátkodobá úroková miera v čase 0,

$$c = \frac{2\kappa}{\sigma^2\left(1 - e^{-\kappa t}\right)}, \quad u = cr_0e^{-\kappa t}, \quad v = cr_t, \quad q = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} - 1$$

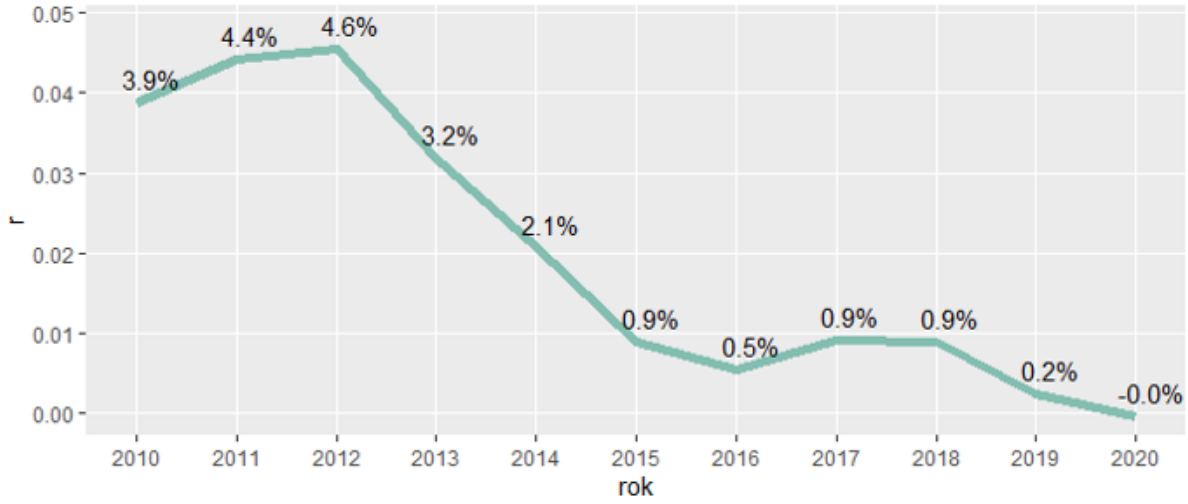
a I_q je modifikovaná Besselová funkcia druhého druhu rádu q:

$$I_q(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k!\Gamma(q+k+1)},$$

kde Γ je Gamma funkcia.

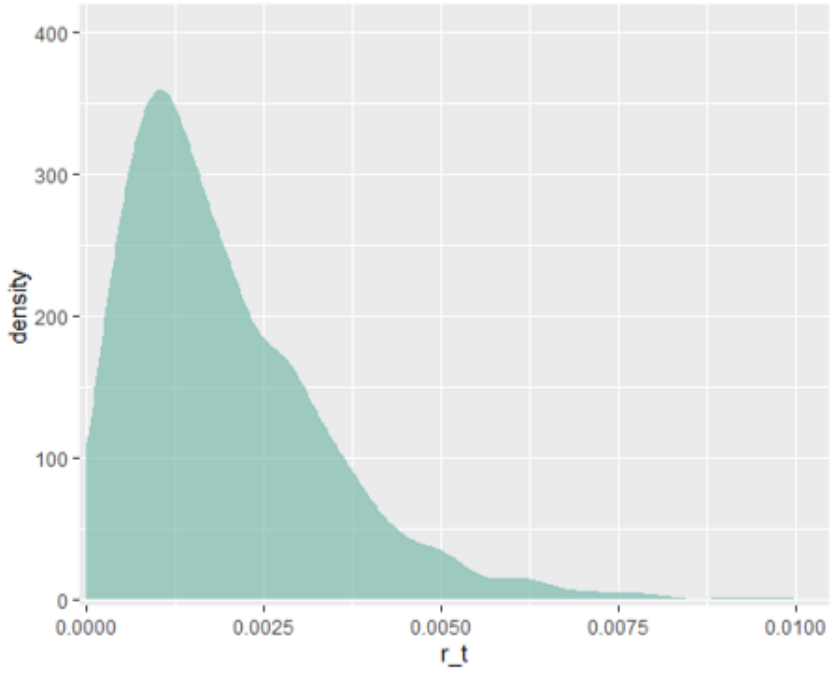
Parametre CIR modelu sme nakalibrovali podľa [8], v ktorej autor odhadol tieto parametre na základe historických dát úrokovej miery na Slovensku. Krátkodobá úroková miera na Slovensku v horizonte 2010-2020 je zobrazená na Obr. 5. Hodnoty takto odhadnutých parametrov pre CIR model sú nasledovné:

$$\hat{\theta} = 0,00321477; \hat{\kappa} = 0,10401951; \hat{\sigma} = 0,01943799$$



Obr. 5: Vývoj krátkodobej úrokovej miery na Slovensku
(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

