UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



DIFERENCIÁLNE ROVNICE BILANCIE PRAVDEPODOBNOSTI V PROCESOCH VZNIKU A ZÁNIKU

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2021 Bc. Andrea Kičurová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DIFERENCIÁLNE ROVNICE BILANCIE PRAVDEPODOBNOSTI V PROCESOCH VZNIKU A ZÁNIKU

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1113 Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. Mgr. Pavol Bokes, PhD.

Bratislava 2021 **Bc. Andrea Kičurová**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Andrea Kičurová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Diferenciálne rovnice bilancie pravdepodobnosti v procesoch vzniku a zániku
Differential equations for probability balance in birth-death processes

Anotácia: Procesy vzniku a zániku majú aplikácie napr. v populačnej dynamike (vznik a zánik jednotlivcov) alebo dynamike bunkovej regulácie (vznik a zánik molekúl bielkovín). Kľúčom k popisu daného procesu vzniku a zániku je diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti počtu jednotlivcov resp. molekúl v danom systéme. Toto rozdelenie sa dynamicky mení ako proces prebieha, t.j. je časovo závislé. Jeho dynamika je popísaná systémom diferenciálnych rovníc bilancie pravdepodobnosti. V rámci práce sa sformuluje a bude numericky riešiť systém diferenciálnych rovníc bilancie pravdepodobnosti pre konkrétny proces vzniku a zániku.

Vedúci: doc. Mgr. Pavol Bokes, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Dátum zadania: 17.12.2019

Dátum schválenia: 21.12.2019 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Na tomto mieste sa chcem poďakovať svojmu školiteľovi doc. Mgr. Pavlovi Bokesovi, PhD. za ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky pri vypracovaní diplomovej práce. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich podporu a trpezlivosť počas celého štúdia.

Abstrakt v štátnom jazyku

KIČUROVÁ, Andrea: Diferenciálne rovnice bilancie pravdepodobnosti v procesoch vzniku a zániku [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. Mgr. Pavol Bokes, PhD., Bratislava, 2021, 43 s.

Diferenciálne rovnice predstavujú vhodný nástroj na modelovanie dejov v rôznych vedeckých disciplínach. V našej práci sa zaoberáme témou diferenciálnych rovníc bilancie pravdepodobnosti v procesoch vzniku a zániku. Analyzujeme model vzniku a zániku, v ktorom z jedincov v populácií môžu noví jedinci vzniknúť, ale taktiež môže dôjsť aj k zániku jedincov. Naším cieľom je zostrojiť a numericky riešiť systém diferenciálnych rovníc bilancie pravdepodobnosti v procesoch vzniku a zániku. Práca poskytuje riešenie daného systému diferenciálnych rovníc pre rôzne hodnoty parametrov vystupujúcich vo vzťahoch pre intenzitu vzniku a intenzitu zániku. Pomocou WKB aproximácie sme odvodili vzťah pre potenciál a priemernú dobu po absorpciu. Pri numerickom riešení systému diferenciálnych rovníc sme v práci porovnali aj vplyv zmeny okrajovej podmienky, hraničného stavu, na riešenie daného systému.

Kľúčové slová: Markovove reťazce, Diferenciálna rovnica, Proces vzniku a zániku, Priemerná doba po absorbciu

Abstract

KIČUROVÁ, Andrea: Differential equations for probability balance in birth-death processes [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. Mgr. Pavol Bokes, PhD., Bratislava, 2021, 43 p.

Differential equations are a convenient tool for process modelling in various scientific disciplines. This diploma thesis is centred around differential equations for probability balance in birth-death processes. We analyse the birth-death model, in which new individuals might emerge from individuals in a population, but individuals in a population might also extinct. Our objective is to construct and numerically solve a system of differential equations for probability balance in birth-death processes. The thesis provides a solution of the given system of differential equations for different values of the parameters appearing in the relations of the birth intensity and the death intensity. We derived a relation for the effective potential and the mean extinction time using the WKB approximation. Along with a numerical solution of the system of differential equations, the thesis also compares the impact of the boundary condition (limit state) change on the solution of the given system.

Keywords: Markov Chain, Differential Equations, Birth-Death Process, Mean Extinction Time

Obsah

Úvod **8**

1 Markovove reťazce **10**

1.1 Markovove reťazce s diskrétnym časom 12

1.2 Markovove reťazce so spojitým časom časom 13

2 Proces vzniku a zániku **16**

2.1 Stochastický a deterministický model 17

2.2 Diferenciálna rovnica 18

2.3 Pravdepodobnosť vyhynutia a kvázi stacionárne rozdelenie 20

2.4 Potenciál a priemerná doba po absorpciu 24

3 Numerické riešenie procesov vzniku a zániku **28**

3.1 Simulácie v matematickom softvéri Matlab 29

3.2 Zmena maximálneho počtu jedincov pri numerických simuláciách 34

Záver **40**

Zoznam použitej literatúry **42**

Úvod

Zavedenie pojmu derivácie funkcie prispelo k tomu, aby sme boli schopní matematický vyjadriť nejakú zmenu alebo pohyb. Vznik diferenciálnych rovníc siaha už na koniec 17. storočia. Jedným z prvých vedcov, ktorý spomína diferenciálne rovnice bol Newton. [9] Diferenciálne rovnice sú vhodným matematickým nástrojom na modelovanie javov, ktoré sa menia, napríklad v čase. Okrem iného zohrávajú diferenciálne rovnice dôležitú úlohu v chémií či biológií.

Jednou z možných aplikácií diferenciálnych rovníc v biológií sú práve procesy vzniku a zániku (ang. birth and death process). Proces vzniku a zániku modeluje vývoj populácie, pri ktorom uvažujeme, že z jedincov v populácií môžu nové jedince vznikať alebo taktiež aj zanikať. Pohyb jedincov je možný len o jeden krok vpravo (t.j. vznik jedinca) alebo jeden krok vľavo (zánik jedinca).

Diplomová práca sa opiera o diplomovú prácu Kataríny Regulyovej [13]. V uvedenej diplomovej práci sa jej autorka venovala taktiež modelom vzniku a zániku, ale ich riešenie aplikovala pomocou Gillespieho algoritmu. Cieľom našej práce je sformulovať a numericky riešiť systém diferenciálnych rovníc bilancie pravdepodobnosti pre proces vzniku a zániku.

Práca je rozdelená na tri kapitoly. V prvej kapitole sa venujeme základným poznatkom týkajúcich sa Markovových reťazcov. Priblížíme základne vedomosti o Markovových reťazcoch s diskrétnym, ale i so spojitým časom. Definujeme pravdepodobnosti prechodu, maticu prechodu a systém Chapman-Kolmogorových diferenciálnych rovníc. K priblíženiu teórie Markovových reťazcov sme vychádzali najmä z [4], [6] a [15].

V druhej kapitole sa venujeme už samotnému procesu vzniku a zániku. Definujeme tento proces, pravdepodobnosti vzniku a zániku a taktiež aj intenzity prechodov v procesoch vzniku a zániku. V tejto časti práce si tiež ukážeme ako vyzerá matica intenzít prechodov, s ktorou pracujeme. Priblížime si rozdiel medzi stochastickým a deterministickým modelom. Odvodíme a vyriešime diferenciálnu rovnicu pre proces vzniku a zániku. V tejto časti práce sa tiež venujeme pravdepodobnosti vyhynutia populácie, pomocou kvázi stacionárneho rozdelenia a WKB aproximácie vyjadríme vzťah pre potenciál a priemernú dobu po absorpciu. Pri odvodzovaní strednej doby po absorpciu a potenciál sme informácie čerpali najmä z [1], [3], [5] a [13].

V tretej kapitole sú zobrazené numerické riešenia procesov vzniku a zániku. V prvej

časti tejto kapitoly sú zobrazené pravdepodobnosti vyhynutia populácie a tiež priebeh pravdepodobnosti pre rôzne hodnoty parametrov Ω a a. V druhej časti tejto kapitoly sú zobrazené pravdepodobnosti vyhynutia populácie a pravdepodobnosti nevyhynutia populácie pri zmene maximálneho počtu jedincov.

1 Markovove reťazce

V prvej kapitole tejto práce sa venujeme priblíženiu základných pojmov týkajúcich sa Markovových reťazcov. Vlastnosti Markovových reťazcov sme využívali neskôr v ďalších častiach práce. Poznatky využité v prvej kapitole sme čerpali najmä z [4], [6] a [15].

V bežnom živote sa často stretávame s rôznymi udalosťami, ktorých výsledok nevieme presne predpovedať. Takéto udalosti, ktorých výsledok nevieme predvídať ovplyvňujú náhodné premenné a množinu náhodných premenných nazývame náhodný alebo stochastický proces.

Definícia 1.1. *Náhodný proces [12]*
Náhodným procesom rozumieme množinu náhodných premenných

$$\{\mathbb{X}(\omega, t) : \omega \in \Omega, t \in T\},$$

kde Ω je množina elementárnych udalostí a T je množina nezáporných reálnych čísel.

Pre pevné dané $\omega \in \Omega$ dostaneme jednu realizáciu $x(\omega, t)$ náhodného procesu ako funkciu premennej $t \in T$ [6]. V práci budeme používať skrátený zápis takéhoto procesu, ktorý je

$$\{\mathbb{X}_t\}_{t \in T} .$$

Množina T predstavuje čas a rozlišujeme dva možné varianty. Ak $T = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ hovoríme o náhodnom procese s diskrétnym časom. Ak $T = [0, \infty)$ hovoríme o náhodnom procese so spojitým časom. Náhodné premenné $X_t, t \in T$ nadobúdajú rôzne hodnoty, tieto hodnoty sa nazývajú stavy. Množinu stavov budeme označovať S. Náhodný proces $\{\mathbb{X}_t\}_{t \in T}$ nazývame náhodným reťazcom, ak množina S je konečná alebo spočitateľná. [6]

Definícia 1.2. *Markovov reťazec [15]*
Diskrétny náhodný proces $\{\mathbb{X}_t\}_{t \in T}$ sa nazýva Markovov reťazec, ak spĺňa Markovovu vlastnosť

$$P(X_t = j | X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) = P(X_t = j | X_{t_n} = i_n)$$

pre ľubovoľné $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq t$; $t, t_k \in T$; $k = 1, 2, \dots, n$ a ľubovoľné $i_1, i_2, \dots, i_n, j \in S$.

Vznik Markovových reťazcov siaha do roku 1907 kedy sa ruský matematik Andrej Andrejevič Markov venoval použitiu samohlások a spoluhlások v poézií. Skonštruoval model, kde nasledujúce výsledky záviseli od všetkých predchádzajúcich výsledkov iba skrz bezprostredného predchodcu. [10] Na základe tohto môžeme povedať, že Markovova vlastnosť nám hovorí o tom, že to, do akého stavu sa proces dostane pri najbližšej zmene, závisí len od toho v akom stave sa aktuálne proces nachádza a nezávisí od predchádzajúcich stavov.

Definícia 1.3. *Pravdepodobnosti prechodu [15]*
Nech $\{\mathbb{X}_t\}_{t\in T}$ *je Markovov reťazec. Podmienené pravdepodobnosti*

$$P(X_t = j|X_s = i) = p_{ij}(s,t), \quad 0 \leq s < t; \quad s,t \in T; \quad i,j \in S,$$

nazývame pravdepodobnosti prechodu Markovovho reťazca zo stavu i *v čase* s *do stavu* j *v čase* t*. Pravdepodobnosť*

$$P(X_0 = j) = p_j(0), \quad j \in S$$

sa nazýva počiatočné rozdelenie Markovovho reťazca.

Počiatočné rozdelenie je dané riadkovým vektorom, ktoré vyjadruje to v akom stave je Markovov reťazec na začiatku. Takýto riadkový vektor môžeme zapísať:

$$p(0) = (p_1(0), p_2(0), p_3(0), \ldots, p_n(0)).$$

Keďže $p(0)$ predstavuje pravdepodobnostné rozdelenie, platí:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(0) = 1.$$

Pri Markovových reťazcoch sa stretávame s pojmom matica prechodu. Matica prechodu je tvorená pravdepodobnosťami prechodu, kde v i-tom riadku matice je pravdepodobnosť prechodu zo stavu i do ostatných stavov. Matica prechodu má dve základné vlastnosti:

- $p_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i,j \in S$
- $\sum_{j\in S} p_{ij} = 1 \quad \forall\, i \in S$

Pomocou vyššie uvedených informácií si môžeme definovať to kedy hovoríme, že Markovov reťazec je homogénny.

Definícia 1.4. *[15]*
Markovov reťazec sa nazýva homogénny v čase, ak pre ľubovoľné $h > 0$ a pre všetky $t, t+h \in T$ platí:

$$p_{ij}(t, t+h) = p_{ij}(t).$$

Pravdepodobnosti prechodu tvoria prvky matice, ktorú sme už spomínali. Takúto maticu nazývame matica prechodu a označujeme ju $\mathbb{P}$.

1.1 Markovove reťazce s diskrétnym časom

V tejto časti uvažujeme náhodný proces $\{\mathbb{X}_t\}_{t\in T}$, kde množina T sú prirodzené čísla.

