UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



OCEŇOVANIE RIZIKOVÝCH AKTÍV ZA PRÍTOMNOSTI POMALY SA VYVÍJAJÚCICH TRENDOV OČAKÁVANÝCH VÝNOSOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2021 Bc. Michaela HUDÁČKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OCEŇOVANIE RIZIKOVÝCH AKTÍV ZA PRÍTOMNOSTI POMALY SA VYVÍJAJÚCICH TRENDOV OČAKÁVANÝCH VÝNOSOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1113 Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Pavol Povala, PhD.

Bratislava 2021 **Bc. Michaela HUDÁČKOVÁ**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Michaela Hudáčková
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Oceňovanie rizikových aktív za prítomnosti pomaly sa vyvíjajúcich trendov očakávaných výnosov
Valuation of risky assets in the presence of slow-moving trends in expected returns

Anotácia: Cieľom diplomovej práce je rozobrať oceňovanie a rizikovosť akcií za prítomnosti pomaly sa vyvíjajúcich trendov očakávaných výnosov. Tradičné oceňovanie funguje za predpokladu stacionarity pre oceňovanie miery (rizikové prémie) a reálne úrokové sadzby. Posledné empirické dôkazy tento predpoklad spochybňujú. Ako sa mení rizikovosť zásob v prípade pomaly sa vyvíjajúcich sa trendov?

Vedúci: Pavol Povala, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Dátum zadania: 17.12.2019

Dátum schválenia: 21.12.2019

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Ďakujem svojmu vedúcemu diplomovej práce Pavlovi Povalovi, PhD. za cenné rady, odbornú pomoc, usmernenie pri písaní práce a zabezpečenie študijných materiálov. Taktiež ďakujem svojej rodine, priateľovi a priateľom za morálnu podporu a trpezlivosť pri písaní diplomovej práce.

Abstrakt v štátnom jazyku

HUDÁČKOVÁ, Michaela: Oceňovanie rizikových aktív za prítomnosti pomaly sa vyvíjajúcich trendov očakávaných výnosov [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Pavol Povala, PhD., Bratislava, 2021, 90s.

Cieľom našej diplomovej práce bolo skúmať oceňovanie a rizikovosť akcií za prítomnosti pomaly sa vyvíjajúcich trendov očakávaných výnosov. V prvej kapitole sme opísali, prečo je dôležité sa zaoberať touto témou, doterajšie výsledky štúdií oceňovania aktív a dekompozíciu výnosov aktív. V nasledujúcej kapitole sme zadefinovali prirodzenú úrokovú mieru, jej makroekonomické základy, faktory, ktoré ovplyvňujú jej zmeny a popísali jeden z najpoužívanejších odhadov prirodzenej úrokovej miery. V tretej kapitole sme popísali vzťah medzi prirodzenou úrokovou mierou a rastom potenciálneho HDP. Rovnako sme kvantifikovali množstvo zmien v oceňovacom pomere - cyklicky upravenom pomere ceny akcie k zisku, ktoré vieme vysvetliť pomocou makroekonomických premenných. V štvrtej kapitole sme analyzovali zmeny v pomere ceny akcie k dividende pomocou makroekonomických premenných. Tiež sme pomocou makroekonomických premenných odhadli pomer ceny akcie k dividende. V poslednej kapitole sme prediskutovali dôsledky perzistentných zmien pre ceny aktív. Zistili sme, že najviac zmien v oceňovacích pomeroch vedeli vysvetliť zmeny v očakávaných výnosoch, pričom zohľadnenie zmien v prirodzenej úrokovej miere bolo dôležité hlavne v posledných dvoch desaťročiach.

Kľúčové slová: Oceňovanie aktív, Rizikovosť, Prirodzená úroková miera, Očakávané výnosy, Pomaly sa vyvíjajúce trendy

Abstract

HUDÁČKOVÁ, Michaela: Valuation of risky assets in the presence of slow-moving trends in expected returns [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Pavol Povala, PhD., Bratislava, 2021, 90p.

The aim of our thesis was to examine the valuation and riskiness of stocks in the presence of slow-moving trends in expected returns. In the first chapter, we presented why it is important to deal with this topic, the results of studies up to now in the valuation of assets and the decomposition of asset returns. In the following chapter, we defined the natural rate of interest, its macroeconomic fundamentals, the factors that influence its changes and described one of the most used estimates of the natural rate of interest. In the third chapter, we described the relationship between the natural rate of interest and potential GDP growth. We also quantified the amount of changes in the valuation ratio - the cyclically adjusted price-earnings ratio, we can explain by using macroeconomic variables. In the fourth chapter, we analyzed changes in the price-dividend ratio by using macroeconomic variables. We also estimated price-dividend ratio by using macroeconomic variables. In the last chapter, we discussed the implications of persistent changes in asset prices. We found that most changes in valuation ratios were able to explain the changes in expected returns, whereby changes in the natural rate of interest were important especially in the last two decades.

Keywords: Valuation of assets, Riskiness, Natural rate of interest, Expected returns, Slow-moving trends

Obsah

Úvod **8**

1 Úvod do oceňovania aktív **10**

1.1 Motivácia a prehľad literatúry 10

1.2 Dekompozícia výnosov aktív 16

2 Rovnovážna úroková miera **20**

2.1 Definícia rovnovážnej úrokovej miery 20

2.2 Makroekonomické základy rovnovážnej úrokovej miery 21

2.3 Odhad rovnovážnej úrokovej miery 23

3 Empirická analýza **26**

3.1 Vzťah medzi rovnovážnou úrokovou mierou a rastom potenciálneho HDP . 26

3.2 Cyklicky upravený pomer ceny akcie k zisku (CAPE) 30

3.2.1 Korelačná a regresná analýza 31

3.2.2 Aktuálne a fitované CAPE pomocou regresného modelu 33

3.2.3 Výsledky iných štúdií 34

4 Pomer ceny akcie k dividende **37**

4.1 Empirická analýza pomeru ceny akcie k dividende 37

4.1.1 Korelačná a regresná analýza 37

4.1.2 Aktuálne a fitované PD pomocou regresného modelu 39

4.2 Odhad pomeru ceny akcie k dividende 41

4.2.1 Výsledky 42

4.2.2 Ustálený stav pomeru ceny akcie k dividende 43

5 Dôsledky perzistentných zmien **45**

5.1 Zosumarizovanie výsledkov 45

5.2 Očakávané výnosy 45

5.3 Trh dlhopisov a trh akcií 46

Záver **49**

Zoznam použitej literatúry **51**

Príloha A **57**

Príloha B **60**

Príloha C **64**

Príloha D **68**

Príloha E **69**

Úvod

Oceňovanie rizikových aktív je jednou z dôležitých tém na trhu akcií a dlhopisov. Hlavne akcie sú považované za rizikové aktíva, pretože na jednej strane môžu dosiahnuť vyšší výnos ako bezpečné aktíva, ale na druhej strane s vyšším výnosom je spojené aj vyššie riziko kvôli ich vyššej miere volatility. Investor pri investovaní musí zvážiť množstvo faktorov pri výbere portfólia, či je to jeho vek, osobné preferencie, averzia voči riziku a pod. Dôležitú úlohu rovnako zohráva aj správne ocenenie aktív, hlavne v poslednom desaťročí, kedy rôzne štúdie pripúšťajú nestacionaritu úrokových mier, čo značne ovplyvňuje oceňovanie.

Za účinné prediktory výnosov mnoho autorov považuje finančné ukazovatele, resp. oceňovacie pomery (pomer ceny akcie k dividende, pomer ceny akcie k zisku a pod.). Prvé dôkazy, že ceny akcií sa hýbu viac ako ich očakávané dividendy, naznačil R. Shiller v roku 1981. Tento dôkaz napovedá o pohybe diskontných mier v čase. Perzistentný nárast vo finančných ukazovateľoch a pomerne stabilná miera rastu dividend naznačujú, že vysvetlením môže byť pokles v očakávaných výnosoch. Očakávané výnosy sa delia na bezrizikovú úrokovú mieru a rizikovú prirážku. Autori [31] sa zamerali na zmeny v rizikovej prirážke, pričom predpokladali stacionaritu bezrizikovej úrokovej miery. Pokles vo výnosoch sa netýkal len akcií, ale aj dlhopisov. Časť poklesu vysvetlili [5] pomocou poklesu dlhodobých očakávaní inflácie, zvyšok ostal nevysvetlený. Posledné štúdie [34], [2] naznačujú dôležitosť zahrnutia zmien v bezrizikovej úrokovej miere, hlavne v poslednom desaťročí. V tejto diplomovej práci rozoberieme oceňovanie a rizikovosť akcií pri zohľadnení zmien v rizikovej prirážke aj bezrizikovej úrokovej miere.

Našu diplomovú prácu sme rozdelili do piatich kapitol. V prvej kapitole popíšeme motiváciu, prečo je táto téma dôležitá, prehľad literatúry oceňovania aktív, pričom sa hlavne zameriame na vývoj v poslednom desaťročí a dekompozíciu výnosov aktív. V druhej kapitole popíšeme prirodzenú úrokovú mieru ako jeden z možných odhadov reálnej úrokovej miery. Zadefinujeme prirodzenú úrokovú mieru, bližšie rozoberieme jej makroekonomické základy a popíšeme jeden z najznámejších odhadov tejto miery, ktorý aj my budeme využívať v tejto práci.

Tretiu kapitolu začneme prediskutovaním vzťahu medzi prirodzenou úrokovou mierou a rastom potenciálneho HDP. Tieto makroekonomické premenné spolu s rizikovou prirážkou budú tvoriť základ empirickej analýzy. Cieľom diplomovej práce je rozobrať

oceňovanie akcií za prítomnosti pomaly sa vyvíjajúcich trendov očakávaných výnosoch. V druhej časti tejto kapitoly analyzujeme vplyv trendov v očakávaných výnosoch pomocou regresnej a korelačnej analýzy na oceňovaciu metriku - cyklicky upravený pomer ceny akcie k zisku.

V štvrtej kapitole budeme analyzovať vplyv trendov očakávaných výnosov na druhú, často používanú metriku, a to pomer ceny akcie k dividende. Rovnako sa budeme snažiť odhadnúť tento oceňovací pomer pomocou makroekonomických premenných.

V piatej kapitole popíšeme dôsledky perzistentných zmien v oceňovacích pomeroch. Zosumarizuje získané výsledky, rozoberieme dôsledky pre očakávané výnosy a budeme diskutovať o vplyve týchto zmien pre trh akcií, dlhopisov a rizikovosť aktív, keďže to je ďalší cieľ tejto práce.

1 Úvod do oceňovania aktív

Oceňovanie aktív je jednou z kľúčových oblastí finančnej ekonómie. Oceňovanie aktív zahŕňa formovanie očakávaní o budúcich peňažných tokoch daného aktíva ako aj výber vhodnej diskontnej sadzby. Častokrát dochádza k chybám pri tomto oceňovaní zo strany investorov, čo vedie k výberu neoptimálneho portfólia a následným stratám. Historicky sa relatívne málo pozornosti venovalo perzistentným zmenám v diskontných sadzbách, hlavne v reálnej úrokovej sadzbe. Zohľadnenie týchto perzistentných zmien v očakávaných výnosoch pri oceňovaní aktív je predmetom tejto diplomovej práce.

V tejto úvodnej kapitole sa bližšie pozrieme na históriu a vývoj oceňovania aktív až do súčasnosti. V prvej časti vytvoríme prehľad literatúry oceňovania aktív, pričom sa zameriame na dôležitosť perzistentných zmien v úrokových sadzbách. Hlavne v poslednom desaťročí nastali zmeny, ktoré ovplyvnia celý trh s aktívami. V druhej časti popíšeme dekompozíciu výnosov aktív, ktorá je dôležitou súčasťou pri oceňovaní aktív.

1.1 Motivácia a prehľad literatúry

Až donedávna sme si mysleli, že žijeme v stacionárnom svete, kde síce nastali šoky, ktoré spôsobili pokles, ale z dlhodobého hľadiska sa hodnoty pohybovali okolo svojej strednej hodnoty. Stacionaritu delíme na silnú stacionaritu a slabú stacionaritu.

Definícia 1.1. *(podľa [39])*
Náhodný proces $\{x_t, t \in T\}$ *spĺňa podmienku silnej stacionarity, ak jeho združená distribučná funkcia sa nemení pri posune v čase. Slabú stacionaritu spĺňa, ak*

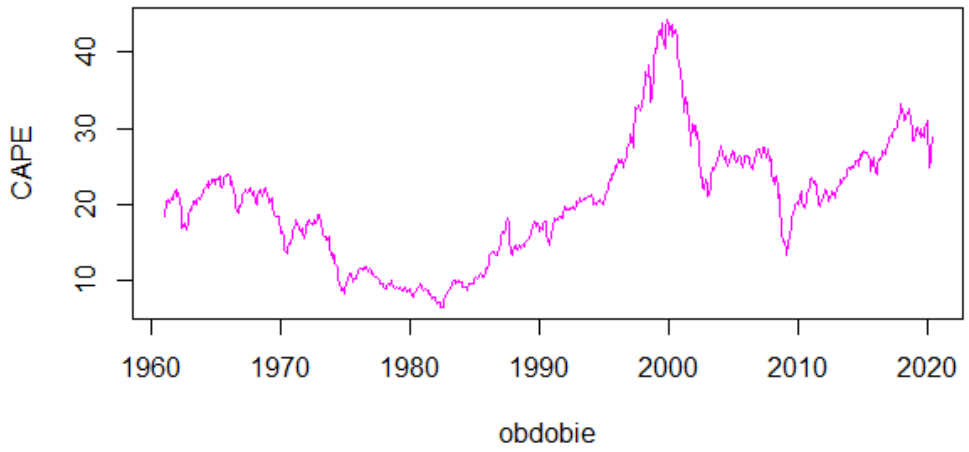
$$E(x_t) = \mu \quad pre \quad \forall t$$
$$cov(x_t, x_s) = \gamma(|t-s|) \quad \forall t, s,$$

z čoho vyplýva, že $D(x_t) = konšt.$ *pre* $\forall t$*. Inak povedané, dáta sú priťahované k určitej rovnovážnej hodnote, okolo ktorej oscilujú.*

Posledné štúdie naznačujú porušenie podmienky stacionarity. Zmeny môžeme pozorovať napr. na krátkodobých úrokových sadzbách, ktoré boli považované za konštantné, no v posledných rokoch sa začali hýbať. Podobné pohyby vidíme aj pri dlhodobých úrokových sadzbách, pričom doteraz sa očakávalo, že budú konštantné. Porušenie podmienky

stacionarity sa ukázalo pri finančných ukazovateľoch, ako je napr. pomer dividendy k cene akcie [3].

V klasickom Gordonovom modeli rastu bola diskontná miera považovaná za konštantnú. V roku 1981 R. Shiller zachytil prvé dôkazy, že ceny akcií sa hýbu viac ako to naznačujú ich očakávané dividendy, čo značí pohyb diskontných mier v čase. Zmeny v očakávaných výnosoch implikujú predikovateľnosť výnosov. Ako účinné prediktory sa ukázali finančné ukazovatele. Jeden z hlavných prediktorov, ktorý použilo mnoho autorov je pomer dividendy k cene akcie. Pri týchto predikciách autori predpokladali stacionaritu prediktora [27].

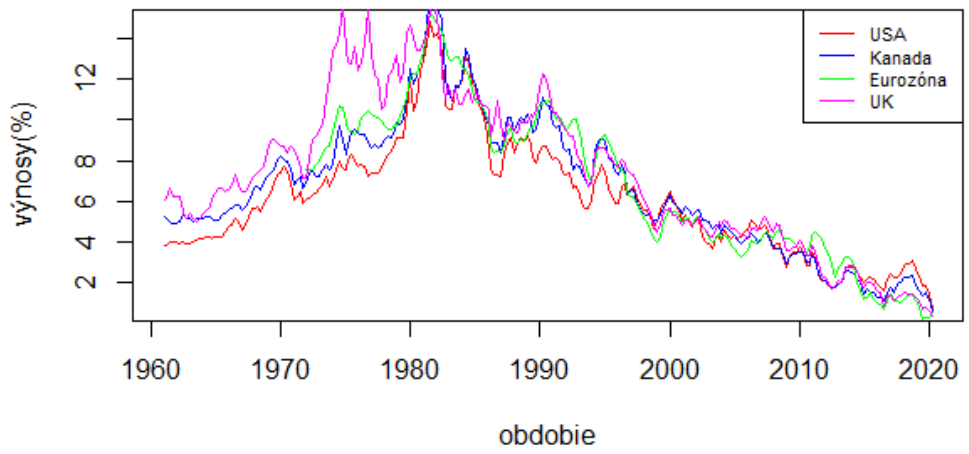


Obr. 1: Cyklicky upravený pomer ceny k zisku - CAPE. (zdroj: vlastné spracovanie na základe [37])

Na obrázku č.1 môžeme vidieť jednu z oceňovacích metrík pre americký index S&P 500 - cyklicky upravený pomer ceny akcie k zisku. Túto oceňovaciu metriku zaviedli pôvodne J. Campbell a R. Shiller. Ide o pomer reálnej hodnoty indexu S&P 500 a reálnych ziskov spoločnosti v indexe, ktoré sú spriemerované za posledných desať rokov, resp. ide o pomer, ktorý je upravený o infláciu [30]. Na príklade tohto finančného ukazovateľa môžeme vidieť, že od globálnej finančnej krízy v roku 2008 má stúpajúci trend a jeho dlhodobá stredná hodnota sa zvýšila. Tento stúpajúci trend vo finančných ukazovateľoch naznačuje zvýšenie cien akcií a možné nadhodnotenie trhu. Podobný stúpajúci trend vykazujú aj iné finančné

ukazovatele.

Keďže nastal trvalý nárast vo finančných ukazovateľoch a miera rastu dividend ostala pomerne stacionárna, možným vysvetlením je pokles v očakávaných výnosoch [34]. Má to za následok perzistenciu finančných ukazovateľov, pretože len malé zmeny vo výnosoch môžu mať veľký vplyv na dané ukazovatele [31]. Perzistentný je definovaný ako *„existujúci dlho alebo dlhšie než je zvyčajné, alebo existujúci nepretržite“* [33].



Obr. 2: Výnosy 10-ročných štátnych dlhopisov. (zdroj: vlastné spracovanie na základe [11])

Pokles vo výnosoch pozorujeme nielen pri akciách, ale aj vo výnosoch dlhopisov. Na obrázku č.2 môžeme vidieť výnosy 10-ročných štátnych dlhopisov pre štyri regióny: USA, Kanadu, Eurozónu a Veľkú Britániu. Môžeme si všimnúť, že nastal trvalý pokles vo výnosoch dlhopisov. Časť poklesu vieme vysvetliť poklesom v dlhodobých očakávaniach inflácie a časť ostávala až donedávna nevysvetlená. Spoločné pohyby výnosov vo všetkých štyroch nami pozorovaných regiónoch naznačujú, že ide o pokles na globálnej úrovni. Toto zistenie upriamuje pozornosť na zohľadnenie globálnych faktorov pri analýzach jednotlivých krajín. Dôležité je pozrieť sa aj na veľkosť dlhopisových trhov v týchto oblastiach a ich vplyv na globálne HDP. Svetové HDP v roku 2020 predstavovalo približne 83.84 triliónov amerických dolárov, pričom nami spomínané štyri oblasti tvoria až 45.04% celkového HDP. Najväčší podiel na svetovom HDP má USA, tvorí 24.82% (20.81 triliónov amerických dolárov) [24], [25]. Veľkosť svetového dlhopisového trhu v roku 2020 predsta-

voval 128.3 triliónov amerických dolárov. Vidíme, že trh dlhopisov prevyšoval globálne HDP. Tento rozdiel spôsobila aj kríza spojená s pandémiou COVID-19. Trh dlhopisov v jednotlivých regiónoch tvorí veľkú časť HDP, napr. v Eurozóne tvorí 77.6% (11.59 triliónov amerických dolárov) z celkového HDP Eurozóny [40]. Z týchto údajov vyplýva, že pokles výnosov dlhopisov má veľký dopad nielen na HDP jednotlivých regiónov, ale aj na globálne HDP.

Jedni z prvých autorov, ktorí sa zaoberali zmenami v očakávaných výnosoch akcií a úpravou modelu, aby zohľadnil tieto zmeny boli M.Lettau a S. Van Nieuwerburgh. Vo svojom článku [31] zovšeobecnili Campbell-Shiller dekompozíciu:

$$r_{t+1} - E_t[r_{t+1}] = (E_{t+1} - E_t) \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \Delta d_{t+1+j} - \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{t+1+j} \right\}, \tag{1}$$

kde Δd_t je rast dividend, r_t sú výnosy a ρ je konštanta, pričom platí $dp = log(\frac{D}{P})$ - zlogaritmovaný pomer dividendy k cene akcie.

V tejto dekompozícii pripustili časovo premenlivú zložku v ustálených stavoch očakávaných výnosov, čo implikuje ich predikovateľnosť v budúcnosti. Ukázali, že otázky typu „Čo môže byť zdrojom nestability parametra finančných ukazovateľov? Prečo finančné ukazovatele vykazujú extrémnu perzistenciu?“ môžu byť vysvetlené, ak *„vezmeme do úvahy, že ustálený stav strednej hodnoty finančných ukazovateľov sa mení v čase v priebehu vzorky. Tieto zmeny môžu byť dôsledkom zmien v ustálenom stave miere rastu ekonomických ukazovateľov, ktoré pochádzajú z permanentných technologických inovácii a/alebo zo zmien v očakávaných výnosoch, ktoré sú spôsobené napr. zlepšením podielu rizika, zmenami v účasti akciového trhu, zmenami v daniach alebo nižšou makroekonomickou volatilitou“* [31]. Perzistencia vo finančných ukazovateľoch spôsobuje, že predikcie sú silnejšie na dlhších časových horizontoch. Rovnako identifikovali pomaly sa pohybujúce faktory v týchto výnosoch, ktoré sú hlavným zdrojom rizika akcií [31].

Skúmali vplyv štrukturálnych zlomov z dvoch pohľadov. Z pohľadu ekonometra, ktorý má prístup k celej vzorke dát a z pohľadu investora, ktorý odhaduje výnosy v reálnom čase. Pri prvom spomínanom prípade potvrdili väčšiu silu predikcie výnosov akcií pomocou upraveného pomeru dividendy k cene akcie, pričom nezohľadnenie nestacionárnej zložky malo za následok výrazné skreslenie bodu odhadu. Pri miere rastu dividend sa nepotvrdila silnejšia predikcia pomocou pomeru dividendy k cene akcie. Podobné výsledky dosiahli

aj pri iných finančných ukazovateľoch, napr. pomer zisku k cene akcie, pomer vnútornej hodnoty akcie k trhovej hodnote [31]. Z pohľadu investora, upravený pomer dividendy k cene akcie v reálnom čase zaznamenal menšie chyby v predikcii oproti neupravenému pomeru, ale zachytili väčšie chyby predikcie oproti modelu náhodnej prechádzky. Tieto chyby spôsobuje neistota spojená s odhadom veľkosti zlomu, pretože ak zlom nastal ku koncu vzorky, ktorú má investor k dispozícii, stredná hodnota sa odhaduje z malého počtu dát, čo môže spôsobiť značnú neistotu [31]. Z ich výsledkov vyplýva, že zohľadnenie štrukturálnych zlomov odstraňuje nestacionárnu zložku vo finančných ukazovateľoch, zlepšuje predikovanie výnosov a skvalitňuje oceňovanie aktív.

V roku 2008 v období globálnej finančnej krízy nastal šok, ktorý spôsobil, že úrokové sadzby klesli a dodnes žijeme v prostredí nízkych úrokových sadzieb. V [31] predpokladali, že bezriziková úroková miera je konštantná a teda zmeny v očakávaných výnosoch mohla spôsobiť len riziková prirážka. D. Monache, I. Petrella a F. Venditti [34], nadviazali na článok M.Lettau a S. Van Nieuwerburgh [31], pričom skúmali vzťah medzi pomerom dividendy k cene akcie, očakávanými výnosmi, očakávaným rastom dividend, testovali nestabilitu variancie týchto premenných a zohľadnili nový poznatok o bezrizikovej úrokovej miere. Vytvorili dekompozíciu očakávaných výnosov na bezrizikovú úrokovú mieru, ktorá sa modeluje pomocou prirodzenej úrokovej miery (viac o tejto úrokovej miere v Kapitole 2) a na rizikovú prirážku. Riziková prirážka z dlhodobého hľadiska klesla len mierne a teda pokles v očakávaných výnosoch pripisujú hlavne prirodzenej úrokovej miere. Očakávané výnosy vykazovali pomaly sa pohybujúce ustálené stavy. Hypotéza konštantných variancií, ktorú predpokladali [31] bola v ich prípade zamietnutá. Na základe týchto poznatkov navrhli model, ktorý dovoľuje postupné posuny nielen v dlhodobej strednej hodnote premenných, ale aj v ich volatilite. Pripustenie týchto postupných posunov zachytáva časť perzistencie výnosov, čím sú viac predikovateľné. Predpokladanie konštantných stavov v očakávaných výnosoch by podľa autorov malo za následok nadhodnotenie predikcie výnosov. Tieto nové zistenia naznačujú spojenie medzi zvyšovaním v oceňovaní akcií a sekulárnym trendom prirodzenej úrokovej miery. *„Hlavne vo svete stálych nízkych sadzieb budú miery oceňovania perzistentne vyššie ako boli v minulosti“* [34]. Perzistentné zvýšenie v oceňovacích pomeroch môžeme pozorovať vyššie, na obrázku č.1.

Poklesom vo výnosoch štátnych dlhopisov sa zaoberali [2] a [5]. Obe tieto štúdie iden-

tifikovali dve hlavné zložky vo výnosoch. Prvou zložkou je zložka trendu, ktorá vykazuje spoločné pomaly sa pohybujúce posuny pre všetky maturity dlhopisu. Táto zložka sa skladá z trendu inflácie a rovnovážneho stavu reálnej úrokovej miery. Tieto trendy sú dôležité pri zachytení dynamiky v úrokových mierach. Druhou časťou je zložka cyklu, ktorá je viac prechodná a je špecifická pre každú maturitu. Obsahuje cyklickú časť úrokových mier a časovú prémiu. Obidve zložky vykazujú len prechodné, resp. cyklické výkyvy. Autori [5] vo svojom článku vysvetlili časť poklesu vo výnosoch štátnych dlhopisov pomocou trendu inflácie. Pri dekompozícii nominálnych výnosoch na trend inflácie, reálnu krátkodobú úrokovú mieru a rizikovú prirážku, očakávaná inflácia vykazovala vysoko perzistentnú dynamiku, čo vysvetľuje časť pohybov v očakávaných výnosoch dlhopisov. Ostatné dve zložky, riziková prirážka a reálna úroková miera, boli menej perzistentné, resp. „mean-reverting“, významne neprispievali k variancii výnosov [5]. Zvyšok poklesu ostal nevysvetlený, keďže obdobie poklesu úrokových sadzieb bolo len v začiatkoch. Pokles úrokových sadzieb zohľadnili vo svojom článku M. Bauer a G. Rudebusch [2]. Tvrdia, že hlavný determinant výnosovej krivky je nielen trend inflácie, ale aj rovnovážny stav reálnej úrokovej miery. Tieto dva trendy spôsobujú vysokú perzistenciu úrokových mier. Ich zohľadnenie je dôležité pre pochopenie dynamiky výnosov, modelovanie časových štruktúr, odhad rizikovej prirážky a predikovanie výnosov. Spojili tieto dva trendy do spoločného trendu - rovnovážneho stavu nominálnej úrokovej miery, ktorý tvorí spoločnú pomaly sa pohybujúcu zložku trendu pre nominálne krátkodobé úrokové miery rôznych maturít. Dôležitosť trendu inflácie je hlavne v skoršej časti vzorky dát, kde očakávaná inflácia klesla, ale v posledných rokoch zostala relatívne stabilná. Na vysvetlenie poklesu výnosov v posledných rokoch je potrebné vziať do úvahy rovnovážnu úrokovú mieru, ktorá zaznamenala výrazný pokles a jej zohľadnenie je veľmi dôležité. Ak sa pozrieme na dlhodobé úrokové miery, ktoré sa skladajú zo zložky očakávaní a časovej prémie, tak práve zložka očakávaní spôsobuje väčšinu sekulárného poklesu v dlhodobých úrokových mierach. Časová prémia, podobne ako riziková prirážka, klesla len mierne a vykazuje len cyklické výkyvy [2].