Počiatočnú hodnotu úrokovej miery sme volili $r_0 = 0$. Vo výpočtoch sme úrokové miery odhadovali ročne (p.a.). Využívali sme jednu náhodnú realizáciu pre každú simuláciu výpočtu ceny jednej jednotky anuity. Na modelovanie predikcií pohybu úrokových mier sme použili funkciu *sde.sim* z knižnice *sde*. Je to všeobecné rozhranie pre modelovanie simulácií stochastických diferenciálnych rovníc a jedným z mnohých integrovaných modelov je práve CIR model. Hustota simulovaných úrokových mier r_t pri vyššie uvedených hodnotách modelu je znázornená na Obr. 6. Ako môžeme pozorovať pri danom nakalibrovaní modelu, hustota náhodných realizácií hodnôt r_t v čase $t = 10$ a 1000 simuláciách pripomína χ^2 rozdelenie. To nám potvrdzuje správnosť nastavenia simulácií, keďže podľa diela [4] má distribučná funkcia CIR modelu skutočne χ^2 rozdelenie.



Obr. 6: Hustota simulácií CIR modelu s parametrami z [6], pre $t = 10$

(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

4 Alternatívy nákupu doživotnej anuity

4.1 Odklad kúpy anuity

Jedným zo spôsobov ako ovplyvniť výšku doživotnej anuity je odklad jej nákupu. Vo výpočtoch jej ceny v Tab. 2, 3 a 4 vidieť, že s narastajúcim vekom cena klesá. Preto by sme mohli niekoľkoročným odkladom kúpy anuity docieliť jej nižšiu nákupnú cenu. Pri tejto alternatívnej stratégii sporiteľ svoje nasporené prostriedky naďalej investuje v investičnom fonde s tým, že z neho bude pravidelne poberať takú sumu, aká mu bola ponúknutá životnou poisťovňou v ponukovom liste pri získaní nároku na poberanie dôchodku z druhého piliera. Túto sumu bude poberať dovtedy, kým sa mu nenaskytne príležitosť kúpiť si anuitu za lepšiu cenu. Takýto odklad môže zlyhať na nepriaznivom vývoji úrokových mier, ktorý by mohol spôsobiť, že cena jednotky anuity v budúcnosti namiesto očakávaného poklesu stúpne alebo môže zlyhať na nepriaznivom vývoji investičných výnosov, kedy by jednotlivec prišiel o časť svojich úspor.

Motivácia odkladu nákupu anuity záleží od jednotlivca. Pokiaľ bude pravdepodobnosť úspešného odkladu anuity dostatočne vysoká, jednotlivec sa môže rozhodnúť odložiť nákup anuity s tým, že podstúpi riziko neúspešnosti odkladu anuity, čo bude predstavovať pravdepodobnosť: 1−pravdepodobnosť úspešného odkladu.

Modelujeme stratégiu, kde má jednotlivec pri dosiahnutí dôchodkového veku nasporené také množstvo prostriedkov, že mu je umožnené ich všetky vybrať a zaobchádzať s nimi podľa svojho uváženia. To sa momentálne dá dosiahnuť pomocou programového výberu. V tom prípade sa rozhodne nevyužiť žiadnu ponuku nákupu anuity od životnej poisťovne. Bude nás zaujímať modifikovaný model investičných výnosov vyjadrený pomocou SDR:

$$dY_t = (\mu Y_t - c_x^y)\,dt + \sigma Y_t dW_t^{(k)}, \qquad t \geq 0, \quad Y_0 = y \tag{4.1}$$

kde c_x^y predstavuje výšku ročnej anuity vypočítanú pre sporiteľa s vekom x, z počiatočnej hodnoty portfólia y. Táto SDR predstavuje pohyby investičných výnosov s pravidelným ročným výberom. Podobne ako v rovnici (3.11), riešením (4.1) podľa [10] dostaneme:

$$Y_t = e^{\left((\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t^{(k)}\right)}\left(y - c_x^y \int e^{-\left((\mu-\sigma^2/2)s+\sigma W_s^{(k)}\right)} ds\right) \tag{4.2}$$

Následne vyjadríme pravdepodobnosť, že budúca hodnota portfólia Y_{x+t} bude väčšia alebo

rovná ponúknutej anuite c_x^y, prenásobenej budúcou cenou jednotky anuity $\ddot{a}_{x+t}$:

$$P\left[Y_{x+t} \geq c_x^y \ddot{a}_{x+t}\right], \tag{4.3}$$

pričom $c_x^y \ddot{a}_{x+t}$ predstavuje teoretickú hodnotu portfólia vypočítanú prostredníctvom ponúknutej anuity c_x^y v čase odchodu do dôchodku a predikovanej ceny jednotky anuity $\ddot{a}_{x+t}$ v budúcnosti. Napokon t je počet rokov, o ktoré sporiteľ posunie nákup doživotnej anuity po dosiahnutí dôchodkového veku x.