Definícia 1.5. *Markovove reťazce s diskrétnym časom [15]*
Postupnosť celočiselných náhodných veličín $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavov $S \subset \mathbb{Z}$ a časovým priestorom $T = \{0, 1, 2, \dots\} \equiv \mathbb{N}_0$ sa nazýva Markovov reťazec s diskrétnym časom, ak spĺňa Markovovu vlastnosť v tvare: $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$ a ľubovoľné $i_1, i_2, \dots i_n \in S$ je

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1}t = i_{n+1} | X_n = i_n).$$

Markovove raťazce s diskrétnym časom sú vyjadrené pomocou matice prechodu $\mathbb{P}$, ktorej prvky tvoria pravdepodobnosti prechodov. Ak sú všetky prvky matice $\mathbb{P}$ nezáporné, t.j. $p_{ij} > 0$ pre $i, j = 1, 2, \dots n$ a súčet prvkov v každom riadku matice je práve 1, t.j. $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ hovoríme, že matica $\mathbb{P}$ je stochastická. [16]

Ak množina stavov $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ potom je matica pravdepodobnosti prechodov

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Pomocou Chapman-Kolmogorovej rovnosti môžeme vypočítať pravdepodobností prechodov v Markovovom reťazci z jedného do druhého stavu.

Definícia 1.6. *Chapman - Kolmogorova rovnosť [6]*
Označme

$$p_{ij}(t) = P(X_t = j | X_0 = i)$$

prvky matice prechodu $\mathbb{P}(t)$. *Potom pre ľubovoľné* $t \geq 0$, $s \geq 0$ *a každé* $i, j \in S$ *platí*

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \tag{1}$$

a maticový zápis

$$\mathbb{P}(t+s) = \mathbb{P}(t)\mathbb{P}(s). \tag{2}$$

Maticu pravdepodobností prechodov n-tého rádu môžeme získať násobením matice n-krát, o čom hovorí nasledujúca veta.

Veta 1.7. *[15]*
Nech $\{\mathbb{X}_t\}_{t \in T}$ *je homogénny Markovov reťazec s konečným počtom stavov* S *a maticou pravdepodobnosti prechodu* $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$. *Potom pre maticu pravdepodobnosti prechodu po* n *krokoch platí*

$$\mathbb{P}(n) = \mathbb{P}^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1.2 Markovove reťazce so spojitým časom časom

V tejto časti uvažujeme náhodný proces $\{\mathbb{X}_t\}_{t \in T}$, kde množina T je interval na reálnej osi, t.j. $T \in [0, \infty)$.

Definícia 1.8. *Markovove reťazce so spojitým časom časom [15]*
Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$, *pre ktorý* $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, $T = \langle 0, \infty)$ *sa nazýva Markovov reťazec so spojitým časom, ak spĺňa Markovovskú vlastnosť (t.j. pre všetky* $0 \leq t_1 < t_2 < \dots t_n < s < t$) *a ľubovoľné* $i_1, i_2, \dots i_n, i, j \in S$ *platí*

$$P(X_t = j | X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n, X_s = i) = P(X_t = j | X_s = i).$$

Pravdepodobnosť $P(X_t = j | X_s = i) = p_{ij}(s,t)$ *sa nazýva pravdepodobnosť prechodu zo stavu* i *v čase* s *do stavu* j *v čase* t.

Markovove reťazce so spojitým časom sú vhodným prostriedkom pri modelovaní reálnych systémov, ktoré môžu pre ľubovoľný okamih prejsť do iného stavu. To do akého stavu sa systém dostane pri najbližšej zmene je podmienené iba tým v akom stave sa systém momentálne nachádza.

Pravdepodobnosti prechodu $p_{ij}(t)$ sú sprava diferencovateľné v bode 0, hodnoty týchto derivácií nazývame intenzity prechodu. Vo všeobecnosti sa Markovov reťazec so spojitým časom zadáva maticou intenzít prechodu.

Definícia 1.9. *Intenzity prechodu [6]*

Pre $i \neq j$ je intenzita prechodu zo stavu i do stavu j definovaná

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t} = p'_{ij}(0) = q_{ij}.$$

Pre $i = j$ je intenzita prechodu medzi stavmi definovaná

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{p_{ii}(t) - 1}{t} = q_{ii}.$$

Matica $\mathbb{Q} = \{q_{ij}\}_{i,j\in S}$ sa nazýva matica intenzít.

Pomocou intenzít prechodu a použitím rovnice (1) získame nepriamy systém Kolmogorových diferenciálnych rovníc [6]

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = \sum_{k\in S} q_{ik}p_{kj}(t) \tag{3}$$

a priamy systém Kolmogorových diferenciálnych rovníc

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = \sum_{k\in S} p_{ik}(t)q_{kj}. \tag{4}$$

Tieto diferenciálne rovnice slúžia na výpočet pravdepodobnosti prechodu a systém (3) možno maticovo zapísať

$$\frac{d\mathbb{P}(t)}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}(t+h) - \mathbb{P}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[\mathbb{P}(h) - \mathbb{I}]\mathbb{P}(t)}{h} = \mathbb{Q}\mathbb{P}(t), \tag{5}$$

podobne systém (4) ako

$$\frac{d\mathbb{P}(t)}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}(t+h) - \mathbb{P}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}(t)[\mathbb{P}(h) - \mathbb{I}]}{h} = \mathbb{P}(t) \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}(h) - \mathbb{I}}{h} = \mathbb{P}(t)\mathbb{Q}. \tag{6}$$

Matica $\mathbb{P}$ je matica prechodu a $\mathbb{p}(0)$ je počiatočné rozdelenie. Pre potrebu ďalšieho odvodenia si uvedieme Vetu o úplnej pravdepodobnosti.

Veta 1.10. *Veta o úplnej pravdepodobnosti [6]*

Nech (Ω, S, P) je pravdepodobnostný priestor a $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplný systém udalostí, t.j.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{pre } i \neq j,$$

$$P(A_i) > 0 \qquad \text{pre } i = 1, 2, \ldots$$

Potom platí:

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)P(A_n).$$

Potom z tejto vety platí:

$$p_j(t) = P(X_t = j) = \sum_{i \in S} p_i(0) p_{ij}(t).$$

Maticovo dostaneme pre vektor pravdepodobností v čase t vyjadrenie

$$p(t)^T = p_i(0)\mathbb{P}(t).$$

Pomocou diferenciálnej rovnice (6) a rovnosti uvedenej vyššie získame diferenciálnu rovnicu pre vektor pravdepodobností v čase t.

$$\frac{dp(t)}{dt} = p_i(0)\frac{d\mathbb{P}(t)}{dt} = p_i(0)\mathbb{P}(t)\mathbb{Q} = p(t)^T\mathbb{Q}. \tag{7}$$

V diferenciálnej rovnici (7) vystupuje vektor $\mathbb{p}(t)$ ako riadkový vektor. Kvôli numerickému riešeniu v matematickom softvéri Matlab potrebujeme stĺpcový vektor a preto si rovnicu (7) upravíme na tvar:

$$\frac{dp(t)}{dt} = p_i(0)\frac{d\mathbb{P}(t)}{dt} = p_i(0)\mathbb{P}(t)\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^T p(t). \tag{8}$$

Diferenciálnu rovnicu (8) budeme študovať s počiatočnou podmienkou:

$$p(0) = (p_i(0))_{i \in S}, \tag{9}$$

kde $p_i(0) = \delta_{ij}$ a

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{a}k \quad i = j, \\ 0 & \text{a}k \quad i \neq j \end{cases}$$

predstavuje Kroneckerovu deltu. Táto podmienka je vo väčšine prípadov vhodná, nakoľko sa vyžaduje, aby s pravdepodobnosťou rovnou jednej proces strávil istý čas v počiatočnom stave i pred prechodom do iného stavu j.

2 Proces vzniku a zániku

Procesy vzniku a zániku sú špeciálnym prípadom Markovových reťazcov so spojitým časom, v ktorom uvažujeme prechod len o jeden krok. Modely vzniku a zániku majú veľa možností aplikácie v demografií, epidemiológií, biológií, v teórií hromadnej obsluhy a v iných oblastiach.

V našej práci budeme predpokladať, že počet jedincov je vyjadrený parametrom n. Vznik populácie, teda narodenie jedinca nastáva keď proces prejde zo stavu n do stavu $n+1$. Podobne zánik populácie nastáva keď proces prejde zo stavu n do stavu $n-1$. Predpokladáme, že udalosti vzniku a zániku sú navzájom nezávislé. Proces vzniku a zániku je charakterizovaný vznikom $\{\lambda_n\}_{n=0,\ldots,\infty}$ a zánikom $\{\mu_n\}_{n=0,\ldots,\infty}$. [11]

Proces vzniku môžeme definovať ako proces vzniku a zániku pomocou $\mu_n = 0\ \forall n$ a proces zániku môžeme definovať ako proces vzniku a zániku pomocou $\lambda_n = 0\ \forall n$.
Všeobecný proces vzniku a zániku môže byť následovný, že po prechode procesu do stavu n ostane proces v tomto stave nejaký náhodný čas, exponenciálne rozdelený s parametrom $(\lambda_n + \mu_n)$. [11]

Prechod zo stavu n do stavu $n+1$ (vznik) nastane s pravdepodobnosťou:

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n}. \tag{10}$$

Naopak prechod zo stavu n do stavu $n-1$ (zánik) jedinca nastane s pravdepodobnosťou:

$$\frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n}. \tag{11}$$

Najčastejšie uvažovaným prípadom v procesoch vzniku a zániku je prípad, kedy intenzity λ_n a μ_n sú lineárne závisle od stavu n. [11]

Pre intenzity prechodu v procesoch vzniku a zániku platí:

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_n, & j = i+1, \\ \mu_n, & j = i-1, \\ -(\lambda_n + \mu_n), & i = j, \\ 0, & inak. \end{cases}$$

Matica intenzít prechodov vyzerá následovne:

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & \mu_n & -(\mu_n+\lambda_n) & \lambda_n & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \mu_{n+1} & -(\mu_{n+1}+\lambda_{n+1}) & \lambda_{n+1} & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{12}$$

Počiatočný problém daný diferenciálnou rovnicou (8) a počiatočnou podmienkou (9) budeme numericky riešiť s maticou intenzít (12) v kapitole 3. Pre lepšie znázornenie si rovnice (8) - (9) s maticou $\mathbb{Q}$ danou (12) rozpíšeme po zložkách:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= \mu_1 p_1(t), \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= -(\mu_1+\lambda_1)p_1(t) + \mu_2 p_2(t), \\ \frac{dp_2(t)}{dt} &= \lambda_1 p_1(t) - (\mu_2+\lambda_2)p_2(t) + \mu_3 p_3(t), \\ &\vdots \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) - (\mu_n+\lambda_n)p_n(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t). \end{aligned}$$

2.1 Stochastický a deterministický model

Protipólom stochastického modelu je model deterministický. Deterministickým modelom rozumieme model, v ktorom popisované menia svoj stav na základe pevne daných vzťahov. Stav teda nie je náhodná veličina, ale veličina deterministický určená vzťahmi a počiatočnými podmienkami.

Deterministický model ukazuje pri opakovaniach pokusu za rovnakých počiatočných podmienok rovnaké správanie, zatiaľ čo v stochastickom modeli je stále prítomná náhoda, aj keď máme rovnaké počiatočné podmienky.

2.2 Diferenciálna rovnica

Diferenciálne rovnice sú dobrým prostriedkom pre modelovanie časovej dynamiky deterministických procesov vo fyzike, chémií a prírodných vedách.