Z týchto štúdii vyplýva, že pripustenie zmien v rovnovážnej úrokovej miere a ich zohľadnenie pri oceňovaní aktív je veľmi dôležité hlavne v poslednom desaťročí. V opačnom prípade môže nastať nadhodnotenie aktív, ktoré môže investorov priviesť k zbytočným stratám v ich portfóliu.

1.2 Dekompozícia výnosov aktív

Jeden z prvých modelov zaviedol M. J. Gordon (1962). Gordonov model rastu je definovaný nasledovne:

$$\frac{D}{P} = r - g, \tag{2}$$

kde pomer dividendy k cene akcie sa rovná rozdielu konštantnej diskontnej miery a konštantnej miery rastu dividend [38]. Súčasná hodnota budúcich príjmov, resp. vnútorná hodnota v tomto modeli je získaná na základe budúcich tokov dividend, ktoré rastú konštantnou mierou. Tento model sa používa hlavne pre spoločnosti so stabilnou mierou rastu dividend [17].

Ako sme spomínali v úvode tejto kapitoly, výnosy aktív ovplyvňujú hlavne správy o diskontných mierach a správy o peňažných tokoch. J. Y. Campbell a R. J. Shiller (1988) odvodili dekompozíciu výnosov akcií. Táto dekompozícia je zobrazená vyššie v rovnici 1. Vychádzali z definície výnosov akcií, ktoré aproximovali pomocou prvej Taylorovej aproximácie. Podrobné odvodenie tejto dekompozície môžete nájsť v Prílohe A, [14] alebo v [6]. Táto dekompozícia ukazuje, že šoky výnosov akcií pochádzajú buď z nárastu aktuálnych dividend alebo z nárastu očakávaných budúcich dividend, alebo z poklesu očakávaných výnosov. Prvé dve zložky sa nazývajú aj efekt peňažného toku a tretia zložka sa nazýva aj efekt rizikovej prirážky. Efekt rizikovej prirážky spája rizikovú prirážku a bezrizikovú úrokovú mieru do jednej zložky, kvôli predpokladu stacionarity úrokovej miery, ktorý autori predpokladajú v tejto dekompozícii [14].

V [1] odvodili dekompozíciu výnosov dlhopisov v nasledovnom tvare:

$$\tilde{r}_{n,t+1} = (E_{t+1} - E_t)\left\{-\sum_{i=1}^{n-1} \pi_{t+1+i} - \sum_{i=1}^{n-1} r_{n-i,t+1+i}\right\} \tag{3}$$

Z tejto dekompozície výnosov dlhopisov vyplýva, že šoky výnosov dlhopisov musia byť spojené buď s poklesom v očakávanej miere inflácie (π_t) počas života dlhopisu alebo s poklesom v očakávaných reálnych výnosoch dlhopisu ($r_{n,t+1}$). Podobne ako pri akciách, očakávané reálne výnosy dlhopisu spájajú reálnu úrokovú mieru a rizikovú prirážku do jednej zložky [1].

Zadefinovaním dekompozície výnosov akcií a dlhopisov vieme aké premenné vplývajú na výnosy jednotlivých aktív. Otázka, ktorú si mnoho autorov položilo je, že ktorá z týchto

zložiek viac prispieva k volatilite, resp. či sú výnosy aktív predikovateľné. Na modelovanie závislosti medzi očakávanými výnosmi rôznych aktív, ich historickými záznamami a inými premennými sa používa vektorová autoregresia (VAR), ktorá bola zavedená makroekonometrikom Ch. Simsom v roku 1980 [16]. Ide o zovšeobecnenie jednorozmerného modelu autoregresie. Umožňuje použitie viacrozmerných časových radov. Pre predstavu VAR model môžeme zapísať v zjednodušenom tvare:

$$z_{t+1} = Az_t + \nu_{t+1}, \tag{4}$$

kde z_t predstavuje vektor stavových premenných a ν_{t+1} predstavuje vektor šokov [4].

Tento model použili J. Campbell a L. Viceira (2001) vo svojej práci [4] na zachytenie očakávaných výnosov pomocou záznamov z histórie a premenných, ktoré môžu pomôcť predikovať výnosy aktív, napr. pomer dividendy k cene akcie, nominálne úrokové miery, inflácia a podobne. Zistili, že akcie sú „mean - reverting“. Podľa [23] „mean-reverting“ môžeme definovať: *„volatilita cien aktív a historické výnosy sa nakoniec vrátia k ich dlhodobej strednej hodnote“*. Inými slovami, z dlhodobého hľadiska sú výnosy akcií menej volatilné ako ich krátkodobé výnosy. Naopak dlhopisy preukázali vlastnosť „mean-averting“. Dlhodobé výnosy dlhopisov sú viac volatilné ako ich krátkodobé výnosy. Rovnako zaznamenali slabšie predikcie výnosov v posledných rokoch [4].

M.Lettau a S. Van Nieuwerburgh [31] nadviazali na Campbell-Shiller dekompozíciu výnosov akcií. Vo svojej práci pripustili možnosť zmien ustáleného stavu miery rastu dividend a výnosov v čase. Upravili pomer dividendy k cene akcie o štrukturálne zlomy a zaviedli nasledovný model:

$$dp_t = \bar{dp}_t + E_t \sum_{j=1}^{\infty} \rho_t{}^{j-1}[(r_{t+j} - \bar{r}_t) - (\Delta d_{t+j} - \bar{d}_t)], \tag{5}$$

kde $\rho_t = (1 + \exp(\bar{dp}_t))^{-1}$ a $\bar{dp}_t = \log(\exp(\bar{r}_t) - \exp(\bar{d}_t)) - \bar{d}_t, \bar{r}_t, \bar{d}_t$ sú stredné hodnoty pomeru dividendy k cene akcie, výnosov a mier rastu dividend v čase t. Oproti iným modelom, v ktorých predpokladali, že procesy sú stabilné v čase, v tomto modeli predpokladajú nielen časovo premenlivú strednú hodnotu pomeru dividendy k cene akcie a iných finančných ukazovateľov, ale aj ich nestacionaritu. Rovnako tvrdia, že nestacionaritu vo finančných ukazovateľoch môžeme usmerňovať, ak vieme odhadnúť čas a veľkosť zlomu, pretože odchýlky finančných ukazovateľov od ich stredných hodnôt sú stacionárne. Takáto

úprava modelu by podľa nich mohla túto nestacionárnu zložku odstrániť [31]. Podrobné odvodenie dekompozície výnosov od Gordonovho modelu rastu, cez Campbell-Shiller dekompozíciu, až po úpravu M.Lettau a S. Van Nieuwerburgh môžete nájsť v Prílohe A.

D. Monache, I. Petrella a F. Venditti [34] nadväzujú na predchádzajúci článok M.Lettau a S. Van Nieuwerburgha,pričom okrem zahrnutia pomeru dividendy k cene akcie, vzali do úvahy aj očakávané výnosy, rast dividend a testovanie nestability ich variancie. Potvrdili existenciu štrukturálnych zlomov v pomere dividendy k cene akcie, ale v ostatných premenných nebola hypotéza neprítomnosti zlomov zamietnutá. Testovali aj hypotézu konštantných parametrov (strednej hodnoty a variability), pričom táto hypotéza bola zamietnutá, čo má za následok spochybnenie predpokladu konštantných variancii, ktorú predpokladali M.Lettau a S. Van Nieuwerburgh. Zaviedli flexibilnejší model, ktorý dovoľuje postupné posuny v dlhodobej strednej hodnote a volatilite.

$$E_t(\Delta d_{t+1}) = \bar{g}_{t+1|t} + \tilde{g}_{t+1|t} \tag{6}$$

$$E_t(r_{t+1}) = \bar{\mu}_{t+1|t} + \tilde{\mu}_{t+1|t} \tag{7}$$

Očakávané výnosy a očakávaný rast dividend sa skladajú z prechodnej a perzistentnej zložky. Prechodná zložka nasleduje klasický AR(1) proces.

$$\tilde{g}_{t+1} = \phi_g \tilde{g}_t + \epsilon_{g,t+1} \tag{8}$$

$$\tilde{\mu}_{t+1} = \phi_\mu \tilde{\mu}_t + \epsilon_{\mu,t+1} \tag{9}$$

Výsledkom je slabšia perzistencia v očakávanom raste dividend ako v očakávaných výnosoch, čo potvrdzuje lepšiu predikovateľnosť výnosov ako rast dividend [34].

Dekompozíciou výnosov dlhopisov sa zaoberali vo svojej práci M. Bauer a G. Rudebusch [2]. N-ročný výnos dlhopisu rozdelili na očakávania o krátkodobých mierach a časovú prémiu.

$$y_t^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} E_t i_{t+j} + TP_t^{(n)} = i_t^* + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} E_t i_{t+j}^c + TP_t^{(n)}, \tag{10}$$

kde i_t je nominálna krátkodobá miera, $TP_t^{(n)}$ je časová prémia, $i_t^* = \pi_t^* + r_t^*$ je trend krátkodobej nominálnej úrokovej miery zložený z trendu inflácie a trendu úrokovej miery,

$i_t^c = i_t - i_t^*$ je cyklus krátkodobej miery. Zmeny v i_t^* ovplyvňujú nominálne výnosy dlhopisov a ak trend krátkodobej nominálnej úrokovej miery sa mení v čase, potom výnosy dlhopisov sú nestacionárne so spoločným trendom. Zistili, že pokles vo výnosoch dlhopisov neovplyvňuje len trend inflácie, ale aj trend úrokovej miery, ktorého vplyv je dôležitý hlavne v poslednom desaťročí [2].

2 Rovnovážna úroková miera

Ako bolo spomínané už v predchádzajúcej kapitole, trendy v očakávaných výnosoch môžu byť spôsobené: trendom v rizikovej prirážke, trendom v dlhodobom očakávanom raste alebo trendom v reálnej úrokovej miere. Poslednému spomínanému trendu budeme venovať najväčšiu pozornosť v tejto diplomovej práci, keďže prirodzenou úrokovou mierou sa začali rôzne štúdie viac zaoberať až v poslednom desaťročí, kedy nastal výrazný pokles v reálnej úrokovej miere. Táto prirodzená úroková miera alebo „r-star“ poskytuje všeobecnejšie správanie reálnej úrokovej miery, ak sú odstránené prechodné šoky a iné faktory, ktoré ju môžu dočasne ovplyvniť. Nie je pozorovateľná, preto sa musia použiť odhady na jej zistenie. Ako uvádza autor článku [41] tieto odhady sú ochotní robiť, či už kvôli monetárnej politike alebo kvôli investorom na trhu, aby vedeli predikovať krátkodobé nominálne sadzby na mnoho rokov dopredu, čím investori budú môcť predpovedať výnosy dlhopisov.

V prvej časti tejto kapitoly bližšie predstavíme rovnovážnu úrokovú mieru ako jeden z možných zdrojov perzistentných zmien vo výnosoch aktív. Pozrieme sa aj na jej makroekonomické základy a faktory, ktoré ovplyvnili jej pokles. Popíšeme Holston-Laubach-Williams odhad rovnovážnej úrokovej miery.

2.1 Definícia rovnovážnej úrokovej miery

Už v roku 1898 Knut Wicksell prišiel s myšlienkou prirodzenej úrokovej miery. Táto úroková miera zohráva dôležitú úlohu v makroekonómii a monetárnej politike [20]. Aj keď začiatky rovnovážnej úrokovej miery siahajú do 19.storočia, centrálne banky začali upriamovať väčšiu pozornosť na túto sadzbu až v 90-tých rokoch 20.storočia.

Podľa klasických ekonomických modelov rovnovážna úroková miera, resp. r-star *„súvisí s mierou trpezlivosti domácnosti, ktorá ovplyvňuje ich ochotu sporiť a s očakávanou mierou rastu potenciálneho HDP, ktorý ovplyvňuje mieru výnosnosti úspor“*. Tieto modely tiež naznačujú, že *„miera rastu potenciálneho HDP určuje dlhodobú mieru rastu reálnych peňažných tokov akcií“* [30].

Autori [29] definujú r-star ako *„krátkodobú úrokovú mieru upravenú o infláciu, ktorá je v súlade s plným využitím ekonomických zdrojov a stabilnou infláciou blízko cieľovej*

úrovne centrálnej banky“.

Laubach-Williams ("LW") a Holson-Laubach-Williams ("HLW") definujú prirodzenú úrokovú mieru ako *„skutočnú krátkodobú úrokovú sadzbu, pri ktorej sa očakáva, že bude prevládať, ak ekonomika je v plnej sile a inflácia je stabilná“* [19].

Z ekonomického hľadiska rovnovážny stav reálnej miery je ekvilibrium, v ktorom sa stretne ponuka s dopytom, pričom do toho nezasahujú iné, prechodné vplyvy (napr. monetárna politika). Miera, ktorá prevláda, keď ekonomika pracuje na svojej plne udržateľnej úrovni.

2.2 Makroekonomické základy rovnovážnej úrokovej miery

Ako sme už spomínali v úvode kapitoly, hlavne v poslednom desaťročí nastal výrazný pokles v rovnovážnom stave reálnej úrokovej miery. V [34] uvádzajú tri hlavné dôvody, prečo mohol nastať tento pokles:

- *„trvalý pokles v miere rastu ekonomiky (sekulárna stagnácia)*
- *zvýšenie požadovaných úspor kvôli starnutiu populácie (šetrenie nadbytku)*
- *zvýšenie ekonomického rizika (alebo pokles v jeho tolerancii) - nedostatok bezpečných aktív.“*

Prečo práve tieto determinanty vplývajú na pokles rovnovážnej úrokovej miery? Autori článkov [28] a [21] opísali vplyv týchto faktorov na r-star.

Znižovanie ekonomického rastu má za následok pokles v rovnovážnej úrokovej miere. Pokles rastu potenciálneho výkonu ekonomiky ovplyvňuje pokles v celkovom raste produktivity a pokles v raste produktivity práce. Celkový rast produktivity ovplyvňuje miera rýchlosti šírenia technológii, pričom v posledných rokoch nastalo jej spomalenie. Jeden z možných dôvodov poklesu miery šírenia technológií je nedostatok nových firiem na trhu, ktoré nahrádzajú firmy opúšťajúce trh. Rast produktivity ovplyvňuje aj rozdelenie činnosti v jednotlivých sektoroch. Je ťažké predikovať, či sa tieto štrukturálne zmeny časom zvrátia. Veľký vplyv môže mať digitalizácia, automatizácia, umelá inteligencia, zmena podnebia a pod. Všetky tieto faktory môžu ovplyvniť rast produktivity pozitívne, ale aj negatívne [28].

Ďalším dôležitým faktorom sú demografické zmeny. Starnutie populácie, ktoré je spojené s nižšou pôrodnosťou, vyššou priemernou dĺžkou života a vyšším zaťažením populácie v produktívnom veku pri podpore dôchodcov, ovplyvňuje celý svet. Pri zachovaní konštantnej produktivity práce, pokles populácie v produktívnom veku má za následok zníženie výkonu ekonomiky, resp. HDP, čo znižuje prirodzenú úrokovú mieru. Ak si jednotlivec myslí, že v dôchodkovom veku nedostane dostatočné sociálne zabezpečenie, jeho miera úspor sa zvýši, tým sa zvýši ponuka bankových pôžičiek a zvýšenie tejto ponuky zníži r-star [21].

Na trhu aktív nastal pokles bezpečných aktív, čo spôsobuje zvýšenie ich prirážky. Pokles v bezpečných aktívach zapríčiňuje už spomínané starnutie populácie, kedy populácia v preddôchodkovom veku siaha po bezpečnejších aktív. Rovnako pokles ovplyvnila aj globálna finančná kríza a kríza v Eurozóne, kedy sa štáty rozhodli siahať po aktívach, ktoré budú mať stabilnejší výnos aj v zlých ekonomických časoch. Tieto krízy spôsobili aj zvýšenie vládneho dlhu, čím sa znížil podiel aktív s vysokým ratingom [28].

Rovnovážna úroková miera zohráva dôležitú úlohu v monetárnej politike. Predstavuje referenčnú hodnotu pri analyzovaní postoja expanzívnej menovej politiky, ak krátkodobá úroková sadzba je pod touto hodnotou a naopak analyzovanie postoja reštriktívnej menovej politiky, ak krátkodobá úroková sadzba je nad touto hodnotou [20]. Dôležitosť úlohy tejto miery je zakotvená aj v pravidlách monetárnej politiky, napr. Taylorovo pravidlo (1993), ktorého hlavným cieľom je stabilizácia inflácie a miery nezamestnanosti pomocou sadzby federálnych fondov (sadzba medzibankových pôžičiek). Pravidlo hovorí o tom, že ak je miera inflácie vyššia ako jej cieľová úroveň alebo nezamestnanosť je nižšia ako jej prirodzená miera, tak je potreba zvýšiť sadzbu federálnych fondov a naopak. Ak sú nezamestnanosť a inflácia stabilné, v takomto prípade sa sadzba federálnych fondov nastaví na úroveň rovnovážnej úrokovej miery [22].

Pokles r-star je veľkou výzvou pre centrálne banky, kedy menová politika bude častejšie narážať na nulovú spodnú hranicu a nebude vedieť efektívne reagovať na zmeny trhu. V takomto prípade konvenčné menová politika už nie je účinná, existuje možnosť držby hotovosti s nulovým výnosom, čo obmedzuje centrálne banky znižovať úrokové sadzby hlboko pod nulu [13]. Vtedy je potrebné obrátiť sa napr. na nekonvenčné menové nástroje. Pri globálnej finančnej kríze v roku 2008 použili centrálne banky kvantitatívne uvoľňo-

vanie, keď pomocou nákupu štátnych dlhopisov, finančných aktív, dokázali znížiť úroky na požadovanú úroveň. Samozrejme k poklesu prispeli aj iné nástroje, napr. „forward guidance“ [22]. Ukazuje sa, že tieto nekonvenčné nástroje najlepšie fungujú počas akútnej fázy krízy, pričom počas fázy obnovy už nie sú tak efektívne [13].

2.3 Odhad rovnovážnej úrokovej miery

V tejto časti budeme vychádzať hlavne z [20].

V tejto diplomovej práci budeme používať odhad Holston-Laubach-Williams (2017) [20], keďže úlohou diplomovej práce nie je nájsť lepší odhad, ale popísať vplyv poklesu r-star na oceňovanie aktív z pohľadu investora. Tento odhad stavia na základe odhadu Laubach-Williams (2003). Prvotný odhad Laubach-Williams používa dáta o inflácii, reálnom HDP a sadzbe federálnych fondov na extrahovanie trendov v ekonomickom raste HDP a iných faktorov, ktoré ovplyvňujú prirodzenú úrokovú mieru. Tieto odhady vytvorili len pre USA a spolu s odhadom prirodzenej úrokovej miery, odhadli aj produkčnú medzeru a trend rastu [19].

Holston-Laubach-Williams (ďalej HLW) rozšírili tento odhad aj pre iné vyspelé ekonomiky, a to USA, Kanadu, Eurozónu a Veľkú Britániu. Na extrahovanie trendov namiesto sadzby federálnych fondov použili krátkodobú úrokovú mieru.

Pri modelovaní prirodzenej úrokovej miery vychádzajú z dvoch rozdielnych zdrojov:

- pri definovaní r-star vychádzajú z Wicksella, ktorý ju definuje ako *„reálnu úrokovú mieru, ktorá je v súlade so stabilnou infláciou a produkciou na jej prirodzenej úrovni“* [20]
- model je postavený na novokeynesiánskom prístupe Phillipsovej krivky (vzťah medzi produkčnou medzerou a infláciou) a IS krivky (spája odchýlky reálnej úrokovej miery od r-star a produkčnú medzeru) [13].

Na extrahovanie trendu použili Kalmanov filter, ktorý pracuje na princípe upravenie odhadov, ak sa hodnoty HDP, inflácie a reálnej úrokovej miery odchýlia od pozorovaných údajov [13]. V tomto modeli explicitne pripúšťajú ovplyvnenie prirodzenej úrokovej miery pomocou nestacionárnych procesov s nízkou frekvenciou. Pri modelovaní získali štyri dôležité poznatky:

1. zmeny v r-star v priebehu času.

2. klesajúci trend v r-star - na konci vzorky dosahuje prirodzená úroková miera svoje minimum, pričom nič nenaznačuje, že by v blízkej dobe malo dôjsť k jej nárastu. Tento pokles autori pripisujú hlavne trendu rastu, no pripúšťajú, že aj ostatné perzistentné faktory k tomu prispeli.

3. spoločné pohyby v odhadoch prirodzenej úrokovej miere a v trende rastu HDP, aj keď odhady modelovali oddelene pre jednotlivé krajiny. Tento poznatok upriamuje pozornosť na dôležitosť globálnych faktorov.

4. ukazuje sa určitá nepresnosť odhadov pre jednotlivé krajiny, resp. odhady pre USA vykazujú menšiu nepresnosť ako pre ostatné tri ekonomiky. Nepresnosť pripisujú štandardnej neistote, ktorá vzniká pri odhadovaní parametrov a neistote, ktorá vzniká pri časovo sa meniacich premenných. Uvádzajú, že táto nepresnosť by mohla byť menšia, ak by posudzovali vlastnosti každej krajiny zvlášť [20].

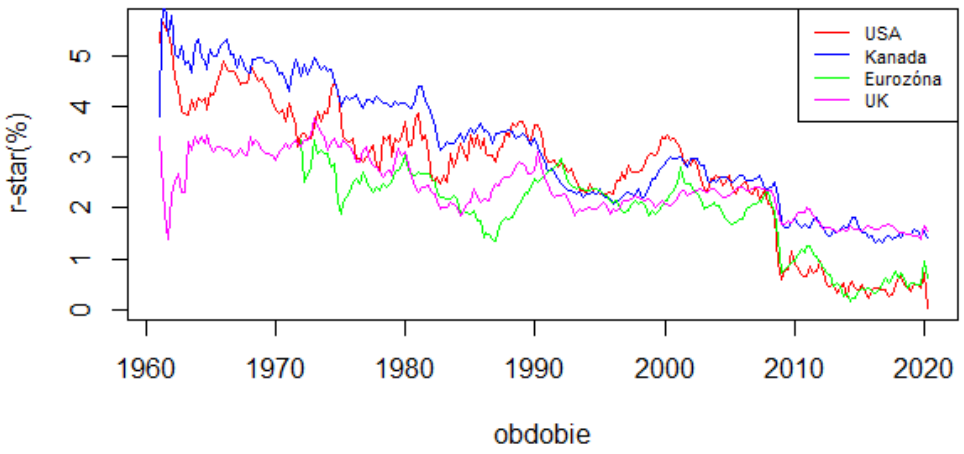
Keď začala pandémia COVID-19 svoje odhady museli upraviť [18], pretože model nie je prispôsobený na takýto druh šoku, kedy sa celosvetová aktivita v ekonomike znížila a dochádza k opätovnému sprísňovaniu a uvoľňovaniu opatrení. Modely pred pandémiou COVID-19 síce obsahovali trvalé a prechodné šoky, ale prechodné šoky boli navzájom nekorelované, čo nie je v súlade so sprísňovaním a uvoľňovaním opatrení. Pridali nový, perzistentný šok - index prísnosti, ktorý berie do úvahy prísnosť opatrení, ktoré zaviedla vláda v jednotlivých krajinách. Autori [18] uvádzajú, že táto úprava nie je vytvorená na zachytenie všetkých šokov pandémie, ale na to, aby po skončení tejto pandémie a pri zotavovaní sa ekonomiky vedel model analyzovať dôsledky pandémie. Rovnako pripúšťajú, že v najbližšej dobe neočakávajú stúpajúci trend prirodzenej úrokovej miery [18].

Odhady začínajú v roku 1972 pre Eurozónu, pre ostatné krajiny v roku 1961 a sú pravidelne aktualizované, každý štvrťrok. Končia v druhom kvártali roku 2020. Autori odhadov uvádzajú, že pozastavili aktualizovanie odhadov pre ďalšie obdobia kvôli veľkej volatilite HDP, ktorá je spájaná s pandémiou COVID-19.

Autori [20] modelovali dva druhy odhadov: odhad v reálnom čase a aktuálny odhad. Rozdiel medzi odhadmi je v tom, že odhad v reálnom čase je založený na aktuálnych a minulých dátach, pričom aktuálny odhad zahŕňa parametre, ktoré boli odhadnuté na

základe celej vzorky dát. My sme sa v tejto diplomovej práci rozhodli pre odhad r-star v reálnom čase, pretože investor pri oceňovaní aktív nemá prístup k celej vzorke dát ako napr. ekonometer, ale odhaduje výnosy v reálnom čase z dát, ktoré má aktuálne k dispozícii.

Na obrázku č.3 môžeme vidieť HLW odhad prirodzenej úrokovej miery v reálnom čase. Vidíme, že skutočne v roku 2008 v období globálnej finančnej krízy nastal šok, ktorý spôsobil, že úroková sadzba klesla a ostala na týchto nízkych hodnotách. Najviac sa tento pokles prejavil v USA a Eurozóne.



Obr. 3: HLW odhad r-star v reálnom čase. (zdroj: vlastné spracovanie na základe [19])

3 Empirická analýza

V posledných desaťročiach sme zaznamenali trvalý nárast v oceňovacích pomeroch. Tento nárast môže naznačovať nadhodnotenie trhu akcií. Aproximovanie zložiek oceňovacích pomerov pomocou vhodných makroekonomických premenných nám môže pomôcť pochopiť správanie trhu aktív a predikovanie jeho vývoja.

V prvej časti tejto kapitoly sme zadefinovali potenciálne HDP, ako jednu z vhodných premenných na aproximovanie zložky oceňovania aktív. Popísali sme faktory, ktoré ovplyvňujú jeho nárast alebo pokles, rozdiel medzi reálnym HDP a potenciálnym HDP. Rovnako sme opísali vzťah medzi rovnovážnou úrokovou mierou a rastom potenciálneho HDP a prediskutovali periódy, v ktorých nastala medzi r-star a rastom potenciálneho HDP divergencia. V druhej časti tejto kapitoly sme sa sústredili na oceňovaciu metriku - cyklicky upravený pomer ceny akcie k zisku a zisťovali sme akú časť nárastu v tomto oceňovacom pomere vieme vysvetliť poklesom v očakávaných výnosoch, pričom pre dotvorenie celkového obrazu sme zahrnuli aj očakávania o budúcich peňažných tokoch.

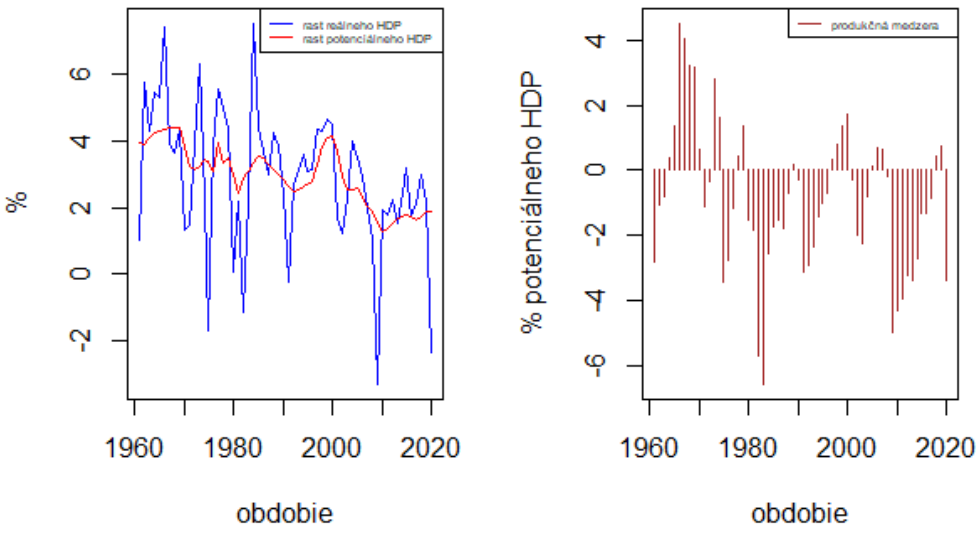
3.1 Vzťah medzi rovnovážnou úrokovou mierou a rastom potenciálneho HDP

OECD v *Economic Outlook* [35] definuje potenciálne HDP ako *„úroveň produkcie, ktorú môže ekonomika produkovať pri konštantnej miere inflácie.“* Podľa [36] potenciálne HDP je *„odhad hodnoty produkcie, ktorú by ekonomika vyprodukovala, ak by sa práca a kapitál používali na maximálnych udržateľných mierach, resp. na mierach, ktoré zodpovedajú stabilnému rastu a stabilnej inflácii.“*

Narozdiel od potenciálneho HDP, reálne HDP je úroveň všetkých finálnych produktov a služieb, ktoré ekonomika vyprodukovala za dané obdobie, pričom zohľadňuje infláciu. Rozdiel medzi mierou reálneho HDP a potenciálneho HDP sa nazýva produkčná medzera [36]. Na obrázku č.4 môžeme vidieť vľavo porovnanie rastu reálneho HDP a rastu reálneho potenciálneho HDP v USA, vpravo produkčnú medzeru vyjadrenú ako percento z potenciálneho HDP. Ak je produkčná medzera kladná, napr. v prípade USA v roku 1966 (obdobie expanzie) bola produkčná medzera na úrovni 4.51%. Rast reálneho HDP (7.42%) v tomto roku výrazne prevyšoval rast potenciálneho HDP (4.36%). V takomto prípade

ekonomika funguje nad svoju udržateľnú úroveň, agregátny dopyt presahuje agregátnu ponuku, čo môže viesť k zvýšeniu inflácie a cien. Je to znak pre monetárnu politiku, aby zvýšila úrokové sadzby. V opačnom prípade, ak je produkčná medzera záporná, napr. v USA v roku 2009 (obdobie recesie) dosiahla úroveň -4.96%. Rast reálneho HDP (-3.31%) bol hlboko pod rastom potenciálneho HDP (1.57%). V takomto prípade ekonomika funguje pod svojou udržateľnou úrovňou a agregátny dopyt nepresahuje agregátnu ponuku. Monetárna politika by mala na stimuláciu ekonomiky použiť zníženie úrokových sadzieb. Samozrejme, monetárna politika pri určovaní úrokových sadzieb neberie do úvahy len tento jediný indikátor, zohľadňuje aj iné ukazovatele [32] a [36].