Ako nadstavbu výpočtu môžeme dodatočne určiť pravdepodobnosť, že výška budúcej anuity $\frac{Y_{x+t}}{\ddot{a}_{x+t}}$ bude vyššia, ako h - násobok ponúknutej anuity c_x^y v čase dosiahnutia dôchodkového veku x. Matematicky vyjadrené:

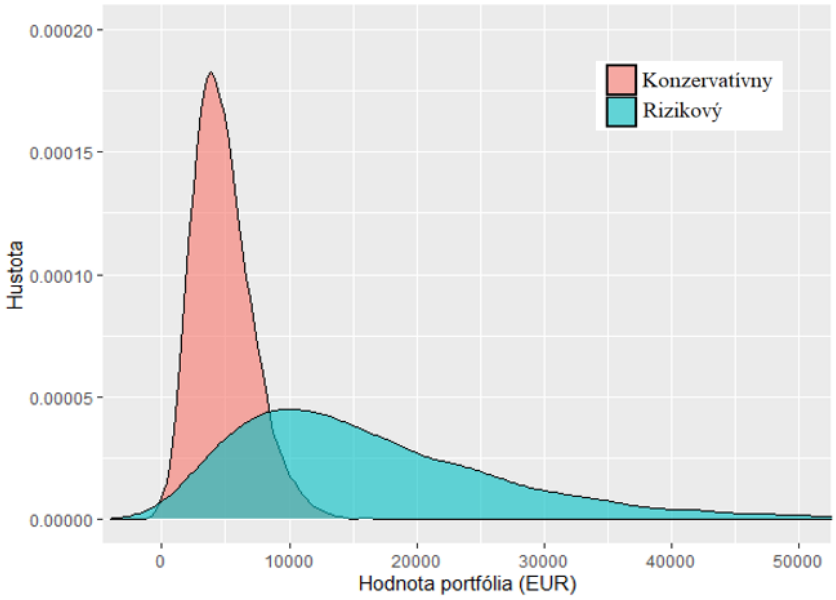
$$P\left[\frac{Y_{x+t}}{\ddot{a}_{x+t}} \geq h c_x^y\right] \tag{4.4}$$

Pre čo najväčšiu presnosť výpočtu realizujeme 10000 simulácií. Na začiatok predpokladáme, že počiatočná hodnota portfólia jednotlivca $Y_0 = y = 10000$ EUR, a $h = 1$. Počiatočná hodnota portfólia však neovplyvňuje výsledné pravdepodobnosti, iba výšku vyplácanej anuity. Uvedená hodnota y je preto len ilustračná. Simulovanie takejto pravdepodobnosti robíme pre dva typy portfólia: konzervatívne a rizikové. Hodnoty parametrov oboch portfólií, ktoré sme využili v našich výpočtoch pre modelovanie investičných výnosov reprezentovaného vzťahom (4.1) sú vyjadrené v Tab. 5. Tieto hodnoty sme odhadli pomocou historických dát priemerných výnosov dôchodkových fondov na Slovensku, ktoré sú dostupné na stránke [6].

Typ portfólia	μ	σ
Konzervativne	2,03%	7,8%
Rizikové	9,97%	16%

Tabuľka 5: Hodnoty parametrov portfólií pre modelovanie investičných výnosov
(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe dát z [6]

Obr. 7 nám znázorňuje hustotu nadobudnutých hodnôt Y_t pri konzervatívnom a rizikovom type fondu vo veku sporiteľa $62 + t$ rokov, pričom $t = 10$. Inak povedané, zobrazuje aké hodnoty portfólia môže nadobudnúť popri vybranej stratégii v konzervatívnom a

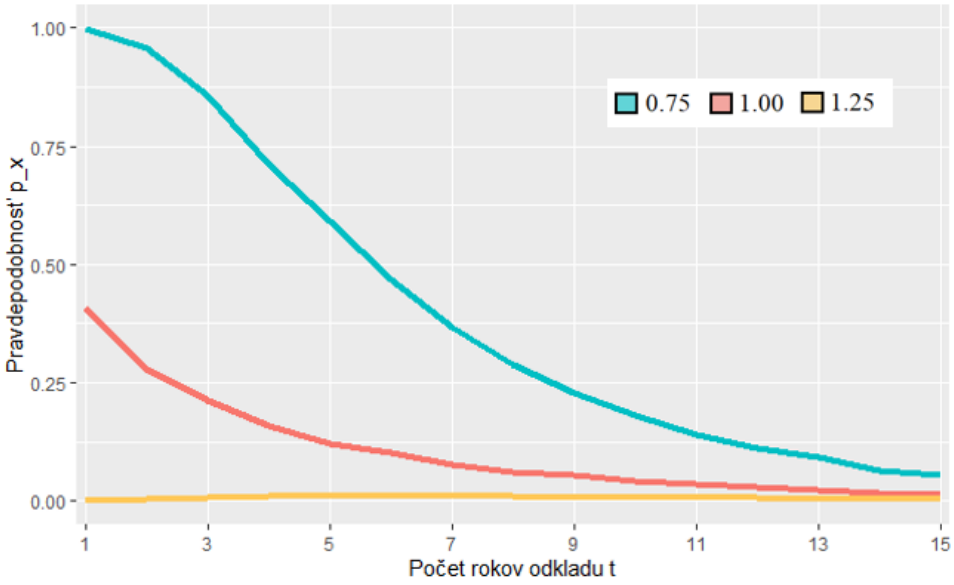


Obr. 7: Hustota simulácií SDR (4.1) pre $t = 10$ osobitne pre obidva typy portfólií
(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