Vhodným prostriedkom pre popísanie samo-regulujúcej sa populácie je Hillová funkcia. Autorom Hillovej funkcie je Archibald Hill a touto funkciou sa opisuje schopnosť proteínu naviazať sa na DNA. Predpis Hillovej funkcie vyzerá následovne [14]:

$$\frac{x^H}{x^H + K^H}, \tag{13}$$

kde H predstavuje Hillov koeficient. Pri odvodzovaní intenzít vzniku a zániku nám bude postačovať $H = 1$. Diferenciálna rovnica v modeli vzniku a zániku vyzerá následovne:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{x + K} - \gamma x. \tag{14}$$

Ako vidíme v Hillovej funkcii, tak prvý člen tejto rovnice, teda $\frac{x}{x+K}$, popisuje nárast populácie. Naopak, člen γx predstavuje pokles množstva jedincov. Pri odvodzovaní intenzít vzniku a zániku vychádzame z diplomovej práce Kataríny Regulyovej [13]. Najprv si vyjadríme pevný bod rovnice, t.j. vyjadríme kedy je vznik rovný zániku.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x + K} &= \gamma x; \\ \frac{1}{\gamma} &= (x + K); \\ x &= \left(\frac{1}{\gamma} - K\right). \end{aligned}$$

Tento pevný bod budeme škálovať tak, že x zvolíme

$$x = \left(\frac{1}{\gamma} - K\right)\tilde{x}.$$

Pre takto naškálovaný nárast $\tilde{x}$ predstavuje bezrozmernú premennú. Pre pokles budeme postupovať podobne a budeme merať v jednotkách, ktoré zodpovedajú rýchlosti poklesu:

$$t = \frac{\tilde{t}}{\gamma}.$$

Takto upravené parametre x a t dosadíme do spomínanej diferenciálnej rovnice (14) pre model vzniku a zániku:

$$\left(\frac{1}{\gamma} - K\right)\gamma\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{\left(\frac{1}{\gamma} - K\right)\tilde{x}}{\left(\frac{1}{\gamma} - K\right)\tilde{x} + K} - \gamma\left(\frac{1}{\gamma} - K\right)\tilde{x}.$$

Túto rovnicu ďalej upravujeme

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{\frac{\tilde{x}}{\gamma}}{\left(\frac{1}{\gamma} - K\right)\tilde{x} + K} - \tilde{x};$$
$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{\frac{\tilde{x}}{\gamma K}}{\left(\frac{1}{\gamma K} - 1\right)\tilde{x} + 1} - \tilde{x}.$$

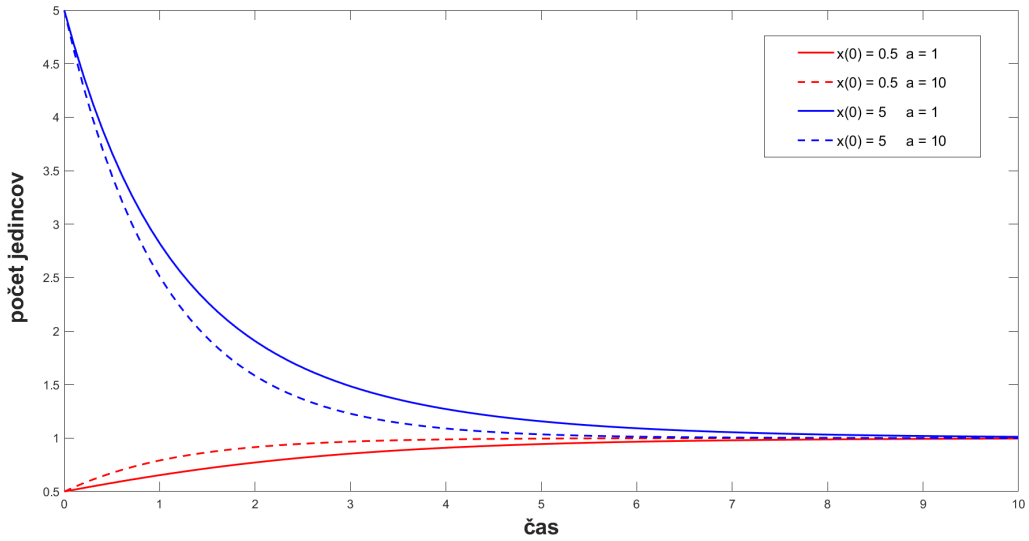
V takto upravenej rovnici si nahradíme výraz $\left(\frac{1}{\gamma K} - 1\right)$ symbolom a, a následne dostaneme diferenciálnu rovnicu v tvare

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{(a+1)\tilde{x}}{a\tilde{x}+1} - \tilde{x}, \tag{15}$$

kde prvý člen, t.j. $\frac{(a+1)\tilde{x}}{a\tilde{x}+1}$, predstavuje rýchlosť vzniku jedincov a druhý člen, t.j. $\tilde{x}$ predstavuje rýchlosť poklesu alebo zániku jedincov populácie.

Diferenciálnu rovnicu (15) sme numericky vyriešili pre rôzne počiatočné podmienky $x(0)$ a rôzne hodnoty parametra a. Stacionárny stav diferenciálnej rovnice (15) je v bode $x = 1$. Preto sme pri numerickom riešení volili dve hodnoty počiatočnej podmienky. Prvú počiatočnú podmienku sme volili menšiu ako 1 a druhú naopak väčšiu ako 1. Prvá hodnota nami zvolenej počiatočnej podmienky je $x(0) = 0.5$ a druhá je $x(0) = 5$. Nižšie na grafe sú zobrazené riešenia pre tieto počiatočné podmienky a rôzne hodnoty parametra a. Konkrétne za parameter a sme volili $a = 1$ alebo $a = 10$. Modrou farbou je na obrázku č.1 zobrazené riešenie pre počiatočnú podmienku $x(0) = 5$ a červenou farbou pre $x(0) = 0.5$. Plné čiary zobrazujú riešenie pre parameter $a = 1$ a čiarkované čiary pre $a = 10$.

Obrázok č. 1 zobrazuje deterministický model, teda model kedy sa správanie počtu jedincov ustáli v stacionárnom stave, čo spôsobuje, že počet jedincov pri počiatočnej podmienke vyššej ako 1 klesá a naopak pri nižšej ako 1 stúpa. Na obrázku vidíme, že počet jedincov sa pri vyššej hodnote parametra a dostane do stacionárneho stavu za kratší časový interval ako pri nižšej hodnote parametra a.



Obr. 1: Riešenie diferenciálnej rovnice

Pomocou škálovania prejdeme z deterministickej rýchlosti na stochastickú. Škálovanie spočíva v tom, že počet jedincov v populácií vydelíme Ω, čím dostaneme x a následne rovnicu spätne vynásobíme Ω:

$$\frac{dx}{dt} = \Omega\left(\frac{(a+1)\frac{n}{\Omega}}{a\frac{n}{\Omega}+1} - \frac{n}{\Omega}\right).$$

Po takomto škálovaní dostaneme vzťahy pre intenzitu vzniku

$$\lambda_n = \frac{(a+1)n}{1+a\frac{n}{\Omega}} \tag{16}$$

a intenzitu zániku

$$\mu_n = n. \tag{17}$$

Parameter Ω v (16) pritom predstavuje tzv. veľkosť, alebo objem systému, (angl. system of volume or system size) [8].

2.3 Pravdepodobnosť vyhynutia a kvázi stacionárne rozdelenie

V procesoch vzniku a zániku sa stretávame s pojmom absorpčný stav alebo vyhynutie populácie. Absorpčný stav nastáva ak je počet jedincov rovný nule, t.j. $n = 0$ a intenzita vzniku nového jedinca je tiež nulová, t.j. $\lambda = 0$. V našej práci nás bude zaujímať práve pravdepodobnosť vyhynutia populácie, preto je potrebné vyjadriť vzťah pre priemernú dobu po absorpciu.

Pri odvodzovaní priemernej doby po absorpciu je potrebné, aby sme si intenzity prechodov (16) a (17) spomenuté vyššie v práci upravili pomocou škálovania $x = \frac{n}{\Omega}$:

$$\lambda_n = \frac{(a+1)n}{1+a\frac{n}{\Omega}} = \Omega\frac{(a+1)\frac{n}{\Omega}}{a\frac{n}{\Omega}+1} = \Omega\bar{\lambda}(x),$$
$$\mu_n = n = \Omega\frac{n}{\Omega} = \Omega\bar{\mu}(x).$$

Z týchto rovníc môžeme jednoznačne vyjadriť funkcie intenzít vzniku a zániku od x:

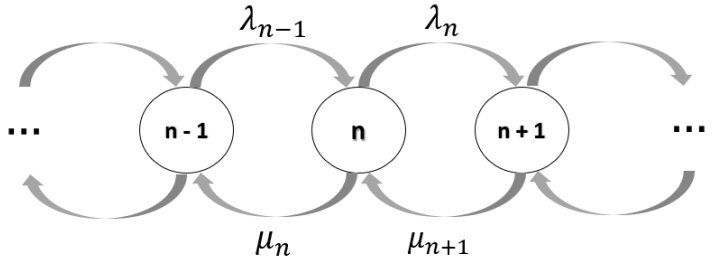
$$\bar{\lambda}(x) = \frac{(a+1)x}{ax+1}, \tag{18}$$

$$\bar{\mu}(x) = x. \tag{19}$$

Vyjadriť stredný čas po absorpciu a pravdepodobnosť vyhynutia je možné pomocou WKB (Wentzel, Kramers a Brilloin) aproximácie [1]. Pri priemernej dobe po absorpciu vychádzame z rovnice (4), táto rovnica sa tiež nazýva aj Master rovnica. Kvôli odvodeniu priemernej doby po absorpciu si spomenutú rovnicu (4) prepíšeme na nasledovný tvar:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1}p_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n)p_n + \mu_{n+1}p_{n+1}. \tag{20}$$

Diferenciálnu rovnicu (20) znázorňuje nasledujúca schéma:



Obr. 2: Schéma diferenciálnej rovnice

Pravdepodobnosť vyhynutia populácie je rovná $p_0(t)$. Pre túto pravdepodobnosť máme aproximáciu[1]:

$$p_0(t) \sim 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \tag{21}$$

kde T je priemerný čas po absorpciu a pravdepodobnosť, že počet jedincov v populácií je rovný číslu rôznemu od nuly budeme označovať $p_{n>0}(t)$, pre túto pravdepodobnosť máme aproximáciu[1]:

$$p_{n>0}(t) \sim \pi_n e^{-\frac{t}{T}}, \tag{22}$$

kde π_n je tzv. kvázi-stacionárne rozdelenie a T je opäť priemerný čas po absorpciu. Obidva vzťahy pre tieto pravdepodobnosti sme čerpali z článku [1]. Pravdepodobnosti (21) a (22) sú teoretické predikcie, s ktorými sme v práci porovnávali naše výsledky. V rovnici (22) vidíme, že pravdepodobnosť počtu jedincov v populácii väčší ako nula získame vynásobením doplnkovej pravdepodobnosti k pravdepodobnosti vyhynutia spolu s kvázi-stacionárnym rozdelením. Rovnice (21) a (22) vložíme do rovnice (20) a dostaneme:

$$\lambda_{n-1}\pi_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n)\pi_n + \mu_{n+1}\pi_{n+1} = \frac{-\pi_n}{T}, \tag{23}$$

pri dostatočne veľkom Ω môžeme pravú stranu zanedbať a dostaneme rovnicu pre kvázi-stacionárne rozdelenie, ktorá bude vyzerať:

$$\lambda_{n-1}\pi_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n)\pi_n + \mu_{n+1}\pi_{n+1} = 0. \tag{24}$$

Kvázi stacionárne rozdelenie π_n môžeme odvodiť pomocou WKB aproximácie z článku [1]. Ansatz pre kvázi stacionárne rozdelenie je

$$\pi_n = k(x)e^{-\Omega\Phi(x)}. \tag{25}$$

Rovnicu (24) budeme riešiť, preto si v tejto rovnici členy $\lambda_{n-1}, \lambda_n, \mu_n$ a μ_{n+1} nahradíme školovanými funkciami vyjadrenými v rovniciach (18) - (19). Pre jednotlivé členy dostaneme vyjadrenie:

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \bar{\lambda}(x), \\
\mu_n &= \bar{\mu}(x), \\
\lambda_{n-1} &= \bar{\lambda}\left(x - \frac{1}{\Omega}\right) \sim \bar{\lambda}(x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Omega}\right), \\
\mu_{n+1} &= \bar{\mu}\left(x + \frac{1}{\Omega}\right) \sim \bar{\mu}(x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Omega}\right).
\end{aligned}$$

Pomocou ansatzu pre kvázi stacionárne rozdelenie si v rovnici (24) upravíme členy π_{n-1} a π_{n+1}. Pri úprave týchto členov budeme využívať rozvoj do Taylorovho rádu. Jednotlivé členy sú nasledovné:

$$\begin{aligned}
\pi_{n-1} &= k\left(x - \frac{1}{\Omega}\right)e^{-\Omega\Phi(x-\frac{1}{\Omega})} \sim k(x)e^{-\Omega\Phi(x)+\Phi'(x)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Omega}\right), \\
\pi_{n+1} &= k\left(x + \frac{1}{\Omega}\right)e^{-\Omega\Phi(x+\frac{1}{\Omega})} \sim k(x)e^{-\Omega\Phi(x)-\Phi'(x)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Omega}\right).
\end{aligned}$$

Jednotlivé členy, ktoré sme si vyššie upravili dosadíme do rovnice (24) a získame rovnicu:

$$\bar{\lambda}(x)k(x)e^{-\Omega\Phi(x)}e^{\Phi'(x)} - \Big(\bar{\lambda}(x) + \bar{\mu}(x)\Big)k(x)e^{-\Omega\Phi(x)} + \bar{\mu}(x)k(x)e^{-\Omega\Phi(x)}e^{-\Phi'(x)} = 0.$$

Túto rovnicu budeme ďalej upravovať a riešiť, aby sme vedeli vyjadriť tvar pre $\Phi(x)$, t.j. potenciál. Všetky členy v rovnici obsahujú spoločné členy, môžeme ju tak zjednodušiť a dostaneme rovnicu:

$$\bar{\lambda}(x)e^{\Phi'(x)} - \Big(\bar{\lambda}(x) + \bar{\mu}(x)\Big) + \bar{\mu}(x)e^{-\Phi'(x)} = 0.$$