Na obrázku č.4 vľavo môžeme vidieť, že nastal trvalý pokles v miere rastu potenciálneho HDP. Medzi faktory, ktoré ovplyvňujú mieru rastu potenciálneho HDP, patrí rast pracovnej sily, úroveň tvorby kapitálu a celková produktivita výrobných faktorov, ktorá úzko súvisí s technologickým pokrokom. Autori [13] tvrdia, že ak sú finančné krízy spojené s obmedzeniami v oblasti financií alebo sú spojené s dlhotrvajúcou nezamestnanosťou, môže to mať permanentný vplyv na potenciálne HDP.



Obr. 4: Rast reálneho HDP, rast potenciálneho HDP a produkčná medzera. (zdroj: vlastné spracovanie na základe [8])

Potenciálne HDP spolu s prirodzenou úrokovou mierou tvoria dôležité zložky menovej

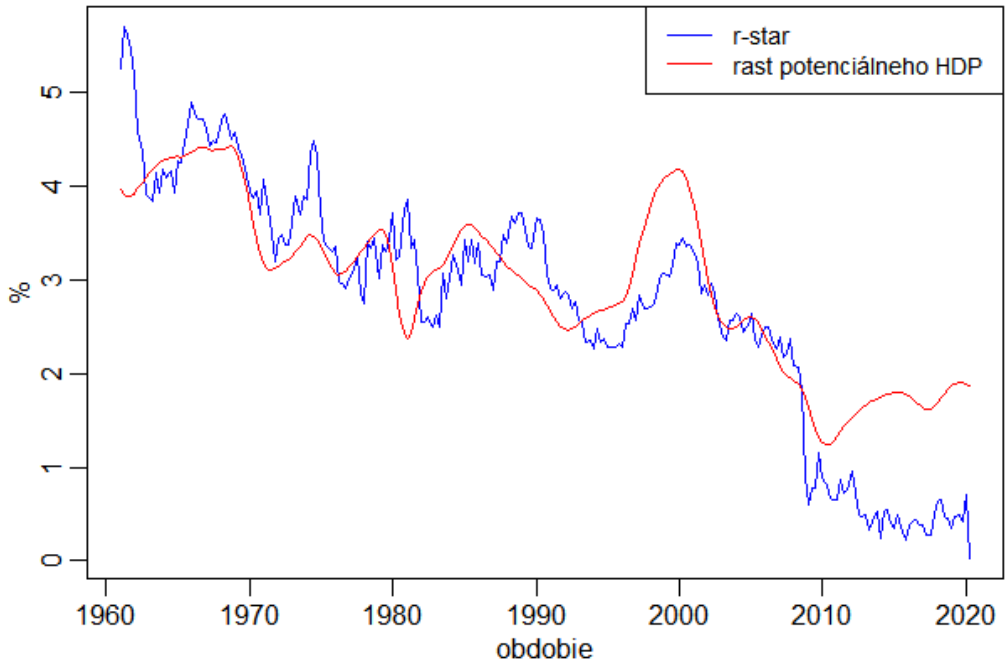
politiky, pričom spolu úzko súvisia. Ak ekonomika funguje na svojej potenciálnej úrovni (reálne HDP sa rovná potenciálnemu HDP), agregátny dopyt sa rovná agregátnej ponuke, t.j. investície sa rovnajú úsporám (IS krivka), bod v ktorom sa tieto dva faktory pretnú je bod, kde sa reálna úroková miera rovná prirodzenej úrokovej miere. Ak nastanú perzistentné zmeny v agregovanej ponuke a dopyte dochádza k zmene v rovnovážnej úrokovej miere. Ekonomická teória hovorí, že so stúpajúcim trendom miery rastu potenciálneho HDP rastie aj r-star [41]. Aj v našom prípade sa medzi r-star a rastom potenciálneho HDP potvrdila silná pozitívna korelácia (0.8517).

Na obrázku č.5 môžeme vidieť vzťah medzi prirodzenou úrokovou mierou (HLW odhad) a rastom reálneho potenciálneho HDP v USA. Pre rast reálneho potenciálneho HDP, ktorý používame v celej diplomovej práci, sme použili odhad Kongresového rozpočtového úradu (CBO) USA [8]. Existuje viacero odhadov potenciálneho HDP, pričom všetky sú podobné a navzájom kladne korelované. Odhad CBO patrí k najpoužívanejším, prístup je založený na produkčnej funkcii, kde na vstupe sú tri premenné: potenciálna pracovná sila, služby zo základného kapitálu a potenciálna celková produktivita faktorov. Pre všetky tieto vstupy sa snaží odhadnúť mieru rastu trendu pomocou informácii z predchádzajúceho a aktuálneho hospodárskeho cyklu, pričom projektuje ich trend aj do budúcnosti [7].

Z obrázka č.5 vidíme, že za posledné dve desaťročia nastal ich pokles, ku ktorému prispeli aj spoločné faktory ako demografické zmeny a pokles v raste produktivity. Pokles sa ešte prehĺbil finančnou ekonomickou krízou v roku 2008 a aj desať rokov po kríze ostávajú ich hodnoty na nízkych úrovniach. Autori [13] uvádzajú, že *„svetová ekonomika mohla dospieť do sekulárnej stagnácie charakterizovanej nízkou prirodzenou úrokovou mierou, čo odráža vysoký sklon k úsporám a nízky potenciálny rast HDP“*.

Ako sme už naznačili, prirodzená úroková miera a rast potenciálneho HDP sa pohybujú približne rovnakým smerom, sú navzájom kladne korelované, čo potvrdzuje aj obrázok č.5. Výnimkou sú dve periódy, kedy si môžeme všimnúť výraznú divergenciu medzi r-star a rastom potenciálneho HDP. Prvá perióda je obdobie od druhej polovice 90-tých rokov až do roku 2000, kedy vyvrcholila známa DOT.com bublina. V tomto období vznikali firmy spojené s rozvojom technológií, hlavne internetu. Rozmach týchto firiem spôsobil rýchly nárast cien ich akcií, čo malo za následok zvýšenie investícii do tohto odvetvia. V roku

2000 bola ponuka akcií vyššia ako ich dopyt, čím došlo k nadhodnoteniu trhu akcií, spľasnutiu technologickej bubliny a výraznému poklesu cien akcií, čo malo negatívny dopad na ekonomiku. Na stimuláciu ekonomiky USA zareagovalo znížením úrokových sadzieb. Druhou periódou divergencie je dobre známa globálna finančná kríza v rokoch 2007-2008. Túto krízu začal krach hedgeových fondov banky Bear Stearn a prísľub vlastnej nehnuteľnosti každému občanovi od B. Clintona. Vytvorili sa dve bubliny, jedna na trhu s realitami a druhá na trhu s úvermi. Dôsledkom bolo zvýšenie úrokových sadzieb a navýšenie splátok hypotekárnych úverov, čím ľudia prestali splácať úvery a ceny nehnuteľnosti prudko klesli. Centrálne banky museli zareagovať na stimulovanie ekonomiky pomocou znižovania úrokových sadzieb a neskôr aj pomocou nekonvenčných menových nástrojov [10]. Môžeme si všimnúť, že obdobie divergencie po tejto kríze stále pretrváva. Možným vysvetlením je, že pri poklese prirodzenej úrokovej miery zohrali veľkú úlohu faktory, ktoré spôsobili jej sekulárnu stagnáciu (viac o týchto faktoroch v Podkapitole 2.2). Dôvodmi pomalšieho rastu potenciálneho HDP môže byť, či už sekulárna stagnácia r-star, alebo menej účinné oživovanie ekonomiky po kríze pomocou konvenčných a nekonvenčných menových nástrojov, alebo pomalší rast pracovnej sily [13].



Obr. 5: Vzťah medzi r-star a rastom potenciálneho HDP. (zdroj: vlastné spracovanie na základe [8] a [19])

3.2 Cyklicky upravený pomer ceny akcie k zisku (CAPE)

Na oceňovanie aktív vplývajú očakávania o budúcich peňažných tokoch a vhodná diskontná sadzba. V tejto podkapitole sme sa pozreli na to, akú časť nárastu v oceňovacích pomeroch vieme vysvetliť poklesom v očakávaných výnosoch, pričom sme sa zamerali hlavne na pokles v reálnej úrokovej miere. Analyzovali sme aj vplyv budúcich peňažných tokov na oceňovanie aktív.

Očakávania o budúcich peňažných tokoch, resp. rast dividend akcií sme aproximovali pomocou odhadu reálneho potenciálneho HDP USA od CBO [8], kde sme použili medziročné zmeny v raste potenciálneho HDP. Pre aproximovanie rastu dividend pomocou tohto odhadu sme sa rozhodli z dôvodu úzkeho vzťahu medzi nimi. Rast dividend závisí od miery rastu HDP v danej krajine, v našom prípade USA, a aj keď z krátkodobého hľadiska ich ovplyvňujú prechodné šoky, z dlhodobého hľadiska majú spoločný trend. Reálnu úrokovú mieru sme aproximovali pomocou odhadu prirodzenej úrokovej miery [19]. Pre rizikovú prirážku sme použili odhad A. Damodarana [9]. Tento odhad je zobrazený v Prílohe D na obrázku č.D.24. Ako oceňovaciu metriku sme použili cyklicky upravený pomer ceny akcie k zisku pre americký index SP 500 (ďalej už len CAPE) [37], ktorý je upravený o infláciu. Považuje sa za jeden z najlepších modelov pri predikcii dlhodobých budúcich výnosov akcií [30]. Pri celej empirickej analýze sme používali logaritmy premenných, pričom všetky odhady boli skonštruované pre americký trh. Všetky dáta sú kvartálne, začínajú v prvom kvartáli v roku 1961 a končia v druhom kvartáli 2020, pretože vtedy končia odhady pre r-star. Celú analýzu sme robili pomocou programu R-Studio.

Zavedieme označenia, ktoré budeme používať až do konca našej empirickej analýzy: R_t - výnosy akcie v čase t, $r_t = (1 + R_t)$ - logaritmické výnosy akcie v čase t, r_t^r - riziková prirážka v čase t aproximovaná pomocou odhadu A. Damodarana, r_t^i - reálna úroková miera v čase t aproximovaná pomocou odhadu prirodzenej úrokovej miery, pričom platí $r_t = r_t^r + r_t^i$, D_t - dividendy akcie v čase t, $\Delta d_t = \log\left(\frac{D_t}{D_{t-1}}\right)$ - logaritmický rast dividend v čase t aproximovaný pomocou medziročného rastu potenciálneho HDP, $cape_t$ - cyklicky upravený pomer ceny akcie k zisku v čase t.

Pred analýzou CAPE sme sa pozreli na korelácie medzi odhadmi, ktoré sme používali, aby sme vedeli aké sú medzi nimi vzťahy. V Tabuľke č.1 v Prílohe B môžeme vidieť Spearmanov korelačný koeficient. Pre tento korelačný koeficient sme sa rozhodli z dôvodu,

že nepredpokladá medzi premennými čisto lineárny vzťah ani rozdelenie a rovnako nie je citlivý na odľahlé hodnoty [42]. Medzi prirodzenou úrokovou mierou a rastom potenciálneho HDP sa preukázal silný kladný vzťah, čo zodpovedá aj opísaniu ich úzkeho vzťahu v predchádzajúcej Podkapitole 3.1. Medzi rizikovou prirážkou a r-star a rovnako aj medzi rizikovou prirážkou a rastom potenciálneho HDP je negatívny korelačný vzťah. Tento negatívny vzťah môže byť z dlhodobého hľadiska dôsledkom relatívne stabilnej rizikovej prirážky a poklesom v prirodzenej úrokovej miere, resp. poklesom v raste potenciálneho HDP.

3.2.1 Korelačná a regresná analýza

Ako prvé sme sa pozreli v Tabuľke č.3 na vzťah korelácie medzi oceňovacím pomerom CAPE a makroekonomickými premennými, ktoré sme použili na vysvetlenie nárastu v CAPE. Medzi všetkými makroekonomickými premennými a CAPE sa preukázal negatívny korelačný vzťah. Najsilnejší negatívny vzťah bol pri očakávaných výnosoch, ktoré zahŕňajú rizikovú prirážku a odhad r-star. Ak sa pozrieme na zložky očakávaných výnosov jednotlivo, tak silnejší negatívny vzťah bol medzi r-star a CAPE. Prekvapivo aj rast potenciálneho HDP bol negatívne korelovaný s CAPE, aj keď najslabšie zo všetkých premenných. Tento negatívny vzťah pravdepodobne zapríčinil dlhodobý perzistentný pokles v raste potenciálneho HDP a aj keď v poslednom desaťročí nastal mierny nárast, stále sa hodnota potenciálneho HDP nachádza pod dlhodobým 60-ročným priemerom. Z tejto prvotnej analýzy sa podľa sily korelačného vzťahu zdá, že najviac k nárastu v oceňovacej metrike prispel pokles v očakávaných výnosoch, resp. v prirodzenej úrokovej miere.

Tabuľka 1: Spearmanov korelačný koeficient. (zdroj: vlastné spracovanie)

	r-star	potenciálne HDP	riziková prirážka	očakávané výnosy
CAPE	-0.4041594	-0.1783245	-0.1974811	-0.6130519

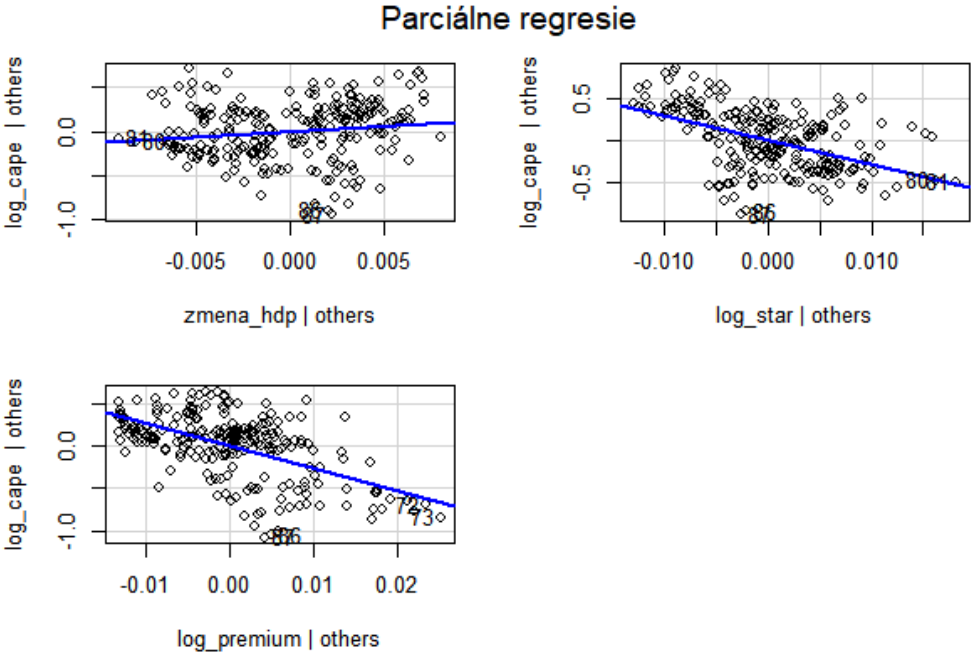
Pomocou lineárnej regresie sme sa podrobnejšie pozreli vzťah medzi CAPE a makroekonomickými premennými. Vychádzali sme z modelu, ktorý zahŕňa všetky premenné.

$$cape = \beta_0 + \beta_1 * \Delta d + \beta_2 * r^i + \beta_3 * r^r + \epsilon, \tag{11}$$

kde β_0 je intercept, $\beta_i, i = 1, 2, 3$ sú parametre regresie a ϵ je chyba predikcie.
Pre tento model nám vyšli odhady parametrov nasledovne:

$$cape = 4.442 + 13.094 * \Delta d - 29.641 * r^i - 26.221 * r^r \tag{12}$$

Všetky makroekonomické premenné sa ukázali v modeli ako štatisticky významné. V súlade so základnou teóriou oceňovania aktív zvýšenie rastu potenciálneho HDP alebo zníženie prirodzenej úrokovej miery a rizikovej prirážky by malo za následok zvýšenie CAPE. Koeficient determinácie je rovný $R^2 = 0.4318$, čo predstavuje vysvetlenie 43.18% zmien v CAPE pomocou tohto modelu. Upravený koeficient determinácie je rovný $R^2 = 0.4245$. Tento koeficient je škálovaný počtom parametrov v modeli. Dôležité je ho zohľadniť hlavne v prípade viacnásobnej regresie, čo je aj náš prípad. Ukázalo sa, že odhady v prípade tohto modelu sú spoľahlivé (p-hodnota < 2.2e-16). Na obrázku č.11 sú zobrazené parciálne regresné priamky pre jednotlivé makroekonomické premenné, napr. graf hore vľavo hovorí o tom aký je sklon regresnej priamky medzi rastom potenciálneho HDP a CAPE za podmienky, že sú v modeli zahrnuté aj ostatné parametre - riziková prirážka a rovnovážna úroková miera.



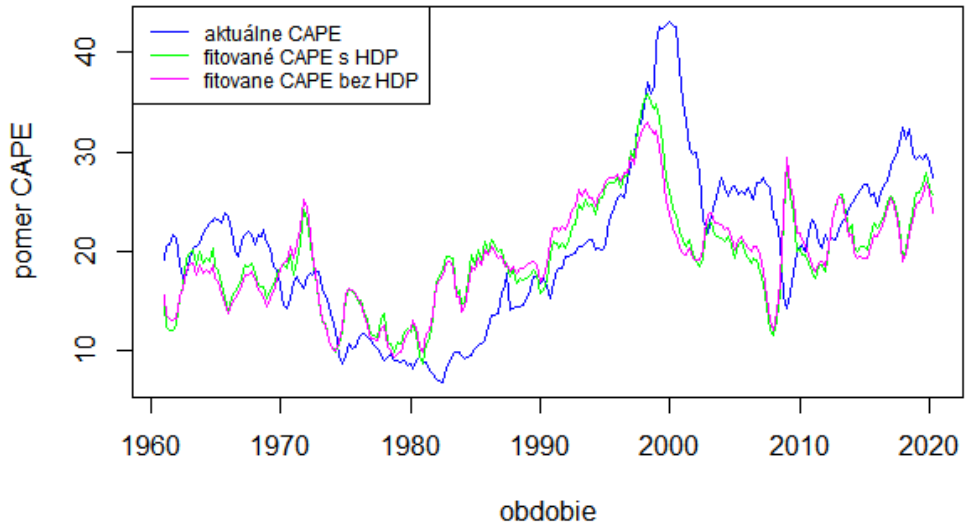
Obr. 6: Parciálne regresie pre regresný model CAPE, ktorý zahŕňa aj rast potenciálneho HDP. (zdroj: vlastné spracovanie)

Pozreli sme sa aj na iné regresné modely pomocou makroekonomických premenných, vytvárali sme rôzne kombinácie a sledovali sme ich vplyv na vysvetlenie zmien v CAPE. Zahrnutie len r-star a rizikovej prirážky v modeli vedelo vysvetliť až 41.7% ($\bar{R}^2 = 41.2\%$) variácií v CAPE. Výsledky tohto modelu aj spolu so zobrazením parciálnych regresií sú v Prílohe B. Rast potenciálneho HDP spolu s r-star vedel vysvetliť 18.47% ($\bar{R}^2 = 17.78\%$), rast potenciálneho HDP s rizikovou prirážkou vysvetlili 25.28% ($\bar{R}^2 = 24.65\%$) variácii v CAPE. Rovnako aj výsledky pre tieto dva modely môžete nájsť v Prílohe B. Skúmali sme aj jednoduché lineárne regresie, kde sme zahrnuli len jednu vysvetľujúcu premennú. Samotná riziková prirážka vedela vysvetliť 9.19% ($\bar{R}^2 = 8.8\%$) zmien, prirodzená úroková miera 9.17% ($\bar{R}^2 = 8.79\%$) a rast potenciálneho HDP len 1.55% ($\bar{R}^2 = 1.13\%$), pričom premenná HDP sa ukázala ako štatisticky nevýznamná. Z tohto nám vyplýva, že najlepšie je zahrnúť pri predikovaní CAPE všetky makroekonomické premenné, pričom vynechanie rastu potenciálneho HDP najmenej ovplyvní predikcie CAPE.

3.2.2 Aktuálne a fitované CAPE pomocou regresného modelu

Model, ktorý zahŕňal všetky makroekonomické premenné, sa ukázal ako najlepší na vysvetlenie historických pohybov v CAPE. Na obrázku č.7 sme porovnali pôvodné hodnoty CAPE (modrá čiara) spolu s fitovanými hodnotami CAPE, kde sme zahrnuli všetky premenné (zelená čiara) a fitovanými hodnotami CAPE, kde sme vynechali rast potenciálneho HDP (fialová čiara). Ak porovnáme tieto dva prípady, tak nevidíme veľké rozdiely v hodnotách, čo sme aj očakávali. Viditeľnejšie rozdiely môžeme pozorovať na konci 90-tých rokov, kedy model s HDP lepšie predikoval hodnotu CAPE alebo na konci dát, v začiatkoch prepuknutia pandémie COVID-19 rovnako jeho hodnoty boli o niečo bližšie k pôvodným hodnotám CAPE. Počas globálnej finančnej krízy reagovali veľmi podobne.

Zaujímavé je pozrieť sa na fitované hodnoty modelu, ktorý nezahŕňa odhad prirodzenej úrokovej miery z dôvodu, že dlhodobo sa predpokladala stacionarita reálnej úrokovej miery. Ako sme už spomínali v predchádzajúcej podkapitole, takýto model vedel vysvetliť len 25.28% historických zmien CAPE. Na obrázku č.8 je zobrazené porovnanie pôvodných hodnôt CAPE (modrá čiara), fitovaných hodnôt CAPE, ktoré zahŕňajú všetky tri premenné (zelená čiara) a fitované hodnoty CAPE bez zahrnutia prirodzenej úrokovej miery (fialová). Najvýraznejšie rozdiely môžeme pozorovať od polovice 90-tých rokov, kedy fi-



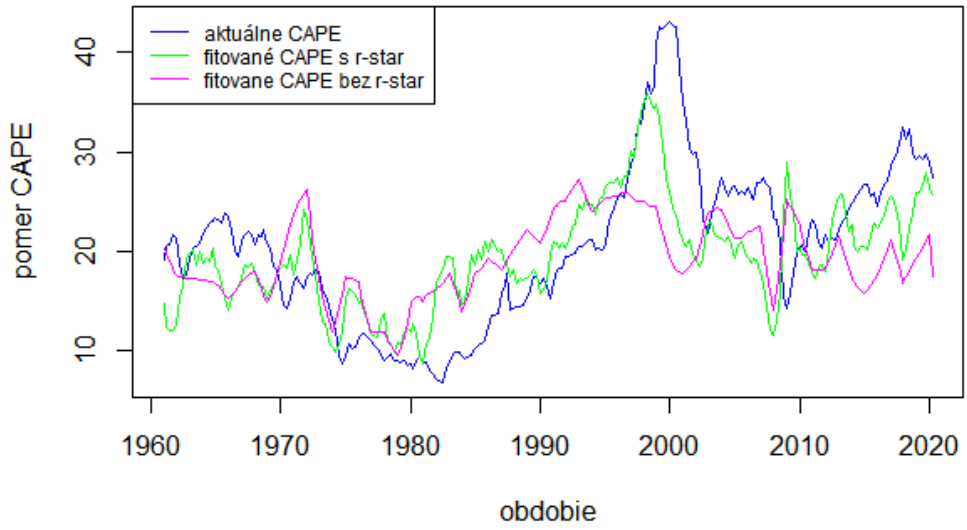
Obr. 7: Porovnanie CAPE - prípad s a bez zahrnutia HDP. (zdroj: vlastné spracovanie)

tované hodnoty bez zahrnutia r-star nezachytili dostatočne nárast v CAPE, ktorý bol spôsobený prepuknutím internetovej bubliny. Rovnako aj po prepuknutí globálnej finančnej krízy v rokoch 2007-2008 fitované hodnoty, ktoré zahŕňajú r-star lepšie vysvetľujú nárast v CAPE. Podľa obrázka č.8 zohľadnenie zmien v prirodzenej úrokovej miere pri oceňovacích pomeroch je dôležité hlavne v poslednom desaťročí.

Pozreli sme sa aj na posledný prípad, kedy sme nezahrnuli do regresného modelu rizikovú prirážku. Výsledný graf je zobrazený v Prílohe B na obrázku č.B.15. Zahrnutie zmien rizikovej prirážky pri vysvetľovaní historických zmien bolo dôležité až do roku 2008. V poslednom desaťročí vysvetlil lepšie zmeny v CAPE model, ktorý nezahŕňal rizikovú prirážku, čo naznačuje jej relatívnu stabilitu v tomto období. Obdobia výrazného poklesu alebo nárastu v CAPE, lepšie vysvetlil model s rizikovou prirážkou, čo je v súlade so zvýšením, resp. znížením rizika v týchto obdobiach.

3.2.3 Výsledky iných štúdií

Vysvetlením extrémneho nárastu v oceňovacej metrike CAPE pomocou makroekonomických premenných sa zaoberal aj K. Lasing vo svojich prácach [29] a [30].



Obr. 8: Porovnanie CAPE - prípad s a bez zahrnutia r-star. (zdroj: vlastné spracovanie)

Vo svojej skoršej práci [30] na odôvodnenie nárastu v CAPE použil v regresnom modeli premenné - prirodzenú úrokovú mieru (odhad od Laubach - Williams), mieru rastu potenciálneho HDP (odhad od CBO) a jadrovú infláciu. Všetky dáta boli kvartálne. Použili aj dodatočnú premennú - 5-ročné zmeny v r-star. Zistili, že tieto premenné vedia vysvetliť až 70% zmien v CAPE za posledných päť desaťročí. Všetky premenné sa ukázali ako štatisticky významné, pričom parametre r-star a jadrová inflácia mali v regresnom modeli záporné znamienko, parametre rastu potenciálneho HDP a 5-ročné zmeny v r-star mali kladné znamienka. V našom regresnom modeli sme pri r-star a raste potenciálneho HDP dostali rovnaké znamienka parametrov, ostatné makroekonomické premenné v našom modeli nevystupovali. Kladnú koreláciu medzi 5-ročnými zmenami v r-star a CAPE vysvetlili nasledovne: počas obdobia nižšej neistoty (obdobie zotavovania alebo vzostupu) smeruje prirodzená úroková miera smerom nahor, čo stimuluje dopyt investorov po rizikových aktívach, čím sa zvyšuje CAPE. Počas kríz a období recesie to je naopak. Aj keď CAPE je upravené o infláciu, v jeho práci sa preukázala silná negatívna korelácia s jadrovou infláciou. Tento negatívny vzťah je spôsobený nesprávnym zohľadnením inflácie pri výpočte súčasnej hodnoty akcie, čo má za následok počas obdobia nízkej inflácie nadhodnotenie trhu a pri vysokej inflácii to má opačný efekt - podhodnotenie trhu. Vytvorili

aj predikciu CAPE na najbližších 10 rokov (štúdia vyšla v roku 2017), predikovali zníženie CAPE o 13% [30].