rizikovom fonde o desať rokov. Môžeme si všimnúť, že interval dosiahnutých hodnôt pri konzervatívnom type fondu je výrazne menší oproti rizikovému fondu, čo je spôsobené nižším investičným výnosom μ a neistotou. Na Obr. 7 je tiež vidieť neistotu, ktorá sa prejavuje na šírke klobúka– rizikový prístup dosahuje vyššie hodnoty portfólia oproti konzervatívnemu prístupu.

Na Obr. 8 a 9 je zobrazená pravdepodobnosť, ktorá predstavuje úspešnosť odkladu anuity v závislosti od počtu rokov odkladu t. Zobrazuje akú má šancu jednotlivec, ktorý sa rozhodol k odkladu nákupu anuity, že jeho anuita v budúcnosti bude väčšia, ako ponúkaná anuita v čase, keď sa rozhodol k jej odkladu. Medzičasom však poberá pravidelnú sumu c_x^y, ktorá sa rovná výške anuity, ktorú mu v čase odkladu ($t = 0$) ponúkla životná poisťovňa. Tieto pravdepodobnosti sú vyjadrené osobitne pre rizikový a konzervatívny typ fondu. Na Obr. 8 a 9 sú tiež znázornené násobky takto predikovanej pravdepodobnosti úspechu odkladu v budúcnosti, teda akú má jednotlivec šancu, že budúca výška anuity bude h - násobne vyššia ako ponúkaná anuita v čase odkladu. Pri výpočtoch zobrazených na Obr. 8 a 9 sme rátali s poplatkami poisťovni vo výške $L_x = 0{,}01$ p.a. a predpokladli sme, že tieto poplatky sa v priebehu času nezvyšujú. Na Obr. 10 a 11 sú výstupy z jednotlivých simulácií, pri rôzne nastavenom investičnom portfóliu, rozdielnych poplatkoch L_x, rozdielnu dobu odkladu a pre rozličné násobky h. Túto pravdepodobnosť sme počítali

pre časový horizont 15 rokov.

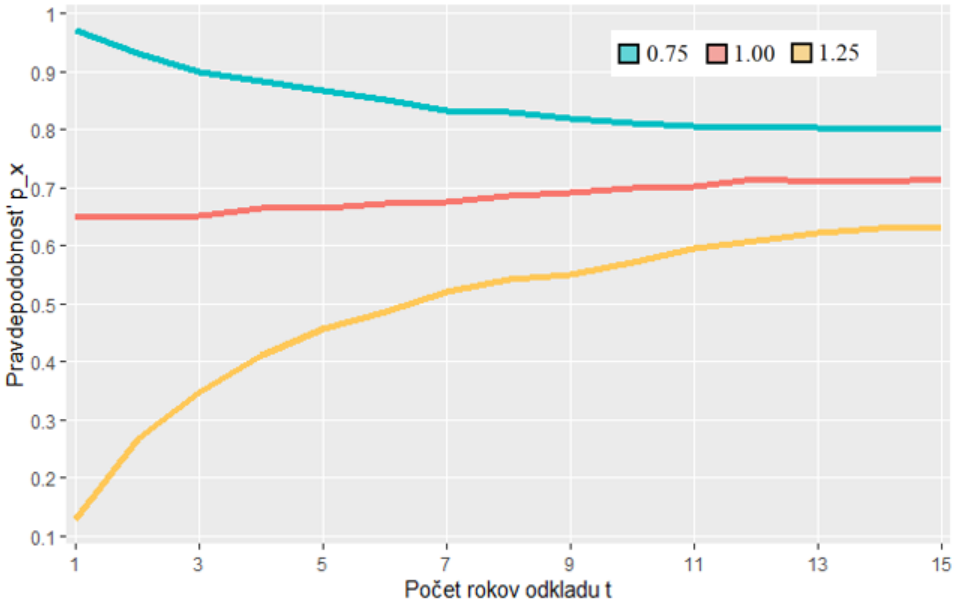


Obr. 8: Pravdepodobnosť úspešného odkladu pre jednotlivca vo veku 62 rokov, patriaceho do kohorty 1959, s poplatkami poisťovni 0.01 pre konzervatívny typ portfólia a rozličné násobky h