Predchádzajúci tvar rovnice si kvôli jednoduchosti riešenia upravíme následovne:

$$\bar{\lambda}(x)(e^{\Phi'(x)} - 1) + \bar{\mu}(x)(e^{-\Phi'(x)} - 1) = 0;$$
$$e^{\Phi'(x)}(e^{-\Phi'(x)} - 1)(e^{-\Phi'(x)}\bar{\mu}(x) - \bar{\lambda}(x)) = 0.$$

Z posledného vyjadreného tvaru rovnice už vieme, že rovnica bude spĺňať nulové riešenie, ak riešenie pre $\Phi(x)$ vyjadríme z poslednej zátvorky:

$$e^{-\Phi'(x)}\bar{\mu} - \bar{\lambda} = 0,$$
$$e^{-\Phi'(x)} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}},$$
$$\Phi'(x) = -\ln\left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}}\right).$$

Potenciál $\Phi(x)$ má tvar:

$$\Phi(x) = -\int_0^x \ln\left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}}\right) dy. \tag{26}$$

Podľa Taylorovej vety môžeme okolo minima tvrdiť, že potenciál má tvar:

$$\Phi(x) \sim \Phi(1) + \frac{1}{2}\Phi''(1)(x-1)^2 \tag{27}$$

Vzťah vyjadrený v (27) dosadíme do vzťahu (25) pre kvázi stacionárne rozdelenie a dostaneme vyjadrenie pre π_n:

$$\pi_n = k(x)e^{-\Omega(\Phi(1)+\frac{1}{2}\Phi''(1)(x-1)^2)},$$
$$\pi_n = k\left(\frac{n}{\Omega}\right)e^{-\Omega\Phi(1)}e^{-\Omega\frac{\Phi''(1)(n-\Omega)^2}{2\Omega^2}},$$
$$\pi_n = k\left(\frac{n}{\Omega}\right)e^{-\Omega\Phi(1)}e^{-\frac{(n-\Omega)^2\Phi''(1)}{2\Omega}}.$$

Použitím normalizačnej konštanty môžeme kvázi stacionárne rozdelenie napísať v tvare:

$$\pi_n = \sqrt{\frac{\Phi''(1)}{2\pi\Omega}} e^{-\frac{(n-\Omega)^2\Phi''(1)}{2\Omega}}. \tag{28}$$

Vidíme teda, že kvázi stacionárne rozdelenie π_n má strednú hodnotu $E(n) = \Omega$ a varianciu $D(n) = \frac{\Omega}{\Phi''(1)}$. Ak už poznáme tvar kvázi-stacionárneho rozdelenia, môžeme pravdepodobnosť (22) písať v tvare:

$$p_{n>0}(t) \sim \sqrt{\frac{\Phi''(1)}{2\pi\Omega}} e^{-\frac{(n-\Omega)^2\Phi''(1)}{2\Omega}} e^{-\frac{t}{T}}. \tag{29}$$

2.4 Potenciál a priemerná doba po absorpciu

V predchádzajúcej časti sme odvodili tvar pre potenciál, v tejto časti práce vzniknutý integrál dopočítame a jeho výsledok použijeme pri priemernej dobe po absorpciu. Vo vzťahu (26) za $\bar{\lambda}$ a $\bar{\mu}$ dosadíme funkcie, ktoré sme si vyššie definovali a dostaneme integrál v nasledujúcom tvare:

$$\Phi(x) = -\int_0^x \ln\left(\frac{a+1}{ay+1}\right) dy. \tag{30}$$

Uvedený integrál vypočítame, na výpočet použijeme metódu per partes.

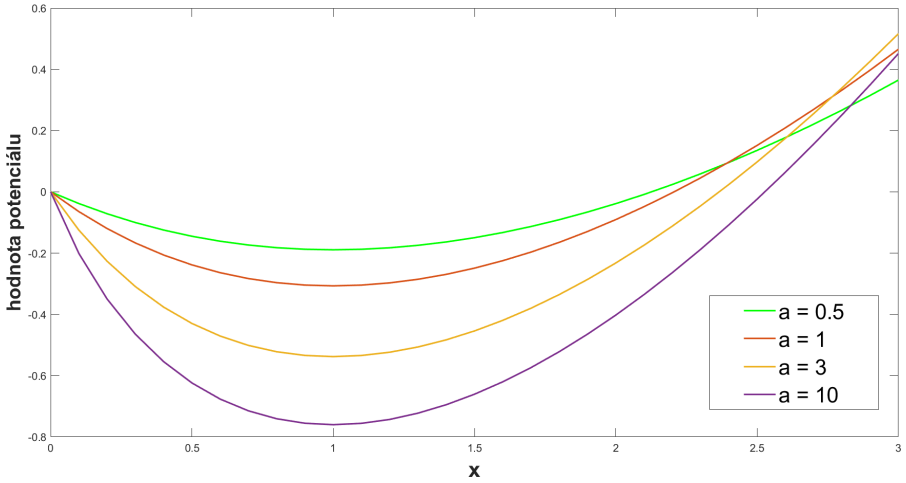
$$\begin{aligned} -\int_0^x \ln\left(\frac{a+1}{ay+1}\right) dy &= \begin{bmatrix} u = y & v = -\ln\left(\frac{a+1}{ay+1}\right) \\ u' = 1 & v' = \frac{a}{ay+1} \end{bmatrix} \\ &= \left[-y \ln\left(\frac{a+1}{ay+1}\right) \right]_0^x - \int_0^x \frac{ay}{ay+1}\, dy \end{aligned}$$

Vzniknutý integrál dopočítame

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{ay}{ay+1} dy &= \left| \begin{matrix} ay+1 = u \\ a\, dy = du \end{matrix} \right| = \frac{1}{a}\int_1^{ax+1} \frac{u-1}{u}\, du \\ &= \frac{1}{a}\int_1^{ax+1} 1 - \frac{1}{u}\, du \\ &= \frac{1}{a}\Big([u]_1^{ax+1} - [\ln u]_1^{ax+1} \Big) \\ &= \frac{1}{a}\Big(ax - \ln(ax+1) \Big) = x - \frac{\ln(ax+1)}{a} \end{aligned}$$

Spojením vyššie uvedených výpočtov dostávame výsledok pre (26) a potenciál má teda tvar:

$$\Phi(x) = -x \ln\left(\frac{a+1}{ax+1}\right) - \Big(x - \frac{\ln(ax+1)}{a} \Big). \tag{31}$$



Obr. 3: Potenciál pre rôzne hodnoty parametra a

Na obrázku č. 3 je zobrazený potenciál pre rôzne hodnoty parametra a, vidíme že potenciál nadobúda minimum v bode $x = 1$. Pre vyššie hodnoty parametra a má potenciál menej sploštený tvar ako pre nízke hodnoty parametra a.
Potenciál, ktorý sme vyjadrili v rovnici (31) vystupuje vo vzťahu pre priemerný čas po absorpciu.

Všeobecný predpis priemernej doby po absorpciu je uvedený v článku [3] a má tvar:

$$\bar{\tau}(x_e) = \sqrt{\frac{2\pi\bar{\rho}(0)}{\Omega(\bar{\lambda}(x_e)\bar{\mu}'(x_e) - \bar{\lambda}'(x_e)\bar{\mu}(x_e))}} \frac{e^{-\Omega\Phi(x_e)}}{\bar{\rho}(0) - 1}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Omega}\right)\right), \tag{32}$$

kde $x_e = \frac{n_e}{\Omega}$ vyjadruje pevný bod modelu a $\Phi(x_e)$ je spomínaný potenciál.

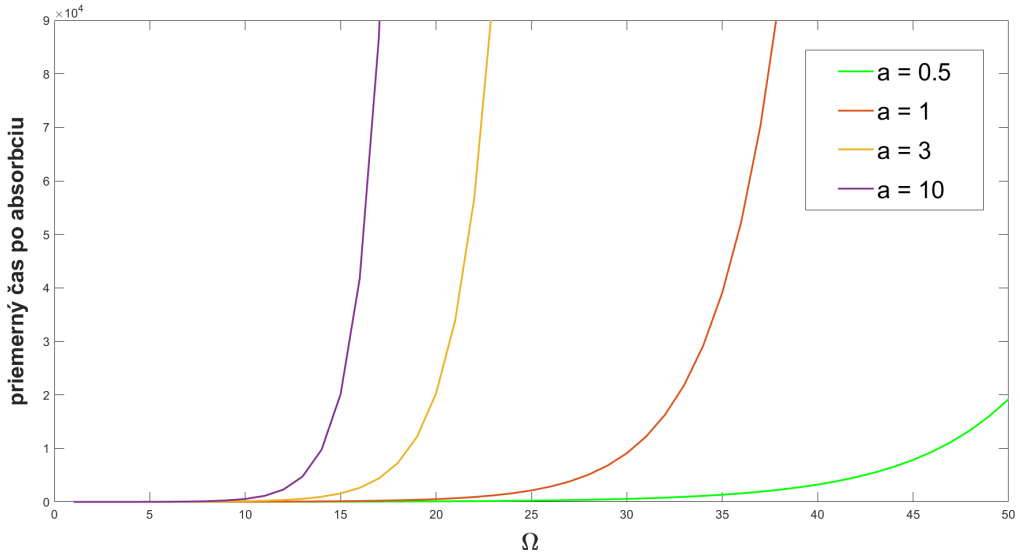
Odvodenie vzťahu (32) pre proces vzniku a zániku, ktorý využívame v práci sme čerpali z [13]. Priemernú dobu po absorpciu budeme označovať T a v uvedenej práci má tvar:

$$T = \sqrt{\frac{2\pi(a+1)^2}{\Omega a^3}} e^{-\Omega\Phi(1)}, \tag{33}$$

kde $\Phi(1)$ je potenciál (31) v bode $x = 1$, teda $\Phi(1)$ vyjadríme

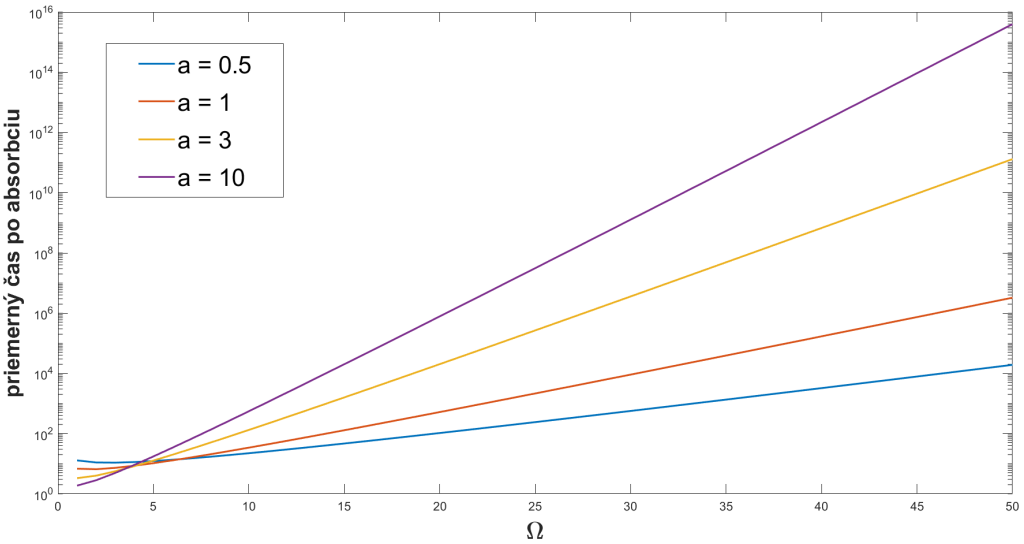
$$\Phi(1) = -\left(1 - \frac{\ln a + 1}{a}\right).$$

Priemerná doba po absorpciu sa výrazne mení so zvyšujúcimi sa hodnotami parametrov a a Ω. To ako výrazne sa mení môžeme vidieť na nasledujúcom grafe č. 4, kde je zobrazená priemerná doba po absorpciu pre rôzne hodnoty parametra a a na x-ovej osi je Ω.



Obr. 4: Priemerná doba po absorpciu

Pre prehľadnejšie zobrazenie rýchleho rastu priemernej doby po absorpciu pri zmene parametrov a a Ω je na nasledujúcom grafe č. 5 zobrazená priemerná doba po absorpciu s logaritmickou škálou na y-vej osi.



Obr. 5: Priemerná doba po absorpciu na logaritmickej škále

V nasledujúcej tabuľke môžeme vidieť hodnoty priemernej doby po absorpciu pre parametre, ktoré v práci uvažujeme pri numerických riešeniach.

Ω	a	Priemerný čas po absorpciu
$\Omega = 10$	$a = 1$	34
$\Omega = 10$	$a = 10$	552
$\Omega = 30$	$a = 0.5$	564
$\Omega = 30$	$a = 3$	3 590 400

Tabuľka 1: Hodnoty priemerného času po absorpciu

3 Numerické riešenie procesov vzniku a zániku

V tejto kapitole sa budeme venovať aplikácií modelu, ktorý sme bližšie opísali v práci. Implementáciu procesov vzniku a zániku sme riešili v matematickom softvéri Matlab. Systém diferenciálnych rovníc (8), ktorý chceme numerický vyriešiť je nekonečný a na numerické riešenie tohto systému je potrebné zvoliť dostatočne veľký hraničný stav. Pravdepodobnosť tohto stavu musí byť takmer nulová. Hraničný stav volíme proporcionálne vzhľadom k stavu Ω, tak aby potenciál $\Phi(x)$, zobrazený na obrázku č. 3, bol v hraničnom stave dostatočne vysoký.