Vo svojej druhej, nedávnej práci [29] namiesto zahrnutia jadrovej inflácie použil index makroekonomickej neistoty a nezahrnul už 20 kvartálne zmeny v r-star. Tento model vedel vysvetliť až 60% zmien v CAPE. Ak by sa nezahrnul index makroekonomickej neistoty, tak tento model vysvetlil 51% zmien. Zistil, že zahrnutie indexu neistoty lepšie predikovalo CAPE v období globálnej finančnej krízy, pričom v období pandémie COVID-19 lepšie vysvetlil zmeny model, ktorý nezahŕňal tento index. Z toho vyplýva, že ak nastane podobné zvýšenie v oceňovacích pomeroch, tak nevieme ako budú investori reagovať na tieto zmeny [29].

Výsledky z tejto práce vieme porovnať s našimi v prípade regresného modelu, ktorý zahŕňa medziročnú mieru rastu potenciálneho HDP a r-star. V práci [29] vedel tento model vysvetliť až 51% zmien, zatiaľ čo v našom prípade to bolo len 18.47%. Najväčší rozdiel medzi použitými premennými bol pri r-star. My sme použili odhad HLW, ktorý je jednostranný a podmienený pozorovaniami z času 1 do času t. Na druhej strane, v spomínanej práci bol použitý Laubach-Williams obojstranný odhad, ktorý je už na prvý pohľad viac hladký a je podmienený všetkými dostupnými pozorovaniami [19]. Druhý rozdiel, ktorý mohol ovplyvniť rozdiely výsledkov je odhad potenciálneho rastu HDP. My sme použili medziročný rast reálneho potenciálneho HDP. V práci [29] tiež použili medziročný rast potenciálnej produkcie, ale nevieme s istotou povedať, či je totožný s našim odhadom, keďže CBO vydáva viacero druhov odhadov, či už pre rôzne sektory alebo odhady vyjadrené v nominálnej, resp. reálnej miere.

4 Pomer ceny akcie k dividende

Ďalšou používanou oceňovacou metrikou medzi investormi je pomer ceny akcie k dividende. Meria vzťah medzi súčasnou hodnotou akcie v pomere k jej dividende.

V prvej časti tejto kapitoly pomocou korelačnej a regresnej analýzy sa pozrieme na to, koľko zo zmien v pomere ceny akcie k dividende vieme vysvetliť pomocou zmien v makroekonomických premenných. Výsledky porovnáme s výsledkami z analýzy pomeru CAPE z prechádzajúcej kapitoly. V druhej časti tejto kapitoly sa pokúsime odhadnúť pomer ceny akcie k dividende pomocou vyššie spomenutých premenných.

4.1 Empirická analýza pomeru ceny akcie k dividende

V tejto podkapitole sa pozrieme na zmeny v pomere ceny akcie k dividende a ich vysvetlenie pomocou zmien v makroekonomických premenných, ktoré sme používali aj pri analýze CAPE. Výsledky z analýzy pomeru ceny akcie porovnáme s výsledkami analýzy CAPE.

Rovnako ako pri CAPE, aj v tomto prípade sme použili dáta od R. Shillera [37].Tieto dáta zahŕňajú informácie o cenách a dividendách najväčšieho amerického indexu S&P 500. Ide o kvartálne dáta, ktoré rovnako začínajú v prvom kvartáli 1961. Zavedieme dodatočné označenia:P_t - cena akcie v čase t, $pd_t = p_t - d_t = \log\left(\frac{P_t}{D_t}\right)$ - logaritmický pomer ceny akcie k dividende. Ďalej pracujeme len s logaritmami. Makroekonomické premenné vysvetľujúce zmeny v oceňovacom pomere sme použili rovnaké ako pri CAPE.

4.1.1 Korelačná a regresná analýza

Začali sme analýzou Spearmanovho korelačného koeficientu medzi pomerom ceny akcie k dividende (ďalej len PD) a ostatnými makroekonomickými premennými. Vo všetkých prípadoch sa znova preukázal negatívny korelačný vzťah. Avšak oproti CAPE, negatívny vzťah PD s prirodzenou úrokovou mierou je v tomto prípade silnejší. Naopak vzťah s rizikovou prirážkou a HDP je o niečo slabší. Stále však platí, že na prvý pohľad najviac k nárastu PD prispel pokles v očakávaných výnosoch, resp. v rovnovážnej úrokovej miere.

Lineárnou regresiou, ktorá zahŕňa všetky makroekonomické premenné, sme vyjadrili

Tabuľka 2: Spearmanov korelačný koeficient. (zdroj: vlastné spracovanie)

	r-star	potenciálne HDP	riziková prirážka	očakávané výnosy
pomer PD	-0.5025171	-0.3280008	-0.1224514	-0.6660535

vzťah s PD.

$$pd = \beta_0 + \beta_1 * \Delta d + \beta_2 * r^i + \beta_3 * r^r + \epsilon \tag{13}$$

Pre tento model nám vyšli odhady parametrov nasledovne:

$$pd = 5.0782 + 5.3323 * \Delta d - 26.6001 * r^i - 21.7804 * r^r \tag{14}$$

V tomto modeli sa premenná rastu potenciálneho HDP ukázala ako štatisticky nevýznamná, ostatné premenné boli štatisticky významné. Koeficient determinácie je rovný $R^2 = 0.4362$ a upravený koeficient determinácie je rovný $\bar{R^2} = 0.4289$. Parciálne regresie k tomuto modelu môžete nájsť v Prílohe C na obrázku č.C.19.

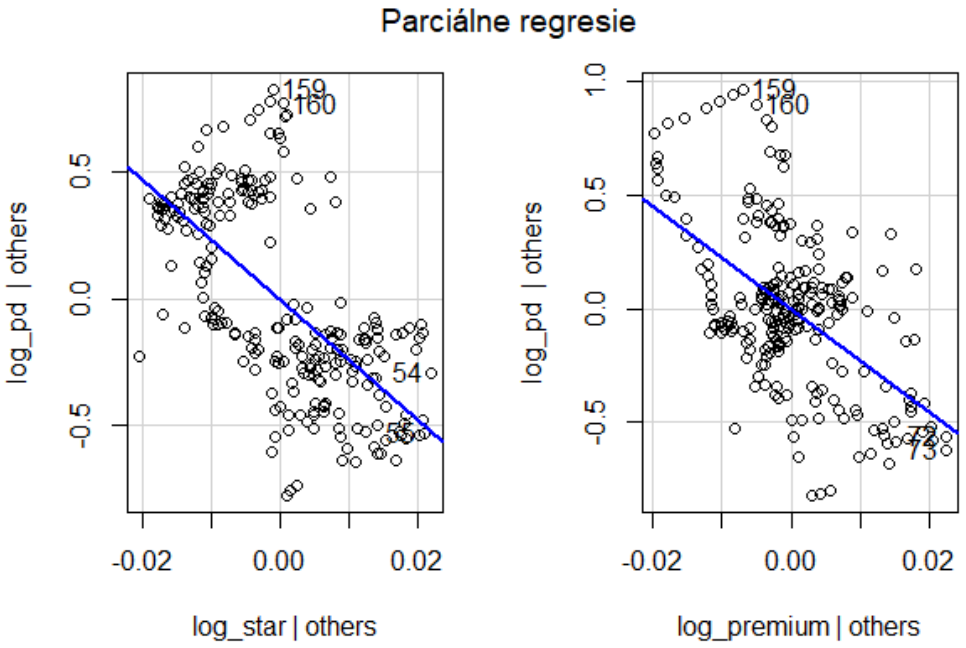
Keďže sa rast potenciálneho HDP preukázal ako štatisticky nevýznamná premenná, pozreli sme sa na regresný model, ktorý nezahŕňa túto premennú.

$$pd = \beta_0 + \beta_1 * r^i + \beta_2 * r^r + \epsilon \tag{15}$$

Odhady pre tento model sú nasledovné:

$$pd = 5.1938 - 23.7383 * r^i - 22.6527 * r^r \tag{16}$$

Všetky premenné sú v modeli štatisticky významné. Tento model vie vysvetliť 43.34% zmien v PD (v porovnaní pri CAPE bol rovný 41.7%), pričom upravený koeficient determinácie je rovný $\bar{R^2} = 0.4285$. Odhady v prípade tohto modelu sa ukázali ako spoľahlivé (p-hodnota $<$ 2.2e-16). Ak si porovnáme tento koeficient determinácie s koeficientom, ktorý zahŕňa aj rast potenciálneho HDP, tak nenachádzame veľké rozdiely. Môžeme povedať, že pri vysvetlení zmien v PD môžeme rast potenciálneho HDP v tomto prípade vynechať. Na obrázku č.9 sú zobrazené parciálne regresie pre model, ktorý nezahŕňa rast potenciálneho HDP. Ak sme porovnali koeficienty determinácie pre ostatné regresné modely s koeficientmi determinácie pre CAPE, tak zahrnutie rizikovej prirážky a rastu potenciálneho HDP vedelo vysvetliť 27.15% zmien v PD (podobne pri CAPE 25.28%). Prvé



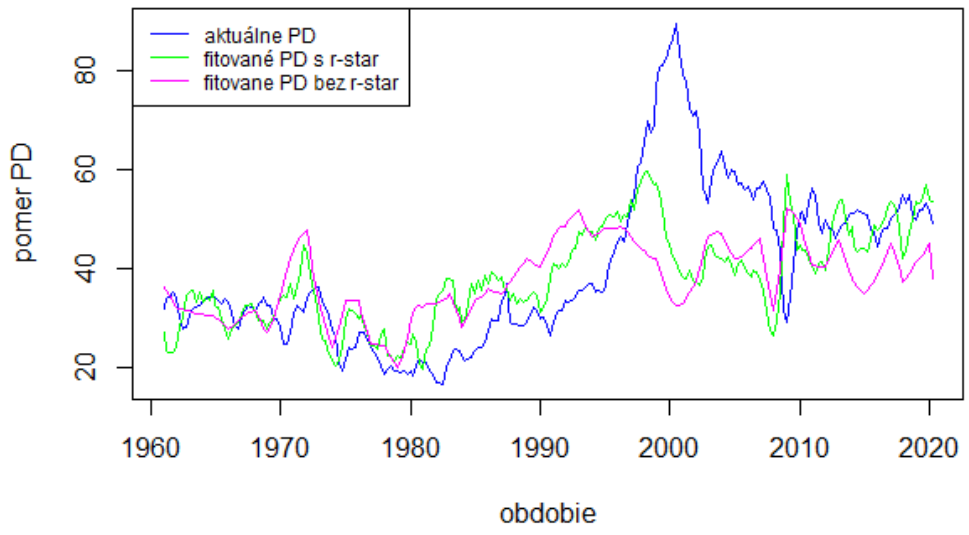
Obr. 9: Parciálne regresie pre regresný model PD, ktorý nezahŕňa rast potenciálneho HDP. (zdroj: vlastné spracovanie)

väčšie rozdiely sa ukázali pri modeli, ktorý zahŕňal r-star a rast potenciálneho HDP. Tento model vedeli vysvetliť až 24.15% zmien v PD, pri CAPE to bolo 18.47%. Výsledky pre tieto dva modely môžete nájsť v Prílohe C. Pri jednoduchých lineárnych regresiách zahŕňajúcich len jednu makroekonomickú premennú sme dostali nasledujúce výsledky: samotný rast potenciálne HDP vysvetlil 8.51% zmien v PD, v porovnaní pri CAPE to bolo len 1.55%. Prirodzená úroková miera vysvetlila 19.64% zmien v PD, až o 10.47% viac ako pri CAPE a riziková prirážka vysvetlila iba 2.41% zmien PD, až o 6.78% zmien menej ako pri CAPE.

4.1.2 Aktuálne a fitované PD pomocou regresného modelu

Keďže v regresnom modeli so všetkými tromi premennými sa rast potenciálneho HDP ukázal ako štatisticky nevýznamná premenná, tak porovnanie tohto modelu s modelom, ktorý nezahŕňa rast potenciálneho HDP sme nevenovali veľkú pozornosť. Porovnanie týchto modelov spolu s pôvodnými hodnotami PD môžete nájsť v Prílohe C na obrázku č.C.22. V žiadnej perióde 60-ročného obdobia sa nepreukázali žiadne výrazné rozdiely medzi fitovanými hodnotami regresných modelov.

Ako v prípade CAPE, aj teraz nás najviac zaujímalo ako sa zmení model, ktorý nezahŕňa zmeny v prirodzenej úrokovej miere. Na obrázku č.10 je porovnanie pôvodných hodnôt PD (modrá čiara), fitovaných hodnôt PD zahŕňajúcich všetky tri premenné (zelená čiara) a fitované hodnoty, ktoré nezahŕňajú zmeny v prirodzenej úrokovej miere (fialová čiara). Prišli sme k podobným záverom ako v prípade CAPE. Zahrnutie zmien v rovnovážnej úrokovej miere pri oceňovacom pomere PD je dôležité hlavne v poslednom desaťročí, kedy sa preukázali najväčšie rozdiely v sile vysvetlenia zmien medzi fitovanými hodnotami modelov oproti pôvodným hodnotám PD.



Obr. 10: Porovnanie PD - prípad s a bez zahrnutia r-star. (zdroj: vlastné spracovanie)

Na obrázku č.C.23 v Prílohe C sme zobrazili prípad modelu, ktorý nezahŕňa zmeny v rizikovej prirážke. Zahrnutie zmien v rizikovej prirážke je dôležité v obdobiach vysokého nárastu/poklesu v oceňovacích pomeroch. V týchto obdobiach model s rizikovou prirážkou lepšie fitoval historické zmeny v PD. V poslednom desaťročí model, ktorý zohľadnil zmeny len v raste potenciálneho HDP a prirodzenej úrokovej miery, lepšie odhadol zmeny v PD. Z tohto vyplýva, že v poslednom desaťročí bola riziková prirážka relatívne stabilná.

4.2 Odhad pomeru ceny akcie k dividende

Ako sme opísali v Kapitole 1, M.Lettau a S. Van Nieuwerburgh [31] vo svojej práci upravili pomer ceny akcie k dividende o štrukturálne zlomy, tak aby zohľadnili možnosť zmien v ustálených stavoch.

Stredné hodnoty finančných ukazovateľov sú určené vlastnosťami rovnovážneho stavu ekonomiky. V prípade rovnovážneho stavu pomeru ceny akcie k dividende, autori [31] ukázali, že je funkciou ustáleného stavu miery rastu dividend a ustáleného stavu očakávaných výnosov, a to v nasledujúcom tvare:

$$\bar{pd}_t = \bar{d}_t - \log(\exp(\bar{r}_t) - \exp(\bar{d}_t)), \tag{17}$$

kde $\bar{pd}_t, \bar{d}_t, \bar{r}_t$ sú ustálené stavy pomeru ceny akcie k dividende, miery rastu dividend a výnosov v čase t. V rovnici 17 umožnili zmenu ustálených stavov v čase t, namiesto toho, aby bolo tieto rovnovážne stavy konštantné.

Predpoklad, ktorý zaviedli pre rovnovážne stavy je splnenie podmienky martingalu: $E_t[\bar{r}_{t+j}] = \bar{r}_t$, $E_t[\bar{d}_{t+j}] = \bar{d}_t$ $E_t[\bar{pd}_{t+j}] = \bar{pd}_t$. Inak povedané, ustálené stavy sa môžu náhodne meniť, ale musia byť konštantné v očakávaniach. Pri týchto predpokladoch rozšírili Campbell-Shiller dekompozíciu (1), kde pomer ceny akcie k dividende je sumou rovovážneho stavu pomeru ceny akcie k dividende a diskontovanej sumy odchýlky od strednej hodnoty rastu dividend mínus odchýlky od strednej hodnoty výnosov.

$$pd_t = \bar{pd}_t + E_t \sum_{j=1}^{\infty} \rho_t{}^{j-1}[(\Delta d_{t+j} - \bar{d}_t) - (r_{t+j} - \bar{r}_t)], \tag{18}$$

kde $\rho_t = (1 + \exp(-\bar{pd}_t))^{-1}$ je konštanta, ktorá sa mení v čase. Zaviedli aj dodatočné predpoklady pre túto konštantu: $E_t[\rho_{t+j}] = \rho_t$ a $E_t[\rho_{t+j}(pd_{t+j} - \bar{pd}_t)] = 0$, konštanta ρ_t musí spĺňať definíciu martingalu a odchýlky od strednej hodnoty pomeru ceny akcie k dividende sú nekorelované s ρ_t [31].

Pomocou makroekonomických premenných, ktoré sme použili pri vysvetľovaní zmien v oceňovacích pomeroch sme sa pokúsili modelovať pomer ceny akcie k dividende pomocou 18, pričom v našom prípade ustálený stav nebol upravený o štrukturálne zlomy. Model má nasledovný tvar:

$$pd_t = \bar{pd} + E_t \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1}[(\Delta d_{t+j} - \bar{d}) - (r_{t+j} - \bar{r})], \tag{19}$$

kde $\rho = (1 + \exp(-\bar{pd}))^{-1}$ je konštanta a ustálený stav pomeru ceny akcie k dividende je v tomto prípade tiež konštanta.

$$\bar{pd} = \bar{d} - \log(\exp(\bar{r}) - \exp(\bar{d})), \tag{20}$$

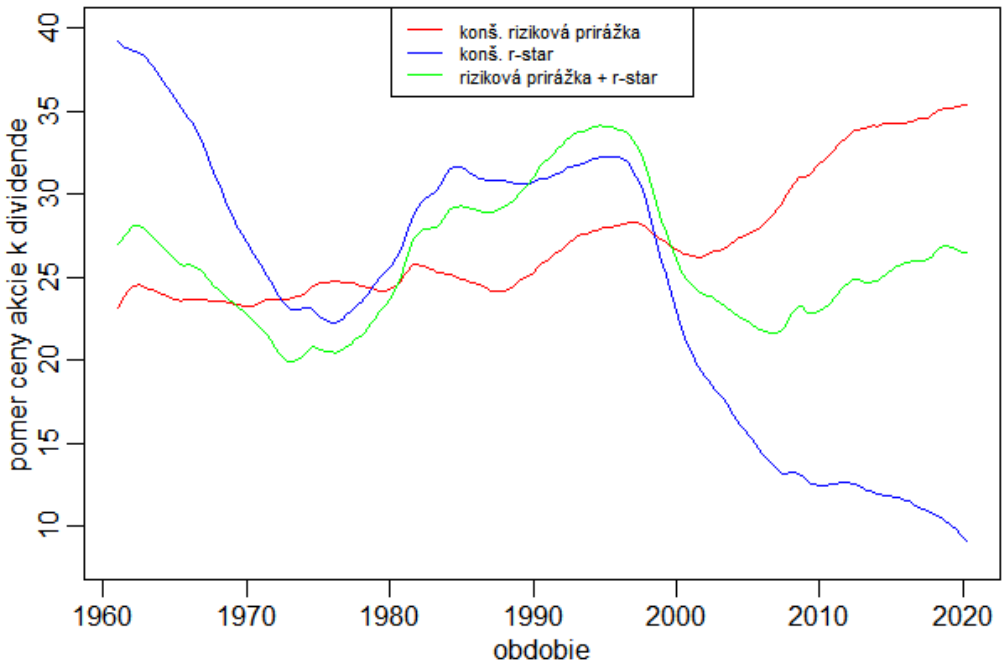
Investor v reálnom čase pri úprave pomeru ceny akcie k dividende o štrukturálne zlomy čelí dvom problémom, ako už bolo spomínané v Kapitole 1. Prvým problémom je odhadnutie dátumu zlomu a druhým, závažnejším je odhadnutie jeho veľkosti [31]. Jeden zo spôsobov ako sa vyhnúť týmto problémom je zvolenie vhodných makroekonomických premenných, ktoré budú vedieť vhodne predikovať budúce výnosy. My sme sa zamerali na tri makroekonomické premenné, čo je pomerne malý súbor, a aj tak tieto tri premenné vedeli vysvetliť viac ako 40% zmien v oboch oceňovacích pomeroch. Treba rovnako zdôrazniť, že tieto makroekonomické premenné sú len odhady, čo so sebou nesie určitú neistotu.

Všetky označenia ostávajú rovnaké, aj perióda začína v prvom kvartáli 1961, končí v druhom kvartáli roku 2020 a pracujeme s logaritmami premenných.

4.2.1 Výsledky

Na obrázku č.11 je zobrazené porovnanie odhadov pomeru ceny akcie k dividende pre tri rôzne prípady. Pri fitovaní PD pomocou makroekonomických premenných sa riziková prirážka a prirodzená úroková miera, resp. očakávané výnosy javili ako dôležité premenné pri vysvetľovaní historických zmien v PD. Pozreli sme sa na zmenu odhadu, ak by sme tieto premenné nezahrnuli do modelu. V prvom prípade (červená čiara) je zobrazené odhadnuté PD, pri ktorom sa mení len rast potenciálneho HDP a prirodzená úroková miera, riziková prirážka je konštantná. Vidíme, že odhad PD má stále stúpajúci trend, kvôli neustálemu poklesu v prirodzenej úrokovej miere. V druhom prípade (modrá čiara) je odhad PD, kde sa mení rast potenciálneho HDP a riziková prirážka, r-star je konštantná. Tento pokles od konca 90-tých rokov si vysvetľujeme poklesom v raste potenciálneho HDP a do začiatku globálnej finančnej krízy aj nárastom v rizikovej prirážke, potom už riziková prirážka nevykazuje rast. V poslednom prípade (zelená čiara) sa menia všetky tri premenné. Vidíme, že tento odhad má podobný trend ako aktuálne PD z Kapitoly 4.1, ktoré sme analyzovali. Z tohto vyplýva, že je dôležité zohľadnenie nielen zmien v rizikovej prirážke, ale aj v prirodzenej úrokovej miere, hlavne v poslednom desaťročí, kedy je riziková prirážka relatívne stabilná.

Otázka, ktorá sa môže na záver vynoriť, ak porovnáme PD použité v Kapitole 4.1 a tento odhad je, že prečo je tento odhad takýto hladký. Je to z dôvodu, že pri tomto odhade sa berú do úvahy odchýlky odhadov makroekonomických premenných od ich ustálených hodnôt a keďže premenné vykazujú pomaly sa pohybujúce trendy, tak aj tieto odchýlky budú postupné, resp. nie tak výrazné.

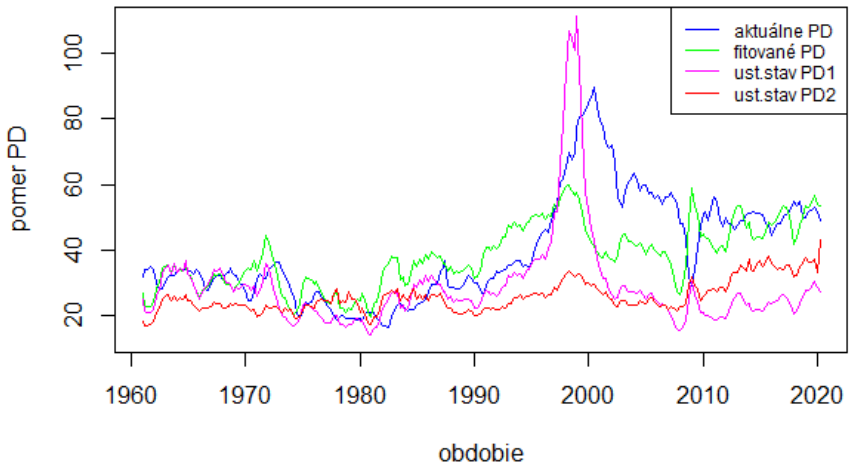


Obr. 11: Odhady pomeru ceny akcie k dividende. (zdroj: vlastné spracovanie)

4.2.2 Ustálený stav pomeru ceny akcie k dividende

Ako už bolo spomínané v Kapitole 4.2, ustálený stav oceňovacích pomerov je určený rovnovážnym stavom ekonomiky. V prípade pomeru ceny akcie k dividende je funkciou ustáleného stavu miery rastu dividend a očakávaných výnosov [31]. Pomocou makroekonomických premenných sme sa pokúsili aproximovať tento ustálený stav pomeru ceny akcie k dividende. Vychádzali sme z rovnice 17. Rozhodli sme sa preto z dôvodu, že investor sa z dlhodobého hľadiska nesnaží pri oceňovaní zachytiť prechodné, dočasné šoky, ale sústredí sa skôr na perzistentné, resp. trvalé zmeny.

Na obrázku č.12 je porovnanie pôvodných hodnôt pomeru ceny akcie k dividende (modrá čiara) [37], fitovaných hodnôt regresného modelu, ktorý obsahuje všetky tri mak-



Obr. 12: Porovnanie rôznych pomerov ceny akcie k dividende. (zdroj: vlastné spracovanie)

roekonomické premenné (zelená čiara). Ustálený stav PD zohľadnujúci zmeny v rizikovej prirážke a v prirodzenej úrokovej miere (fialová čiara) a ustálený stav PD, ktorý zahŕňa zmeny len v r-star (červená čiara). Samozrejme v oboch prípadoch ustálených stavoch PD sú zohľadnené zmeny v raste potenciálneho HDP. Môžeme vidieť, že všetky PD boli do začiatku 90-tých rokov približne rovnaké. V období technologickej bubliny lepšie zachytil nárast v PD odhad ustáleného stavu, ktorý zahŕňal aj zmeny v rizikovej prirážke, čo je v súlade s poklesom v rizikovej prirážke. Následne v roku 2000 nastal v tomto odhade ustáleného stavu náhly pokles, ktorý si vysvetľujeme perzistentným poklesom v raste potenciálneho HDP a nárastom v rizikovej prirážke. Od začiatku globálnej finančnej krízy bol odhad ustáleného stavu zohľadňujúci zmeny len v r-star bližšie k pôvodným hodnotám PD, čo nás znova privádza k zisteniu, že dôraz na zmeny v r-star máme klásť hlavne v poslednom desaťročí a riziková prirážka je v tomto období naopak relatívne stabilná.

5 Dôsledky perzistentných zmien

V tejto poslednej záverečnej kapitole zosumarizuje poznatky z predchádzajúcich empirických analýz. Pozrieme sa na vplyv týchto výsledkov na očakávané výnosy. V závere kapitoly popíšeme ako tieto zmeny ovplyvni trh akcií, trh dlhopisov a rizikovosť aktív.

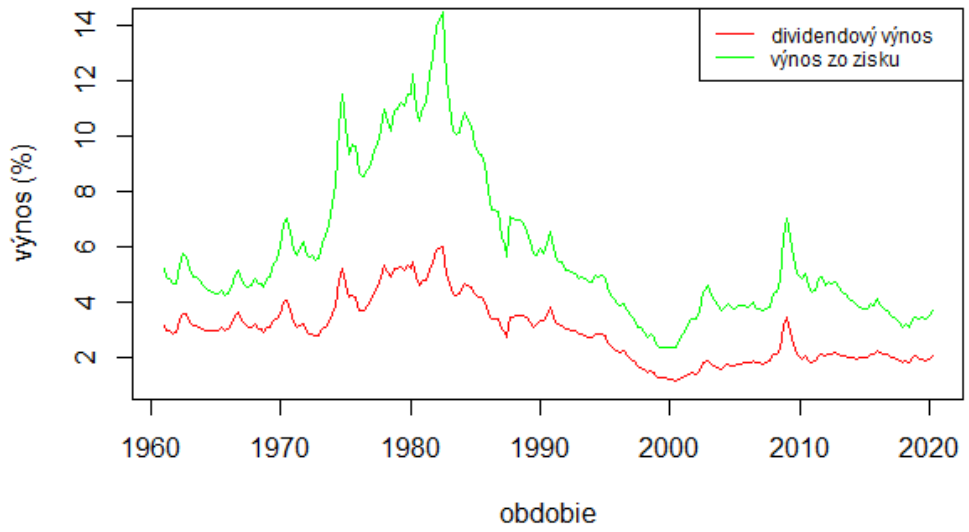
5.1 Zosumarizovanie výsledkov

Z predchádzajúcich analýz oceňovacích pomerov vieme, že k ich nárastu prispel viac perzistentný pokles v očakávaných výnosoch, než rast potenciálneho HDP, resp. rast dividend. Ak sme sa pozreli na jednotlivé zložky očakávaných výnosov, tak zahrnutie zmien v prirodzenej úrokovej miere sa ukázalo dôležité v posledných dvoch desaťročiach, pričom perzistentný pokles v období globálnej finančnej krízy zohľadnenie jej zmien ešte zosilnil. Na druhej strane, riziková prirážka bola v poslednom desaťročí relatívne stabilná, teda neprispievala významne k zmenám v oceňovacích pomeroch.