(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

4.1.1 Príklad odkladu kúpy anuity

Pre lepšie pochopenie týchto simulácií uvedieme príklad: 62-ročný jednotlivec o mesiac dovŕši dôchodkový vek. Obdrží ponukový list zo Sociálnej poisťovne, v ktorom sú ponuky anuít, na ktoré má nárok. Tieto anuity sú ponúkané rôznymi životnými poisťovňami, ktoré sa líšia v poplatkoch. V 62 rokoch by mu podľa Tab. 2 bola vypočítaná cena jednotky anuity pri najnižších poplatkoch $L_{62} = 0{,}01$ p.a. na úrovni $a_{62} = 15{,}87$ EUR. To by znamenalo, že za nasporených $y = 10000$ EUR by si mohol dovoliť kúpiť ročne vyplácanú doživotnú anuitu vo výške $c_x = 629{,}72$ EUR, čo by bolo $c_x^{(12)} = 52{,}47$ EUR mesačne. Jednotlivec by sa rozhodol k odkladu nákupu anuity o niekoľko rokov, za účelom možného zníženia jej ceny. Svojich 10000 EUR by si ponechal v konzervatívnom portfóliu, ktoré má parametre podľa Tab. 5. Popri tom by však zo svojich prostriedkov poberal mesačnú sumu, ktorú mu ponúkla životná poisťovňa $c_x^{(12)} = 52{,}47$ EUR. Keďže finančný trh je ovplyvnený rôznymi fluktáciami a výkyvmi, mohlo by sa stať, že by v tomto portfóliu mal negatívne výnosy. Taktiež by sa mohlo stať, že by úrokové miery klesli na veľmi nízke



Obr. 9: Pravdepodobnosť úspešného odkladu pre jednotlivca vo veku 62 rokov, patriaceho do kohorty 1959, s poplatkami poisťovni 0,01 pre rizikový typ portfólia a rozličné násobky h

(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

hodnoty – cena jednotky anuity by namiesto poklesu vzrástla (Obr. 3). Preto sme rátali pravdepodobnosť, s akou bude táto situácia voči jednotlivcovi priaznivá, a teda po odklade anuity cena jednotky anuity klesne do takej miery, že si bude môcť dovoliť minimálne takú anuitu, aká mu bola ponúknutá na začiatku.

L_{62}	a_{62}	c_x	$c_x^{(12)}$
0,01	15,87	629,72	52,47
0,05	16,50	606,06	50,50
0,10	17,29	578,40	48,20

Tabuľka 6: Odhadnuté hodnoty parametrov anuity pre rôzne poplatky L_x, v prípade že hodnota nasporených prostriedkov je $y = 10000$ EUR

(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

Z Tab. 10 vidíme, že keby sa nákup posunul o 2 roky, bola by len 27,79%-ná šanca úspešnosti zvolenej stratégie. Keby sa takýto nákup posunul o 5 rokov, pravdepodobnosť

L_{62}	h	t						
		1	2	3	4	5	10	15
0,01	0,75	99,87%	95,55%	85,45%	71,20%	59,11%	17,96%	5,54%
	1,00	40,81%	27,79%	21,34%	16,02%	12,11%	4,08%	1,27%
	1,25	0,08%	0,42%	0,81%	1,07%	1,12%	0,72%	0,44%
0,05	0,75	99,80%	96,42%	85,66%	73,82%	61,61%	20,14%	7,66%
	1,00	42,54%	30,34%	23,14%	18,29%	13,91%	5,18%	2,11%
	1,25	0,09%	0,61%	0,92%	1,09%	1,38%	1,07%	0,62%
0,10	0,75	99,84%	96,37%	86,88%	76,57%	64,52%	24,16%	8,70%
	1,00	43,33%	31,85%	24,79%	19,01%	15,70%	6,28%	2,56%
	1,25	0,05%	0,64%	1,10%	1,52%	1,38%	1,12%	0,73%

Obr. 10: Pravdepodobnosť úspešného odkladu anuity pre konzervatívne portfólio s odkladom anuity t rokov a rôzne poplatky poisťovniam L_x

(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

L_{62}	h	t						
		1	2	3	4	5	10	15
0,01	0,75	97,20%	92,73%	90,58%	87,03%	86,28%	80,80%	78,78%
	1,00	64,53%	65,06%	65,00%	65,53%	66,55%	69,13%	71,74%
	1,25	13,08%	26,83%	35,82%	40,30%	22,75%	58,29%	64,24%
0,05	0,75	97,31%	93,64%	90,66%	88,59%	86,68%	82,14%	80,94%
	1,00	65,22%	65,39%	65,82%	67,40%	68,59%	71,04%	73,55%
	1,25	13,37%	27,29%	36,99%	42,46%	45,90%	59,27%	66,44%
0,10	0,75	97,48%	94,15%	91,53%	89,43%	87,90%	84,59%	82,93%
	1,00	65,58%	67,28%	67,68%	67,49%	69,11%	72,63%	75,26%
	1,25	13,56%	28,46%	36,91%	43,33%	47,96%	61,36%	68,82%

Obr. 11: Pravdepodobnosť úspešného odkladu anuity pre rizikové portfólio s odkladom anuity t rokov a rôzne poplatky poisťovniam L_x

(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

úspechu by bola ešte menšia, a to 12,11%. Ako je možné vidieť na Obr. 8 a v Obr. 10, pri konzervatívnom prístupe s narastajúcim počtom rokov odkladu t pravdepodobnosť úspešnosti odkladu klesá pre všetky hodnoty poplatkov L_x. To sa nedá povedať o rizikovom prístupe, kde sa pri rôznom násobku správajú tieto pravdepodobnosti rozdielne. Pri $0,75$-násobku je krivka pravdepodobnosti klesajúca, na rozdiel od 1,00 a 1,25-násobku, kde pravdepodobnosť úspešnosti odkladu rastie. Výsledky sa diametrálne líšia v prípade, ak by sme naše prostriedky vložili do rizikového fondu. Vtedy je pravdepodobnosť úspešnosti

odkladu v druhom roku odkladu viac ako dvojnásobná oproti konzervatívnemu fondu, a rastie spolu s narastajúcim t.