Pri procesoch vzniku a zániku predpokladáme, že proces sa môže dostať zo stavu n do stavov $n+1$, $n-1$ (t.j. do susedných stavov) alebo zostať v danom stave n. Pomocou týchto predpokladov dostávame, že intenzity prechodov sú medzi viacerými dvojicami nulové a matica intenzít (12), ktorú uvádzame v druhej kapitole je tak tri-diagonálna. V matematickom softvéri Matlab pre tri-diagonálnu maticu používame funkciu

```
spdiags(Bin,d,m,n)
```

Funkcia spdiags vytvorí riedku maticu rozmerov $m \times n$ tak, že vezme vektory dané Bin a umiestni ich pozdĺž uhlopriečok daných d. Konkrétne maticu intenzít pre proces vzniku a zániku získame pomocou príkazu:

```
n = [0 : (n_max-1)]';
b = ((a+1)*(n)./(a*(n/omega) + 1));
d = n;
Q = spdiags([b,-b-d ,d],-1:1,n_max,n_max);
```

V uvedenom zápise b predstavuje intenzitu vzniku (t.j. λ_n z rovnice (16)) a d predstavuje intenzitu zániku (t.j. μ_n z rovnice (17)). V príkaze je n_max hraničný stav, ktorého voľbu sme vyššie opísali.

Systém diferenciálnych rovníc (8), ktorý riešime je lineárny. Gradientom takéhoto systému je samotná matica intenzít $\mathbb{Q}$. Pri numerickom riešení je možné solveru pomocou, ktorého riešime systém dať dodatočné informácie a tak znížiť náročnosť samotného riešenia. Riešenie systému sme aplikovali pomocou numerického solveru ode15s. Pri riešení sme pridali dodatočnú informáciu s Jacobiánom, teda že Jacobián je matica $\mathbb{Q}$ a tým sme znížili náročnosť a zvýšili rýchlosť výpočtov. Riešenie v programe Matlab sme dostali

pomocou príkazu:

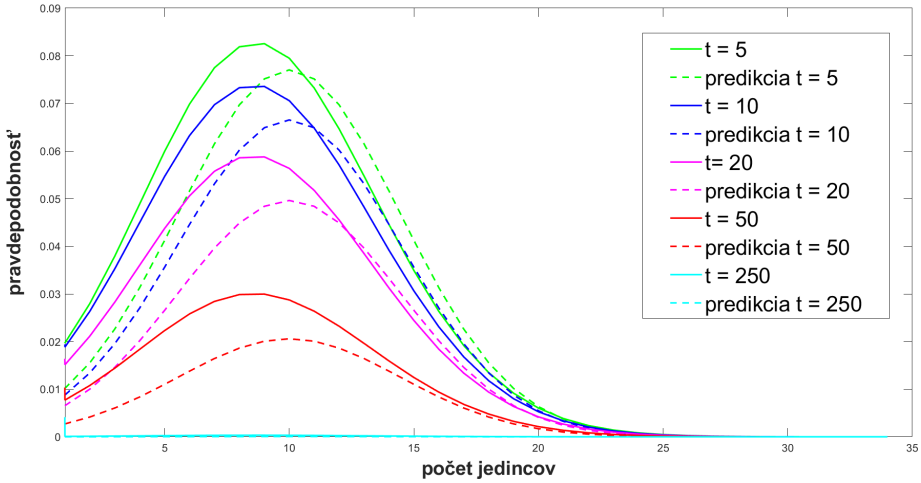
```
options=odeset('Jacobian',Q);
[t,p] = ode15s(@(t,p) Q*p,tspan,p0,options);
```

Pri riešení diferenciálnych rovníc sme volili počiatočnú podmienku v tvare Kronecker delta počiatočnej podmienky ako je uvedené v druhej kapitole v rovnici (9).

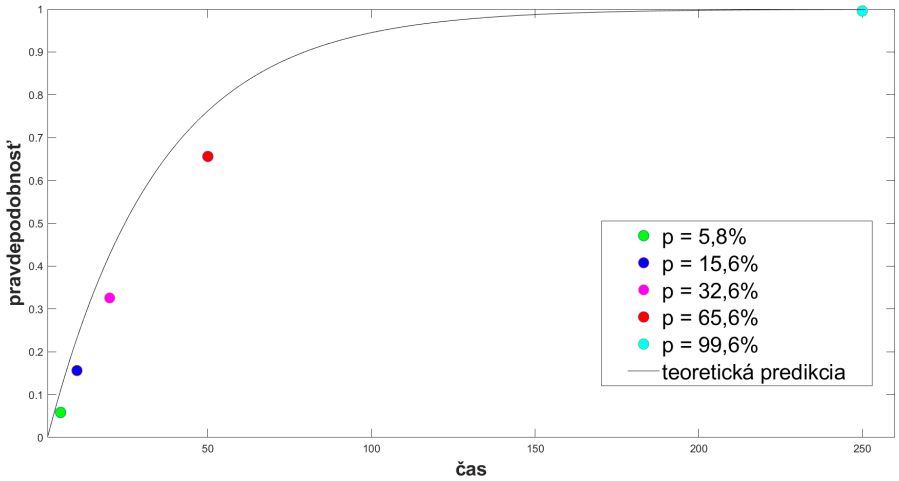
Numerické riešenie zahŕňa dve hodnoty pre parameter Ω a pre každú zo zvolených hodnôt pre Ω sú volené dve hodnoty pre parameter a. Za parameter Ω sme volili hodnoty $\Omega = 10$ a $\Omega = 30$. Hodnotu parametra a sme volili tak, aby bolo v jednotlivých riešeniach vidieť zmenu parametrov a zároveň, aby výpočet v programe Matlab nebol príliš zdĺhavý. Preto pri $\Omega = 10$ sme za a volili hodnoty $a = 1$ a $a = 10$ a pri $\Omega = 30$ sú to hodnoty $a = 0.5$ a $a = 3$. Ako sme spomínali vyššie voľbu týchto parametrov ovplyvnil aj priemerný čas po vyhynutie. Na obrázku č. 5 môžeme vidieť, že priemerný čas po vyhynutie veľmi rýchlo rastie so zvyšujúcim sa parametrom Ω. Vysoký priemerný čas po vyhynutie tak výrazne ovplyvňuje časovú náročnosť numerických riešení.

3.1 Simulácie v matematickom softvéri Matlab

Nasledujúce obrázky zobrazujú riešenia systému diferenciálnych rovníc. Každý zo zobrazených grafov sa skladá z časti (a) a časti (b). Grafy (a) zobrazujú pravdepodobnosť, že počet jedincov je rôzny od nuly (t.j. pravdepodobnosť nevyhynutia populácie $p_{n>0}(t)$) v rôznych časových okamihoch. Čiarkovanými čiarami sú v týchto grafoch zobrazené teoretické predikcie a plné čiary vykresľujú naše numerické riešenia. Grafy z časti (b) zobrazujú pravdepodobnosť, že počet jedincov v populácií je nulový (t.j. pravdepodobnosť vyhynutia $p_0(t)$) v rôznych časových okamihoch. V týchto grafoch je plnou čiernou čiarou vykreslená teoretická predikcia spomínanej pravdepodobnosti vyhynutia, farebné guličky zobrazujú pravdepodobnosť vyhynutia v jednotlivých časových okamihoch z nášho numerického riešenia.



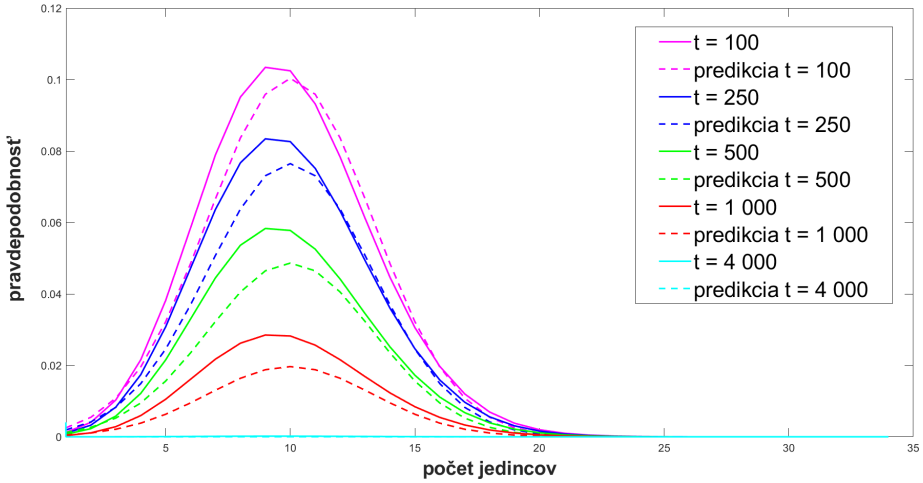
(a) Priebeh v rôznych časových okamihoch



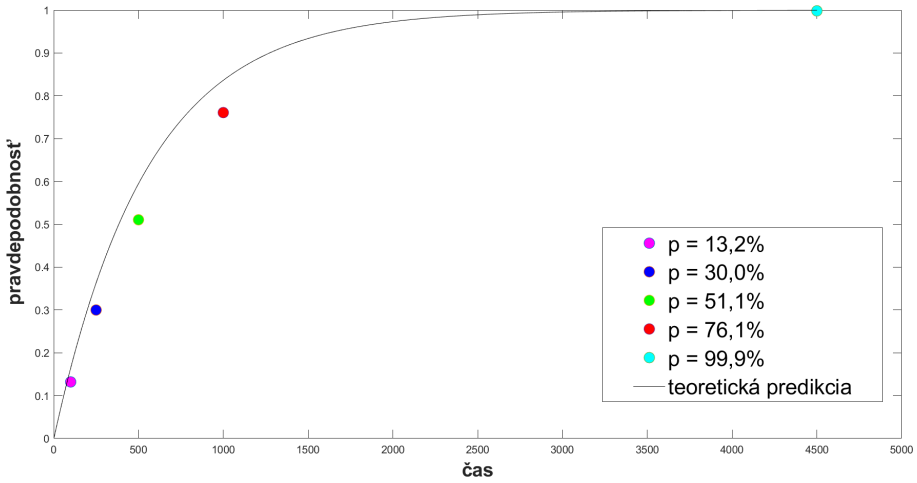
(b) Pravdepodobnosť vyhynutia

Obr. 6: Riešenie systému diferenciálnych rovníc pre hodnoty parametrov $\Omega = 10$, $a = 1$

Ako je uvedené v tabuľke (1) stredná doba po absorpciu pre hodnoty $\Omega = 10,\ a = 1$ je 34. Riešenie pre tieto hodnoty parametrov sme vykresľovali na časovej škále $t \in [0, 250]$. Na obrázku č.6 v časti (a) vidíme, že numerické riešenia v prvých štyroch zobrazených časových okamihoch nie sú úplne totožné s teoretickou predikciou. S časom $t \to \infty$ vidíme, že sa riešenie z Matlabu približuje teoretickej predikcií . Obrázok č.6 časť (b) zobrazuje pravdepodobnosť vyhynutia a s časom $t \to \infty$ je táto pravdepodobnosť takmer rovná jednej, konkrétne pri našom zobrazenom časovom okamihu je $p_0(t) = 99,6\%$.



(a) Priebeh v rôznych časových okamihoch



(b) Pravdepodobnosť vyhynutia

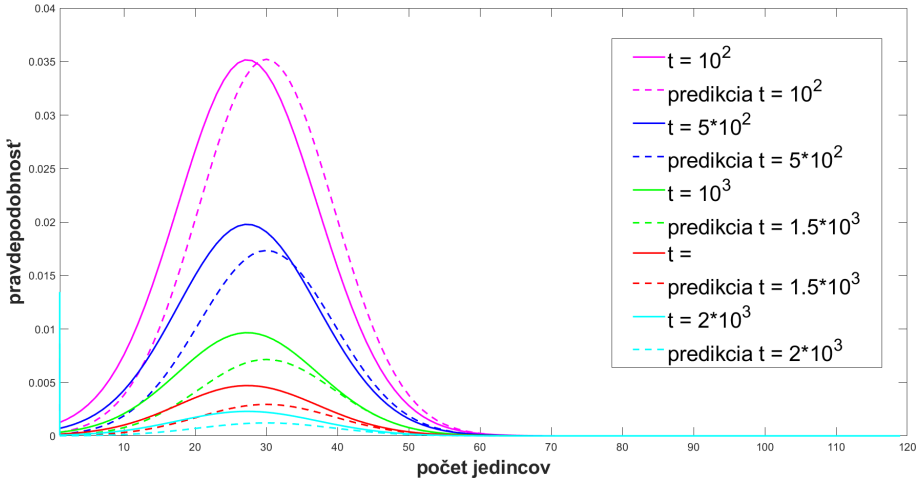
Obr. 7: Riešenie systému diferenciálnych rovníc pre hodnoty parametrov $\Omega = 10$, $a = 10$

Z tabuľky (1) vieme, že stredná doba po absorpciu pre $\Omega = 10, a = 10$ je 552. Riešenia systému s takýmito parametrami sme zobrazovali na časovej škále $t \in [0, 4000]$. Na obrázku č.7 v časti (a) vidíme, že numerické riešenia v prvých štyroch zobrazených časových okamihoch sú bližšie teoretickým predikciám ako na obrázku č.6, podobne ako na obrázku č.6 aj na obrázku č.7 v poslednom zobrazenom časovom okamihu je naše numerické riešenie takmer totožné s teoretickou predikciou. V časti (b) je zobrazená pravdepodobnosť vyhynutia a s časom $t \to \infty$ pei daných parametroch je $p_0(t) = 99,9\%$.