Zvýšenie hodnoty oceňovacích pomerov implikuje zvýšenie cien akcií. To má za následok zníženie výnosov týchto aktív. Na obrázku č.13 môžeme vidieť porovnanie výnosu dividend a výnosu zo zisku. Tieto dva výnosy sú obrátené hodnoty k pomeru ceny akcie k dividende a CAPE. V posledných rokoch je rozšírené, hlavne v USA, spätné odkúpenie akcií, ktoré je dôležitou formou odmeňovania akcionárom. Dividendový výnos nezohľadňuje túto formu odmeny, zatiaľ čo výnos zo zisku áno. Vidíme, že dividendový výnos dosahuje nižšie hodnoty v porovnaní s výnosom zo zisku, čo je pochopiteľné, keďže dividendy tvoria časť zisku, ale z dlhodobého hľadiska majú spoločný klesajúci trend. Ak nás nezaujíma výška výnosu, ale jeho trend, tak nezáleží na tom, ktorý oceňovací pomer budeme sledovať.

5.2 Očakávané výnosy

Ako už bolo spomínané, riziková prirážka je v poslednom desaťročí relatívne stabilná. Naopak pri r-star nastal perzistentný pokles v období globálnej finančnej krízy, stále pretrváva na týchto nízkych hodnotách, pričom autori tohto odhadu nepredpokladajú, že by mal nastať výrazný nárast v tejto miere [20]. Čo to znamená pre očakávané výnosy? Očakávame, že výnosy ostanú na približne rovnakých hodnotách ako boli na konci vzorky



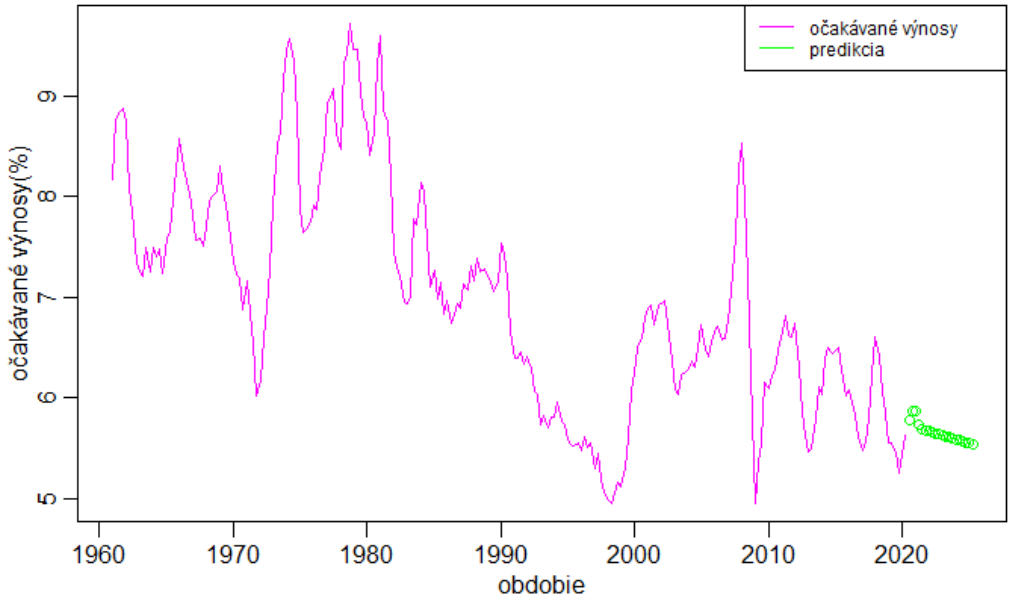
Obr. 13: Dividendový výnos a výnos zo zisku. (zdroj: vlastné spracovanie na základe [37])

(2. kvartál 2020), pričom môže nastať mierny pokles, ale nebude veľmi výrazný.

Pokúsili sme sa predikovať tento vývoj očakávaných výnosov na najbližších 5 rokov pomocou MA procesu. Na obrázku č.14 môžeme vidieť túto predikciu. Ako sme predpokladali, nenastal výrazný nárast, resp. len mierny pokles v predikcii očakávaných výnosov. Z tohto pre oceňovacie pomery vyplýva, že v najbližšom období môžeme očakávať len mierny nárast v oceňovacích pomeroch. Pravdepodobne sa budú pohybovať na podobných hodnotách ako v poslednom období. Investori, ktorý len projektujú súčasné hodnoty oceňovacích pomerov do budúcnosti, môžu byť sklamaný z nižšej miery výnosnosti rizikových aktív oproti tej čo očakávajú.

5.3 Trh dlhopisov a trh akcií

Teraz si rozoberieme ako tieto poznatky o akciovom trhu ovplyvňujú trh dlhopisov. Obdobie ekonomického rastu je sprevádzané protichodným správaním sa cien dlhopisov a akciového trhu. V tomto období trhy navzájom súperia o kapitál. Ak dochádza k predaju na akciovom trhu, ceny dlhopisov sa zvyšujú a ich výnosy naopak klesajú. Pri zlepšení ekonomickej situácie sa investori presunú na akciový trh, z dôvodu väčšej výnosnosti.



Obr. 14: Predikcia očakávaných výnosov. (zdroj: vlastné spracovanie)

V období hneď po recesii, kedy sú inflačné tlaky a úrokové sadzby nízke, ceny dlhopisov a ceny akcií sa pohybujú rovnakým smerom. V období po globálnej finančnej kríze sa centrálne banky zaviazali k nízkym úrokovým sadzbám a zároveň začali stimulovať ekonomiku pomocou menových nástrojov. V dôsledku toho sa ceny akcií a dlhopisov pohybovali rovnakým smerom nahor, čo bola reakcia na nízke úrokové sadzby a mierne zvýšený rast HDP [26].

Z obrázka č.2 vidíme, že výnosy štátnych dlhopisov klesali už od začiatku 80-tých rokov spolu s úrokovými sadzbami. Tento klesajúci trend vo výnosoch dlhopisov a úrokových sadzbách implikuje zvýšenie cien dlhopisov aj cien akcií, čo môžeme potvrdiť aj z oceňovacích pomerov, ktoré rovnako začali stúpať v 80-tých rokoch. Následne okolo roku 2000, po prasknutí technologickej bubliny nastal pokles v oceňovacích pomeroch, k čomu prispela aj sekulárna stagnácia v ekonomickom raste. Od roku 2008, zase nastal ich nárast, ktorý ako sme už spomínali, sa drží na vyšších hodnotách doteraz.

Stále aj desať rokov po globálnej finančnej kríze sa ceny akcií a dlhopisov pohybujú rovnakým smerom. Tento spoločný pohyb mohlo spôsobiť aj nedostatočné oživenie ekonomiky a držanie nízkych úrokových sadzieb. Ako bolo spomínané už v Kapitole 1, časť poklesu vo výnosoch dlhopisov bola vysvetlené pomocou poklesu v dlhodobých očakávaniach inflácie, pričom v posledných rokoch je inflácia relatívne stabilná. Pokles v po-

slednom desaťročí pripisujú hlavne poklesu v prirodzenej úrokovej miere, keďže riziková prirážka v tomto období tiež nedosahuje výrazné zmeny. Rovnako ako pri akciách, ani v prípade dlhopisov neočakávame v najbližšej dobe výrazný pokles vo výnosoch, resp. nárast v cenách. Očakávame, že ostanú na približne rovnakých hodnotách.

Investori rozhodujúci sa, či budú investovať na trhu akcií alebo trhu dlhopisov, sa môžu pozerať na výnosovú medzeru. Predstavuje rozdiel medzi dividendovým výnosom a výnosom štátnych dlhopisov. Čím je medzera viac kladná, tým sa viac oplatí investovať na trhu akcií [12]. Na konci našej vzorky dát je táto výnosová medzera kladná, ale nie je ďaleko od nuly. To nám nevie veľa povedať o tom, na ktorom trhu je lepšie investovať.

Investovanie na finančných trhoch vždy nesie so sebou určitú časť rizika. Dlhopisy sú menej rizikové z dôvodu menšej volatility, čo so sebou prináša aj menší výnos. Naopak akcie sú volatilnejšie s vyšším výnosom. Ako veľmi rizikové sú aktíva v tomto období? Ak investor očakáva ešte pokles reálnych úrokových sadzieb, tak je lepšie investovať do existujúceho dlhopisu z dôvodu straty pri kúpe nového dlhopisu. V období stabilnej inflácie je takýto investor ochotní akceptovať aj nižšie výnosy [26], čím znižuje svoje riziko. Naopak ak bude investovať na trhu akcií, musí rátať s tým, že cena akcií neporastie výrazným tempom nahor. Ak bude iba extrapolovať, môže byť sklamaný z nižšieho výnosu ako očakával, čo znamená, že nastalo nadhodnotenie trhu, čím sa zvyšuje rizikovosť akcií. Rovnako aj pomaly sa pohybujúce trendy v očakávaných výnosoch sú hlavným zdrojom rizika akcií [31]. Na záver treba podotknúť, že množstvo bezpečných aktív sa znížilo od začiatku finančnej krízy, čo sťažuje spoľahlivé investovanie.

Záver

Cieľom našej diplomovej práce bolo rozobrať oceňovanie aktív za prítomnosti pomaly sa vyvíjajúcich trendov očakávaných výnosov, keďže posledné empirické šúdie naznačujú porušenie podmienky stacionarity oceňovacích mier a reálnych úrokových sadzieb. Rovnako cieľom bolo prediskutovať zmenu rizikovosti aktív v prípade týchto pomaly sa vyvíjajúcich trendov.

V prvej kapitole sme sa venovali prehľadu literatúry. Na začiatku kapitoly sme uviedli motiváciu, prečo je dôležité túto tému diskutovať. Následne sme vytvorili prehľad literatúry oceňovania aktív až po súčasnosť, pričom sme sa zamerali hlavne na zmeny v poslednom desaťročí. V Podkapitole 1.2 sme opísali dekompozíciu výnosov aktív, ktorá je dôležitá pri oceňovaní.

V druhej kapitole sme sa venovali rovnovážnej úrokovej miere, ktorá sa používa na aproximáciu reálnej úrokovej miery. Začali sme definíciou tejto miery od rôznych autorov, opísali sme jej makroekonomické základy a faktory, ktoré ovplyvnili jej pokles - demografické zmeny, pokles v miere rastu ekonomiky a pod. V Podkapitole 2.3 sme priblížili HLW odhad prirodzenej úrokovej miery [19].

V tretej kapitole sme sa zamerali na kvantifikovanie zmien v cyklicky upravenom pomere ceny akcie k zisku pomocou makroekonomických premenných. Na začiatku kapitoly sme prediskutovali vzťah medzi prirodzenou úrokovou mierou a rastom potenciálneho HDP. Zistili sme, že viac zo zmien oceňovacom pomere vieme vysvetliť pomocou poklesu v očakávaných výnosoch, resp. hlavne v poslednom desaťročí to bol pokles v prirodzenej úrokovej miere. Riziková prirážka sa v poslednom desaťročí veľmi nepodieľala na zmenách v oceňovacom pomere, pretože bola relatívne stabilná.

V štvrtej kapitole sme analyzovali vplyv perzistentných zmien v druhom, často používanom oceňovacom pomere - pomere ceny akcie k dividende, pomocou makroekonomických premenných. Rovnako ako v tretej kapitole, aj v tomto prípade sme dosiahli podobné výsledky, pričom vzťah medzi prirodzenou úrokovou mierou a oceňovacím pomerom bol ešte silnejší. Rast potenciálneho HDP v oboch prípadoch nevysvetlil veľa zo zmien v oceňovacích metrikách.

V piatej kapitole sme zosumarizovali získané výsledky. Rovnako sme predikovali vývoj očakávaných výnosov na najbližších päť rokov, pričom podľa našej predikcie očakávame

len mierne zníženie. V závere sme sa pozreli na vplyv týchto zmien na trh akcií a dlhopisov. Investori, ktorí budú očakávať zvýšenie cien akcií z dôvodu extrapolácie súčasného vývoja, môžu byť sklamaný, keďže neočakávame v najbližšom období výrazný rast. Pomaly sa pohybujúce trendy v očakávaných výnosoch sú tiež hlavným zdrojom rizika akcií. Nedostatok bezpečných aktív na trhu rovnako sťažuje investovanie.

Za prínos práce považujeme:

- prehľad doterajších štúdií v oblasti oceňovania aktív,
- poukázanie na dôležitosť zohľadnenia zmien aj v reálnych úrokových mierach pri oceňovaní aktív
- výsledky získané v tejto práci, ktoré môžu ďalej pomôcť pri skúmaní v tejto oblasti.

Najväčším prínosom pre autora bolo lepšie pochopenie oceňovania aktív, fungovania trhov rizikových aktív a v neposlednom rade aj ponorenie sa do témy, ktorá je vo svete aktív aktuálna.

Zoznam použitej literatúry

[1] AMMER, J. - CAMPBELL, J. Y. 1993. What moves the stock and bond markets? A variance decomposition for long-term asset return. In *The journal of finance* [online]. 1993, vol. XLVIII, no. 1. [cit. 20.02.2021]. Dostupné na internete: http://schwert.ssb.rochester.edu/f533/jf93_ca.pdf

[2] BAUER, M. D. - RUDEBUSCH, G. D. 2019. *Interest rates under falling stars.* [online]. Federal Reserve Bank of San Francisco. 2019. [cit. 05.03.2021]. Dostupné na internete: https://www.frbsf.org/economic-research/files/wp2017-16.pdf

[3] CAMPBELL, J. Y. 2019. Long-term investing in a nonstationary world: video. In *National Bureau of Economic research.* [online]. Cambridge, MA, 2019. [cit. 26.02.2021]. Dostupné na internete: https://vimeo.com/336844460

[4] CAMPBELL, J. Y. - VICEIRA, L. M. 2001. *Strategic Asset Allocation: Portfolio choice for long-term investors.* [online]. Durham: Duke's Fuqua School of business, 2001. [cit. 26.01.2021]. Dostupné na internete: https://faculty.fuqua.duke.edu/ charvey/Teaching/BA453_2006/Campbell_Viceira.pdf

[5] CIESLAK, A. - POVALA, P. 2015. Expected returns in treasury bonds. In *Review of financial studies* [online]. 2015, vol. 28, 2859 - 2901 p. [cit. 05.03.2021]. Dostupné na internete: https://pavol.povala.com/publication/2015_journal_cieslak_povala_rfs/2015_journal_cieslak_povala_rfs.pdf

[6] COCHRANE, J. H. *Return predictability and volatility.* [online]. [cit. 22.01.2021]. Dostupné na internete: https://static1.squarespace.com/static/5e6033a4ea02d801f37e15bb/t/5f62a5b955101d0ecc48f08f/1600300474781/mooc_time_series_overheads.pdf

[7] COIBON, O. - GORODNICHENKO, Y. - ULATE, M. 2018. The cyclical sensitivity in estimates of potential output. In *Brookings papers on economic activity* [online]. 2018. [cit. 12.04.2021]. Dostupné na internete: https://www.brookings.edu/wp-content/uploads/2018/09/Coibion-et-al_final-draft.pdf

[8] Congressional budget office. 2021. Historical data and economic projections: dáta. [online]. 2021. [cit. 31.03.2021]. Dostupné na internete: https://www.cbo.gov/system/files/2021-02/55022-2021-02-historicaleconomicdata.zip

[9] DAMODARAN, A. 2021. Historical implied equity risk premiums: data. [online]. NYU Stern school of business. 2021. [cit. 02.04.2021]. Dostupné na internete: http://people.stern.nyu.edu/adamodar/New_Home_Page/datafile/histimpl.html

[10] Euroekonóm.sk. 2021. 10 najdôležitejších ekonomických kríz v histórii ľudstva a kríza v roku 2020. [online]. 2021. [cit. 12.04.2021]. Dostupné na internete: https://www.euroekonom.sk/ekonomika/hospodarska-kriza/10-najdolezitejsich-ekonomickych-kriz-v-novodobej-historii-ludstva/

[11] Federal Reserve Bank of St. Louis. Long-term government bonds yields: 10 year: Main (Including benchmark): dáta. [online]. [cit. 28.02.2021]. Dostupné na internete: https://fred.stlouisfed.org/searchresults?st=government%20bonds%2010Y%20yieldt=10-year%3Bgovernment%3Bquarterlyob=srod=desctypes=gen;

[12] Fidelity. Bond prices, rates, and yields. [online]. [cit. 20.04.2021]. Dostupné na internete: https://www.fidelity.com/learning-center/investment-products/fixed-income-bonds/bond-prices-rates-yields

[13] FIEDLER, S. et al. 2018. Growth prospects, the natural interest rate, and monetary policy. In *Monetary dialogue November 2018*. [online]. European Parliament, 2018. [cit. 07.04.2021]. Dostupné na internete: https://www.europarl.europa.eu/cmsdata/157015/KIEL%20final%20publication.pdf

[14] GILCHRIST, S. 2013. Lecture 4: Campbell - Shiller decomposition: prednáška. [online]. Boston: Boston University and NBER, 2013. [cit. 23.01.2021]. Dostupné na internete: http://people.bu.edu/sgilchri/teaching/EC%20745%20Fall%202013/Lecture%20Slides/lecture4_campbell_shiller_decomp.pdf

[15] GOMEZ, M. 2021. Discount rates: prednáška. [online]. 2021. [cit. 16.02.2021]. Dostupné na internete: https://www.matthieugomez.com/files/GR6808/discountrates.pdf

[16] GONZÁLEZ-RIVERA, G. Vector Autoregression. In *Encyclopedia.com*. [online]. [cit. 20.02.2021]. Dostupné na internete: https://www.encyclopedia.com/social-sciences/applied-and-social-sciences-magazines/vector-autoregression

[17] HAYES, A. 2020. Gordon growth model. In *Investopedia.com*. [online]. 2020. [cit. 23.01.2021]. Dostupné na internete: https://www.investopedia.com/terms/g/gordongrowthmodel.asp

[18] HOLSTON, K. - LAUBACH, T. - WILLIAMS, J. C. 2020. *Adapting the Laubach and Williams and Holston, Laubach, and Williams models to the COVID-19 pandemic*. [online]. Federal Reserve Bank of New York, 2020. [cit. 24.02.2021]. Dostupné na internete: https://www.newyorkfed.org/medialibrary/media/research/policy/rstar/LW_HLW_COVID_note

[19] HOLSTON, K. - LAUBACH, T. - WILLIAMS, J. C. 2020. *Measuring the natural rate of interest*. [online]. Federal Reserve Bank of New York. 2020. [cit. 26.01.2021]. Dostupné na internete: https://www.newyorkfed.org/research/policy/rstar

[20] HOLSTON, K. - LAUBACH, T. - WILLIAMS, J. C. 2016. Measuring the natural rate of interest: International trends and determinants. In *Journal of International Economics 108*. [online]. 2016, no. 1, 39-75p. [cit. 22.01.2021]. Dostupné na internete: https://www.frbsf.org/economic-research/files/wp2016-11.pdf

[21] HONG, S. - SHELL, H. G. 2019. Factors behind the decline in the U.S. natural rate of interest. In *Federal Reserve Bank of St. Louis*. [online]. 2019, no. 11. [cit. 23.02.2021]. Dostupné na internete: https://research.stlouisfed.org/publications/economic-synopses/2019/04/19/factors-behind-the-decline-in-the-u-s-natural-rate-of-interest: :text=Impact%20on%20the%20Natural%20Rate,available%20workers%20in%20an%20economy.

[22] HONG, S - SHELL, H. G. 2019. The global decline of the natural rate of interest and implications for monetary policy. In *Federal Reserve Bank of St. Louis*. [online]. 2019, no. 4. [cit. 24.02.2021]. Dostupné na internete: https://research.stlouisfed.org/publications/economic-synopses/2019/02/01/the-global-decline-of-the-natural-rate-of-interest-and-implications-for-monetary-policy: :text=A%20declining%20natural%20rate%20of%20interest%20reduces%20the%20ability%20of,for%20designing%20effective%20monetary%20policy.

[23] CHEN, J. 2021. Mean reversion. In *Investopedia.com*. [online]. 2021. [cit. 10.02.2021]. Dostupné na internete: https://www.investopedia.com/terms/m/meanreversion.asp

[24] International monetary fund. 2020. World economic outlook database - Canada, UK, USA: data. [online]. 2020. [cit. 01.03.2021]. Dostupné na internete: https://www.imf.org/en/Publications/WEO/weo-database/2020/October/weo-report?c=156,112,111,s=NGDPD,GGXWDN_NGDP,GGXWDG_NGDP,sy=2018ey=2021ssm=0scsm=1scc=0ssd=1ssc=0sic=0sort=countryds=.br=1

[25] International monetary fund. 2020. World economic outlook database - Euro area, world: data. [online]. 2020. [cit. 01.03.2021]. Dostupné na internete: https://www.imf.org/en/Publications/WEO/weo-database/2020/October/weo-report?a=1c=001,163,119,s=NGDPD,GGXWDN_NGDP,GGXWDG_NGDP,sy=2018ey=2021ssm=0scsm=1scc=0ssd=1ssc=0sic=0sort=countryds=.br=1

[26] Investopedia.com. 2019. What do constantly low bond yields mean for the stock market?. [online]. 2019. [cit. 20.04.2021]. Dostupné na internete: https://www.investopedia.com/ask/answers/061715/how-can-bond-yield-influence-stock-market.asp

[27] KOIJEN, R. S. J. - VAN NIEUWERBURGH, S. 2019. Section 1: Return predictability and the term structure of returns: prednáška. [online]. 2019. [cit. 24.01.2021]. Dostupné na internete: https://koijen.net/uploads/3/4/4/7/34470013/week1_returnpredictability.pdf

[28] LANE, P. R. 2019. Determinants of the real interest rates. [online]. European Central Bank, 2019. [cit. 23.02.2021]. Dostupné na internete:

https://www.ecb.europa.eu/press/key/date/2019/html/ecb.sp191128_1 de8e7283e6 .en.html

[29] LANSING, K. J. 2020. Assessing recent stock market valuation with macro data. In *FRBSF Economic letter*. [online]. 2020, no. 31. [cit. 22.01.2021]. Dostupné na internete: https://www.frbsf.org/economic-research/publications/economic-letter/2020/october/assessing-recent-stock-market-valuation-with-macro-data/

[30] LANSING, K. J. 2017. Stock market valuation and the macroeconomy. In *FRBSF Economic letter*. [online]. 2017, no. 33. [cit. 22.01.2021]. Dostupné na internete: https://www.frbsf.org/economic-research/publications/economic-letter/2017/november/stock-market-valuation-and-macroeconomy/

[31] LETTAU, M. - VAN NIEUWERBURGH, S. 2007. Reconciling the return predictability. In *Review of financial studies*. [online]. 2007. [cit. 24.01.2021]. Dostupné na internete: http://people.stern.nyu.edu/svnieuwe/pdfs/LVN_break.pdf

[32] MasterClass. 2020. Economics 101: What is potential GDP and why does it matter in business and economics?. [online]. 2020. [cit. 06.04.2021]. Dostupné na internete: https://www.masterclass.com/articles/economics-101-what-is-potential-gdp-and-why-does-it-matter-in-business-and-economicswhat-is-potential-gdp

[33] Merriam-Webster.com. Definition of persistent: slovník. [online]. [cit. 23.01.2021]. Dostupné na internete: https://www.merriam-webster.com/dictionary/persistent

[34] MONACHE, D. D. - PETRELLA, I. - VENDITTI, F. 2020. *Price dividend ratio and long-run stock returns: a score driven state space model*. [online]. 2020. [cit. 20.01.2021]. Dostupné na internete: https://warwick.ac.uk/fac/soc/wbs/subjects/finance/mpf/working-papers/emf_wp_29.pdf

[35] OECD. 2001. Potential gross domestic product (GDP). In *Glossary of statistical terms*. [online]. 2001. [cit. 06.04.2021]. Dostupné na internete: https://stats.oecd.org/glossary/detail.asp?ID=2094

[36] POWELL, T. - SHEINER, L. - WESSEL, D. 2021. What is potential GDP, and why is it so controversial right now?. In *Brookings*. [online]. 2021. [cit. 06.04.2021]. Dostupné na internete: https://www.brookings.edu/blog/up-front/2021/02/22/what-is-potential-gdp-and-why-is-it-so-controversial-right-now/: :text=Potential%20GDP%20is%20a%20theoretical,steady%20growth%20and%20stable%20inflation.

[37] SHILLER, R. U.S. Stock market 1871-present and CAPE ratio: dáta. [online]. [cit. 18.03.2021]. Dostupné na internete: http://www.econ.yale.edu/ shiller/data-/ie_data.xls

[38] SCHWERT, W. Introduction. [online]. [cit. 24.01.2021]. Dostupné na internete: http://schwert.ssb.rochester.edu/f533/hood_cs.htm

[39] STEHLÍKOVÁ, B. 2020. Úvod, základné pojmy, testovanie bieleho šumu: prednáška. [online]. Bratislava: FMFI UK, 2020. [cit. 17.03.2021]. Dostupné na internete: http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/cr20/slajdy/cr01.pdf

[40] Trading Economics. 2020. Government debt: data. [online]. 2020. [cit. 01.03.2021]. Dostupné na internete: https://tradingeconomics.com/country-list/government-debt

[41] WILLIAMS, J. C. 2003. The natural rate of interest. In *FRBSF Economic letter*. [online]. 2003, no. 32. [cit. 22.01.2021]. Dostupné na internete: https://www.frbsf.org/economic-research/publications/economic-letter/2003/october/the-natural-rate-of-interest/subhead1

[42] ŽELEZŇÁKOVÁ, E. 2017. Korelační analýza v systému STATISTICA"bakalárska práca. [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2017, 57s. [cit. 18.04.2021]. Dostupné na internete: https://is.muni.cz/th/s073r/BPEsterZeleznakova.pdf

Príloha A

Odvodenie dekompozície výnosov aktív od Gordonovho modelu rastu, cez Campbell-Shiller dekompozíciu až po úpravu dekompozície M.Lettau a S. Van Nieuwerburgh. Budeme vychádzať hlavne z [14], [15] a [31]. Naším prínosom pri tomto odvodení je nadväznosť jednotlivých vzorcov, ich prepojenie medzi sebou a komentár pri jednotlivých krokoch.

Ako sme už spomenuli v Kapitole 1, Gordonov model rastu je definovaný ako

$$\frac{D}{P} = r - g, \tag{A.1}$$

kde $\frac{D}{P}$ je pomer dividendy k cene akcie, r je konštantná diskontná miera a g je konštantná miera rastu dividend. Pomer dividendy k cene akcie budeme označovať aj PD_t, pričom platí $PD_t = -DP_t$.