Z dosiahnutých výsledkov môžeme konštatovať, že pokiaľ sa jednotlivec rozhodne posunúť nákup doživotnej anuity, je veľmi dôležitý ďalší spôsob investovania týchto prostriedkov. Zatiaľ čo pri konzervatívnej stratégii dosiahne maximálne 40,81% úspešnosť odkladu, pri rizikovom prístupe je táto pravdepodobnosť signifikantne vyššia vo všetkých rokoch odkladu t.

4.2 Pravdepodobnosť krachu

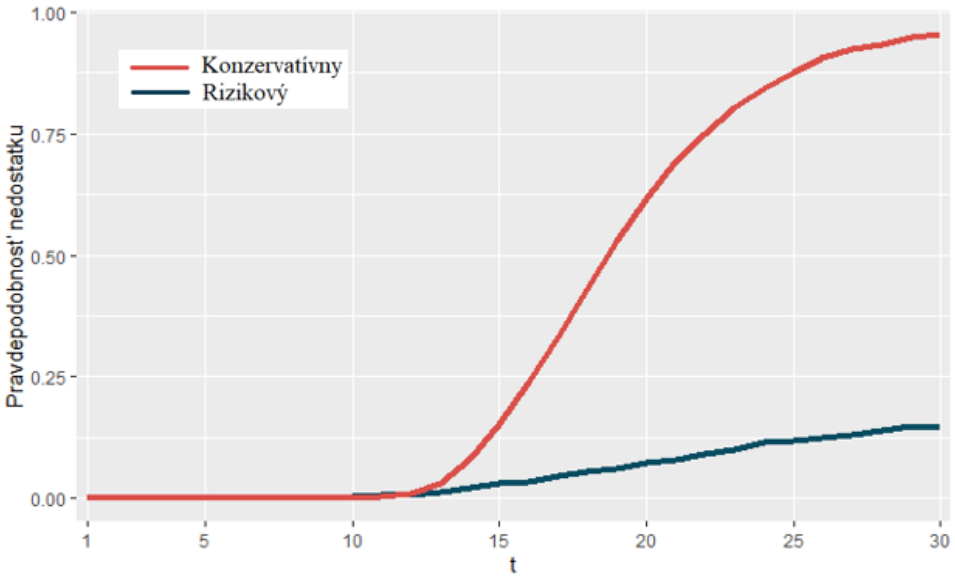
Jednou z alternatív nákupu doživotnej anuity je programový výber. Programový výber je možnosť pre jednotlivca, ktorého starobné dôchodkové zabezpečenie bez druhého piliera je aspoň v takej výške, ako je priemerný mesačný starobný dôchodok v aktuálnom kalendárnom roku. Súčet všetkých doživotne vyplácaných dôchodkov (starobný, pozostalostný, zo zahraničia, atď.) musí byť väčší ako priemerný starobný dôchodok z I. piliera. Prostriedky jednotlivca ostávajú v dôchodkovom fonde za určitých regulácii (obmedzenia na alokáciu prostriedkov v rizikových fondoch).

Modelujeme stratégiu, kde sa jednotlivcovi v pravidelných intervaloch vypláca suma, ktorá sa rovná výške anuity, ktorú mu ponúkla životná poisťovňa pri dosiahnutí dôchodkového veku. Prostriedky sa súčasne zhodnocujú v dôchodkovom fonde a jednotlivec poberá takúto výplatu až kým sa mu tieto prostriedky neminú. Pri tejto stratégii je na sporiteľa uvalené riziko dlhovekosti. V ďalších výpočtoch vyjadríme tzv. „pravdepodobnosť krachu“, čo predstavuje pravdepodobnosť, že jednotlivec ktorý využije túto stratégiu vyčerpá všetky svoje prostriedky ešte pred smrťou a nasledujúce obdobie už nebude môcť z tejto stratégie financovať svoj dôchodok. V penzijnom kontexte je pravdepodobnosť krachu doplnkom pravdepodobnosti udržateľných dôchodkových výdavkov. Matematicky vyjadrené:

$$P\left[Y_{x+t} < 0\right] \tag{4.5}$$

Programový výber sa môže podľa súčasnej legislatívy vyplácať len z dlhopisových garantovaných fondov, nakoľko má rizikový typ fondu príliš vysokú volatilitu, ktorá by mohla spôsobiť výraznú stratu prostriedkov v krátkom časovom horizonte. V našom prípade to znamená, že na naše simulácie síce použijeme hodnoty parametrov konzervatívneho aj