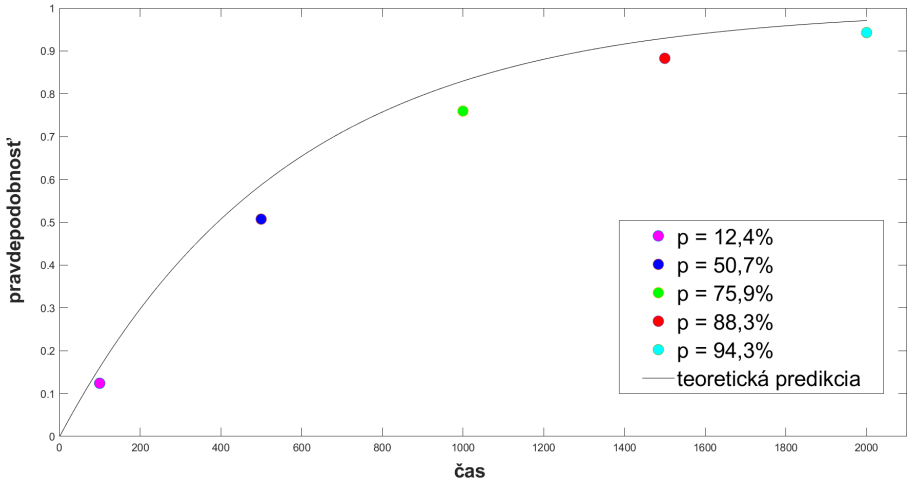
Numerické riešenia zobrazené na obrázkoch č.6 a č.7 sú pre hodnotu parametra $\Omega = 10$. Na základe týchto riešení môžeme tvrdiť, že pri rovnakej hodnote Ω, ale vyššej hodnote parametra a sú numerické riešenia totožnejšie s teoretickými predikciami. Pravdepodob-

nosť vyhynutia populácie je v oboch prípadoch takmer totožná s teoretickou predikciou, avšak pri vyššej hodnote parametra a je táto pravdepodobnosť presnejšia.

Nasledujúce dva grafy zachytávajú riešenia pre hodnotu parametra $\Omega = 30$ a dve rôzne hodnoty parametra a. Pre hodnoty $\Omega = 30,\ a = 0.5$ sme systém riešili na časovej škále $t \in [0, 2 * 10^3]$, keďže stredná doba po absorpciu pre tieto hodnoty parametrov uvedená v tabuľke (1) je 564.



(a) Priebeh v rôznych časových okamihoch

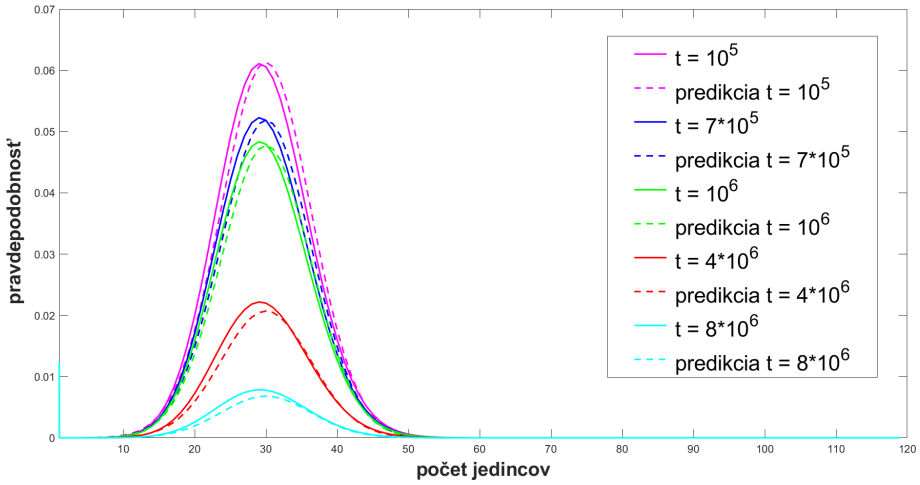


(b) Pravdepodobnosť vyhynutia

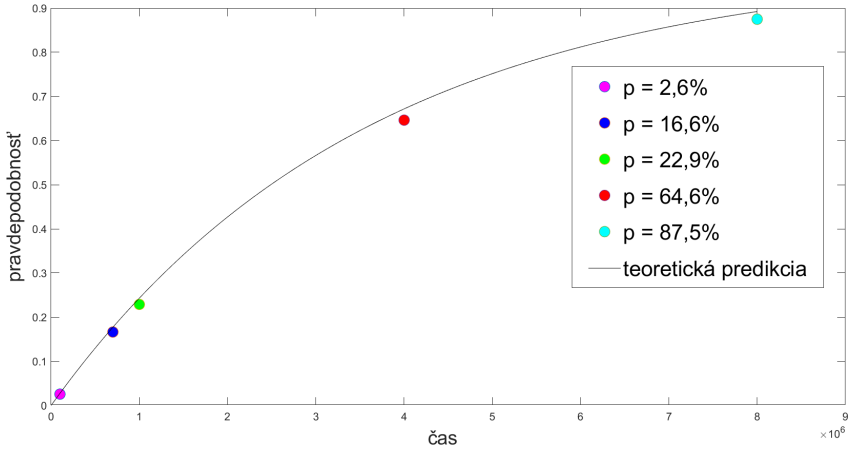
Obr. 8: Riešenie systému diferenciálnych rovníc pre hodnoty parametrov $\Omega = 30$, $a = 0.5$

Na obrázku č. 8 v časti (a) vidíme, že pravdepodobností priebehu v zobrazených časových okamihoch nie sú úplne totožné s teoretickou predikciou, avšak vyzerajú byť presnejšie ako v riešeniach pre $\Omega = 10$. V časti (b) je opäť zobrazená pravdepodobnosť vyhynutia spolu s teoreticku predikciou. Tieto pravdepodobnosti z numerického riešenia

sú vo všetkých zobrazených časových okamihoch menšie ako teoretická predikcia, ale aj v tomto prípade môžeme tvrdiť, že pre $t \to \infty$ je $p_0(t)$ z nášho riešenia takmer totožná s teoretickou predikciou.



(a) Priebeh v rôznych časových okamihoch



(b) Pravdepodobnosť vyhynutia

Obr. 9: Riešenie systému diferenciálnych rovníc pre hodnoty parametrov $\Omega = 30$, $a = 3$

Systém diferenciálnych rovníc sme pre hodnoty $\Omega = 30, a = 3$ riešili na časovej škále $t \in [0, 8 * 10^6]$, nakoľko aj priemerná doba po absorpciu uvedená v tabuľke (1) je výrazne vyššia ako pri zvyšných parametroch. Priemerná doba po absorpciu je v tomto prípade približne $3.5 * *10^6$. Na obrázku č.9 môžeme vidieť, že numerické riešenia pre zobrazované časové okamihy sú už takmer totožné s teoretickými predikciami. Podobne aj pravdepodobnosti vyhynutia pre niektoré časové okamihy ležia takmer presne na teoretickej predikcií zobrazujúcej priebeh pravdepodobnosti vyhynutia.

Zobrazené riešenia potvrdili čo sme očakávali a to, že numerické riešenie pri nižšej

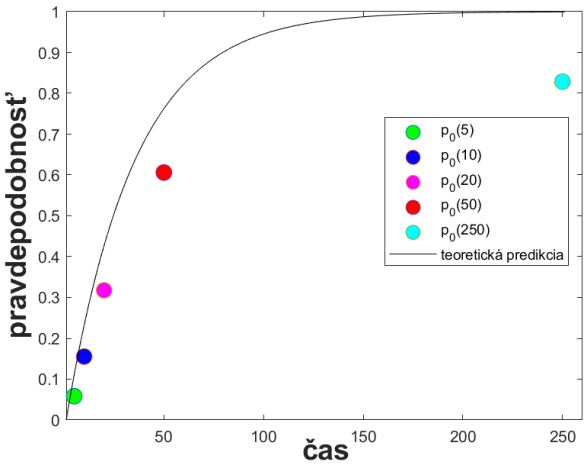
hodnote parametra Ω neboli až tak presné, ale so zvýšením tohto parametra sú numerické riešenia totožnejšie s teoretickými predikciami. Taktiež k presnejším riešeniam prispieva aj vyššia hodnota parametra a. Najpresnejšie riešenie systému diferenciálnych rovníc, ktoré v práci riešime je teda pre parametre $\Omega = 30, a = 3$ a je zobrazené na obrázku č.9.

3.2 Zmena maximálneho počtu jedincov pri numerických simuláciách

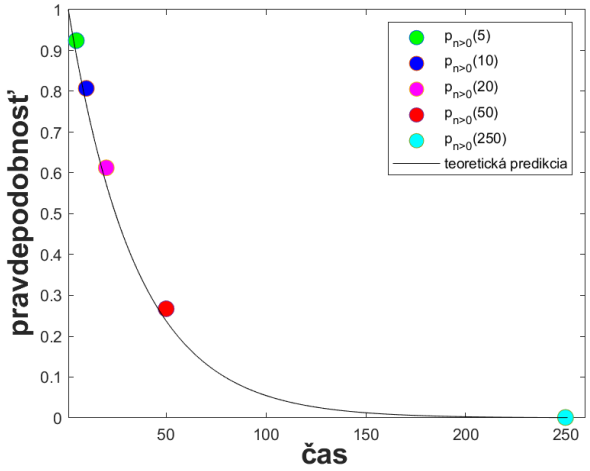
Numerické riešenie nekonečného systému diferenciálnych rovníc v Matlabe si vyžaduje maximálne ohraničenie. Vyššie v práci sme spomínali toto maximálne ohraničenie, hraničný stav, ktoré označujeme n_max a volili sme ho v závislosti od potenciálu $\Phi(x)$. Pri voľbe hodnoty hraničného stavu sme dbali na to, aby hodnota potenciálu zodpovedajúca danému ohraničeniu bola dostatočne vysoká.

V tejto časti práce sa venujeme tomu aký vplyv má zmena hraničného stavu na pravdepodobnosti vyhynutia (t.j. $p_0(t)$) a pravdepodobnosti nevyhynutia populácie (t.j. $p_{n>0}(t)$). Hodnotu ohraničenia n_max v tejto časti práce volíme najprv tak, aby potenciál $\Phi(x)$ zodpovedajúci hraničnému stavu bol väčší ako $\Phi(0)$, ale nie výrazne väčší. Druhú hodnotu n_max sme volili naopak, tak aby potenciál $\Phi(x)$ zodpovedajúci zvolenému hraničnému stavu bol menší ako $\Phi(0)$. Zmenu ohraničenia sme aplikovali pre už spomínané hodnoty parametra Ω, t.j. $\Omega = 10$ a $\Omega = 30$ a dve rôzne hodnoty parametra a, konkrétne $a = 1$ a $a = 3$. Pre parameter $\Omega = 10$ sme v tejto časti zobrazovali riešenia pre $n_max = 25$ a $n_max = 15$ a pre parameter $\Omega = 30$ sme zobrazovali riešenia pre $n_max = 75$ a $n_max = 45$.

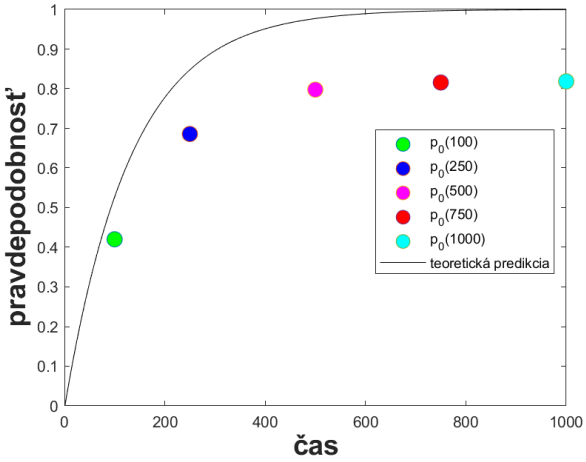
Nasledujúce grafy zobrazujú priebeh pravdepodobností v rôznych časových okamihoch. Na grafoch vľavo je zobrazená pravdepodobnosť vyhynutia populácie pre dané hodnoty parametrov a ohraničenia n_max, grafy vpravo naopak zobrazujú pravdepodobnosti nevyhynutia populácie (t.j. súčet pravdepodobnosti, že počet jedincov je väčší ako 0).