Začneme s definíciou výnosov:

$$1 + R_{t+1} = \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t} \tag{A.2}$$

Následne si túto definíciu výnosov upravíme do požadovaného tvaru.

$$1 + R_{t+1} = \frac{P_{t+1}}{P_{t+1}} \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t} \frac{D_{t+1} D_t}{D_{t+1} D_t} = \frac{D_{t+1}}{D_t} \frac{P_{t+1} D_t}{D_{t+1} P_t} \left(1 + \frac{D_{t+1}}{P_{t+1}}\right)$$

$$1 + R_{t+1} = \frac{D_{t+1}}{D_t} \frac{PD_{t+1}}{PD_t} \left(1 + \frac{1}{PD_{t+1}}\right)$$

Aplikujeme na obe strany rovnice logaritmus.

$$\log(1 + R_{t+1}) = \log\left(\frac{D_{t+1}}{D_t}\right) + \log\left(\frac{PD_{t+1}}{PD_t}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{PD_{t+1}}\right)$$

$$\log\left(1 + \frac{1}{PD_{t+1}}\right) = \log(1 + R_{t+1}) - \log\left(\frac{D_{t+1}}{D_t}\right) - \log\left(\frac{PD_{t+1}}{PD_t}\right)$$

Označíme: $pd_t = \log \frac{P_t}{D_t}$, $r_{t+1} = \log(1 + R_{t+1})$, $d_{t+1} = \log(D_{t+1})$, $p_{t+1} = \log(P_{t+1})$.

$$\log(1 + \exp(d_{t+1} - p_{t+1})) = r_{t+1} - (d_{t+1} - d_t) - (pd_{t+1} - pd_t)$$

$$\log(1 + \exp(d_{t+1} - p_{t+1})) = r_{t+1} - \Delta d_{t+1} - (pd_{t+1} - pd_t)$$

$$pd_t = \Delta d_{t+1} - r_{t+1} + pd_{t+1} + \log(1 + \exp(d_{t+1} - p_{t+1})) \tag{A.3}$$

Urobíme prvú Taylorovú aproximáciu funkcie $f(x) = \log(1 + \exp(x))$ v okolí bodu $x = \bar{d} - \bar{p}$.

Výsledkom je:

$$\log(1 + \exp(d_{t+1} - p_{t+1})) \approx k + (1 - \rho)(d_{t+1} - p_{t+1}), \tag{A.4}$$

kde

$$\rho = \frac{1}{1 + \exp(\overline{d - p})}$$
$$k = -\log\rho + (1 - \rho)\log\left(\frac{1}{\rho} - 1\right)$$

Dosadíme aproximáciu funkcie (A.4) do (A.3).

$$pd_t = \Delta d_{t+1} - r_{t+1} + pd_{t+1} + k + (1 - \rho)(d_{t+1} - p_{t+1})$$

$$pd_t = \Delta d_{t+1} - r_{t+1} + k + \rho(p_{t+1} - d_{t+1}) \tag{A.5}$$

Iterovaním vpred dostaneme:

$$\begin{aligned} pd_t &= \Delta d_{t+1} - r_{t+1} + k + \rho(\Delta d_{t+2} - r_{t+2} + k + \rho(p_{t+2} - d_{t+2})) \\ &= \sum_{j=0}^{K} \rho^j [\Delta d_{t+j+1} - r_{t+j+1}] + \sum_{j=0}^{K} \rho^j k + \rho^K (p_{t+K} - d_{t+K}) \\ &\Rightarrow K \to \infty \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j [\Delta d_{t+j+1} - r_{t+j+1}] + \frac{k}{1 - \rho} \end{aligned}$$

Táto Campbell-Shiller dekompozícia platí ex-post, ale aj ex-ante (v očakávaniach):

$$pd_t = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j E_t[\Delta d_{t+j+1}] - \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j E_t[r_{t+j+1}] \tag{A.6}$$

Vráťme sa k pomeru dividendy k cene akcie (A.5). Rovnako aj táto rovnica platí ex-ante.

$$pd_t = E_t[\Delta d_{t+1}] - E_t[r_{t+1}] + k + \rho E_t[p_{t+1} - d_{t+1}] \tag{A.7}$$

Spojením (A.5) a (A.7) dostaneme:

$$\begin{aligned} \Delta d_{t+1} - r_{t+1} + k + \rho(p_{t+1} - d_{t+1}) &= E_t[\Delta d_{t+1}] - E_t[r_{t+1}] + k + \rho E_t[p_{t+1} - d_{t+1}] \\ r_{t+1} - E_t[r_{t+1}] &= \Delta d_{t+1} - E_t[\Delta d_{t+1}] + \rho((p_{t+1} - d_{t+1}) - E_t[p_{t+1} - d_{t+1}]) \end{aligned}$$

Pomocou Campbell-Shiller dekompozície (A.6) vieme očakávania v pomere ceny akcie k dividende zapísať ako očakávania v budúcom dividendovom raste a očakávania v budúcich očakávaných výnosoch.

$$r_{t+1} - E_t[r_{t+1}] = \Delta d_{t+1} - E_t[\Delta d_{t+1}] + (E_{t+1} - E_t)\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j \Delta d_{t+j+1} - (E_{t+1} - E_t)\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{t+j+1} \quad \text{(A.8)}$$

M.Lettau a S. Van Nieuwerburgh [31] rozšírili Campbell-Shiller dekompozíciu zavedením predpokladu,že ustálené stavy miery rastu dividend a výnosov sa môžu meniť v čase.
Definícia pomeru dividendy a ceny:

$$dp_t = \sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1}[r_{t+j} - \Delta d_{t+j}].$$

Rovnako táto definícia platí aj v očakávaniach.

$$dp_t = E_t\sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1}[r_{t+1} - \Delta d_{t+j}]$$

Na základe tejto definície Campbell a Shiller odvodili dekompozíciu, v ktorej stochastická zložka závisí na očakávaných budúcich odchýlkach výnosov a rastu dividend od ich ustáleného stavu.

$$dp_t = \overline{dp} + E_t\sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1}[(r_{t+j} - \overline{r}) - (\Delta d_{t+j} - \overline{d})], \quad \text{(A.9)}$$

kde $\rho = (1 + \exp(\overline{dp}))^{-1}$ a $\overline{r}, \overline{d}, \overline{dp}$ označujú stredné hodnoty očakávaných výnosov, miery rastu dividend a pomeru dividendy k cene akcie.
Lettau a van Nieuwerburgh pridali dodatočný predpoklad, že ustálené stavy musia byť konštantné len v očakávaniach, ale môžu sa neočakávane meniť, resp. sú martingaly $E_t\overline{r}_{t+j} = \overline{r}_t$, $E_t\overline{d}_{t+j} = \overline{d}_t$, $E_t\overline{dp}_{t+j} = \overline{dp}_t$. Po zavedení tohto predpokladu upravili (A.9) do nasledujúceho tvaru:

$$dp_t = \overline{dp}_t + E_t\sum_{j=1}^{\infty}{\rho_t}^{j-1}[(r_{t+j} - \overline{r}_t) - (\Delta d_{t+j} - \overline{d}_t)], \quad \text{(A.10)}$$

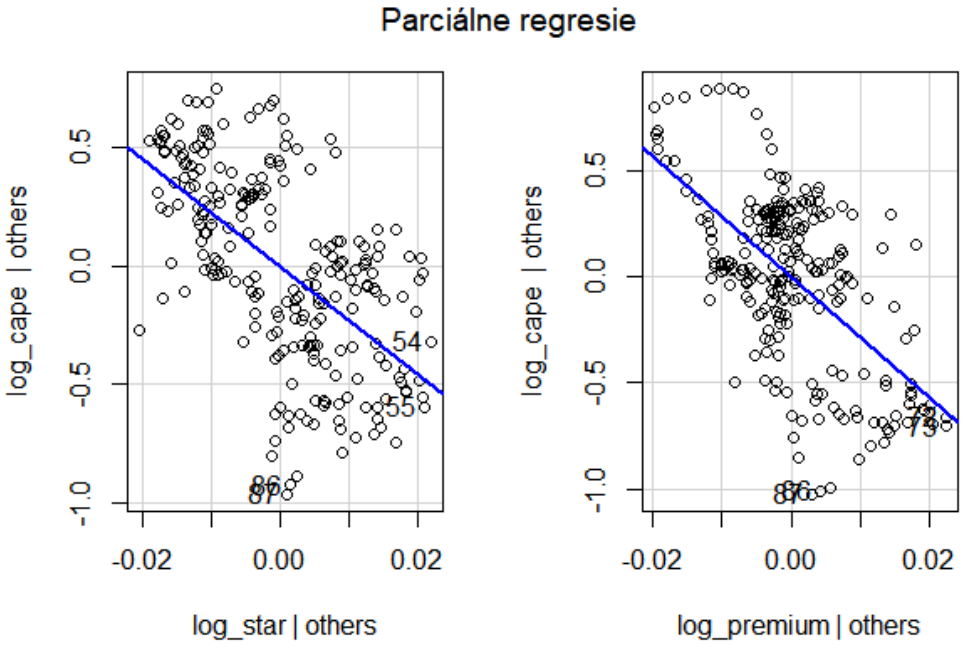
kde $\rho_t = (1 + \exp(\overline{dp}_t))^{-1}$. $\overline{dp}_t$ v tomto prípade už nie je viac konštanta, nie len sa mení v čase, ale je aj nestacionárna.

Príloha B

V Tabuľke č.3 je zobrazený Spearmanov korelačný koeficient medzi jednotlivými makroekonomickými premennými, ktoré sme používali v našej empirickej analýze.

Tabuľka 3: Spearmanov korelačný koeficient medzi makroekonomickými premennými. (zdroj: vlastné spracovanie)

	r-star	potenciálne HDP	riziková prirážka
r-star	1	-	-
potenciálne HDP	0.8517295	1	-
riziková prirážka	-0.4814120	-0.5803124	1



Obr. B.15: Parciálne regresie modelu pre CAPE, ktorý nezahŕňa rast potenciálneho HDP. (zdroj: vlastné spracovanie)

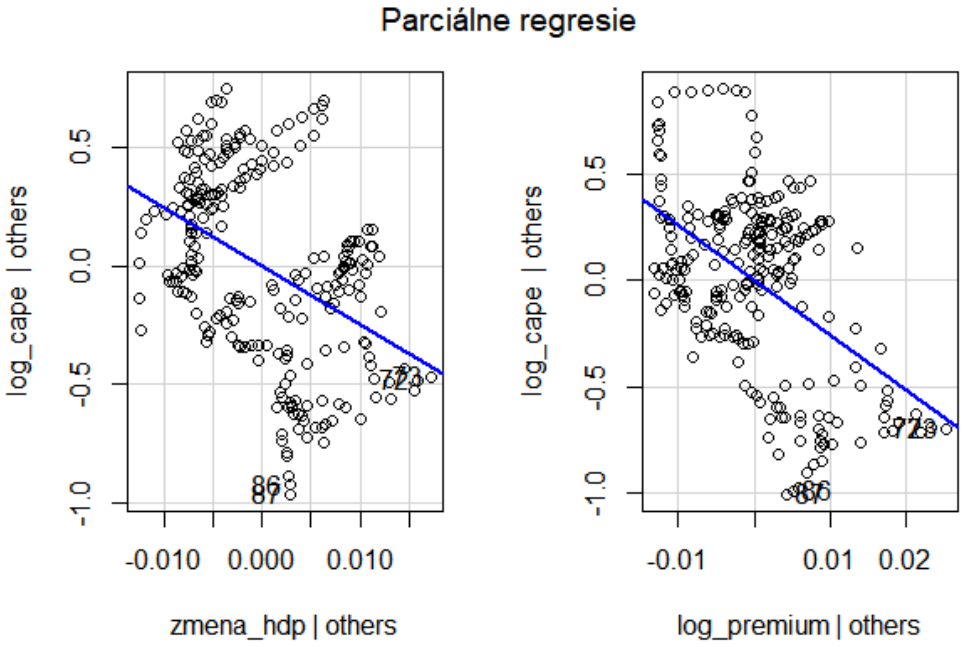
Na obrázku č.B.15 sú zobrazené parciálne regresie pre nasledujúci model, ktorý nezahŕňa rast potenciálneho HDP.

$$cape = \beta_0 + \beta_1 * r^i + \beta_2 * r^r + \epsilon \tag{B.1}$$

Výsledkom je regresný model s nasledujúcimi parametrami:

$$cape = 4.7262 - 22.6135 * r^i - 28.3625 * r^r \tag{B.2}$$

Obe premenné v regresnom modeli sa ukázali ako štatisticky významné. Koeficient determinácie je rovný $R^2 = 0.417$ a upravený koeficient determinácie $\bar{R}^2 = 0.412$. Rovnako aj model bol zvolený správne (p-hodnota < 2.2e-16).



Obr. B.16: Parciálne regresie modelu pre CAPE, ktorý nezahŕňa prirodzenú úrokovú mieru. (zdroj: vlastné spracovanie)

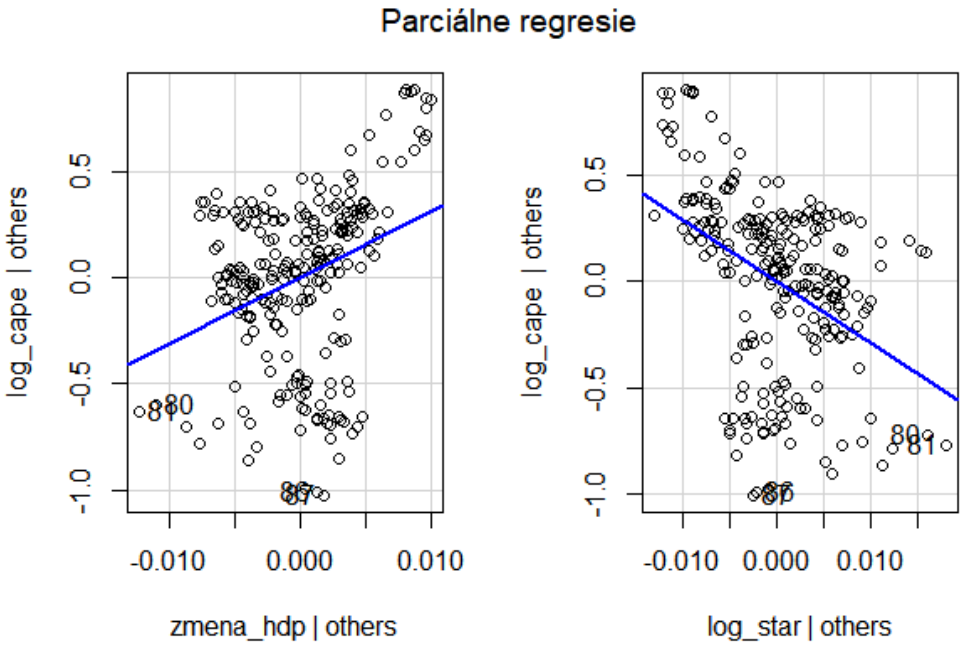
Na obrázku č.B.16 sú zobrazené parciálne regresie pre nasledujúci model, ktorý nezahŕňa prirodzenú úrokovú mieru.

$$cape = \beta_0 + \beta_1 * \Delta d + \beta_2 * r^r + \epsilon \tag{B.3}$$

Výsledkom je regresný model s nasledujúcimi parametrami:

$$cape = 4.7226 - 24.4412 * \Delta d - 25.6948 * r^r \tag{B.4}$$

Obe premenné v regresnom modeli sa ukázali ako štatisticky významné. Koeficient determinácie je rovný $R^2 = 0.2528$ a upravený koeficient determinácie $\bar{R}^2 = 0.2465$. Rovnako aj model bol zvolený správne (p-hodnota = 1.342e-15).



Obr. B.17: Parciálne regresie modelu pre CAPE, ktorý nezahŕňa rizikovú prirážku. (zdroj: vlastné spracovanie)

Na obrázku č.B.17 sú zobrazené parciálne regresie pre nasledujúci model, ktorý nezahŕňa rizikovú prirážku.

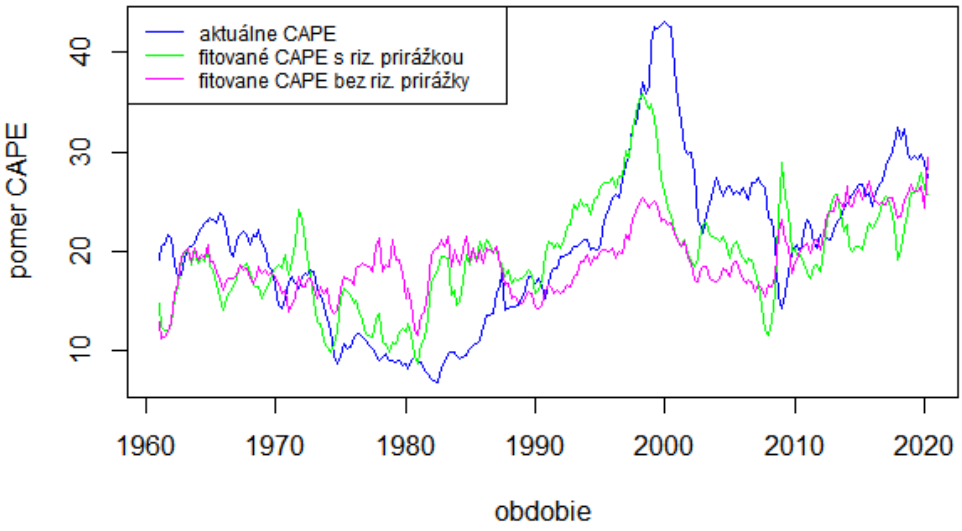
$$cape = \beta_0 + \beta_1 * \Delta d + \beta_2 * r^i + \epsilon \tag{B.5}$$

Výsledkom je regresný model s nasledujúcimi parametrami:

$$cape = 2.8093 + 30.9474 * \Delta d - 28.8204 * r^i \tag{B.6}$$

Obe premenné v regresnom modeli sa ukázali ako štatisticky významné. Koeficient determinácie je rovný $R^2 = 0.1847$ a upravený koeficient determinácie $\bar{R}^2 = 0.1778$. Rovnako aj model bol zvolený správne (p-hodnota = 3.779e-11).

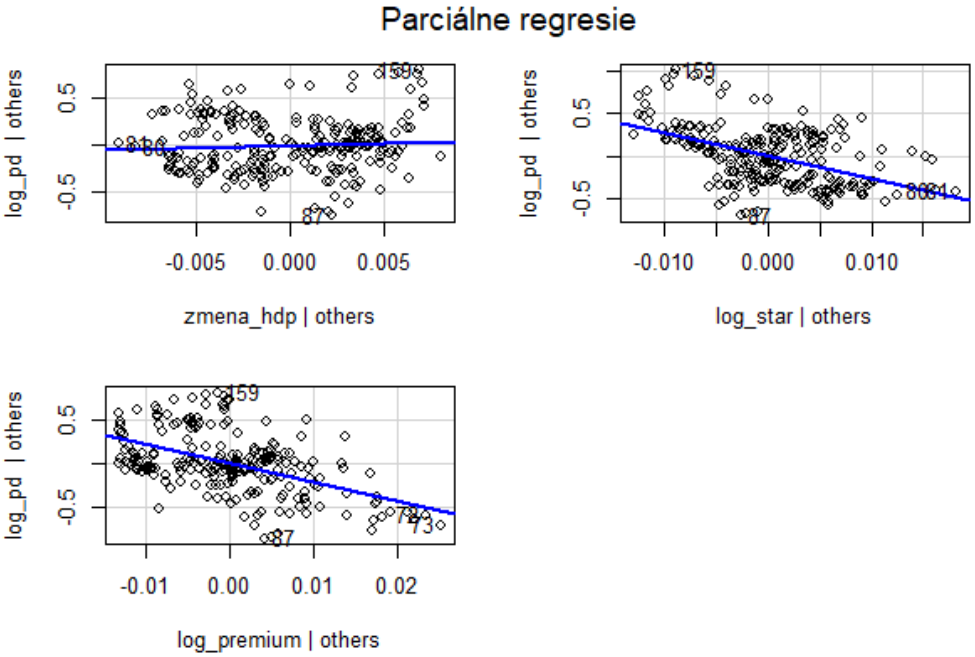
Na obrázku č.B.18 je zobrazené porovnanie pôvodných hodnôt CAPE (modrá čiara), fitovaných hodnôt CAPE, ktoré zahŕňajú zmeny vo všetkých troch premenných (zelená čiara) a fitované hodnoty, ktoré nezahŕňajú zmeny v rizikovej prirážke (fialová čiara).



Obr. B.18: Porovnanie CAPE - prípad s a bez zahrnutia rizikovej prirážky. (zdroj: vlastné spracovanie)

Príloha C

Na obrázku č.C.19 môžeme vidieť parciálne regresie regresného modelu PD, ktorý zahŕňa všetky makroekonomické premenné.



Obr. C.19: Parciálne regresie pre regresný model PD, ktorý zahŕňa všetky makroekonomické premenné. (zdroj: vlastné spracovanie)

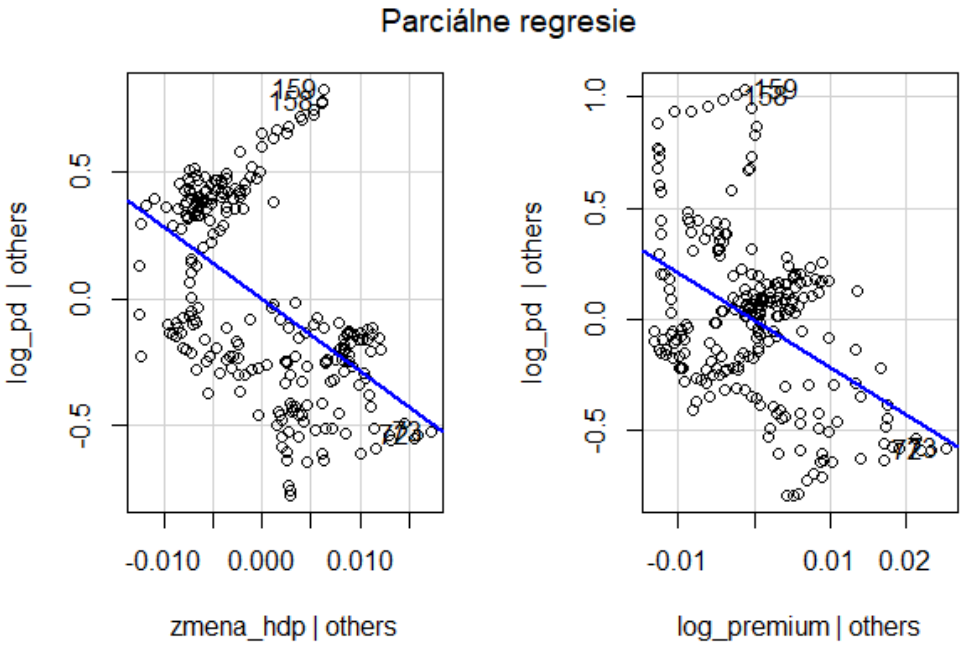
Na obrázku č.C.20 sú zobrazené parciálne regresie pre nasledujúci model, ktorý nezahŕňa prirodzenú úrokovú mieru.

$$pd = \beta_0 + \beta_1 * \Delta d + \beta_2 * r^r + \epsilon \tag{C.1}$$

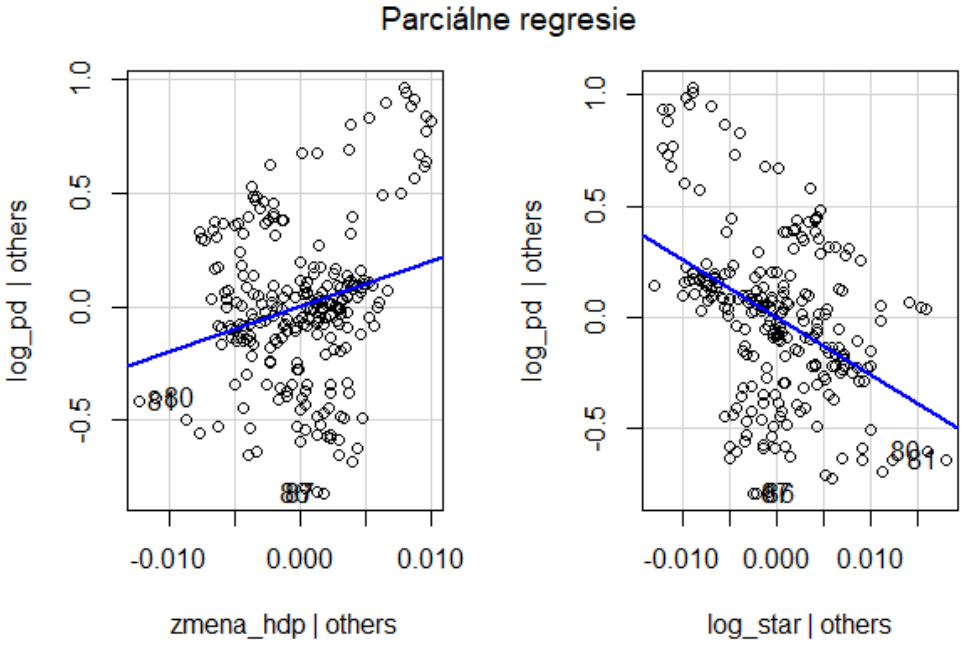
Výsledkom je regresný model s nasledujúcimi parametrami:

$$pd = 5.3298 - 28.3524 * \Delta d - 21.3086 * r^r \tag{C.2}$$

Obe premenné v regresnom modeli sa ukázali ako štatisticky významné. Koeficient determinácie je rovný $R^2 = 0.2715$ a upravený koeficient determinácie $\bar{R}^2 = 0.2653$. Rovnako aj model bol zvolený správne (p-hodnota $<$ 2.2e-16).



Obr. C.20: Parciálne regresie pre regresný model PD, ktorý nezahŕňa r-star. (zdroj: vlastné spracovanie)



Obr. C.21: Parciálne regresie pre regresný model PD, ktorý nezahŕňa rizikovú prirážku. (zdroj: vlastné spracovanie)

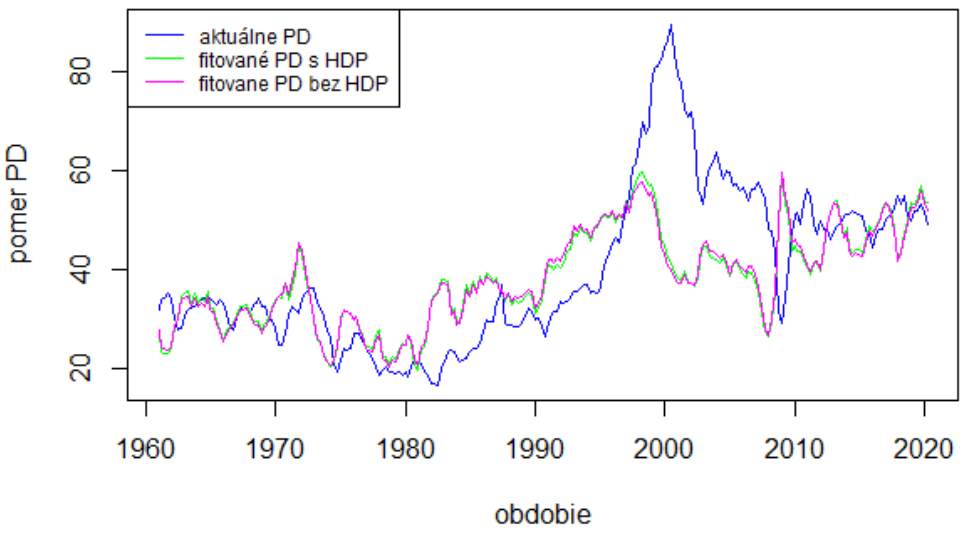
Na obrázku č.C.21 sú zobrazené parciálne regresie pre nasledujúci model, ktorý nezahŕňa rizikovú prirážku.

$$pd = \beta_0 + \beta_1 * \Delta d + \beta_2 * r^i + \epsilon \tag{C.3}$$

Výsledkom je regresný model s nasledujúcimi parametrami:

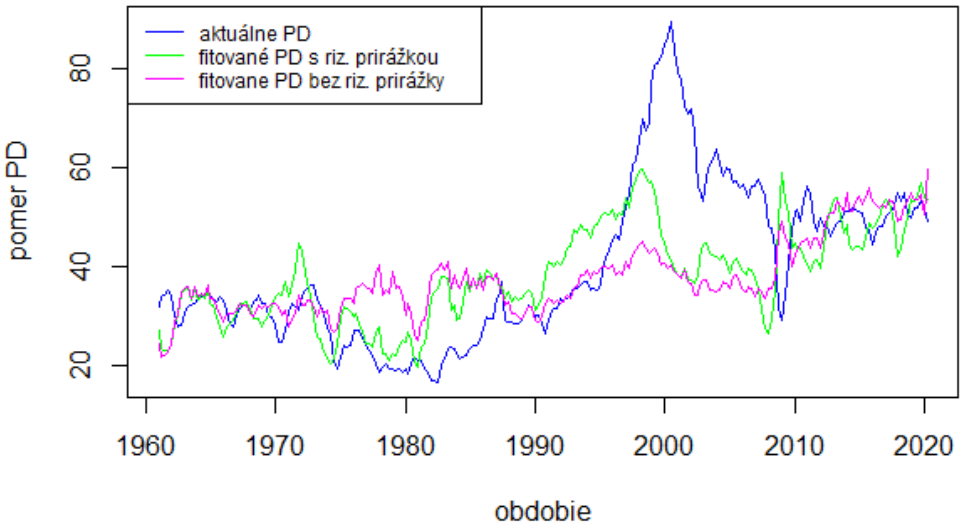
$$pd = 3.72178 + 20.16243 * \Delta d - 25.91865 * r^i \tag{C.4}$$

Obe premenné v regresnom modeli sa ukázali ako štatisticky významné. Koeficient determinácie je rovný $R^2 = 0.2415$ a upravený koeficient determinácie $\bar{R}^2 = 0.2350$. Rovnako aj model bol zvolený správne (p-hodnota = 7.897e-15).
Na obrázku č.C.22 je zobrazené porovnanie pôvodných hodnôt PD (modrá čiara), fitovaných hodnôt PD, ktoré zahŕňajú zmeny vo všetkých troch premenných (zelená čiara) a fitované hodnoty, ktoré nezahŕňajú zmeny v raste potenciálneho HDP (fialová čiara).