rizikového fondu spomenuté v Tab. 5, no rizikový fond sme brali do úvahy len kvôli teoretickému porovnaniu. Na Obr. 12 je zobrazená pravdepodobnosť krachu vo veku $62 + t$ s predpokladom, že jednotlivec odišiel do dôchodku vo veku 62 rokov. V intervale [1,12] je táto pravdepodobnosť veľmi blízka nule, a začína narastať približne v 13. roku od začiatku poberania dôchodku z tejto stratégie. Inak povedané, človek ktorý sa rozhodol využiť túto stratégiu bude mať 10 rokov od využitia tejto ponuky takmer 0%-nú šancu, že nebude mať z čoho financovať svoj dôchodok. Táto pravdepodobnosť s narastajúcim časom t rastie, a 20 rokov od využitia tejto stratégie je táto pravdepodobnosť na úrovni približne 60%. Konkrétne pravdepodobnosti sú pre vybrané t vyjadrené v Tab. 7.



Obr. 12: Pravdepodobnosť krachu pre jednotlivca vo veku 62 rokov, osobitne pre konzervatívny a rizikový fond

(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

Typ/t	<8	10	15	20	25	30
Konz.	0%	0,02%	15,13%	61,56%	87,64%	95,57%
Rizik.	0%	0,21%	2,93%	7,14%	11,88%	14,58%

Tabuľka 7: Pravdepodobnosť krachu pre konzervatívne a rizikové portfólio s odkladom anuity t rokov

(Zdroj: Vlastné spracovanie na základe simulácii v R)

Vidíme, že pri rizikovom portfóliu je pravdepodobnosť krachu výrazne nižšia než pri konzervatívnom portfóliu, čo je spôsobené hlavne vyšším očakávaným ročným výnosom v porovnaní s konzervatívnym fondom. Ak by bola jednotlivcovi ponúknutá možnosť investovať svoje prostriedky do rizikového dôchodkového fondu, pravdepodobnosť krachu by bola aj v dlhodobom horizonte veľmi malá. Keďže však môže svoje prostriedky zhodnocovať len v konzervatívnom dôchodkovom fonde, pravdepodobnosť krachu je pomerne vysoká. Preto z pohľadu budúceho zabezpečenia dôchodcu bude lepšie vyhnúť sa tejto stratégii a využiť iné ponúkané možnosti.

Záver

V našej diplomovej práci sme sa snažili poukázať na suboptimalitu okamžitého nákupu doživotnej anuity a následne sme predstavili možnosti, ktoré by sa dali využiť ako alternatíva k takémuto nákupu. V úvodnej kapitole sme predstavili fungovanie trojpilierového dôchodkového systému na Slovensku, s detailným prihliadnutím na výplatnú fázu starobného dôchodkového poistenia. Vďaka nej sme získali predstavu o tom, ako sa jednotlivec od nasporených prostriedkov na osobnom dôchodkovom účte môže dostať až k pravidelnej platbe vyplácanej do konca života. Zo všetkých možností výplaty sme sa sústredili doživotný nákup anuity. Jej výška sa budúcemu poberateľovi dôchodku môže zdať neoptimálna.

V ďalších kapitolách sme predstavili dve alternatívne stratégie, ktorými by mohol jednotlivec navýšiť svoj budúci príjem zo starobného dôchodkového poistenia. Prvou z nich bol odklad okamžitého nákupu anuity o niekoľko rokov, za účelom zníženia jej nákupnej ceny. V tomto prístupe sme využili vlastnosť, ktorá hovorí o tom, že cena anuity závisí od pravdepodobnosti úmrtia. V preklade, čím je jednotlivec starší, tým lacnejšiu anuitu môže získať. Prihliadali sme aj na náhodné faktory, ktoré by mohli ohroziť úspešnosť odkladu nákupu anuity – úrokové miery a investičné výnosy portfólia. Tieto náhodné faktory sme spolu s pravdepodobnosťou úmrtia modelovali pomocou známych stochastických modelov, ktoré sa v danej problematike bežne využívajú. Tie sme podrobne popísali a ukázali ich matematickú interpretáciu. Výstupom tohto modelovania bola pravdepodobnosť úspešného odkladu v závislosti od úrokovej miery, od zhodnotenia prostriedkov v dôchodkových fondoch a od dĺžky obdobia odkladu. Výpočty sme realizovali o niečo komplexnejšie, kedy sme zohľadňovali rôzne poplatky bankám a výber rôznych dôchodkových fondov. Následne sme ukázali túto pravdepodobnosť aj pre násobky pôvodne ponúkanej doživotnej anuity.