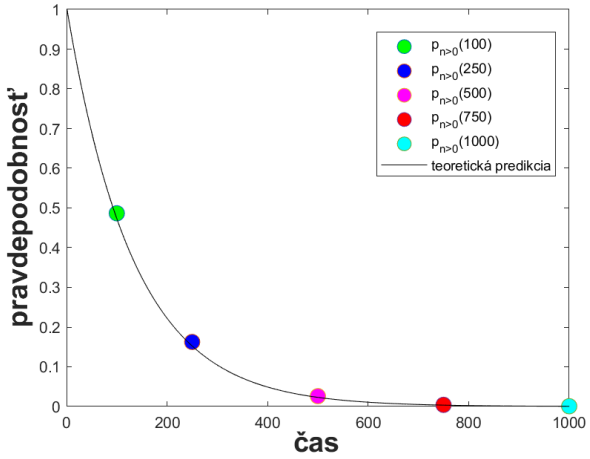
(a) Pravdepodobnosť vyhynutia pre $a = 1$



(b) Pravdepodobnosť nevyhynutia pre $a = 1$



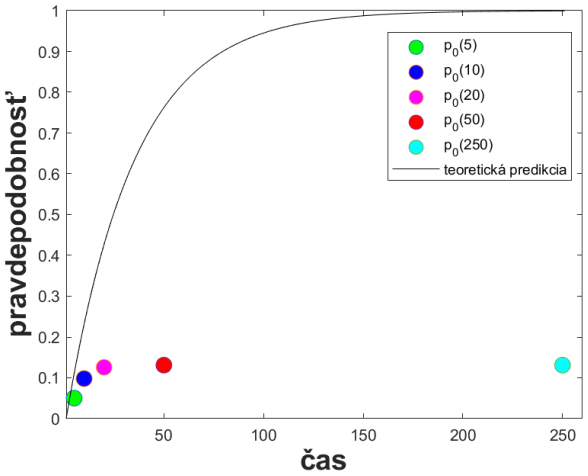
(c) Pravdepodobnosť vyhynutia pre $a = 3$



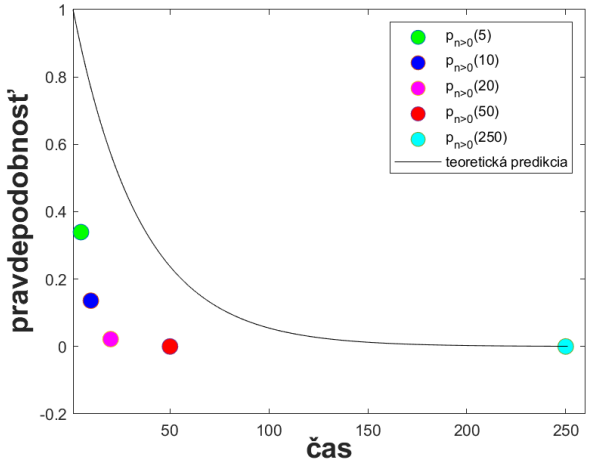
(d) Pravdepodobnosť nevyhynutia pre $a = 3$

Obr. 10: Priebeh pravdepodobnosti počtu jedincov v populácii pre parametre $\Omega = 10$ a maximálny počet jedincov $n_max = 25$

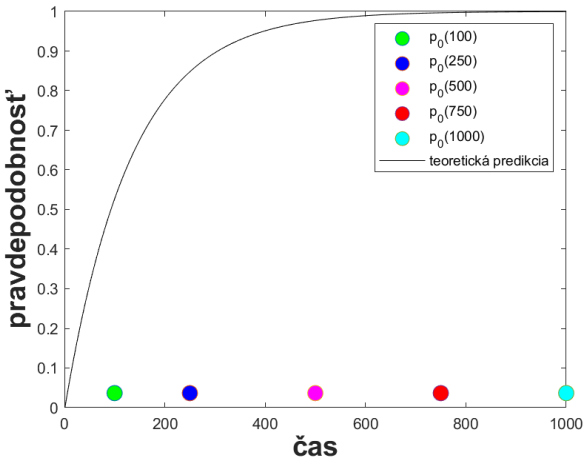
Na obrázku č. 10 je ohraničenie $n_max = 25$, pre takúto hodnotu n_max je potenciál $\Phi(x) > \Phi(0)$. Pravdepodobnoť vyhynutia populácie je pri voľbe parametra $a = 1$ v skorších časových okamihoch približne totožná s teoretickou predikciou, ale v neskorších časových okamihoch (t.j. s časom $t \longrightarrow \infty$) vidíme, že pravdepodobnosť $p_0(t)$ je menšia ako teoretická predikcia tejto pravdepodobnosti. Pri voľbe parametra $a = 3$ je pravdepodobnosť vyhynutia už aj v skorších časových okamihoch vyššia ako pri predchádzajúcej voľbe a, avšak stále nie je totožná s teoretickou predikciou a je o čosi menšia. Pre obidve zvolené hodnoty parametra a vidíme, že pravdepodobnosť nevyhynutia populácie je takmer totožná s teoretickou predikciou.



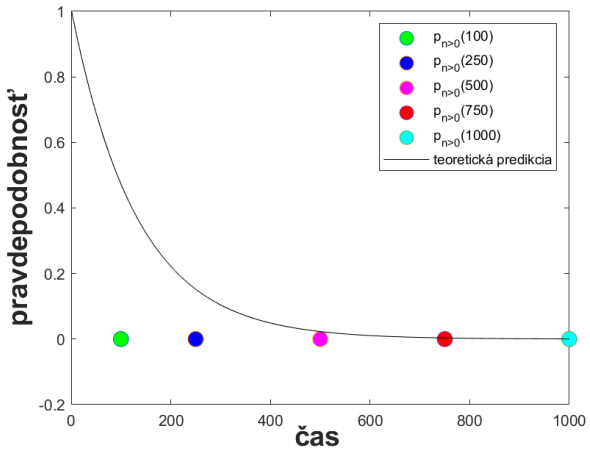
(a) Pravdepodobnosť vyhynutia pre $a = 1$



(b) Pravdepodobnosť nevyhynutia pre $a = 1$



(c) Pravdepodobnosť vyhynutia pre $a = 3$

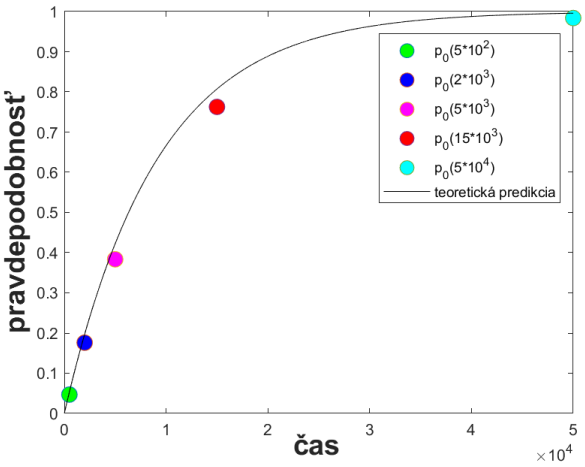


(d) Pravdepodobnosť nevyhynutia pre $a = 3$

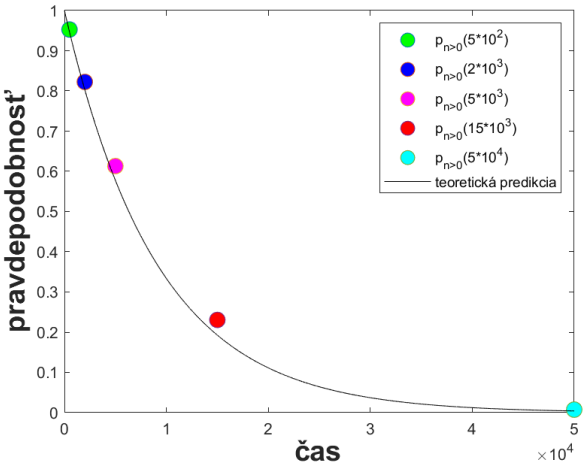
Obr. 11: Priebeh pravdepodobnosti počtu jedincov v populácii pre parametre $\Omega = 10$ a maximálny počet jedincov $n_max = 15$

Na obrázku č. 11 je ohraničenie $n_max = 15$, pre takúto hodnotu n_max je potenciál $\Phi(x) < \Phi(0)$. Toto ohraničenie je príliš malé, keďže začíname s počiatočnou podmienkou $p(0) = 10$ a maximálny možný počet jedincov je 15. Pravdepodobnosti vyhynutia populácie sú pre obe hodnoty parametra a veľmi nízke a vôbec sa nepribližujú s časom $t \longrightarrow \infty$ k teoretickej predikcií. Pravdepodobnosti nevyhynutia populácie pre parameter $a = 1$ v prvých časových okamihoch nie sú úplne totožné s teoretickou predikciou, ale s časom $t \longrightarrow \infty$ je táto pravdepodobnosť totožná s teoretickou predikciou, teda nulová. Pravdepodobnosti nevyhynutia populácie pre parameter $a = 3$ je vo všetkých zobrazených časových okamihoch takmer nulová a teda s časom $t \longrightarrow \infty$ sa taktiež rovná teoretickej predikcií. Na tomto obrázku si môžeme všimnúť, že pri voľbe veľmi malého hraničného

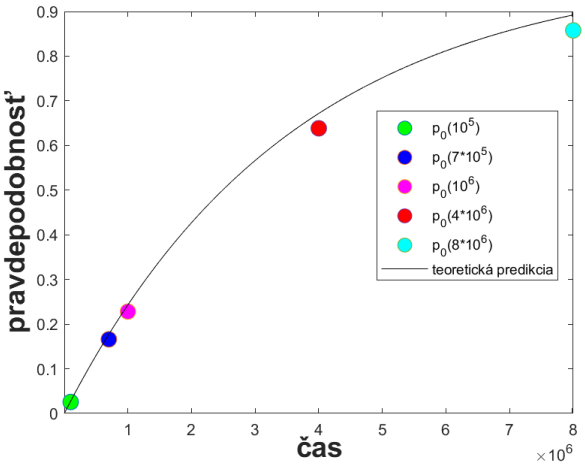
stavu dochádza k istému úniku pravdepodobností (t.j. $p_0(t)$ a $p_{n>0}(t)$ netvoria doplnkové pravdepodobností).



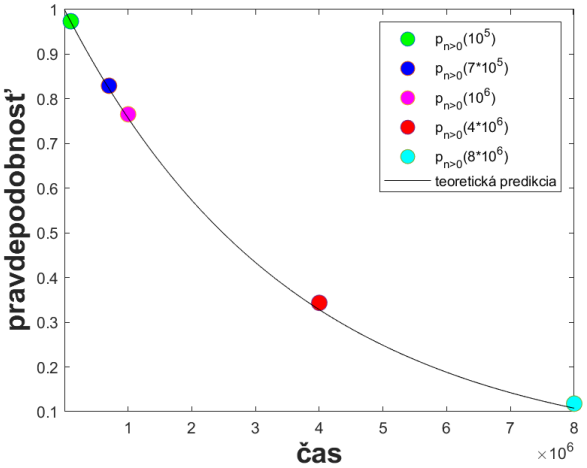
(a) Pravdepodobnosť vyhynutia pre $a = 1$



(b) Pravdepodobnosť nevyhynutia pre $a = 1$



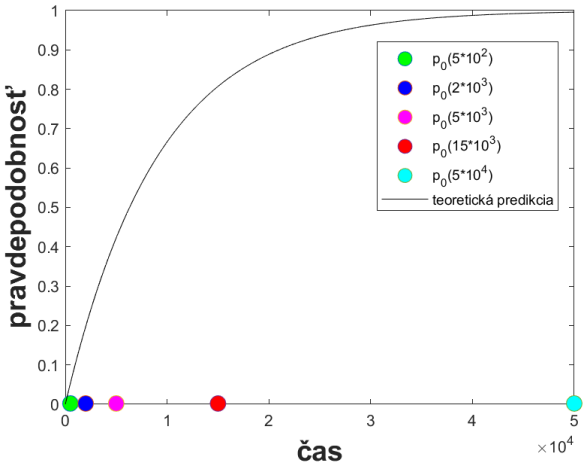
(c) Pravdepodobnosť vyhynutia pre $a = 3$



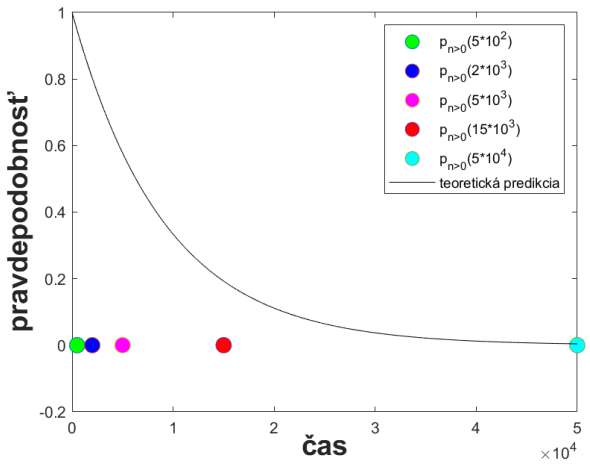
(d) Pravdepodobnosť nevyhynutia pre $a = 3$