Obr. C.22: Porovnanie PD - prípad s a bez zahrnutia HDP. (zdroj: vlastné spracovanie)

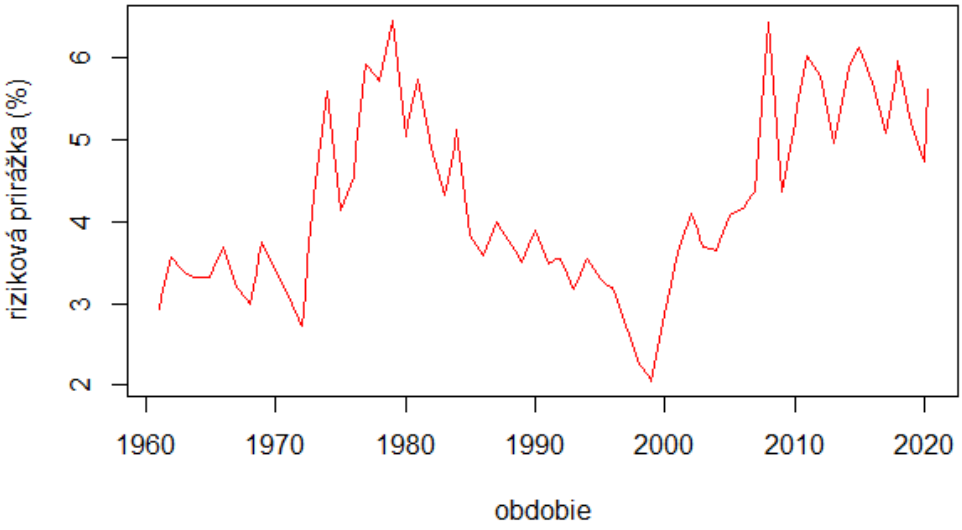
Na obrázku č.C.23 je zobrazené porovnanie pôvodných hodnôt PD (modrá čiara), fitovaných hodnôt PD, ktoré zahŕňajú zmeny vo všetkých troch premenných (zelená čiara) a fitované hodnoty, ktoré nezahŕňajú zmeny v rizikovej prirážke (fialová čiara).



Obr. C.23: Porovnanie PD- prípad s a bez zahrnutia rizikovej prirážky. (zdroj: vlastné spracovanie)

Príloha D

Na obrázku č.13 môžeme vidieť odhad A. Damodarana [9] rizikovej prirážky od prvého kvartálu 1961 až do druhého kvartálu 2020.



Obr. D.24: Riziková prirážka. (zdroj: vlastné spracovanie na základe [9])