Druhou stratégiou bolo poberanie programového výberu v rovnakej výške ako ponúkaná doživotná anuita až dovtedy, kým sa prostriedky na osobnom dôchodkovom účte nevyčerpajú. Výstupom výpočtov tejto stratégie bola tzv. pravdepodobnosť krachu, ktorá predstavuje pravdepodobnosť, že jednotlivec nebude môcť naďalej financovať svoj dôchodok zo starobného dôchodkového poistenia z dôvodu vyčerpania prostriedkov.

Keďže s vyplácaním dôchodkov z druhého piliera sa začalo len nedávno, určite sa dá

očakávať zvýšený záujem o diskusie na túto tému. V našej práci sa nachádza dostatok priestoru, ktorý by si z hľadiska väčšej správnosti výpočtov vyžadoval nadväzný výskum. Mohlo by to byť hlavne exaktnejšie nakalibrovanie použitých modelov, alebo výber iných, zložitejších modelov. To by bolo vítané hlavne pri modelovaní úmrtnosti, keďže použitím nášho modelu sme výpočty zovšeobecnili, no každá životná poisťovňa využiva na jej výpočet vlastné komplexné metriky. Taktiež sa úrokové miery momentálne nachádzajú na minime, čo sa môže v dlhodobom merítku zmeniť. Pri ich modelovaní sme použili model, ktorý nezohľadňoval záporné úrokové miery.

Bibliografia

[1] BRISUDOVÁ, M., 2019. *Aktuárske modelovanie mier úmrtnosti vo vysokých vekoch*, Diplomová práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského. Bratislava

[2] BUGAJ, R., 2019. *Systémy dôchodkového zabezpečenia*, Bakalárska práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského. Bratislava

[3] CHAN W., LI J. S., LI J., 2014: *The CBD Mortality Indexes: Modeling and Applications*, North American Actuarial Journal, 18:1, 38-58. dostupné online: `https://uwaterloo.ca/center-of-actuarial-excellence/sites/ca.center-of-actuarial-excellence/files/uploads/files/9._paper.pdf`

[4] COX, J.C., INGERSOLL J.E., ROSS S. A. Ross: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica,vol.53, NO.2 - March, 1985, 385-407

[5] JOHN R. S., 2019: *Cox-Ingersoll-Ross model for Iner Rates*, dostupné na webe: `https://rpubs.com/RonJohn/474957`

[6] ManažérÚspor.sk: *Inštitút sporenia a investovania: Výnosnosť dôchodkových fondov*, dostupné na webe: `https://www.manazeruspor.sk/druhy-pilier/typy-fondov/indexovy`

[7] MELICHERČÍK I., 2009: *Príspevky k stochastickému modelovaniu vo financiách*, Habilitačná práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava

[8] Melicherčík I., Szucs G.: *Vplyv vybraných faktorov na zisk životnej poistovne pri doživotných dôchodkoch vyplácaných z úspor v II. dôchodkovom pilieri na Slovensku*, Forum Statisticum Slovacum 10 (6), (2014), 103-114. dostupné na webe: `http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/melichercik/papers/melichercik-szucs-clanok-FSS-VS2014.pdf`

[9] Melicherčík I., Szucs G., Vilček I.: *Investment strategies in the Funded Pillar of the Slovak Pension System*, Ekonomický časopis, 63(2), (2015), 133-151, dostupné

na webe: http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/melichercik/papers/mvs_ec.pdf

[10] MILEVSKY M. A.: *Optimal Asset Allocation Towards The End of the Life Cycle: To Annuitize or Not to Annuitize?* , The Journal of Risk and Insurance 65, No. 3 (1998), 401-426, dostupné na webe: https://www.jstor.org/stable/253657?seq=7#metadata_info_tab_contents

[11] Ministerstvo práce, sociálnych vecí a rodiny: Dôchodkový systém, dostupné na webe: https://www.employment.gov.sk/sk/socialne-poistenie-dochodkovy-system/dochodkovy-system

[12] Orlando G., Mininni R., Bufalo M.: *Interest rates calibration with a CIR model*, The Journal of Risk Finance, (2019), dostupné na webe: http://files.grouplens.org/datasets/hetrec2011/hetrec2011-lastfm-readme.txt

[13] ŠEBO J., ŠEBOVÁ Ľ., 2016: *Suboptimality of Immediate Annuitization in Private Pension Schemes*, Ekonomický časopis, 64, 2016, č. 2, s. 169 – 190

[14] Sociálna poisťovňa: *Dôchodok z II. piliera* , dostupné na webe: https://www.socpoist.sk/dochodok-z-ii-piliera-iwj/59350s

[15] Stats OECD:*Interest rates*, dostupné na webe https://stats.oecd.org/Index.aspx?DataSetCode=QASA_7II

[16] VILLEGAS, KAISHEV, MILLOSSOVICH, P. StMoMo: *An R Package for Stochastic Mortality Modelling*, dostupné na webe: https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/vignettes/StMoMoVignette.pdf

[17] Výskumné demografické centrum – Infostat: *Prierezové UT od roku 1920 až po 2018*, dostupné na webe: http://www.infostat.sk/vdc/sk/index.php?option=com_content&view=article&id=17&Itemid=66