Obr. 12: Priebeh pravdepodobnosti počtu jedincov v populácii pre parametre $\Omega = 30$ a maximálny počet jedincov $n_max = 75$

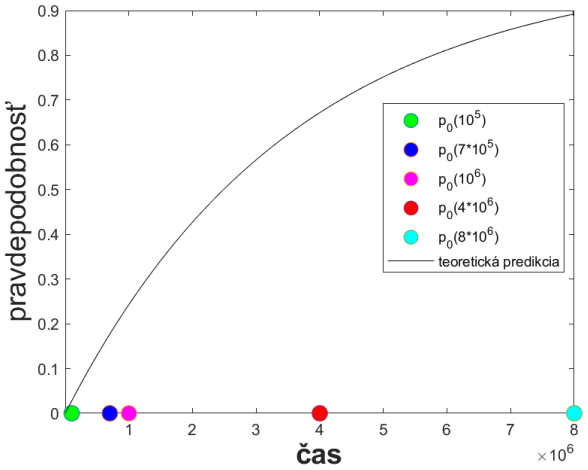
Na obrázku č. 12 je ohraničenie $n_max = 75$, pre takúto hodnotu n_max je potenciál $\Phi(x) > \Phi(0)$. Tento obrázok zobrazuje priebeh pravdepodobností pre $\Omega = 30$. Pravdepodobnosti vyhynutia populácie sú pre obe hodnoty parametra a takmer totožné s teoretickou predikciou, podobne aj pravdepodobnosti nevyhynutia populácie sú pre obe hodnoty parametra a takmer totožné s teoretickou predikciou.



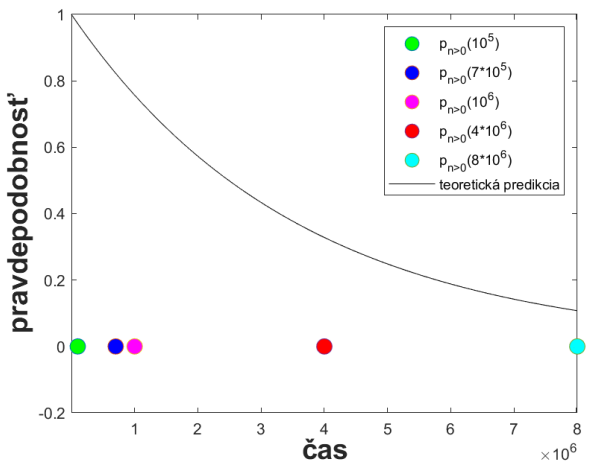
(a) Pravdepodobnosť vyhynutia pre $a = 1$



(b) Pravdepodobnosť nevyhynutia pre $a = 1$



(c) Pravdepodobnosť vyhynutia pre $a = 3$



(d) Pravdepodobnosť nevyhynutia pre $a = 3$

Obr. 13: Priebeh pravdepodobnosti počtu jedincov v populácii pre parametre $\Omega = 30$ a maximálny počet jedincov $n_max = 45$

Obrázok č. 13 zobrazuje ohraničenie $n_max = 45$, pre takúto hodnotu n_max je potenciál $\Phi(x) < \Phi(0)$. Toto ohraničenie je podobne ako pri $\Omega = 10$ *a* $n_max = 15$ veľmi malé. Tento krát začíname s počiatočnou podmienkou $p(0) = 30$ a maximálny možný počet jedincov je 45. V tomto prípade pre obe zvolené hodnoty parametra a sú pravdepodobnosti vyhynutia, ale i nevyhynutia populácie takmer nulové. Pravdepodobnosti vyhynutia populácia sa vôbec nepribližujú k teoretickej predikcií a pre pravdepodobnosti nevyhynutia vidíme, že pre čas $t \longrightarrow \infty$ sa numerické riešenia približujú k teoretickej predikcií tejto pravdepodobnosti. Pri takto zvolenom ohraničení, tak pozorujeme podobný priebeh ako na obrázku č. 11, dochádza tu k úbytku celkovej pravdepodobností v dôsledku, že pri počte jedincov odchádzame cez hranicu n_max.

Voľba hraničného stavu pri numerickom riešení nekonečného systému diferenciálnych rovníc zohráva dôležitú úlohu. K čo najpresnejšiemu riešeniu potrebujeme, aby pravdepodobnosť, že tento stav nastane bola takmer nulová, zároveň však kvôli optimalizácií časového riešenia nemôžeme voliť hraničný stav príliš vysoký. Z predchádzajúcich numerických simulácií si môžeme všimnúť, že pri voľbe veľmi malého hraničného stavu dochádza k úbytku pravdepodobností a teda hraničný stav je potrebné voliť proporcionálne k Ω.

Záver

V diplomovej práci sme sa zaoberali témou diferenciálnych rovníc bilancie pravdepodobností v procesoch vzniku a zániku. Cieľom práce bolo zostrojiť a numericky riešiť systém diferenciálnych rovníc pre konkrétny proces vzniku a zániku. Cieľ našej práce považujeme za splnený a výsledky numerických riešení sú zobrazené v poslednej kapitole tejto práce.

V prvej časti práce sme sa venovali teórií Markovových reťazcov v diskrétnom a taktiež aj v spojitom čase. Priblížili sme pojmy ako náhodný proces, Markovov reťazec a pravdepodobnosti prechodu. V tejto časti práce sme spomenuli aj maticu prechodu, ktorej prvky tvoria pravdepodobnosti prechodu. V definícii 1.6 sme uviedli Chapman-Kolmogorove diferenciálne rovnice, ktoré sme neskôr v práci využívali. Pri Markovovvých reťazcoch so spojitým časom sme si priblížili definíciu intenzít prechodu a uviedli sme systém diferenciálnych rovníc (8) spolu s počiatočnou podmienkou (9), ktorý neskôr v práci numericky riešime.

V druhej kapitole diplomovej práce sa zaoberáme procesom vzniku a zániku. Uviedli sme výrazy reprezentujúce pravdepodobnosť prechodu zo stavu n do stavu $n+1$ a pravdepodobnosť prechodu zo stavu n do stavu $n-1$. Ďalej v kapitole sme uviedli intenzity prechodov pre daný proces. Ukázali sme ako vyzerá matica intenzít prechodov (12) a pre lepšie znázornenie sme po zložkách rozpísali systém diferenciálnych rovníc s danou maticou intenzít, ktorý v práci riešime. V ďalšej časti sme porovnali stochastický a deterministický model. Pomocou Hillovej funkcie sme odvodili diferenciálnu rovnicu pre model vzniku a zániku. Danú diferenciálnu rovnicu (15) sme numericky vyriešili per rôzne hodnoty počiatočnej podmienky a rôzne hodnoty parametra a. Pomocou škálovania sme prešli z deterministickej rýchlosti na stochastickú a tak sme z diferenciálnej rovnice pre model vzniku dostali vzťahy pre intenzitu vzniku a intenzitu zániku. Tieto vzťahy využívame aj pri numerických riešeniach vyskytujúcich sa v ďalších častiach práce. V procesoch vzniku a zániku dochádza k absorpcií, teda vyhynutiu populácie. Pomocou WKB aproximácie sme vyjadrili pravdepodobnosť vyhynutia a z kvázi-stacionárneho rozdelenia sme v (26) odvodili vzťah pre potenciál, ktorý vystupuje vo vzťahu pre strednú dobu po absorpciu v rovnici (33). Potenciál sme vykreslili pre rôzne hodnoty parametrov a, čo môžeme vidieť na obrázku č. 3. V tabuľke č. 1 je znázornené ako výrazne sa mení stredná doba po

absorpciu so zvyšujúcimi sa hodnotami parametrov Ω a a.

Tretia kapitola sa venuje numerickým riešeniam v matematickom softvéri Matlab. Prvá časť tejto kapitoly je zameraná na opis postupu numerických riešení a sú v nej taktiež zobrazené simulácie riešení systému diferenciálnych rovníc pre rôzne hodnoty parametrov. Pre každú zvolenú dvojicu možných parametrov sú na rôznej časovej škále vykreslené priebehy vývoja pravdepodobnosti a na ďalšom grafe je zobrazená pravdepodobnosť vyhynutia populácie pri danej voľbe parametrov. Druhá časť tejto kapitoly zobrazuje taktiež riešenia systému diferenciálnych rovníc pre rôzne hodnoty Ω a a, ale v tejto časti sme sledovali hlavne aký vplyv na riešenie má zmena hraničného stavu. Pri prvých simuláciách sme hodnotu hraničného stavu volili proporcionálne k Ω, tak aby potenciál $\Phi(x)$ v danom hraničnom stave bol dostatočne väčší ako $\Phi(0)$. Pri riešeniach kde sme sledovali vplyv zmeny hraničného stavu sme najprv hraničný stav volili tak, aby potenciál v zvolenom hraničnom stave bol väčší ako $\Phi(0)$, ale nie výrazne. Poslednú voľbu spomínaného hraničného stavu sme zvolili tak, aby potenciál v tomto stave bol menší ako $\Phi(0)$.

Zoznam použitej literatúry

[1] Assaf, M., Meerson, B. *WKB theory of large deviations in stochastic populations* , dostupné na internete (20.02.2021): https://arxiv.org/pdf/1612.01470.pdf

[2] Barrio, M. a kol., *Oscillatory regulation of Hes1: Discrete Stochastic Delay Modelling and Simulation* , dostupné na internete (17.12.2020): https://journals.plos.org/ploscompbiol/article?id=10.1371/journal.pcbi.0020117#s5

[3] Doering, R. Ch., Sargsyan K. V. *Extinction times for birth-death processes: exact results,continuum asymptotics, and the failure of the Fokker-Planck approximation*, dostupné na internete (12.02.2021): https://www.academia.edu/16352106/Mean_Extinction_Time_for_Birth_Death_Processes_and_Failure_of_the_Fokker_Planck_Approximation

[4] Gunnvald R.: *Estimating Probability of Default Using Rating Migrations in Discrete and Continuous Time* , dostupné na internete (10.01.2021): https://www.math.kth.se/matstat/seminarier/reports/M-exjobb14/140908.pdf

[5] Hinch, R., Chapman, S. J.: *Exponentially Slow Transitions on a Markov Chain: The Frequency of Calcium Sparks* , dostupné na internete (12.03.2021): https://ora.ox.ac.uk/objects/uuid:c8929f94-b1dd-45e0-a7eb-a08c74bbfa10

[6] Janková, K., Kilianová, S., Brunovský, P., Bokes, P.: *Markovove raťazce a ich aplikácie*, Vydavateľstvo Epos, Ružomberok, 2014

[7] Kalas, J.: *Markovove reťazce*, vysokoškolské skriptá, Univerzita Komenského, Bratislava, 2007

[8] Kampen, N.: *Stochastic processes in physics and chemistry*, North Holland 1993

[9] Kiseľák, J.: *Diferenciálne rovnice*, učebné texty, PF UPJŠ Košice, 2019, dostupné na internete (15.04.2020): https://umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN3b/ODR.pdf

[10] Marais, Ch. A., *Markov Processes in Disease Modelling-Estimation and Implementation*, dostupné na internete (30.10.2020): https://repository.up.ac.za/bitstream/handle/2263/27956/dissertation.pdf;sequence=1

[11] Mitrofanova A.: *Continuous times Markov chains, Poisson Process, Birth and Death process.*, department of Computer Science (2007), 2, dostupné na internete (26.10.2020): https://cs.nyu.edu/mishra/COURSES/09.HPGP/scribe3

[12] Peško, Š.: *Náhodné procesy, Markovove reťazce, teória hromadnej obsluhy.* učebné texty, FRI Žilinská Univerzita Žilina, 2013, dostupné na internete (13.10.2020): http://www.fsi.uniza.sk/ktvi/leitner/2_predmety/SMOA/03_MarkovoveRetazce/MRprednaska.pdf

[13] Regulyová, K.: *Simulácia dynamiky náhodnych procesov rastu a úbytku*, Diplomová práca, Univerzita Komenského, Bratislava, 2019

[14] Santillán M.: *On the Use of the Hill Functions in Mathematical Models of Gene Regulatory Networks*, (2008), dostupné na internete (12.11.2020): https://www.mmnp-journal.org/articles/mmnp/pdf/2008/02/mmnp2008204.pdf

[15] Skřivánková V., Hančová M.: *Náhodné procesy a ich aplikácie*, učebné texty, Prirodovedecká fakulta UPJŠ Košice, 2018, dostupné na internete (15.10.2020): https://unibook.upjs.sk/img/cms/2018/pf/nahodne-procesy-web.pdf

[16] Wilkinson, D. J., *Stochastic Modelling for Systems Biology*, Vydavateľstvo CRC Press, London, 2012