Príloha E

```
#####Korelacna a regresna analyza
###nacitanie dat
##CAPE
cape<-read.table("C:\\Users\\Miska\\Desktop\\CAPE.txt", header=TRUE)
##realne potencialne hdp
pot_hdp<-read.table("C:\\Users\\Miska\\Desktop\\pot_hdp_yoy.txt", header=TRUE)
##prirodzena urokova miera
r_star<-read.table("C:\\Users\\Miska\\Desktop\\real_time_r_star.txt", header=TRUE)
##rizikova prirazka
risk_premium<-read.table("C:\\Users\\Miska\\Desktop\\ierp.txt", header=TRUE)
##pd shiller
pd_shiller<-read.table("C:\\Users\\Miska\\Desktop\\pd_shiller.txt", header=TRUE)
##pd lettau odhadnute (my sme odhadli)
pd_lettau<-read.table("C:\\Users\\Miska\\Desktop\\pd_lettau.txt", header=TRUE)
attach(cape)
attach(pot_hdp)
attach(r_star)
attach(risk_premium)
attach(pd_shiller)
attach(pd_lettau)
#uprava datumu v datach
cape$Date<-as.Date(cape$Date)
pot_hdp$Date<-as.Date(pot_hdp$Date)
r_star$Date<-as.Date(r_star$Date)
risk_premium$Date<-as.Date(risk_premium$Date)

#####uprava dat na logaritmy
### realne potencialne hdp - year-on-year zmeny
zmena_hdp<-rep(0,length(r_star$US))
for (i in (1:length(r_star$US)))
{
  zmena_hdp[i]<-log(pot_hdp$real_pot_HDP[4+i]) - log(pot_hdp$real_pot_HDP[i])
}
##log CAPE - uprava na kvartalne data
zac<-seq(1,714,3)
kon<-seq(3,714,3)
quar_cape<-rep(0,length(r_star$US))
for (i in (1:length(r_star$US)))
{
  quar_cape[i]<-mean(cape$CAPE[zac[i]:kon[i]])
}
log_cape<-log(quar_cape)
##log PD - uprava na kvartalne data (Shiller)
zac<-seq(1,714,3)
kon<-seq(3,714,3)
```

```
quar_pd<-rep(0,length(r_star$US))
for (i in (1:length(r_star$US)))
{
  quar_pd[i]<-mean(pd_shiller$PD[zac[i]:kon[i]])
}
log_pd<-log(quar_pd)
###log PD - lettau odhad
log_pd_lettau<-log(pd_lettau$lettau)
##log r_star
log_star<-log(1+r_star$US/100)
##log rizikova prirazka
log_premium<-log(1+risk_premium$FCFE/100)
##log ocakavane vynosy
return<-(risk_premium$FCFE+r_star$US)/100
log_return<-log(1+return)

###############Korelacna analyza medzi makroekonomickymi premennymi################
###r-star a rast potencialneho hdp
cor(log_star,zmena_hdp, method = "spearman") ##0.8517295
#overenie pomocou cor.testu, ci je skutocne korelacny koeficient < 0
#testovanie normality
ks.test(log_star, "pnorm", mean = mean(log_star), sd=sqrt(var(log_star)))
#0.0003607<0.05 - zamietnutie normality
ks.test(zmena_hdp, "pnorm", mean = mean(zmena_hdp), sd=sqrt(var(zmena_hdp)))
#0.05497>0.05 - nezamietnutie normality
#korelacny test
cor.test(log_star, zmena_hdp, alternative = "greater", method = "spearman")
#2.2e-16<0.05 - Ho zamietame(korelacny koeficient je > 0)
#graf - vykreslenie zavislosti
plot(log_star, zmena_hdp, col ="blue", xlab = "r-star", ylab ="rast potencialneho HDP")

###r-star a rizikova prirazka
cor(log_star,log_premium, method = "spearman") ##-0.481412
#overenie pomocou cor.testu, ci je skutocne korelacny koeficient < 0
#testovanie normality
ks.test(log_star, "pnorm", mean = mean(log_star), sd=sqrt(var(log_star)))
#0.0003607<0.05 - zamietnutie normality
#Andersonov - Darlingov test normality (pouzili sme pri rizikovej prirazke,
lebo Kolmogorov -Smirnov test sa nemohol pouzit)
library(nortest)
ad.test(log_premium) #7.103e-13<0.05 - zamietnutie normality
#korelacny test
cor.test(log_star, log_premium, alternative = "less", method = "spearman", exact = FALSE)
#1.638e-15<0.05 - Ho zamietame(korelacny koeficient je < 0)
#graf - vykreslenie zavislosti
plot(log_star, log_premium, col ="blue", xlab = "r-star", ylab ="rizikova prirazka")

###rast realneho potencialneho HDP a rizikova prirazka
```

```
cor(zmena_hdp,log_premium, method = "spearman") ##-0.5803124
#overenie pomocou cor.testu, ci je skutocne korelacny koeficient < 0
#testovanie normality
ks.test(zmena_hdp, "pnorm", mean = mean(zmena_hdp), sd=sqrt(var(zmena_hdp)))
#0.05497>0.05 - nezamietnutie normality
#Andersonov - Darlingov test normality (pouzili sme pri rizikovej prirazke,
lebo Kolmogorov -Smirnov test sa nemohol pouzit)
ad.test(log_premium) #7.103e-13<0.05 - zamietnutie normality
#korelacny test
cor.test(zmena_hdp, log_premium, alternative = "less", method = "spearman", exact = FALSE)
#2.2e-16<0.05 - Ho zamietame(korelacny koeficient je < 0)
#graf - vykreslenie zavislosti
plot(zmena_hdp, log_premium, col ="blue", xlab = "rast potencialneho HDP",
ylab ="rizikova prirazka")

###############Analyza CAPE#####################################################
#####################Korelacna analyza#########################################
###log CAPE + rast potencialneho hdp
#korelacny koeficient
cor(log_cape,zmena_hdp, method = "spearman")  ##-0.1783245 (negativna korelacia)
#overenie pomocou cor.testu, ci je skutocne korelacny koeficient < 0
#testovanie normality
#Andersonov - Darlingov test normality (pouzili sme pri CAPE, lebo Kolmogorov -Smirnov test
sa nemohol pouzit)
ad.test(log_cape) #4.363e-10<0.05 - zamietnutie normality
ks.test(zmena_hdp, "pnorm", mean = mean(zmena_hdp), sd=sqrt(var(zmena_hdp)))
#0.05497>0.05 - nezamietnutie normality
#korelacny test
cor.test(log_cape, zmena_hdp, alternative = "less", method = "spearman", exact = FALSE)
#0.002901<0.05 - Ho zamietame(korelacny koeficient je <0)
#graf - vykreslenie zavislosti
plot(log_cape, zmena_hdp, col ="blue", xlab = "CAPE", ylab ="rast potencialneho HDP")

###log CAPE + r_star
#korelacny koeficient
cor(log_cape,log_star, method = "spearman")  ##-0.4041594 (negativna korelacia)
#overenie pomocou cor.testu, ci je skutocne korelacny koeficient < 0
#testovanie normality
#Andersonov - Darlingov test normality (pouzili sme pri CAPE, lebo Kolmogorov -Smirnov test
sa nemohol pouzit)
ad.test(log_cape) #4.363e-10<0.05 - zamietnutie normality
ks.test(log_star, "pnorm", mean = mean(log_star), sd=sqrt(var(log_star)))
#0.0003607<0.05 - zamietnutie normality
#korelacny test
cor.test(log_cape, log_star, alternative = "less", method = "spearman", exact = FALSE)
#4.561e-11<0.05 - Ho zamietame(korelacny koeficient je <0)
#graf - vykreslenie zavislosti
plot(log_cape, log_star, col ="blue", xlab = "CAPE", ylab ="r-star")
```

```
###log CAPE + rizikova prirazka
#korelacny koeficient
cor(log_cape,log_premium, method = "spearman")  ##-0.1974811 (negativna korelacia)
#overenie pomocou cor.testu, ci je skutocne korelacny koeficient < 0
#testovanie normality
#Andersonov - Darlingov test normality (pouzili sme, lebo Kolmogorov -Smirnov test
sa nemohol pouzit)
ad.test(log_cape) #4.363e-10<0.05 - zamietnutie normality
ad.test(log_premium) #7.103e-13<0.05 - zamietnutie normality
#korelacny test
cor.test(log_cape, log_premium, alternative = "less", method = "spearman", exact = FALSE)
#0.001104<0.05 - Ho zamietame(korelacny koeficient je <0)
#graf - vykreslenie zavislosti
plot(log_cape, log_premium, col ="blue", xlab = "CAPE", ylab ="rizikova prirazka")

###log CAPE + ocakavane vynosy
#korelacny koeficient
cor(log_cape,log_return, method = "spearman")  ##-0.6130519 ( silna negativna korelacia)
#overenie pomocou cor.testu, ci je skutocne korelacny koeficient < 0
#testovanie normality
#Andersonov - Darlingov test normality (pouzili sme pri CAPE, lebo Kolmogorov -Smirnov test
sa nemohol pouzit)
ad.test(log_cape) #4.363e-10<0.05 - zamietnutie normality
ks.test(log_return, "pnorm", mean = mean(log_return), sd=sqrt(var(log_return)))
#0.5276>0.05 - nezamietnutie normality
#korelacny test
cor.test(log_cape, log_return, alternative = "less", method = "spearman", exact = FALSE)
#2.2e-16<0.05 - Ho zamietame(korelacny koeficient je <0)
#graf - vykreslenie zavislosti
plot(log_cape, log_return, col ="blue", xlab = "CAPE", ylab ="o akavane vynosy")

###################Linearna regresia#########################################################################
####model log cape = b0 + b1*zmena_hdp + b2*r-star + b3*rizikova prirazka
#odhad bety
model<-lm(formula=log_cape~1+zmena_hdp + log_star + log_premium, x=TRUE)
summary(model)
### log cape = 4.442 + 13.094*zmena_hdp - 29.641*r-star - 26.221*rizikova prirazka
#R^2 = 0.4318 = 43.18\%
#adjusted R^2 = 0.4244925 = 42.45\%

####model log cape = b0 + b1*zmena_hdp + b2*r-star
#odhad bety
model1<-lm(formula=log_cape~1+zmena_hdp + log_star, x=TRUE)
summary(model1)
### log cape = 2.8093 + 30.9474*zmena_hdp - 28.8204*r-star
#R^2 = 0.1847393 = 18.47\%
#adjusted R^2 = 0.1778009 = 17.78\%
```

```
####model log cape = b0 + b1*r-star + b2*rizikova prirazka
#odhad bety
model2<-lm(formula=log_cape~1 + log_star + log_premium, x=TRUE)
summary(model2)
### log cape = 4.7262 -22.6135*r-star - 28.3625*rizikova prirazka
#R^2 = 0.417 = 41.7\%
#adjusted R^2 = 0.412 = 41.2\%

####model log cape = b0 + b1*zmena_hdp + b2*rizikova prirazka
#odhad bety
model3<-lm(formula=log_cape~1 + zmena_hdp + log_premium, x=TRUE)
summary(model3)
### log cape = 4.7226 -24.4412*zmena_hdp - 25.6948*rizikova prirazka
#R^2 = 0.2528 = 25.28\%
#adjusted R^2 = 0.2465 = 24.65\%

####model log cape = b0 + b1*zmena_hdp
#odhad bety
model4<-lm(formula=log_cape~1 + zmena_hdp, x=TRUE)
summary(model4)
### log cape = 3.11394 -5.91741*zmena_hdp
#R^2 = 0.01545 = 1.55\%
#adjusted R^2 = 0.01128 = 1.13\%

####model log cape = b0 + b1*rizikova prirazka
#odhad bety
model5<-lm(formula=log_cape~1 + log_premium, x=TRUE)
summary(model5)
### log cape = 3.4552 -12.4893*rizikova prirazka
#R^2 = 0.09186 = 9.19\%
#adjusted R^2 = 0.08801 = 8.8\%

####model log cape = b0 + b1*r-star
#odhad bety
model6<-lm(formula=log_cape~1 + log_star, x=TRUE)
summary(model6)
### log cape = 3.20992 -9.9515*r-star
#R^2 = 0.0917 = 9.17\%
#adjusted R^2 = 0.08785 = 8.79\%

######fitovanie pomocou prveho modelu, kde je zahrnute aj HDP
fit_cape2<-rep(0, length(r_star$US))
for (i in (1:length(r_star$US)))
{
  fit_cape2[i]<-model$coefficients[1] + model$coefficients[2]*zmena_hdp[i] +

  model$coefficients[3]*log_star[i] + model$coefficients[4]*log_premium[i]
```

```
}
f_cape2<-c(fit_cape2)
####vykreslenie cape a fitovane cape
plot(r_star$Date, quar_cape, type = "l", col = "red", xlab = "obdobie", ylab = "pomer CAPE")
lines(r_star$Date, exp(f_cape2), type = "l", col = "green")
legend("topright", c("aktualne CAPE", "fitovane CAPE"), lty = c(1,1) ,
col = c("red", "green"), cex = 0.75)

######fitovanie pomocou modelu, kde nie je zahrnute HDP
fit_cape3<-rep(0, length(r_star$US))
for (i in (1:length(r_star$US)))
{
  fit_cape3[i]<-model2$coefficients[1] + model2$coefficients[2]*log_star[i] +

  model2$coefficients[3]*log_premium[i]
}
f_cape3<-c(fit_cape3)

####vykreslenie cape a fitovane cape bez hdp
plot(r_star$Date, quar_cape, type = "l", col = "red", xlab = "obdobie", ylab = "pomer CAPE")
lines(r_star$Date, exp(f_cape3), type = "l", col = "green")
legend("topright", c("aktualne CAPE", "fitovane CAPE"), lty = c(1,1) ,
col = c("red", "green"), cex = 0.75)

####porovnanie (s hdp a bez hdp)
plot(r_star$Date, quar_cape, type = "l", col = "blue", xlab = "obdobie", ylab = "pomer CAPE")
lines(r_star$Date, exp(f_cape2), type = "l", col = "green")
lines(r_star$Date, exp(f_cape3), type = "l", col = "magenta")
legend("topleft", c("aktualne CAPE", "fitovane CAPE s HDP", "fitovane CAPE bez HDP"),
lty = c(1,1), col = c("blue","green", "magenta"), cex = 0.75)

####fitovanie pomocou modelu, kde nie je zahrnute r-star
fit_cape4<-rep(0, length(r_star$US))
for (i in (1:length(r_star$US)))
{
  fit_cape4[i]<-model3$coefficients[1] + model3$coefficients[2]*zmena_hdp[i] +

  model3$coefficients[3]*log_premium[i]
}
f_cape4<-c(fit_cape4)

####porovnanie (s r-star a bez r-star)
plot(r_star$Date, quar_cape, type = "l", col = "blue", xlab = "obdobie", ylab = "pomer CAPE")
lines(r_star$Date, exp(f_cape2), type = "l", col = "green")
lines(r_star$Date, exp(f_cape4), type = "l", col = "magenta")
legend("topleft", c("aktualne CAPE", "fitovane CAPE s r-star", "fitovane CAPE bez r-star"),
lty = c(1,1), col = c("blue", "green", "magenta"), cex = 0.75)
```

```
####fitovanie pomocou modelu, ktory nezahrna rizikovu prirazku
fit_cape5<-rep(0, length(r_star$US))
for (i in (1:length(r_star$US)))
{
  fit_cape5[i]<-model1$coefficients[1] + model1$coefficients[2]*zmena_hdp[i] +

  model1$coefficients[3]*log_star[i]
}
f_cape5<-c(fit_cape5)

####porovnanie (s riz. prirazkou a bez riz. prirazky)
plot(r_star$Date, quar_cape, type = "l", col = "blue", xlab = "obdobie", ylab = "pomer CAPE")
lines(r_star$Date, exp(f_cape2), type = "l", col = "green")
lines(r_star$Date, exp(f_cape5), type = "l", col = "magenta")
legend("topleft", c("aktualne CAPE", "fitovane CAPE s riz. prirazkou", "fitovane CAPE
bez riz. prirazky"), lty = c(1,1) , col = c("blue", "green", "magenta"), cex = 0.75)

###############Analyza Shiller PD#######################################################
####################Korelacna analyza#########################################
###log PD + rast potencialneho hdp
#korelacny koeficient
cor(log_pd,zmena_hdp, method = "spearman")  ##-0.3280008 (negativna korelacia)
#overenie pomocou cor.testu, ci je skutocne korelacny koeficient < 0
#testovanie normality
ks.test(log_pd, "pnorm", mean = mean(log_pd), sd=sqrt(var(log_pd)))
#0.01977<0.05 - zamietnutie normality
ks.test(zmena_hdp, "pnorm", mean = mean(zmena_hdp), sd=sqrt(var(zmena_hdp)))
#0.05497>0.05 - nezamietnutie normality
#korelacny test
cor.test(log_pd, zmena_hdp, alternative = "less", method = "spearman", exact = FALSE)
#1.125e-07<0.05 - Ho zamietame(korelacny koeficient je <0)
#graf - vykreslenie zavislosti
plot(log_pd, zmena_hdp, col ="blue", xlab = "PD", ylab ="rast potencialneho HDP")

###log PD + r_star
#korelacny koeficient
cor(log_pd,log_star, method = "spearman")  ##-0.5025171 (negativna korelacia)
#overenie pomocou cor.testu, ci je skutocne korelacny koeficient < 0
#testovanie normality
ks.test(log_pd, "pnorm", mean = mean(log_pd), sd=sqrt(var(log_pd)))
#0.01977<0.05 - zamietnutie normality
ks.test(log_star, "pnorm", mean = mean(log_star), sd=sqrt(var(log_star)))
#0.0003607<0.05 - zamietnutie normality
#korelacny test
cor.test(log_pd, log_star, alternative = "less", method = "spearman", exact = FALSE)
#2.2e-16<0.05 - Ho zamietame(korelacny koeficient je <0)
#graf - vykreslenie zavislosti
plot(log_pd, log_star, col ="blue", xlab = "PD", ylab ="r-star")
```

```
###log PD + rizikova prirazka
#korelacny koeficient
cor(log_pd,log_premium, method = "spearman")  ##-0.1224514 (negativna korelacia)
#overenie pomocou cor.testu, ci je skutocne korelacny koeficient < 0
#testovanie normality
#Andersonov - Darlingov test normality (pouzili sme, lebo Kolmogorov -Smirnov test
sa nemohol pouzit)
ks.test(log_pd, "pnorm", mean = mean(log_pd), sd=sqrt(var(log_pd)))
#0.01977<0.05 - zamietnutie normality
ad.test(log_premium) #7.103e-13<0.05 - zamietnutie normality
#korelacny test
cor.test(log_pd, log_premium, alternative = "less", method = "spearman", exact = FALSE)
#0.02963<0.05 - Ho zamietame(korelacny koeficient je <0)
#graf - vykreslenie zavislosti
plot(log_pd, log_premium, col ="blue", xlab = "PD", ylab ="rizikova prirazka")

###log PD + ocakavane vynosy
#korelacny koeficient
cor(log_pd,log_return, method = "spearman")  ##-0.6660535 ( silna negativna korelacia)
#overenie pomocou cor.testu, ci je skutocne korelacny koeficient < 0
#testovanie normality
ks.test(log_pd, "pnorm", mean = mean(log_pd), sd=sqrt(var(log_pd)))
#0.01977<0.05 - zamietnutie normality
ks.test(log_return, "pnorm", mean = mean(log_return), sd=sqrt(var(log_return)))
#0.5276>0.05 - nezamietnutie normality
#korelacny test
cor.test(log_pd, log_return, alternative = "less", method = "spearman", exact = FALSE)
#2.2e-16<0.05 - Ho zamietame(korelacny koeficient je <0)
#graf - vykreslenie zavislosti
plot(log_pd, log_return, col ="blue", xlab = "PD", ylab ="ocakavane vynosy")

##################Linearna regresia#########################################################################
####model log pd = b0 + b1*zmena_hdp + b2*r-star + b3*rizikova prirazka
#odhad bety
model7<-lm(formula=log_pd~1+zmena_hdp + log_star + log_premium, x=TRUE)
summary(model7)
### log pd = 5.0782 + 5.3323*zmena_hdp - 26.6001*r-star - 21.7804*rizikova prirazka
#R^2 = 0.4362 = 43.62\%
#adjusted R^2 = 0.4289 = 42.89\%

####model log pd = b0 + b1*zmena_hdp + b2*r-star
#odhad bety
model8<-lm(formula=log_pd~1+zmena_hdp + log_star, x=TRUE)
summary(model8)
### log pd = 3.72178 + 20.16243*zmena_hdp - 25.91865*r-star
#R^2 = 0.2415 = 24.15\%
#adjusted R^2 = 0.235 = 23.5\%
```

```
####model log pd = b0 + b1*r-star + b2*rizikova prirazka
#odhad bety
model9<-lm(formula=log_pd~1 + log_star + log_premium, x=TRUE)
summary(model9)
### log pd = 5.1938 -23.7383*r-star - 22.6527*rizikova prirazka
#R^2 = 0.4334 = 43.34\%
#adjusted R^2 = 0.4285 = 42.85\%

####model log pd = b0 + b1*zmena_hdp + b2*rizikova prirazka
#odhad bety
model10<-lm(formula=log_pd~1 + zmena_hdp + log_premium, x=TRUE)
summary(model10)
### log pd = 5.3298 -28.3524*zmena_hdp - 21.3086*rizikova prirazka
#R^2 = 0.2715 = 27.15\%
#adjusted R^2 = 0.2653 = 26.53\%

####model log pd = b0 + b1*zmena_hdp
#odhad bety
model11<-lm(formula=log_pd~1 + zmena_hdp, x=TRUE)
summary(model11)
### log pd = 3.99576 -12.99070*zmena_hdp
#R^2 = 0.08508 = 8.51\%
#adjusted R^2 = 0.0812 = 8.12\%

####model log pd = b0 + b1*rizikova prirazka
#odhad bety
model12<-lm(formula=log_pd~1 + log_premium, x=TRUE)
summary(model12)
### log pd = 3.8596 -5.9899*rizikova prirazka
#R^2 = 0.02413 = 2.41%
#adjusted R^2 = 0.02 = 2.00\%

####model log pd = b0 + b1*r-star
#odhad bety
model13<-lm(formula=log_pd~1 + log_star, x=TRUE)
summary(model13)
### log pd = 3.98280 -13.62544*r-star
#R^2 = 0.1964 = 19.64\%
#adjusted R^2 = 0.1929 = 19.29\%

######fitovanie PD shiller pomocou regresie
####fitovanie - model so vsetkymi 3 premennymi
fit_cape6<-rep(0, length(r_star$US))
for (i in (1:length(r_star$US)))
{
  fit_cape6[i]<-model7$coefficients[1] + model7$coefficients[2]*zmena_hdp[i] +
```

```
  model7$coefficients[3]*log_star[i] + model7$coefficients[4]*log_premium[i]
}
f_cape6<-c(fit_cape6)
####fitovanie - model bez zahrnutia HDP
fit_cape7<-rep(0, length(r_star$US))
for (i in (1:length(r_star$US)))
{
  fit_cape7[i]<-model9$coefficients[1] + model9$coefficients[2]*log_star[i] +

  model9$coefficients[3]*log_premium[i]
}
f_cape7<-c(fit_cape7)

####porovnanie pd shiller (s hdp a bez hdp)
plot(r_star$Date, quar_pd, type = "l", col = "blue", xlab = "obdobie", ylab = "pomer PD")
lines(r_star$Date, exp(f_cape6), type = "l", col = "green")
lines(r_star$Date, exp(f_cape7), type = "l", col = "magenta")
legend("topleft", c("aktualne PD", "fitovane PD s HDP", "fitovane PD bez HDP"),
lty = c(1,1), col = c("blue","green", "magenta"), cex = 0.75)

####fitovanie - model bez r-star
fit_cape8<-rep(0, length(r_star$US))
for (i in (1:length(r_star$US)))
{
  fit_cape8[i]<-model10$coefficients[1] + model10$coefficients[2]*zmena_hdp[i] +

  model10$coefficients[3]*log_premium[i]
}
f_cape8<-c(fit_cape8)

####porovnanie (s r-star a bez r-star)
plot(r_star$Date, quar_pd, type = "l", col = "blue", xlab = "obdobie", ylab = "pomer PD")
lines(r_star$Date, exp(f_cape6), type = "l", col = "green")
lines(r_star$Date, exp(f_cape8), type = "l", col = "magenta")
legend("topleft", c("aktualne PD", "fitovane PD s r-star", "fitovane PD bez r-star"),
lty = c(1,1) , col = c("blue", "green", "magenta"), cex = 0.75)

####fitovanie - model bez rizikovej prirazky
fit_cape9<-rep(0, length(r_star$US))
for (i in (1:length(r_star$US)))
{
  fit_cape9[i]<-model8$coefficients[1] + model8$coefficients[2]*zmena_hdp[i] +

  model8$coefficients[3]*log_star[i]
}
f_cape9<-c(fit_cape9)

####porovnanie (s riz. prirazkou a bez riz. prirazky)
```

```
plot(r_star$Date, quar_pd, type = "l", col = "blue", xlab = "obdobie", ylab = "pomer PD")
lines(r_star$Date, exp(f_cape6), type = "l", col = "green")
lines(r_star$Date, exp(f_cape9), type = "l", col = "magenta")
legend("topleft", c("aktualne PD", "fitovane PD s riz. prirazkou", "fitovane PD
bez riz. prirazky"), lty = c(1,1) , col = c("blue", "green", "magenta"), cex = 0.75)


####ustaleny stav log pd podla Lettau a van Nieuwerburgh#####################################
ust_stav_pd<-rep(0, length(r_star$US))
for (i in (1:length(r_star$US)))
  {
 ust_stav_pd[i]<- zmena_hdp[i] - log(exp(log_return[i]) - exp(zmena_hdp[i]))
}

####ustaleny stav log pd podla Lettau a van Nieuwerburgh#####################################
###konstantna rizikova prirazka
mean_premium<-mean(log_premium)
return1<-mean_premium+log_star
ust_stav_pd1<-rep(0, length(r_star$US))
for (i in (1:length(r_star$US)))
{
  ust_stav_pd1[i]<- zmena_hdp[i] - log(exp(return1[i]) - exp(zmena_hdp[i]))
}
####vykreslenie pd, fitnute pd a ustaleny stav Lettau - konst. riz. prirazka
plot(r_star$Date, quar_pd, type = "l", col = "blue", xlab = "obdobie", ylab = "pomer PD",
ylim = c(13,110))
lines(r_star$Date, exp(f_cape6), type = "l", col = "green")
lines(r_star$Date, exp(ust_stav_pd), type = "l", col = "magenta")
lines(r_star$Date, exp(ust_stav_pd1), type = "l", col = "red")
legend("topright", c("aktualne PD", "fitovane PD", "ust.stav PD1", "ust.stav PD2"),
lty = c(1,1) , col = c("blue", "green", "magenta", "red"), cex = 0.75)

##vykreslenie priebehu rizikovej prirazky
plot(r_star$Date, risk_premium$FCFE, type = "l", col = "red", xlab = "obdobie",
ylab = "rizikova prirazka (%)")

###vykreslenie vynosov zo zisku a dividendovho vynosu
plot(r_star$Date, (1/quar_pd)*100, type = "l", col = "red", xlab = "obdobie",
ylab = "vynos (%)", ylim = c(1,14.1))
lines(r_star$Date, (1/quar_cape)*100, type = "l", col = "green")
legend("topright", c("dividendovy vynos", "vynos zo zisku"), lty = c(1,1) ,
col = c("red", "green"), cex = 0.75)

####vizualizacia regresii
##parcialne regresie - CAPE
library("car")
avPlots(model, main = "Parci lne regresie")  ##regresia pre cape model (vsetky premenne)
avPlots(model2, main = "Parci lne regresie") ##regresia pre cape model (bez hdp)
```

```
avPlots(model3, main = "Parci lne regresie") ##regresia pre cape model (bez r-star)
avPlots(model1, main = "Parci lne regresie") ##regresia pre cape model (bez riz. prirazky)
##parcialne regresie - PD_Shiller
avPlots(model7, main = "Parci lne regresie")  ##regresia pre pd model (vsetky premenne)
avPlots(model9, main = "Parci lne regresie") ##regresia pre pd model (bez hdp)
avPlots(model10, main = "Parci lne regresie") ##regresia pre pd model (bez r-star)
avPlots(model8, main = "Parci lne regresie") ##regresia pre pd model (bez riz. prirazky)

########PREDIKOVANIE VYVOJA OCAKAVANYCH VYNOSOV
#####predikcia - rizikova prirazka + r_star = expected return
plot(risk_premium$Date, return, type = "l", xlab = "obdobie", ylab = "ocakave vynosy")
#klesajuci trend, bez sezonnosti

#####testovanie jednotkoveho korena
library(urca)
library(astsa)
acf2(return)
summary(ur.df(return, type = "trend", lags = 10, selectlags = "BIC"))
##zamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni
(kriticka hodnota = -3.43 > statistika = -3.67)
##podla tejto hypotezy nepotrebujeme diferencovat data
##ale kedze je tam klesajuci trend, tak zdiferencujeme data
dif_return<-diff(return)

###vykreslenie strednej hodnoty do grafu
plot(dif_return)
abline(h=0, col="red")
abline(h=mean(dif_return)) #stredna hodnota je velmi blizko nule + pouzijeme drift aj none
acf2(dif_return)
summary(ur.df(dif_return, type = "drift", lags = 8, selectlags = "BIC"))
#zamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni
(kriticka hodnota = -2.88 > statistika = -9.03)
# pri predpoklade, ze stredna hodnota nie je rovna nule
summary(ur.df(dif_return, type = "none", lags = 8, selectlags = "BIC"))
#zamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni
(kriticka hodnota = -1.95 > statistika = -9.05)
# pri predpoklade, ze stredna hodnota je rovna nule
#bez ohladu na nulovost strednej hodnoty sa zamietla hypoteza -
nepotrebujeme uz viackrat diferencovat

###vyber modelu na predikcie
#vykreslenie acf a pacf funkcie
acf2(return)
#model z acf funkcie (MA(5), MA(6), MA(7), MA(8))
ma10<-sarima(return,0,1,5) #BIC -8.947569
ma11<-sarima(return,0,1,6) #BIC -8.929478
ma12<-sarima(return,0,1,7) #BIC -8.909809
ma13<-sarima(return,0,1,8) #BIC -8.900286
```

```
#model z pacf funkcie (AR(8), AR(12))
ar17<-sarima(return,8,1,0) #BIC -8.888805
ar18<-sarima(return,12,1,0) #BIC -8.829873
#spolocny model (ARMA(8,6))
arma6<-sarima(return,8,1,6) #BIC -8.832941
#podla BIC kriteria sa ako najlepsi model javi MA(5) - cim mensie BIC, tym lepsie
#overenie stacionarity, invertovatelnosti
#MA procesy su stacionarne
#overenie invertovatelnosti
koef<-abs(polyroot(c(1, ma10$fit$coef[1:5])))
#koren v absolutnej hodnote je vacsi ako 1 - proces je invertovatelny

##predikcie - rovnako 20 rokov - 80 kvartalov
pred_return<-sarima.for(return*100,20,0,1,5)
predi_return<-pred_return$pred

#####nacitanie predikcie
predikcia<-read.table("C:\\Users\\Mi ka\\Desktop\\predikcia.txt", header=TRUE)
attach(predikcia)
predikcia$Date<-as.Date(predikcia$Date)
####vykreslenie predikcie
plot(predikcia$Date, predikcia$ocakvynosy, type = "l", col="magenta",
xlab = "obdobie", ylab = "ocakavane vynosy(%)")
points(predikcia$Date,predikcia$predikcia, col = "green")
legend("topright", c("ocakavan vynosy", "predikcia"), lty = c(1,1) ,
col = c("magenta", "green"), cex = 0.75)


#####Odhadnutie pomeru ceny akcie k dividende
#### nacitanie dat ####
#potencialne hdp (realne)
pot_hdp<-read.table("C:\\Users\\Mi ka\\Desktop\\pot_hdp_yoy.txt", header=TRUE)
#prirodzena urokova miera (HLW odhad)
r_star<-read.table("C:\\Users\\Mi ka\\Desktop\\real_time_r_star.txt", header=TRUE)
#rizikova prirazka (implied equity risk premium - Damodaran)
risk_premium<-read.table("C:\\Users\\Mi ka\\Desktop\\ierp.txt", header=TRUE)
attach(pot_hdp)
attach(r_star)
attach(risk_premium)
#konvertovanie dat na datum
pot_hdp$Date<-as.Date(pot_hdp$Date)
r_star$Date<-as.Date(r_star$Date)
risk_premium$Date<-as.Date(risk_premium$Date)

##############################################################################################
##################Lettau a Van Nieuwerburgh - odhadnutie pomeru ceny akcie k dividende (PD)
##############1.pripad - konstantna rizikova prirazka ######################
str_risk<-mean(risk_premium$FCFE)  #dlhodoba stredna hodnota rizikovej prirazky
```

```
exp_return<-(r_star$US+str_risk)/100
#ocakavane vynosy = r_star + konstantna rizikova prirazka
### realne potencialne hdp - year-on-year zmeny
zmena_hdp<-rep(0,length(exp_return))
for (i in (1:length(exp_return)))
  {
  zmena_hdp[i]<-log(pot_hdp$real_pot_HDP[4+i]) - log(pot_hdp$real_pot_HDP[i])
}
### logaritmicke ocakavane vynosy - r_star + konstantna rizikova prirazka
log_r_star<-log(1+exp_return)

#### stredne hodnoty premennych - konstanta pre celu vzorku
str_r<-mean(log_r_star)  #stredna hodnota ocakavanych vynosov
str_d<-mean(zmena_hdp)   #stredna hodnota rastu realneho potencialneho hdp
str_pd<- str_d - log(exp(str_r) - exp(str_d))   #stredna hodnota pomeru pd
rho<- (1 + exp(-str_pd))^(-1)  ###konstanta

#####predikcia
library(urca) ##testovanie jednotkoveho korena
library(astsa) ##analyza casovych radov - vyber modelu
plot(pot_hdp$Date, pot_hdp$real_pot_HDP, type = "l", xlab = "obdobie",
ylab = "potencion lne HDP") #vidime rastuci trend, ziadna sezonnost
plot(r_star$Date, exp_return, type = "l", xlab = "obdobie", ylab = "ocakavane vynosy")
#klesajuci trend bez sezonnosti

#####testovanie jednotkoveho korena
##data - potencionalne hdp
acf2(pot_hdp$real_pot_HDP)
summary(ur.df(pot_hdp$real_pot_HDP, type = "trend", lags = 10, selectlags = "BIC"))
#pouzivame Dickey-Fullerov test na testovanie jednotkoveho korena
##nezamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni
(kriticka hodnota = -3.43 < statistika = -2.05)
##potrebujeme diferencovat data
dif_hdp<-diff(pot_hdp$real_pot_HDP)

###vykreslenie strednej hodnoty do grafu
plot(dif_hdp, ylim=c(-0.5,150))
abline(h=0, col="red")
abline(h=mean(dif_hdp)) #stredna hodnota je daleko od nuly - pouzijeme drift
acf2(dif_hdp)
summary(ur.df(dif_hdp, type = "drift", lags = 10, selectlags = "BIC"))
#nezamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni
(kriticka hodnota = -2.88 < statistika = -2.52)
#potrebujeme este raz diferencovat data
diff_hdp<-diff(dif_hdp)

###vykreslenie strednej hodnoty do grafu
plot(diff_hdp)
```

```
abline(h=0, col="red")
abline(h=mean(diff_hdp)) #stredna hodnota je uz velmi blizko nuly - pouzijeme drift aj none
acf2(diff_hdp)
summary(ur.df(diff_hdp, type = "drift", lags = 10, selectlags = "BIC"))
#zamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni
(kriticka hodnota = -2.88 > statistika = -4.47)
# pri predpoklade, ze stredna hodnota nie je rovna nule
summary(ur.df(diff_hdp, type = "none", lags = 10, selectlags = "BIC"))
#zamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni
(kriticka hodnota = -1.95 > statistika = -4.45)
# pri predpoklade, ze stredna hodnota je rovna nule
#bez ohladu na nulovost strednej hodnoty sa zamietla hypoteza - nepotrebujeme uz viackrat
diferencovat

###vyber modelu pre predikcie
#vykreslenie acf a pacf funkcie
acf2(diff_hdp)
####vhodnost modelu sme posudzovali podla BIC kriteria
#model z acf funkcie (MA(7), MA(8))
ma1<-sarima(pot_hdp$real_pot_HDP,0,2,8) #BIC  2.899066
ma11<-sarima(pot_hdp$real_pot_HDP,0,2,7) #BIC 2.89152
#model z pacf funkcie (AR(4))
ar1<-sarima(pot_hdp$real_pot_HDP,4,2,0) #BIC  2.828493 (nesplna podmienku stacionarity)
#spolocny model(ARMA(2,7))
arma1<-sarima(pot_hdp$real_pot_HDP,2,2,7) #BIC 2.914006
#podla BIC kriteria sa ako najlepsi model javi AR(4) - cim mensia hodnota BIC, tym lepsia
#tento model, ale nesplna podmienku stacionarity
#vybrali sme druhy, ktory ma najmensiu hodnotu BIC / MA(7)
#overenie stacionarity, invertovatelnosti
#MA modely su vzdy stacionarne
#ostava overenie invertovatelnosti
koef<-abs(polyroot(c(1, ma11$fit$coef[1:7])))
#vsetky korene v absolutnej hodnote vacsie ako 1 - proces je invertovatelny
##predikcie HDP na 20 rokov dopredu (kvartalne data - 80 kvartalov)
pred_hdp<-sarima.for(pot_hdp$real_pot_HDP,80,0,2,7)
predi_hdp<-pred_hdp$pred

###r-star data od 3Q/2008 (ked som vzala celu vzorku, skreslovalo to dost predikciu)
###vdata od daumu, ked nastal pokles po financnej krize
#zadefinovanie dat
kriza_r_star<-exp_return[192:238]
plot(r_star$Date[192:238], kriza_r_star, type = "l", xlab = "obdobie", ylab = "r-star")
#klesajuci trend

#####testovanie jednotkoveho korena
acf2(kriza_r_star)
summary(ur.df(kriza_r_star, type = "trend", lags = 7, selectlags = "BIC"))
##nezamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni
```

```
(kriticka hodnota = -3.50 < statistika = -2.87)
##potrebujeme diferencovat data
dif_kriza_r_star<-diff(kriza_r_star)

###vykreslenie strednej hodnoty do grafu
plot(dif_kriza_r_star)
abline(h=0, col="red")
abline(h=mean(dif_kriza_r_star)) #stredna hodnota nie je rovna nule, ale nie je daleko -
pouzijeme drift aj none
acf2(dif_kriza_r_star)
summary(ur.df(dif_kriza_r_star, type = "drift", lags = 7, selectlags = "BIC"))
#zamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni
(kriticka hodnota = -2.93 > statistika = -6.10)
# pri predpoklade, ze stredna hodnota nie je rovna nule
summary(ur.df(dif_kriza_r_star, type = "none", lags = 7, selectlags = "BIC"))
#zamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni
(kriticka hodnota = -1.95 > statistika = -6.11)
# pri predpoklade, ze stredna hodnota je rovna nule
#bez ohladu na nulovost strednej hodnoty sa zamietla hypoteza - nepotrebujeme uz viackrat
diferencovat

###vyber modelu na predikcie
#vykreslenie acf a pacf funkcie
acf2(dif_kriza_r_star)
#model z acf funkcie (MA(1))
ma2<-sarima(kriza_r_star,0,1,1) #BIC -9.740652
#model z pacf funkcie (AR(1), AR(5))
ar3<-sarima(kriza_r_star,1,1,0) #BIC -9.626416
ar4<-sarima(kriza_r_star,5,1,0) #BIC -9.509735
#spolocny model (ARMA(1,1), MA(5,1))
arma2<-sarima(kriza_r_star,1,1,1) #BIC -9.679838
arma3<-sarima(kriza_r_star,5,1,1) #BIC -9.435963
#podla BIC kriteria sa ako najlepsi model javi MA(1)
#overenie stacionarity, invertovatelnosti
#MA modely su vzdy stacionarne
#ostava overenie invertovatelnosti
koef1<-abs(polyroot(c(1, ma2$fit$coef[1])))
#koren v absolutnej hodnote je vacsi ako 1 - proces je invertovatelny

##predikcie - rovnako 20 rokov - 80 kvartalov
pred_kriza_r_star<-sarima.for(kriza_r_star,80,0,1,1)
pred_star<-pred_kriza_r_star$pred


#####pomer p/d z Lettau a van Nieuwerburgh ###############
####zohladnenie aj predikcii
r_star_spolu<-c(exp_return,pred_star)
r_t<-log(1+r_star_spolu)
```

```
hdp_spolu<-c(pot_hdp$real_pot_HDP, predi_hdp)
###medzirocne zmeny v replnom potencialnom HDP
d_t<-rep(0,length(r_star_spolu))
for (i in (1:length(r_star_spolu)))
{
  d_t[i]<-log(hdp_spolu[4+i]) - log(hdp_spolu[i])
}

####z rovnice (19) v diplomovke rozpisane hodnoty v riadkoch pre jednotlive t
a vstlpcoch pre jednotlive j
matica<-matrix(0,nrow = length(r_star$US), ncol = length(pred_star))
for (i in (1:length(r_star$US)))
{
  for (j in (1:length(pred_star)))
  {
    matica[i,j]<- rho^(j-1)*((d_t[i+j] - str_d) - (r_t[i+j] - str_r))
  }
}

####scitanie hodnot matice pre kazdy riadok
suma<-rep(0,length(r_star$US))
for (i in (1:length(r_star$US)))
{
  for (j in (1:length(pred_star)))
  {
    suma[i]<- sum(matica[i,1:j])
  }
}

###pomer p/d - rovnica (19) v diplomovke
pomer<-rep(0, length(r_star$US))
for (i in (1:length(r_star$US)))
{
  pomer[i]<-str_pd + suma[i]
}
priamy_pomer<-exp(pomer)  ####odstranenie logaritmov pre lepsiu interpretaciu
##vykreslenie p/d ratio
plot(r_star$Date,pomer, type = "l", col="red", xlab="obdobie", ylab = "pomer ceny a dividendy")
plot(r_star$Date,priamy_pomer, type = "l", col="red", xlab="obdobie",
ylab = "pomer ceny a dividendy")


#########################################################################################
########2. pr pad - konstantna pridzena urokova miera#####################
str_r_star<-mean(r_star$US)  ##dlhodoba stredna hodnota r_star
expected_return<-(risk_premium$FCFE+str_r_star)/100  ###ocakavane vynosy s konst. r-star
### logaritmicke ocakavane vynosy - rizikova prirazka + konstantna r_star
log_risk_premium<-log(1+expected_return)
```

```
#### stredne hodnoty premennych - konstanta pre celu vzorku
str_risk_premium<-mean(log_risk_premium)  #stredna hodnota log risk_premium
str_pd_risk<- str_d - log(exp(str_risk_premium) - exp(str_d)) #stredna hodnota pomeru pd
rho_risk<- (1 + exp(-str_pd_risk))^(-1) #konstanta

#####predikcia - rizikova prirazka + konstantna r_star = expected return
plot(risk_premium$Date, expected_return, type = "l", xlab = "obdobie",
ylab = "ocakavane vynosy") #bez trendu, bez sezonnosti

#####testovanie jednotkoveho korena
acf2(expected_return)
summary(ur.df(expected_return, type = "drift", lags = 10, selectlags = "BIC"))
##nezamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni
(kriticka hodnota = -2.88 < statistika = -1.20)
##potrebujeme diferencovat data
dif_exp_return<-diff(expected_return)

###vykreslenie strednej hodnoty do grafu
plot(dif_exp_return)
abline(h=0, col="red")
abline(h=mean(dif_exp_return)) #stredna hodnota nie je rovna nule, ale nie je daleko +
pouzijeme drift aj none
acf2(dif_exp_return)
summary(ur.df(dif_exp_return, type = "drift", lags = 10, selectlags = "BIC"))
#zamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni
(kriticka hodnota = -2.88 > statistika = -4.28)
# pri predpoklade, ze stredna hodnota nie je rovna nule
summary(ur.df(dif_exp_return, type = "none", lags = 10, selectlags = "BIC"))
#zamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni
(kriticka hodnota = -1.95 > statistika = -4.22)
# pri predpoklade, ze stredna hodnota je rovna nule
#bez ohladu na nulovost strednej hodnoty sa zamietla hypoteza - nepotrebujeme uz viackrat
diferencovat

###vyber modelu na predikcie
#vykreslenie acf a pacf funkcie
acf2(dif_exp_return)
#model z acf funkcie (MA(15))
ma5<-sarima(expected_return,0,1,15) #BIC -10.58481
#model z pacf funkcie (AR(17), AR(23))
ar12<-sarima(expected_return,17,1,0) #BIC -10.44473
ar13<-sarima(expected_return,23,1,0) #BIC -10.32166
#spolocny model (ARMA(1,1))
arma4<-sarima(expected_return,8,1,7) #BIC -10.56652
arma5<-sarima(expected_return,8,1,8) #BIC -10.54347
#podla BIC kriteria sa ako najlepsi model javi MA(15) - cim mensie BIC, tym lepsie
#overenie stacionarity, invertovatelnosti
```

```
#MA procesy su sacionarne
#overenie invertovatelnosti
koef3<-abs(polyroot(c(1, ma5$fit$coef[1:15])))
#koren v absolutnej hodnote je vacsi ako 1 - proces je invertovatelny

##predikcie - rovnako 20 rokov - 80 kvartalov
pred_expected_return<-sarima.for(expected_return,80,0,1,15)
pred_exp_return<-pred_expected_return$pred

#####pomer p/d z Lettau a van Nieuwerburgh
##zahrnutie aj predikcii
exp_return_spolu<-c(expected_return,pred_exp_return)
e_t<-log(1+exp_return_spolu)

####z rovnice (19) rozpisane hodnoty v riadkoch pre jednotlive t a v stlpcoch pre
jednotlive j
matica1<-matrix(0,nrow = length(expected_return), ncol = length(pred_exp_return))
for (i in (1:length(expected_return)))
{
  for (j in (1:length(pred_exp_return)))
  {
    matica1[i,j]<- rho_risk^(j-1)*((d_t[i+j] - str_d) - (e_t[i+j] - str_risk_premium))
  }
}

####scitanie hodnot matice pre kazdy riadok
suma1<-rep(0,length(expected_return))
for (i in (1:length(expected_return)))
{
  for (j in (1:length(pred_exp_return)))
  {
    suma1[i]<- sum(matica1[i,1:j])
  }
}

###pomer p/d - rovnica (7)
pomer_risk<-rep(0, length(expected_return))
for (i in (1:length(expected_return)))
{
  pomer_risk[i]<-str_pd_risk + suma1[i]
}
priamy_pomer_risk<-exp(pomer_risk)
##vykreslenie p/d ratio
plot(r_star$Date,pomer_risk, type = "l", col="red", xlab="obdobie",
ylab = "pomer ceny a dividendy")
plot(r_star$Date,priamy_pomer_risk, type = "l", col="red", xlab="obdobie",
ylab = "pomer ceny a dividendy")
```

```
#############################################################################
##########3. pripad - zahrnute zmeny v r_star + risk_premium ##################
e_return<-(r_star$US+risk_premium$FCFE)/100
log_e_return<-log(1+e_return)

#### stredne hodnoty premennych - konstanta pre celu vzorku
str_e_return<- mean(log_e_return) #stredna hodnota log expected return
str_pd_return<- str_d - log(exp(str_e_return) - exp(str_d))   #stredna hodnota pomeru pd
rho_e_return<- (1 + exp(-str_pd_return))^(-1) ##konstanta

#####predikcia - rizikova prirazka + r_star = expected return
plot(risk_premium$Date, e_return, type = "l", xlab = "obdobie", ylab = "ocakavane vynosy")
#klesajuci trend, bez sezonnosti

#####testovanie jednotkoveho korena
acf2(e_return)
summary(ur.df(e_return, type = "trend", lags = 10, selectlags = "BIC"))
##zamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni
(kriticka hodnota = -3.43 > statistika = -3.67)
##podla tejto hypotezy nepotrebujeme diferencovat data
##ale kedze je tam klesajuci trend, tak zdiferencujeme data
dif_e_return<-diff(e_return)

###vykreslenie strednej hodnoty do grafu
plot(dif_e_return)
abline(h=0, col="red")
abline(h=mean(dif_e_return)) #stredna hodnota je velmi blizko nule + pouzijeme drift aj none
acf2(dif_e_return)
summary(ur.df(dif_e_return, type = "drift", lags = 8, selectlags = "BIC"))
#zamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni (kriticka hodnota = -2.88 > statistika = -9.03)
# pri predpoklade, ze stredna hodnota nie je rovna nule
summary(ur.df(dif_e_return, type = "none", lags = 8, selectlags = "BIC"))
#zamietame nulovu hypotezu o jednotkovom koreni (kriticka hodnota = -1.95 > statistika = -9.05)
# pri predpoklade, ze stredna hodnota je rovna nule
#bez ohladu na nulovost strednej hodnoty sa zamietla hypoteza - nepotrebujeme uz viackrat
diferencovat

###vyber modelu na predikcie
#vykreslenie acf a pacf funkcie
acf2(e_return)
#model z acf funkcie (MA(5), MA(6), MA(7), MA(8))
ma10<-sarima(e_return,0,1,5) #BIC -8.947569
ma11<-sarima(e_return,0,1,6) #BIC -8.929478
ma12<-sarima(e_return,0,1,7) #BIC -8.909809
ma13<-sarima(e_return,0,1,8) #BIC -8.900286
#model z pacf funkcie (AR(8), AR(12))
ar17<-sarima(e_return,8,1,0) #BIC -8.888805
```

```
ar18<-sarima(e_return,12,1,0) #BIC -8.829873
#spolocny model (ARMA(8,6))
arma6<-sarima(e_return,8,1,6) #BIC -8.832941
#podla BIC kriteria sa ako najlepsi model javi MA(5) - cim mensie BIC, tym lepsie
#overenie stacionarity, invertovatelnosti
#MA procesy su sacionarne
#overenie invertovatelnosti
koef4<-abs(polyroot(c(1, ma10$fit$coef[1:5])))
#koren v absolutnej hodnote je vacsi ako 1 - proces je invertovatelny

##predikcie - rovnako 20 rokov - 80 kvartalov
pred_e_return<-sarima.for(e_return,80,0,1,5)
predi_e_return<-pred_e_return$pred


#####pomer p/d z Lettau a van Nieuwerburgh
##zahrnutie aj predikcii
e_return_spolu<-c(e_return,predi_e_return)
ex_t<-log(1+e_return_spolu)

####z rovnice (19) rozpisane hodnoty v riadkoch pre jednotlive t a v stlpcoch pre jednotlive j
matica2<-matrix(0,nrow = length(e_return), ncol = length(predi_e_return))
for (i in (1:length(e_return)))
{
  for (j in (1:length(predi_e_return)))
  {
    matica2[i,j]<- rho_e_return^(j-1)*((d_t[i+j] - str_d) - (ex_t[i+j] - str_e_return))
  }
}

####scitanie hodnot matice pre kazdy riadok
suma2<-rep(0,length(e_return))
for (i in (1:length(e_return)))
{
  for (j in (1:length(predi_e_return)))
  {
    suma2[i]<- sum(matica2[i,1:j])
  }
}

###pomer p/d - rovnica (7)
pomer_return<-rep(0, length(e_return))
for (i in (1:length(e_return)))
{
  pomer_return[i]<-str_pd_return + suma2[i]
}
priamy_pomer_return<-exp(pomer_return)
##vykreslenie p/d ratio
```

```
plot(risk_premium$Date,pomer_return, type = "l", col="red", xlab="obdobie",
ylab = "pomer ceny a dividendy")
plot(risk_premium$Date,priamy_pomer_return, type = "l", col="red", xlab="obdobie",
ylab = "pomer ceny a dividendy")

######vykreslenie grafov
##porovnanie roznych odhadnutych pomerov ceny akcie k dividende
plot(r_star$Date, priamy_pomer, type = "l", col = "red", ylim = c(8,40), xlab = "obdobie",
ylab = "pomer ceny akcie k dividende")
lines(r_star$Date, priamy_pomer_risk, type = "l", col = "blue")
lines(r_star$Date, priamy_pomer_return, type = "l", col = "green")
legend("top", c("kon . rizikov  prir  ka", "kon . r-star","rizikova prirazka + r-star"),
lty = c(1,1) , col = c("red", "blue","green"), cex = 0.70)

##vykreslenie r_star a rast potencialneho HDP
plot(r_star$Date,r_star$US, type = "l", col = "blue", xlab = "obdobie", ylab = "%")
lines(r_star$Date, zmena_hdp*100, type = "l", col = "red")
legend("topright", c("r-star", "rast potenci lneho HDP"), lty = c(1,1) ,
col = c("blue", "red"), cex = 0.90)
```